Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik

von

Erich Ch. Wittmann, Dortmund

Kurzfassung: In diesem Beitrag werden zunächst substanzielle Lernumgebungen vorgestellt, die den Begriff „operativer Beweis“ und seine curriculare Einbettung exemplarisch beleuchten. Darauf aufbauend wird dieser Begriff im zweiten Abschnitt formuliert und im letzten Abschnitt theoretisch fundiert.

Abstract: First some substantial learning environments are presented which are typical for the notion „operative proof“ and its curricular embedding. In the second section this notion is formulated, and in the last section conceptually underpinned.

In der Mathematikdidaktik ist das Thema Beweisen in den letzten Jahrzehnten auf nationaler und internationaler Ebene intensiv bearbeitet worden, wobei drei Schwerpunkte erkennbar sind: die Untersuchung philosophischer und wissenschaftsgeschichtlicher Aspekte des Beweisens, die Herausarbeitung verschiedener Funktionen des Beweisens und die empirische Erforschung von Lernprozessen zum Beweisen. Zu diesen Schwerpunkten gibt es eine umfangreiche Literatur (Hanna et al. 2010, Hanna et al. 2012). Im vorliegenden Beitrag wird an eine davon weitgehend unabhängige Forschungslinie angeknüpft, die sich im Kontext der deutschsprachigen Mathematikdidaktik bei der Ausarbeitung des operativen und des genetischen Prinzips entwickelt hat. Diese Linie zeichnet sich dadurch aus, dass sie mit der Curriculumentwicklung verbunden ist, und war daher für das Entwicklungsforschungsprojekt Mathe 2000+ besonders interessant. Dieses Projekt beruht nämlich auf den Grundannahmen,

- dass ein Lernen ohne Brüche nur möglich ist, wenn der Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zum Abitur als zusammenhängendes Ganzes gesehen wird und wenn er stufenübergreifend auf einem authentischen Bild von der Mathematik als „Wissenschaft der Muster“ fußt (Wittmann 2006);
- dass Mathematikdidaktik ihre Aufgabe für die Entwicklung des Mathematikunterrichts und für Lehrerbildung am besten erfüllen kann, wenn sie als *design science* (Simon 1970) verstanden und betrieben wird, d. h., wenn das Design, die empirische Erforschung und die Implementierung substanzieller Lernumgebungen, den „artifacts“ dieser *design science*, in den Mittelpunkt der Arbeit gestellt werden (Wittmann 1998, 2002).

Der ersten Grundannahme entsprechend wird im Projekt angestrebt, fundamentale Ideen der Mathematik früh einzuführen und *genetisch* weiterzuentwickeln. Beweisen ist eine solche fundamentale Idee. Es war eine besondere Herausforderung, diese Idee von den unteren Stufen an nicht isoliert, sondern *im Kontext des normalen Unterrichts* zur Geltung zu bringen, d.h. innerhalb der zentralen Inhalte, mit den standardmäßig zur Verfügung stehenden Darstellungsmitteln und vor allem in Verbindung mit dem Üben, das in den Forschungen zum Beweisen bisher weitgehend ausgeklammert wurde, obwohl es für nachhaltiges Lernen von entscheidender Bedeutung ist. Im Laufe der jahrzehntelangen Entwicklungsforschung im Projekt Mathe 2000+ hat bei den Überlegungen zum Beweisen der Begriff „operativer Beweis" Gestalt angenommen, um den es in diesem Beitrag geht. Orientierungspunkte dafür waren besonders die Arbeiten von Werner Walsch und Heinrich Winter zum Beweisen, die ebenfalls curricular ausgerichtet sind (s. z. B. Walsch 1972, Winter 1989).

Die Struktur des vorliegenden Beitrags spiegelt die zweite Grundannahme von Mathe 2000+ wider: Im ersten Abschnitt werden einige typische Lernumgebungen beschrieben, in die „operative Beweise" eingebettet sind. Diese Beispiele dienen nicht zur Illustration, sondern vor allem auch als Verständnisgrundlage für den zweiten Abschnitt, in dem versucht wird, den Begriff des „operativen Beweises" zu charakterisieren, sowie für den dritten Abschnitt, in dem theoretische Grundlagen dieses Begriffs expliziert werden.

Dass im Beitrag mehrfach auf das Projekt Mathe 2000+ Bezug genommen wird, erklärt sich schlicht und einfach daraus, dass der Forschungskontext dieses Projekts für die Entwicklung des Begriffs „operativer Beweis" konstitutiv war. Der Begriff selbst ist davon natürlich unabhängig. Es sollte aber in diesem Beitrag deutlich werden, dass die praktische Umsetzung des Begriffs „operativer Beweis" eine curriculare Rahmung benötigt, die auf ähnlichen Prinzipien beruht, wie sie Mathe 2000+ zugrunde liegen.

1 Einige Lernumgebungen mit eingebetteten operativen Beweisen

Die folgenden fünf Lernumgebungen erstrecken sich auf die Klassen 1–6, in denen sich der Begriff „operativer Beweis" als besonders tragfähig erweist und für die er daher besonders wichtig ist.

1.1 Gerade und ungerade Zahlen

Plättchen sind im Bereich der Grundschule ein fundamentales Darstellungsmittel. Gewöhnlich werden sie als Arbeitsmittel aufgefasst, das von Didaktikern speziell für unterrichtliche Zwecke entwickelt wurde. Tatsächlich jedoch ist dieses Material von seinem Ursprung her nicht didaktischer, sondern epistemologischer Natur: Die griechische Mathematik durchlief in den Zeiten der Pythagoreer eine Phase, die als ψηφοι-Arithmetik (ψηφοι, gr. Steinchen) bezeichnet wird und als Wiege der Zahlentheorie und der Mathematik als beweisender Wissenschaft gilt (Becker 1954, 34–41, Damerow & Lefèvre 1981). Pythagoras und seine Schüler haben beim Legen von Steinchen allgemeingültige zahlentheoretische Muster entdeckt und bewiesen. Das Thema „figurierte Zahlen“ wurde über die Jahrhunderte weiter ausgearbeitet und stellt auch heute noch ein beliebtes Gebiet der Rekreationsmathematik dar. Eine umfassende Darstellung findet man Conway & Guy (1997).

Im Mathe 2000+ Curriculum werden gerade und ungerade Zahlen in Klasse 1 mithilfe von Plättchen- und Punktmustern eingeführt, die auf Karton gezeichnet und ausgeschnitten werden, sodass die Kinder damit operieren und sie insbesondere zu Summen zusammensetzen können (Abb. 1).

