Mit Beispielen zum Erkenntnisgewinn

Experiment und Induktion in der Mathematik

von

Timo Leuders, Freiburg & Kathleen Philipp, Zürich

Kurzfassung: Experimentelle und induktive Vorgehensweisen spielen bei der Entstehung mathematischer Erkenntnisse eine bedeutende Rolle – sowohl bei Mathematikerinnen und Mathematikern in der Wissenschaft als auch bei Lernenden in der Schule. In diesem Beitrag wird die Rolle solcher experimenteller Erkenntnisprozesse aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und in Beziehung gebracht: Aus Sicht der „klassischen" und der „modernen" Mathematik sowie mit den Augen der Wissenschaftsphilosophie, der Wissenschaftssoziologie und schließlich auch der empirischen Lehr-Lern-Forschung. Ein Vergleich mit dem Experimentierbegriff der Naturwissenschaften zeigt Parallelen, aber auch fachspezifische Unterschiede beim Experimentieren auf.

Abstract: Inductive reasoning in explorative mathematical situations is relevant for knowledge generation – this holds for mathematicians as well as for students of all ages. In this paper we focus on the role of such experimental processes by synthesizing different perspectives: the perspective of mathematics, philosophy, sociology and educational psychology. Experimental processes in mathematics exhibit analogies but also discipline specific differences to experimental processes in the natural sciences.

1 Einleitung: Experimentieren in der Mathematik

> „Cette règle, que je vais expliquer, est à mon avis d'autant plus importante qu'elle appartient à ce genre de vérités dont nous pouvons nous persuader, sans en donner une démonstration parfaite. Néanmoins, j'en alléguerai des preuves telles, qu'on pourra presque les envisager comme équivalentes á une démonstration rigoureuse." (Euler 1751)
>
> („Diese Regel, die ich beschreiben werde, ist meiner Meinung nach umso bedeutender, als sie zu dieser Art von Wahrheiten gehört, von denen wir uns überzeugen können, ohne für sie einen vollständigen Beweis zu liefern. Dennoch, ich behaupte von solchen Proben, dass man sie beinahe als einem strengen Beweis gleichwertig ansehen kann.")[1]

Während das Experiment in den naturwissenschaftlich oder quantitativ sozialwissenschaftlich arbeitenden Disziplinen zu einem der zentralen Erkenntnisinstrumente zählt (Pietschmann, 1996, Shadish et al., 2002), wird es im landläufigen

---

[1] Alle Übersetzungen aus dem Italienischen, Lateinischen und Französischen stammen von der Autorin und dem Autor.

Urteil eher nicht als genuine Denk- und Arbeitsweise der Mathematik wahrgenommen. Bestenfalls wird der Zusammenhang zwischen „Experiment“ und „Mathematik“ in einer anderen Weise hergestellt: Mathematik wird im Zusammenhang mit den Naturwissenschaften als ein „Reservoir“ quantifizierbarer und damit experimentell prüfbarer mathematischer Modelle für die Beschreibung naturwissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten aufgefasst[2]. Als universelle Wissenschaft der Muster und Strukturen (Devlin, 1998, Stewart, 2001) ist die Mathematik (vor allem das Messen und die Statistik) ein dienendes Werkzeug für den rationalen Erkenntnisgewinn durch naturwissenschaftliches Experimentieren.

Wie aber sieht es mit dem Experimentieren als Methode des Erkenntnisgewinns *innerhalb* der Mathematik aus? Inwieweit ist die Mathematik selbst auch eine „experimentelle Wissenschaft“? Was meinen Mathematiker, wenn sie davon sprechen, dass sie experimentieren? Wie weit trägt die Analogie zum experimentgestützten Erkenntnisgewinn in den Naturwissenschaften, und wo endet sie?

Auf den ersten Blick scheinen all diese Fragen gar nicht sinnvoll gestellt: Die Mathematik ist epistemologisch doch gerade dadurch von den Naturwissenschaften abgegrenzt, dass sie ihre Wahrheiten eben *nicht* aus dem Experiment gewinnt. Die typischen mathematischen Prozesse der Erkenntnisgewinnung, die die Mathematik gegenüber anderen Wissenschaften auszeichnen, sind eher logische Deduktion und formale Abstraktion. Mathematisches Wissen wird folglich auch als sicher angesehen (Stevin benannte die Mathematik auf Niederländisch als ‚wiskunde‘) und nicht, wie experimentell geprüftes naturwissenschaftliches Wissen, als vorläufig. Neben dieser epistemologischen Differenz wird im ersten Zugriff auch eine ontologische Differenz angeführt: Der Gegenstand mathematischer Forschung, ihr „quasi-empirisches Gegenüber“, ist nicht die äußere Natur, die wir im Experiment befragen, sondern der innere, platonische „Himmel der Ideen“. Dies sind alles Gründe, die zunächst dafür sprechen, das Experiment als Kategorie zur Beschreibung mathematischen Erkenntnisgewinns abzulehnen.