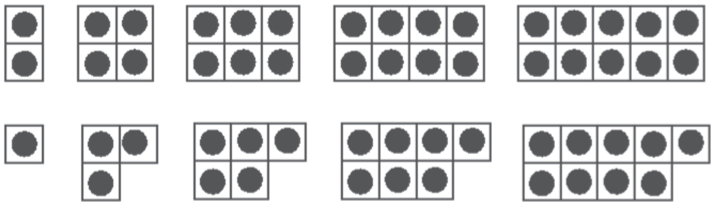

Abbildung 1

Nach ersten Übungen, in denen die Kinder mit dem Material vertraut gemacht werden, folgt die Aufforderung an sie, Plusaufgaben mit einer geraden Zahl als Ergebnis zu finden. Das ist eine erste Anregung zu einer bewussteren Wahrnehmung der Struktur gerade/ungerade. Als Nächstes werden Päckchen mit den Fragen vorgegeben „Was fällt dir auf? Kannst du es erklären?“ (Abb. 2).

4 + 6 =	5 + 1 =	2 + 1 =	1 + 8 =
6 + 8 =	7 + 3 =	4 + 3 =	3 + 6 =
8 + 4 =	9 + 5 =	6 + 5 =	5 + 4 =
10 + 2 =	5 + 7 =	8 + 7 =	7 + 2 =
12 + 8 =	9 + 9 =	10 + 9 =	9 + 0 =

Abbildung 2

Den Lehrerinnen wird nahegelegt, die Kinder auf dieser frühen Stufe nicht zu drängen, sondern ihren spontanen Erklärungsversuchen zuzuhören und sich auf solche Anregungen zu beschränken, die in der „Zone der nächsten Entwicklung“ liegen.

In den Klassen 2 und 3 wird das Thema „Gerade und ungerade Zahlen“ wieder aufgenommen. Dabei müssen sich die Kinder bewusst machen, dass z. B. die Zahl 30 gerade ist, obwohl die Zahl 3 ungerade ist. Erneut werden Päckchen analog zu Abbildung 2 mit den gleichen Fragen, aber mit größeren Zahlen gestellt. Auch hier sollen die Lehrerinnen ähnlich zurückhaltend agieren wie in Klasse 1 und keinen „Beweis“ forcieren.

In Klasse 4 können die Kinder dann genügend Erfahrungen mit geraden und ungeraden Zahlen haben, und daher ist der Zeitpunkt gekommen, um folgende explizite Beweisaufgabe zu stellen:

Gerade Zahlen werden durch Doppelreihen von Plättchen dargestellt, ungerade Zahlen durch Doppelreihen und ein einzelnes Plättchen.

Benutze diese Darstellungen, um zu beweisen, dass

a) die Summe zweier gerader Zahlen immer gerade,

b) die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade,

c) die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist.

Die Kinder können jetzt in der Lage sein, ggf. mit Hilfe der Lehrerin, zu beschreiben, welche Wirkung das Zusammensetzen von Doppelreihen ohne bzw. mit einem einzelnen Plättchen auf die Parität des Ergebnisses hat, und sich klar zu machen, dass dabei die Länge der Doppelreihen keine Rolle spielt.

Der formale Beweis dieses zahlentheoretischen Satzes, der in der Mittelstufe gegeben wird, beruht auf den gleichen Operationen. Er wird nur in einer anderen Sprache, der Sprache der Algebra, formuliert.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass mit Plättchen auch bei anderen Themen der Grundschule operative Beweise geführt werden können, die sich später algebraisch formulieren lassen. Die „Plättchen-Algebra“ ist also eine exzellente Vorbereitung der Algebra (Wittmann 1997, Berlin & Hefendehl-Hebeker 2011, Steinweg 2013).

1.2 Multiplikative Rechenketten

In Klasse 2 wird die Multiplikation auf rechteckige Punktfelder gestützt (Freudenthal 1983, 109–110, Winter 1984, 13). Diese Darstellungsform hat den großen Vorteil, dass sich alle Rechengesetze damit operativ begründen lassen.

Eine der vielen Möglichkeiten für mathematische Überlegungen in Verbindung mit Rechenübungen bieten Rechenketten (Abb. 3, s. dazu Engbert 2012). Nach dem Berechnen der Ergebnisse stechen Muster zwischen den Start- und Zielzahlen ins Auge. Bei der Kette a) ist die Zielzahl immer um 1 größer als die Startzahl, bei b) immer um 2 größer, bei c) immer um 1 kleiner.

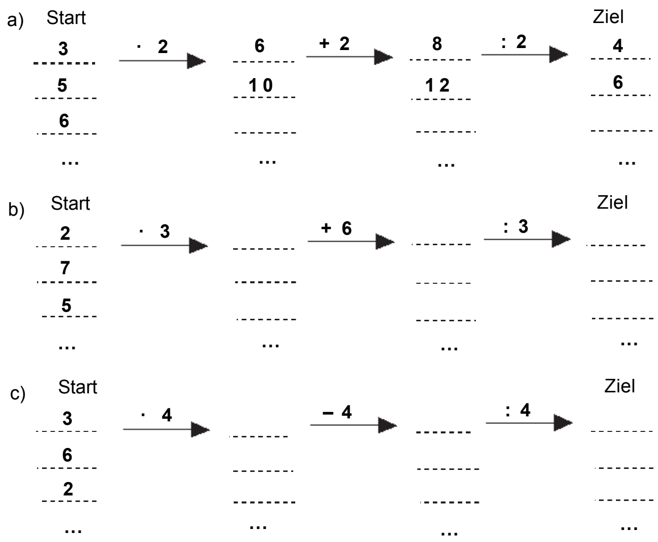

Abbildung 3

Mithilfe von Plättchen lassen sich diese Muster operativ begründen. Abbildung 4 ist folgendermaßen zu lesen: Wir starten mit 3 Plättchen (schwarz dargestellt in der oberen Reihe des ersten Feldes), verdoppeln, addieren 2 Plättchen (grau dargestellt), und dividieren durch 2. Wir erhalten 1 Plättchen (grau) mehr, als zu Beginn vorhanden war. Wenn wir mit 5 oder 6 Plättchen starten und die gleiche Folge von Operationen durchführen, erhalten wir am Schluss 6 bzw. 7 Plättchen.

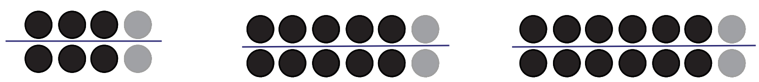

Abbildung 4

Die Wiederholung dieser Argumentation mit mehreren Startzahlen ist für den Lernprozess sehr wichtig. Dabei soll den Kindern erst deutlich werden, dass die Zunahme um 1 gegenüber der Startzahl nicht von der Startzahl abhängt.

Im Kontrast mit den Rechenketten b) und c) werden die begrifflichen Beziehungen noch deutlicher. Bei b) ist die Zielzahl immer um 2 größer als die Startzahl, bei c) um 1 kleiner. Den Höhepunkt der bei Engbert (2012) beschriebenen Lernumgebung bildet die Aufforderung an die Kinder, selbst Rechenketten dieses Typs zu konstruieren, in denen die Zielzahl gegenüber der Startzahl systematisch verändert ist.

In Klasse 3 werden analoge Rechenketten mit größeren Zahlen behandelt. Die Operationen · 2, + 2 und : 2 usw. werden dabei ersetzt durch · 20, + 20, : 20 usw. Die früheren Argumentationen werden an gedeuteten Punktmustern wiederholt, wobei die Kinder angeregt werden, mit nicht ausgerechneten Maltermen zu argumentieren (Abb. 5): „5 mal 20 plus 20 ist 6 mal 20. Umgekehrt: 6 mal 20, dividiert durch 20, ist 6.“

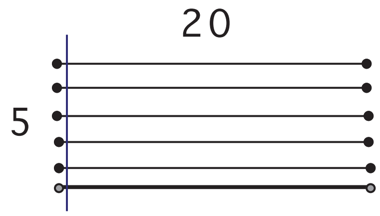

Abbildung 5

Auch diese Muster können in der Sprache der Algebra kurz formuliert werden. Wesentlich sind die Operationen, die man entweder am Material konkret ausführen oder aber symbolisch notieren kann, je nachdem auf welcher Stufe man sich befindet.

1.3 Schriftliche Addition

Die folgende Lernumgebung für die Klasse 3 startet als Rechenübung für die schriftliche Addition. Als Material werden neun Ziffernkarten für die Ziffern 1 bis 9 verwendet. Jede Karte steht also genau einmal zur Verfügung. Die Aufgabe lautet:

> *Bilde mit den Ziffernkarten drei dreistellige Zahlen und addiere sie. Finde Ergebnisse unter 1000.*

Die Beschränkung auf 1000 ist natürlich willkürlich, aber aus praktischen Gründen nützlich: Es gibt genau 26 Ergebnisse unter 1000, und diese Menge ist für Kinder des 3. Schuljahres noch gut zu überschauen.

In der ersten Phase rechnen die Kinder und erhalten Ergebnisse, darunter natürlich auch falsche. In der zweiten Phase werden die gefundenen Ergebnisse gesammelt, geordnet, verglichen. Dabei entdecken die Kinder Muster, identifizieren falsche Ergebnisse und füllen, ggf. mit Hilfe der Lehrerin, Lücken. Die vollständige Liste lautet: 774, 783, 792, 801, 810, 819, 828, 837, 846, 855, 864, 873, 882, 891, 900, 909, 918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981, 990, 999. Dies sind genau die Vielfachen von 9 im Intervall [774, 999]. Gemäß der Divisionsregel für 9 sind die Quersummen dieser Zahlen 9, 18 oder 27.

Der Standardbeweis für dieses Muster wird mit der Theorie der Restklassen mod 9 geführt und ist in Klasse 3 nicht zugänglich. Der folgende „operative Beweis“, der durch Winter (1985) angeregt ist, nutzt eine Darstellung, mit der die Kinder in Klasse 3 wohlvertraut sind: die Stellentafel. In der Sprache der Stellentafel hat die Quersumme einer Zahl eine sehr konkrete Bedeutung: Sie gibt die Zahl der Plättchen an, die benötigt werden, um die Zahl in der Stellentafel zu legen.

```
  257
  469
+ 183
  21
-----
  909
```

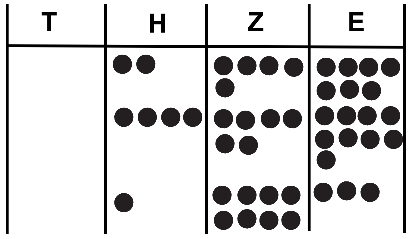

Abbildung 6

Abbildung 6 zeigt ein Beispiel für eine Additionsaufgabe mit den Ziffern 1 bis 9 und ihre Darstellung an der Stellentafel: Insgesamt werden $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ Plättchen benötigt, um die drei Zahlen zu legen. Um das Ergebnis zu bestimmen, müssen im ersten Schritt die Plättchen in jeder Spalte zusammengeschoben werden, in einem zweiten Schritt sind – bei den Einern beginnend – Überträge vorzunehmen. Bei jedem Übertrag werden 10 Plättchen einer Spalte entfernt, und dafür wird ein Plättchen in die nächsthöhere Spalte gelegt. Bei jedem Übertrag werden also 9 Plättchen entfernt. Bei *jedem* Beispiel dieser Lernumgebung werden 45 Plättchen benötigt, um die Summanden zu legen. Da 45 ein Vielfaches von 9 ist, können die Quersummen der Ergebnisse nur Vielfache von 9 sein. Andere Zahlen als die aufgelisteten können daher nicht als Ergebnisse auftreten. An der Anzahl der Überträge kann man die Quersumme eines Ergebnisses ablesen. In Abbildung 6 gibt es drei Überträge ($1 + 2 = 3$). Daher ist die Quersumme des Ergebnisses $45 - 3 \cdot 9 = 18$.

Dieser operative Beweis ist unabhängig von der speziellen Rahmung in dieser Lernumgebung: Für jede beliebige Additionsaufgabe mit beliebigen Ziffern unterscheidet sich die Summe der Quersummen der Summanden von der Quersumme des Ergebnisses um ein Vielfaches von 9. Schon bei Adam Ries wird auf diese Neunerprobe der Addition hingewiesen.

1.4 Ägyptische Brüche

Diese Lernumgebung startet ebenfalls als Rechenübung, nämlich als Übung der Subtraktion von Brüchen, und gipfelt in einem operativen Beweis.

Es ist wohlbekannt, dass in der frühen ägyptischen Mathematik Brüche < 1 als Summe verschiedener Stammbrüche dargestellt wurden. Für praktische Rechnungen diente eine Tafel mit Darstellungen von Brüchen der Form $\frac{2}{2n+1}$. Der Standardbeweis, dass jeder Bruch < 1 als Summe verschiedener Stammbrüche geschrieben werden kann, lautet wie folgt:

Sei $\frac{n}{m}$ ein gekürzter Bruch, $n < m$. Wir wählen den größten Stammbruch $\frac{1}{k}$, der kleiner als $\frac{n}{m}$ ist, und subtrahieren ihn von dem gegebenen Bruch: $\frac{n}{m} - \frac{1}{k} = \frac{nk-m}{mk}$. Der Zähler $nk - m$ muss kleiner als n sein, sonst wäre $\frac{1}{k}$ nicht der größte Stammbruch < $\frac{n}{m}$. Folglich ist $\frac{nk-m}{mk}$ ein Bruch mit einem Zähler, der kleiner als n ist, und dieser Bruch ist wegen $n < m$ kleiner als $\frac{1}{k}$.