In der Mathematikphilosophie gibt es allerdings als physikalistisch zu bezeichnende Positionen, die eine engere Verbindung der mathematischen zur physischen Realität annehmen, schon allein um die „unvernünftige Effektivität“ (Wigner,

---

2 Das ist die modernere Formulierung des berühmten Galilei-Zitates: „La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, ...“ – „Die Naturlehre ist in jenem gewaltigen Buch niedergeschrieben, das beständig vor unseren Augen geöffnet liegt (ich meine das Universum), aber man kann es nicht verstehen, wenn man nicht zuerst lernt, die Sprache zu verstehen, und die Buchstaben kennenlernt, in dem sie geschrieben ist. Es ist geschrieben in der Sprache der Mathematik, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ...“ (Saggiatore. In Opere di Galileo Galilei, Bd. 2. Bettoni 1832, S. 13).

1960) der Mathematik in der Anwendung auf die Natur zu erklären. Man muss sich aber nicht einmal auf das Glatteis der Frage nach dem ontologischen Status mathematischer Ideen begeben, sondern kann allein die epistemologische Praxis in der Mathematik ins Auge fassen, um eine Nähe zu Formen des empirischen Erkenntnisgewinns in naturwissenschaftlichen Kontexten zu erkennen: Bei näherer Betrachtung erweist sich die Mathematik nicht nur als ein statisches Gebäude aus Wahrheiten, sondern als eine lebendige Wissenschaft voller experimenteller Prozesse. Diese Sichtweise auf die Mathematik soll im Folgenden weiter entfaltet werden. Dabei geben wir in diesem kurzen Beitrag keine erschöpfende wissenschaftstheoretische Analyse dieses Arguments, sondern wollen einige exemplarische Perspektiven darstellen und gegenüberstellen: Zunächst die des ausübenden Mathematikers (sowohl klassischen als auch modernen Zuschnittes), dann die der Wissenschaftsphilosophie und Wissenschaftssoziologie und schließlich einen kurzen Ausblick auf die Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik, auf die Fachdidaktik, und ihre empirischen Befunde. Damit wollen wir auf die Gemeinsamkeiten der Sichten auf mathematische Erkenntnisprozesse in diesen weit gefächerten Perspektiven hinweisen.

Ziel ist es, das Experimentieren als fundamentalen epistemologischen Modus der Mathematik so herauszustellen und zu beschreiben, dass ein präzise umrissenes Bild vom „mathematischen Experimentieren" als einem nützlichen Konzept für das Verständnis von mathematischen Erkenntnisprozessen entsteht. Die Analysen in diesem Beitrag bilden den theoretischen und historischen Hintergrund zu empirischen Studien, welche an anderer Stelle veröffentlicht wurden (Leuders et al., 2011, Philipp, 2013).

2 „Klassische" Mathematik: Euler, Ramanujan, Pólya

Ein beredtes Zeugnis der Arbeitsweise von Mathematikern geben die Publikationen von Leonhard Euler. Euler hatte die Angewohnheit, nicht nur seine Resultate und deren Beweise zu veröffentlichen, sondern auch die Gedanken und Wege, die ihn dorthin geführt haben. So gewährt er uns tiefe Einblicke in die Werkstatt eines Mathematikers. In seinem Artikel „Beispiel zum Gebrauch von Beobachtungen in der reinen Mathematik" (Euler, 1761, zitiert und übersetzt nach Lolli, 2008) beschreibt er experimentelle Vorgehensweisen zunächst allgemein:

> „Haud parum paradoxum videbitur etiam in Matheseos parte, quae pura vocari solet, multum observationibus tribui, quae vulgo nonnisi in obiectis externis sensus nostros a cientibus locum habere videntur. Cum igitur numeri per se unice ad intellectum purum referri debeant, quid observationes et quasi experimenta in eorum natura exploranda valeant, vix perspicere licet."
>
> („Darum erscheint es ein wenig paradox, dass auch jener Teil der Mathematik, den man die reine Mathematik zu nennen pflegt, von Beobachtungen abhängt, welche gewöhn-

> lich nur damit zusammengebracht werden, dass äußere Gegenstände auf unsere Sinne wirken. Weil nämlich Zahlen selbst sich einzig auf den reinen Intellekt beziehen, mag man kaum einsehen, dass Beobachtungen und Quasi-Experimente geeignet sind, ihre Natur zu erkunden.“)

Euler hebt hier – obwohl er mit dem vorsichtig-einräumenden Tonfall den Leser sanft abholen will – bereits deutlich hervor, dass Beobachtungen auch im Feld der reinen Mathematik und nicht nur in der Natur zu den geeigneten Erkenntnismethoden gehören. Bemerkenswert ist hier, dass er bereits den Terminus „Quasi-Experiment“ verwendet, die Analogie in seiner Sicht also längst etabliert ist. Einerseits verweist er damit auf die Nähe zu experimentellem Vorgehen in den Naturwissenschaften, zeigt aber andererseits auch einen wesentlichen Unterschied auf: Die Untersuchungsobjekte sind anderer Art – die Mathematik beschäftigt sich mit geistigen Objekten.