Dieses Verfahren kann wiederholt werden. Schritt für Schritt werden dabei Stammbrüche abgespalten, und die Zähler der Reste werden immer kleiner. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten gelangt man zu einem Rest, dessen Zähler 1 ist und der daher selbst ein Stammbruch ist.

Es gibt noch einen anderen Beweis für die Stammbruchdarstellung, bei dem fortlaufend die Beziehung $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(n+1)}$ benutzt wird. Es ist allerdings nicht einfach nachzuweisen, dass dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten endet (Fung 2005).

Beide Beweise übersteigen das Niveau der Sekundarstufe I, und es stellt sich daher die Aufgabe, einen für diese Stufe angemessenen Beweis zu finden. Die folgende Lernumgebung bietet hierfür eine Lösung an.

Zu Beginn des Unterrichts werden einige Informationen über die historischen Wurzeln gegeben. Im Anschluss daran wird die Aufgabe gestellt, die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots$ als Summen verschiedener Stammbrüche zu schreiben. Diese Aufgabe, die reichliche Übung zur Subtraktion von Brüchen bietet, führt zu folgenden Stammbruchdarstellungen: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$, …

Zwei Muster treten dabei klar zu Tage: Wenn man den Nachfolger des ungeraden Nenners auf der Zahlengeraden halbiert, erhält man den Nenner des ersten Stammbruchs der Zerlegung. Der Nenner des zweiten Stammbruchs ist das Produkt der Nenner des Ausgangsbruchs und des ersten Stammbruchs. Es ist zweitrangig, ob die Schüler diese Muster alleine oder aufgrund von Impulsen des Lehrers finden.

Der Beweis wird einfach, wenn folgende operative Beziehung benutzt wird: *Bei Vergrößerung des Nenners wird ein Bruch kleiner.*

Wenn nämlich ein beliebiger Bruch der Form $\frac{2}{2n+1}$ gegeben ist, z. B. $\frac{2}{31}$, braucht man den Nenner nur um 1 zu erhöhen und erhält einen kleineren Bruch mit einem geraden Nenner, im Beispiel $\frac{2}{32}$, und dieser Bruch kann zu einem Stammbruch gekürzt werden, im Beispiel $\frac{1}{16}$. Die Berechnung der Differenz führt im Beispiel zu $\frac{2}{31}-\frac{1}{16}=\frac{2\cdot 16-31}{31\cdot 16}=\frac{32-31}{31\cdot 16}=\frac{1}{31\cdot 16}=\frac{1}{496}$, d. h. zu einem Stammbruch. Dieses Verfahren kann auf *jeden* Bruch der Form $\frac{2}{2n+1}$ angewandt werden.

Der Zähler der Differenz der Brüche ist immer 1, da er die positive Differenz zwischen einer ungeraden Zahl und der darauf folgenden geraden Zahl darstellt. Die Schüler können dies an einer Reihe von Beispielen verifizieren. Auf diese Weise können sie die altägyptische $\frac{2}{2n+1}$-Tafel rekonstruieren, was schon für sich gesehen eine schöne Übung ist.

Als nächsten Schritt bietet es sich an, die irreduziblen Brüche der Form $\frac{3}{n}$ zu betrachten. Dies sind die Brüche $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11}, \ldots$

Vielleicht kommen einige Schüler selbst auf die Idee, das Verfahren bei den Brüchen mit Zähler 2 anzupassen: Wähle einen gekürzten Bruch mit Zähler 3, z. B. $\frac{3}{31}$. Erhöhe den Nenner, bis du auf ein Vielfaches von 3 stößt. Dieser Bruch, im Beispiel $\frac{3}{33}$, ist kleiner als der gegebene Bruch und kann zu einem Stammbruch gekürzt werden, im Beispiel $\frac{1}{11}$.

Die Berechnung der Differenz führt zu einem Bruch, dessen Zähler die positive Differenz zwischen dem Nenner des ursprünglichen Bruches und dem nächstgrößeren Vielfachen von 3 ist. Es ist offenkundig, dass dieser Zähler kleiner als 3 ist, also nur 1 oder 2 sein kann. Beispiele:

$\frac{3}{41}-\frac{1}{14}=\frac{3\cdot 14-41}{41\cdot 14}=\frac{42-41}{41\cdot 14}=\frac{1}{574}$. Also ist $\frac{3}{41}=\frac{1}{14}+\frac{1}{574}$.

$\frac{3}{31}-\frac{1}{11}=\frac{3\cdot 11-31}{31\cdot 11}=\frac{33-31}{31\cdot 11}=\frac{2}{341}$. Auf den Differenzbruch $\frac{2}{341}$ können die Überlegungen von vorher angewandt werden: $\frac{2}{341}=\frac{1}{171}+\frac{1}{58311}$, was zu $\frac{3}{31}=\frac{1}{11}+\frac{1}{171}+\frac{1}{58311}$ führt.

In diesem Kontext wird deutlich, dass der Zähler des Differenzbruches immer kleiner als 3 ist, denn er wird ja als positive Differenz einer nicht durch 3 teilbaren Zahl und dem nächstgrößeren Vielfachen von 3 erhalten. Wenn der Zähler des Differenzbruches bereits 1 ist, hat man schon eine Stammbruchdarstellung erhalten. Wenn er 2 ist, kann man auf die früheren Ergebnisse zurückgreifen.

In der gleichen Weise können irreduzible Brücher der Form $\frac{4}{n}$ auf Brüche mit Zählern 3, 2 und 1 zurückgeführt werden usw. Vollständige Induktion zeigt, dass jeder Bruch < 1 als Summe verschiedener Stammbrüche dargestellt werden kann.

Die Schüler können sich das Verfahren an Beispielen klar machen:

$\frac{5}{11}-\frac{5}{15}=\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{15-11}{3\cdot 11}=\frac{4}{33}$ und $\frac{4}{33}-\frac{4}{36}=\frac{4}{33}-\frac{1}{9}=\frac{36-33}{297}=\frac{3}{397}=\frac{1}{99}$. Also gilt $\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$.

Wie bei den vorhergehenden Beispielen ist am Beginn der Lernumgebung die Idee eines Beweises nicht präsent. Aber nach einer Reihe von Rechnungen, die zur Übung von Fertigkeiten dienen, tauchen Muster auf, die danach rufen, begründet zu werden. Dafür werden Mittel eingesetzt, die den Schülern dieser Stufe vertraut sind. Wie bei den vorhergehenden Lernumgebungen ist das Beweisen organisch mit dem Üben verbunden. Das Prinzip von der natürlichen Differenzierung ermöglicht es, auch bei einem nicht einfachen Thema wie diesem ein Angebot mit steigenden Anforderungen zu machen. Die einzelne Schülerin entscheidet, wie weit sie gehen bzw. mitgehen möchte.

1.5 Passen

Die folgende Serie von geometrischen Lernumgebungen gründet sich auf die Idee des Passens, einer fundamentalen Idee der Elementargeometrie (Freudenthal 1969, 422–23).

Die Entwicklung dieser Idee quer über die Schuljahre beginnt in Klasse 1 mit folgender Aktivität (Abb. 7, s. Keßler & Schönwald 1982): Papierquadrate gleicher Größe werden diagonal gefaltet und in je vier kongruente gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke zerschnitten. Die Teile werden dann in verschiedener Weise zu anderen Figuren rekombiniert.

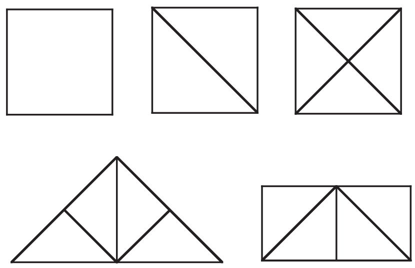

Abbildung 7

Auf dieser Stufe ist der Ansatz noch experimentell. Die Kinder bewegen die Teile und versuchen, sie Seite an Seite unterschiedlich zusammenzusetzen. Dabei werden aber durchaus schon mathematische Beziehungen deutlich. Die Kinder sehen z. B., dass zwei rechte Winkel einen gestreckten Winkel bilden und dass aus den vier kleinen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken, die aus der Zerlegung des ursprünglichen Quadrats hervorgehen, zwei gleichgroße Quadrate gebildet werden können (Spezialfall des Satzes von Pythagoras).

In Klasse 2 werden diese Aktivitäten fortgesetzt. Abbildung 8 zeigt, wie aus Papierquadraten gleichseitige Dreiecke und halbe gleichseitige Dreiecke gefaltet und ausgeschnitten werden können, die sich zu anderen Figuren zusammensetzen lassen. Eine der Figuren ist vom Bhaskara-Beweis des Satzes von Pythagoras her wohlbekannt.

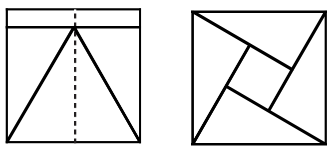

Abbildung 8

In Klasse 3 zeichnen die Kinder mit einer Schablone reguläre Dreiecke, Quadrate, Fünfecke, Sechsecke und Achtecke mit gleich langen Seiten (Abb. 9). Sie erforschen, immer noch experimentell, welche dieser Vielecke sich zu Parkettierungen zusammensetzen lassen. Sie finden heraus, dass es nur drei reguläre Parkettierungen gibt, und entdecken einige semireguläre Parkettierungen.

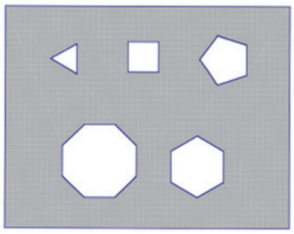

Abbildung 9

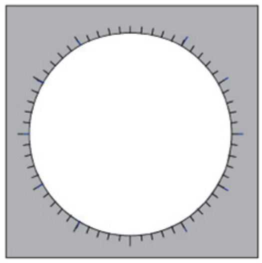

Abbildung 10

In Klasse 4 erzeugen die Kinder reguläre Vielecke mit Hilfe der Zeichenuhr (Abb. 10) und bauen damit die Platonischen Körper (Winter 1986). Die Vielecke werden mit den Kreisen auf Karton übertragen. Die Kreissegmente, die an jeder Vieleckseite hängen, werden nach unten gefaltet und dienen als Klebefalze. Auf diese Weise können Modelle aller fünf Platonischen Körper hergestellt werden. Experimentell wird deutlich, dass es nur 5 Typen räumlicher Ecken gibt, die zu regulären Körpern führen. Dies ist voll im Einklang mit dem Beweis der Existenz von genau fünf Platonischen Körpern, in dem Euklids „Elemente der Mathematik" gipfeln. Diese Aktivitäten haben zwar noch keine Beweiskraft, sind aber gute Vorbereitungen. Die Kinder lernen dabei schon die Objekte und die Operationen kennen, auf die sich operative Beweise später stützen.

In den Klassen 5 und 6 werden mithilfe von Zerlegungen und Zusammensetzungen von Vielecken der Winkelbegriff und die Winkelmessung eingeführt, was erneut sehr gut zur geschichtlichen Entwicklung passt (Becker 1954, 27). Auf dieser Stufe treten neben den experimentellen Zugang begriffliche Überlegungen, wie sie für operative Beweise erforderlich sind: Die Schüler können unter Bezug auf Winkel und Längen *beweisen*, *warum* gewisse Zusammensetzungen von Vielecken exakt zueinander passen: Seiten passen genau dann aneinander, wenn sie gleich lang sind, Winkel lassen sich genau dann an einer Ecke lückenlos und überschneidungsfrei zu einem Vollwinkel zusammensetzen, wenn ihre Summe 360° beträgt. Abbildung 11 zeigt ein Beispiel, das ein Ausschnitt aus der operativen Herleitung der semiregulären Parkettierung ist: Dass genau zwei semireguläre Parkettierungen mit regulären Dreiecken und Quadraten existieren, ergibt sich aus der Rechnung $3 \cdot 60° + 2 \cdot 90° = 360°$ und der Tatsache, dass die drei Dreiecke und die zwei

Quadrate in einem Eckenstern nur so angeordnet werden können, dass die beiden Quadrate entweder in einer Seite inzidieren oder durch ein Dreieck getrennt werden.

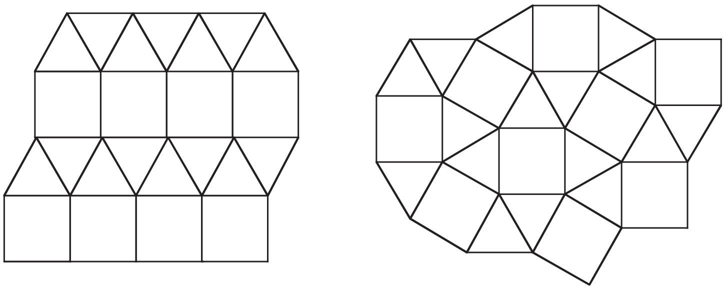

Abbildung 11

In den nachfolgenden Klassen ist die Zerlegung und Rekombination von Vielecken das natürliche Werkzeug für die Begründung von Inhaltsformeln und für Zerlegungsbeweise im Umfeld des Satzes von Pythagoras. Dabei wird auf die Invarianz des Inhalts bei Bewegungen zurückgegriffen.

Vielecke, die aus Papier ausgeschnitten wurden, und Zeichnungen von Polygonen unterstützen die Operationen des Zusammensetzens, fungieren auf dieser Stufe aber nicht mehr als physikalische Objekte, mit denen man experimentieren kann, sondern als Darstellungen mathematischer Objekte, die theoretische Eigenschaften haben. Mit diesen werden operative Beweise geführt (s. dazu Abschnitt 3.2).

2 Der Begriff des operativen Beweises

Der bekannte russische Mathematiker Igor Shafarevich stellt im Vorwort eines seiner Bücher fest (Shafarevich 2005):

> *... the meaning of a mathematical notion is by no means confined to its formal definition; in fact, it may be rather better expressed by a (generally fairly small) number of basic examples, which serve the mathematicians as the motivation and the substantive definition, and at the same time as the real meaning of the notion. Perhaps the same kind of difficulty arises if we attempt to characterize in terms of general properties any phenomenon that has any degree of individuality.*

Der Zugang zu dem Begriff des „operativen Beweises" in diesem Beitrag mithilfe typischer Beispiele war in diesem Sinn das Ergebnis einer bewussten Entscheidung. Unter Bezug auf die Beispiele von Abschnitt 1 kann nun dieser Begriff durch folgende Eigenschaften mit der unvermeidlichen Beschränkung, die formalen Beschreibungen innewohnt, charakterisiert werden:

Operative Beweise

- *ergeben sich aus der Erforschung eines mathematischen Problems, insbesondere im Rahmen eines Übungskontextes, und klären einen Sachverhalt,*
- *gründen auf Operationen mit „quasi-realen" mathematischen Objekten,*
- *nutzen dazu die Darstellungsmittel, mit denen die Schüler auf der entsprechenden Stufe vertraut sind und*
- *lassen sich in einer schlichten, symbolarmen Sprache führen.*

Da Beweise im Unterricht in der Kommunikation zwischen der Lehrperson und den Schülern „ausgehandelt" werden müssen (s. z. B. Steinbring 2005), ist der letzte Punkt besonders wichtig.

Streng genommen ist die Bezeichnung „operativer Beweis" nicht glücklich gewählt, da nicht der Beweis an sich operativ ist, sondern das gesamte didaktische Setting. Um der sprachlichen Kürze willen kann die Bezeichnung dennoch beibehalten werden.

Operative Beweise haben seit Zbigniew Semadenis epochalen Artikeln zur „Prä-Mathematik" (Semadeni 1974, 1984) wachsendes Interesse gefunden. Seine Ideen wurden von einer Reihe von Autoren weiter ausgearbeitet (s. z. B. Kirsch 1979, Winter 1985, Hering 1989, Miyazaki 1995). Diese Autoren sprechen von „präformalen Beweisen" oder von „Erklärungen mithilfe von Handlungen an manipulierbaren Dingen". In diesen Beschreibungen schwingt eine gewisse Präferenz für formale Beweise mit. Neuere Entwicklungen in der Philosophie der Mathematik und eine kritische Überprüfung der Rolle von Beweisen in der Community der Mathematiker haben jedoch zu einer Neubewertung geführt (s. z. B. den Überblick in Hanna 2000 und Thurston 1994). Zwischen operativen und formalen Beweisen besteht bei genauerer Betrachtung kein grundsätzlicher Unterschied, sondern nur ein Unterschied in den eingesetzten Mitteln. Formale Beweise stützen sich auf *symbolische Beschreibungen* mathematischer Objekte und symbolische Operationen im Rahmen systematisch-deduktiver Theorien, operative Beweise direkt auf *Darstellungen* dieser Objekte und *Operationen* an ihnen. Die Stichhaltigkeit operativer Beweise ergibt sich daraus, dass diese Operationen allgemein ausführbar sind, unabhängig von speziellen Beispielen, an denen sie demonstriert werden (s. dazu auch Kautschitsch 1989, S. 184).

3 Theoretischer Hintergrund operativer Beweise

Der Begriff des operativen Beweises stützt sich auf einige theoretische Positionen, die in Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik formuliert wurden. Im letzten Abschnitt sollen sie kurz umrissen werden.

3.1 Die Mathematik als Wissenschaft von Mustern

Wie schon einleitend angemerkt, wurde für das Projekt Mathe 2000+ die Auffassung von Mathematik als Wissenschaft von Mustern übernommen, die sich in der Post-Bourbaki-Ära etabliert hat und heute von Mathematikern weitgehend geteilt wird (Sawyer 1955, Steen 1988, Thurston 1994, Devlin 1996). Für die Mathematikdidaktik sind aber nicht die fertigen, auf logische Zusammenhänge reduzierten formalen Darstellungen von Mustern entscheidend. Vielmehr zählt die Dynamik hinter der Entdeckung von Mustern im Forschungs- und Lernprozess. Sie muss in Lernumgebungen und Curricula zum Tragen gebracht werden. Die Entwicklungsforschung in England, den Niederlanden und Japan in den 1960ern und 1970ern und die Arbeiten von Heinrich Winter haben Mathe 2000+ dabei als Vorbild gedient (Fletcher 1965, Wheeler 1967, IOWO 1976, Becker & Shimada 1997, Winter 1984, 1989).

Dass in der Mathematik gewisse Beziehungen allgemein gelten und dass man dies beweisen kann, macht das Wesen dieser Wissenschaft aus. Beweise sind das „Herz der Mathematik“ (Ziegler 2008). Damit Kinder verstehen, was Mathematik ist, muss man ihnen möglichst früh den Begriff des „Musters“ und die Idee, Muster begründen zu können, nahebringen. Es muss daher alles daran gesetzt werden, um die Darstellungsformen, die auf den betreffenden Stufen angemessen sind, für Beweise zu nutzen.

3.2 Die „quasi-empirische“ Natur der Mathematik

Operative Beweise hängen an geeigneten Darstellungen mathematischer Objekte. Wie Lakatos 1976 am Beispiel der Forschungen zum Eulerschen Polyedersatz eindrucksvoll aufgezeigt hat, werden mathematische Theorien in enger Verbindung mit der Konstruktion von Objekten, auf die sie sich beziehen, entwickelt. Die Graphentheorie z. B. entwickelt sich mit der Konstruktion von Graphen, die Gruppentheorie mit der Konstruktion von Gruppen, die Codierungstheorie mit der Konstruktion neuer Codes usw. In jeder Theorie bilden die mathematischen Objekte eine Art „Quasi-Realität“, die es dem Forscher ermöglicht, Experimente durchzuführen, die mit Experimenten in der Naturwissenschaft vergleichbar sind. Arnold (1998, 229) formuliert dies lapidar:

> *Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.*

Für den Mathematikunterricht sind *nichtsymbolische* Darstellungen mathematischer Objekte unverzichtbar, da sie eine leicht zugängliche „Quasi-Realität“ verkörpern. Muster werden gewissermaßen „sichtbar“, wenn zu ihrer Beschreibung Darstellungsmittel wie Plättchen, die Zahlengerade, die Stellentafel, Rechnungen mit Zahlen oder Konstruktionen geometrischer Figuren benutzt werden.

Die „Quasi-Realität" der mathematischen Objekte bildet eine eigene Welt, die Yuri Manin in einer glücklichen Formulierung als „*mathscape*" bezeichnet hat. Da die theoretische Natur der mathematischen Objekte dieser „mathematischen Landschaft" aufgeprägt wird, ist sie bestens für die Theoriebildung geeignet. Darüber hinaus stiftet sie Sinn, regt Ideen an und liefert Daten, um Argumente zu überprüfen. Im Gegensatz zu Hilberts fiktiven Mathematikern, die unter Kappung ontologischer Bindungen arbeiten, agieren forschende Mathematiker in einer *mathscape*. Die folgende Formulierung fasst diese Position sehr treffend zusammen (Gale 1990, 4):

> *The main goal of all science is first to observe und then to explain phenomena. In mathematics the explanation is the proof.*

3.3 Das operative Prinzip

In Jean Piagets genetischer Epistemologie wird Wissen als Konstruktion gesehen, das sich aus der Interaktion des Individuums mit der Umgebung ergibt: Das Individuum wirkt auf die Umgebung ein, beobachtet die Wirkungen seiner Operationen und passt sie in die sich entwickelnden kognitiven Schemata ein. Nach Piaget leitet sich mathematisches Wissen nicht von den Objekten selbst, sondern in reflektiver Abstraktion von *Operationen an Objekten* ab. (s. den Abschnitt über „abstraction réfléchissante" in Beth & Piaget 1961, 217–223). Wenn intuitiv klar ist, dass Operationen, die auf spezielle Objekte ausgeübt werden, auf alle Objekte einer bestimmten Klasse angewandt werden können, sind die von diesen Operationen gestifteten Beziehungen („Muster") allgemeingültig.

Im deutschsprachigen Raum haben eine ganze Reihe von Autoren Beiträge zur Anwendung der genetischen Epistemologie auf die Mathematikdidaktik geleistet. Im Laufe der Zeit hat sich dabei das *operative Prinzip* in folgender Fassung herauskristallisiert (Wittmann 1996, 154–161, und die dort zitierte Literatur):

Um mathematische Objekte zu verstehen, muss man erforschen, wie sie konstruiert werden und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Handlungen, Konstruktionen, Transformationen, ...) angewandt werden.

Daher müssen die Lernenden systematisch angeleitet werden,

(1) die Operationen, die man auf die Objekte anwenden kann, in ihrer Gesamtstruktur zu erforschen,

(2) dabei herauszufinden, welche Eigenschaften den Objekten durch die Konstruktion aufgeprägt werden,

(3) und unter der Leitfrage „Was geschieht, wenn ...?" zu beobachten, welche Wirkungen die Operationen auf die Eigenschaften und Beziehungen haben.

Die Beziehung des operativen Prinzips zu operativen Beweisen ist offenkundig: *Operative Beweise hängen an den Wirkungen der Operationen*. Aufgrund der allgemeinen Natur der Operationen sind operative Beweise stichhaltige Beweise. Die Wirkungen der Operationen übernehmen bei operativen Beweisen in gewisser Weise die Rolle, die Axiome in der formalen Mathematik spielen.

3.4 Produktives Üben

Bei der Gründung des Projekts Mathe 2000+ war es eine bewusste Entscheidung, dem Üben breiten Raum zu geben, um dem Schicksal vieler Curriculumprojekte in den 1970er und 1980er Jahren zu entgehen, die in erster Linie an der Vernachlässigung des Bereiches Üben gescheitert sind. Im traditionellen Verständnis wird „Üben" auf das sprichwörtliche „Einpauken" von Fertigkeiten reduziert, das natürlich nicht mit den heutigen Zielen des Mathematikunterrichts kompatibel ist. Daher galt es, ein Konzept von Üben zu entwickeln, das die Übung von Fertigkeiten bewusst mit der Förderung allgemeiner Lernziele (Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren, Formulieren) verbindet. Dieser Typ des Übens wurde als „produktives Üben" bezeichnet. Für den Arithmetikunterricht der Grundschule liegt dafür ein ausgearbeitetes Konzept vor (Wittmann & Müller 1990/1992). Die Grundidee beim produktiven Üben ist sehr einfach: Um Fertigkeiten zu üben, werden mathematische Muster als Kontexte genutzt. Lernumgebungen zum produktiven Üben beginnen daher immer mit ausgedehnten Rechnungen, Konstruktionen oder Experimenten. Auf diese Weise wird eine „Quasi-Realität" geschaffen, die es erlaubt, Phänomene zu beobachten, Vermutungen anzustellen, Muster zu entdecken und sie operativ zu beweisen. Die Operationen, auf die sich die Beweise stützen, sind vom vorhergehenden Unterricht her vertraut und werden in der ersten Phase aktiviert. Der Bezug zu dieser „Quasi-Realität" bleibt während der gesamten Erforschung der Lernumgebung bestehen. Die Lernenden können bei dem nachfolgenden Beweis ständig auf Daten zurückgreifen, die in der ersten Phase gewonnen wurden. Bei der Prüfung und Verifizierung von Argumenten wird das Üben der Fertigkeiten von der ersten Phase nochmals aufgenommen.

Nicht nur elementare Rechnungen müssen geübt werden, um sie richtig zu beherrschen. Auch ein Argument in einem operativen Beweis muss geübt werden, um richtig verstanden zu werden. Begründungen müssen daher an einer Reihe verschiedener Beispiele ausgeführt werden. Die Lernenden erhalten dadurch Gelegenheit, ihre Argumentationen fortgesetzt zu verbessern und zu verfeinern. Der Kontext einer produktiven Übung bietet sich dafür in idealer Weise an.

Die Entwicklungsforschung im Projekt Mathe 2000+ hat gezeigt, dass das Einspluseins, das Einmaleins, die halbschriftlichen Rechenstrategien und die schriftlichen Verfahren eine so reichhaltige Struktur aufweisen, dass keine zusätzlichen Themen und Aufgaben nötig sind, um höhere Fähigkeiten, insbesondere das Beweisen, zu entwickeln. Voraussetzung für die Nutzung dieser arithmetischen Strukturen zur Förderung höherer Fähigkeiten ist aber, dass Darstellungen von Zahlen eingeführt und genutzt werden, die fundamentale mathematische Strukturen verkörpern und Operationen erlauben, auf die sich operative Beweise stützen können (Wittmann 1998). Das gilt entsprechend für die elementare Geometrie.

Schlussbemerkungen

Operative Beweise entfalten nicht nur bei Inhalten des Mathematikunterrichts ihre Stärke. Sie reichen auch weit hinein in die Teile der Elementarmathematik, die als Hintergrund der Schulmathematik akzeptiert sind und daher in der fachlichen Lehrerausbildung eine prominente Rolle spielen müssen. In Müller et al. (2004) werden nichtformale Darstellungen von Zahlen und darauf beruhende operative Beweise durchgehend benutzt. Im Kapitel 3.4 dieses Buches werden z. B. alle Sätze der elementaren Zahlentheorie bis hin zu Eulers Verallgemeinerung des „kleinen Fermat" mit Plättchen- und Punktmustern, der Zahlengeraden und schematischen Anordnungen von Zahlenmengen operativ bewiesen (Müller et al. 2004, 255–290).

In der Lehrerbildung ist dieser „operative Zugang" gegenüber einem formalen Zugang in doppelter Hinsicht von Vorteil: Er hilft den Studierenden nicht nur, die Mathematik selbst besser zu verstehen und zu lernen, sondern vermittelt ihnen auch professionelles Wissen im Umgang mit Darstellungsmitteln, das sie für ihren späteren Unterricht benötigen. Mathematische Veranstaltungen, die entsprechend gestaltet sind, bilden auch eine gute Grundlage für didaktische Veranstaltungen, in denen die zugrunde liegenden didaktischen Prinzipien unter Bezug auf eigene mathematische Erfahrungen der Studierenden herausgearbeitet werden können.

Literatur

Arnold, V. I. (1998): On Teaching Mathematics. *Russian Math. Surveys* 53, No. 1, 229–236

Becker, O. (1954): *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung*. Freiburg: Alber

Becker, J. & Shimada, Sh. (Hrsg.) (1997): *The open-ended approach. A new proposal for teaching mathematics. Reston*, VA: NCTM

Berlin, T. & Hefendehl-Hebeker, L. (2011): Stufen der algebraischen Denkentwicklung. *Der Mathematikunterricht* 57/2, 16–22

Beth, E. W. & Piaget, J. (1961): Epistémologie mathématique et psychologie. *Études d'épistémologie génétique,* vol. XIV

Conway, J. H. & Guy, R. K. (1997): Zahlenzauber. Von natürlichen und imaginären Zahlen. Basel: Birkhäuser

Damerow, P. & Lefèvre, W. (Hrsg.) (1981): *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften.* Stuttgart: Klett-Cotta

Devlin, K. (1994): *The Science of Patterns.* New York: Freeman

Engbert, J. (2012): Multiplikative Rechenketten – Vielfältige Möglichkeiten zum Entdecken, Beschreiben und Begründen von Mustern. In: Müller, G. N., Selter, Ch. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.): Zahlen. Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart: Klett, 216–221

Freudenthal, H. (1971): Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413–435

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel

Fung, C. I. (2005): How history fuels teaching for mathematising: Some personal reflections. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 3, No. 1–2, 123–144

Gale, D. (1990): Proof as Explanation. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, No. 1, 4

Hanna, G. (2000): Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics. Special Issue on „Proof in Dynamic Geometry Environments",* vol. 44, 5–23

Hanna, G. et al. (2010): Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives. New York: Springer

Hanna, G. et al. (2012): Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study. New York: Springer

Hering, H. (1989): Begriffsentwicklung und präformales Beweisen bei infinitesimalen Prozessen. *Journal für Mathematik-Didaktik* 10, 123–140

IOWO (1976): Five Years IOWO. *Educational Studies in Mathematics* 7, No. 3

Kautschitsch, H. (1989): Wie kann ein Bild das Allgemeingültige vermitteln? In: Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen*. Wien/Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky/Teubner, 177–186

Keßler, R. & Schönwald, H. G. (1982): Neue Figuren aus diagonal zerlegten Quadraten. *Ehrenwirth Grundschulmagazin* 9, H. 11, 27–28

Kirsch, A. (1979): Beispiele für prämathematische Beweise. In: Dörfler, W. & Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky/Teubner, 261–274

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. London: Cambridge University Press

Miyazaki, M. (1997): New Perspectives for Teaching Proof. *3rd Yearbook of the JSME* (1997), 264–268

Müller, G. N., Steinbring, H. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.) (2004): *Arithmetik als Prozess.* Seelze: Kallmeyer

Sawyer, W. W. (1955): *A Prelude to Mathematics*, London: Penguin

Semadeni, Z. (1974): *The Concept of Pre-Mathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics.* Warsaw: Polish Academy of Sciences

Semadeni, Z. (1984): Action Proofs in Primary Mathematics and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics* 4, No. 1, 32–34

Shafarevich, I. R. (2005): *Basic Notions of Algebra*. New York/Heidelberg/Berlin: Springer

Simon, H. A. (1970): *The Sciences of the Artificial.* Cambridge, MA: MIT-Press

Steen, L. (1988): The Science of Patterns. *Science* 240, 611–616

Steinbring, H. (2005): *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction.* Mathematics Education Library, vol. 38. New York: Springer

Steinweg, A. S. (2014): *Algebra in der Grundschule*. Berlin: Springer

Thurston, W. (1994): On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* vol. 30, No. 2, 161–177

Walsch, W. (1972): *Zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Berlin: Volk und Wissen

Wheeler, D. H. (Hrsg.) (1967): *Notes on Mathematics in Primary Schools.* London: CUP

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. *mathematik lehren* H. 2, 4–16

Winter, H. (1985): Neunerregel und Abakus. *mathematik lehren* H. 11, 22–26

Winter, H. (1986): Von der Zeichenuhr zu den Platonischen Körpern. *mathematik lehren* H. 17, 12–14
Winter, H.(1989): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg
Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics Education as a ‚Design Science'. *Educational Studies in Mathematics* 29, 355–374
Wittmann, E. Ch. (1996): Designing Teaching: The Pythagorean Theorem. In: Cooney, Th. J. (Hrsg.): *Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education,* Portsmouth, N.J.: Heinemann, 97–165
Wittmann, E.Ch. (1997): Von Punktmustern zu quadratischen Gleichungen. *mathematik lehren* 83, 18–20
Wittmann, E. Ch. (2002): Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* 48, 1–20
Wittmann, E. Ch. (2006): Les mathématiques vues comme la science des structures. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* vol. 11, 149–174
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990/1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins; Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett
Ziegler, G. (2008): Über das Buch der Beweise: Was ist Mathematik? – Versuch einer Antwort in vier Thesen. *Math. Nat. wiss. Unterr. (MNU)* 61, H. 7, 407–413

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Erich Ch. Wittmann
TU Dortmund
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund
wittmann@mathematik.tu-dortmund.de

Eingang Manuskript: 08.09.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.01.2015
Online verfügbar: 08.03.2015