> „Interim tamen hic solidissimis rationibus ostensum est plerasque numerorum proprietates, quas quidem adhux agnovimus, primum per solas observationes nobis innotuisse, idque plerumque multo antequam veritatem earum rigidis demostrationibus confermaverimus. Quin etiam adhuc multae numerorum proprietates nobis sunt cognitae, quas tamen nondum demonstrare valemus; ad earum igitur cognitionem solis observationibus sumus perducti.“

> („Es hat sich dennoch aus guten Gründen gezeigt, dass wir die meisten Eigenschaften der Zahlen, die wir bislang erkannt haben, zunächst allein durch Beobachtungen erkannt haben und meist lang bevor wir ihre Richtigkeit mit strengen Beweisen abgesichert haben. Es sind uns sogar viele Eigenschaften der Zahlen bekannt, die wir bislang nicht einmal beweisen konnten; zu ihnen sind wir allein durch Beobachtungen geführt worden.“)

Euler deutet hier an, dass er dem Beweis (demonstratio) absichernde Funktion (confermare) zubilligt, dass aber das Beobachten (observatio) dem Bekanntwerden (innotescere) dient und dem Beweisen im Erkenntnisgang vorgeschaltet ist.

> „Quascumque ergo numerorum proprietates per observationes cognoverimus, quae idcirco sola inductione innituntur, probe quidem cavendum est, ne eas pro veris habeamus, sed ex hoc ipso occasionem nanciscimur eas accuratius explorandi earumque vel veritatem vel falsitatem ostendendi, quorum utrumque utilitate non caret.“

> („Wann immer man also Kenntnis über Eigenschaften von Zahlen durch Beobachtungen erlangt hat, die nur auf Induktion gestützt sind, muss man sich davor hüten, sie nicht für wahr zu halten, sondern muss die Gelegenheit ergreifen, sie gründlich zu untersuchen und ihre Richtigkeit oder Unrichtigkeit zeigen, was beides von Wert ist.“)

Euler unterscheidet also durchaus zwischen der Kenntnis, dem Erkennen eines mathematischen Zusammenhanges (cognoscere), welche man durch Beobachtung erlangen kann – diesen Vorgang nennt er Induktion –, und dem Wissen um seine Richtigkeit bzw. Wahrheit (veritas), das man durch einen Beweis erlangen kann.

Euler lässt uns nicht im Dunkeln, wie solche Beobachtungen aussehen können, sondert schildert im Folgenden am Beispiel und en detail, wie er durch die Beobachtung von Beispielen zu Vermutungen über Zahlen der Form $a^2 + 2b^2$ gelangt ist. Bemerkenswert ist an den Euler'schen Reflexionen zu Beginn und Ende seiner Schrift, dass er *explizite* Bezüge zu den Naturwissenschaften aufzeigt.

Eine Zusammenfassung eines Euler'schen Beitrags mit einem anderen Thema (Euler, 1751, s. auch die Analyse in Pólya, 1954) soll dieses Phänomen plastisch illustrieren: Euler untersucht die Zahlenfolge, die entsteht, wenn man für jede Zahl die Summe ihrer Teiler bildet:

$$\sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 1 + 2 = 3,\ \sigma(3) = 1 + 3 = 4,\ \sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7,\ \ldots$$

Die resultierende Zahlenfolge 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18, 39, 20, 42, 32, 36, 24, 60, 31, 42, 40, 56, 30, … ist von frustrierender Unregelmäßigkeit, was Euler nicht verwundert, da die Primzahlen (also die Zahlen mit genau zwei Teilern) ebenfalls äußerst unregelmäßig liegen.

Wie gelangt Euler zu einer Vermutung über die Struktur dieser Zahlenfolge? Ohne dass dies im Detail ausgeführt wird, ist hier eine erste Form des Experimentierens am Werk. Durch „ungerichtetes Experimentieren“, sprich: durch „Spielen“ mit dem Term $(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$, d. h. durch intuitives Manipulieren (Ausmultiplizieren, Logarithmieren, Ableiten, Potenzreihenbildung), erhält er einen Hinweis auf eine Möglichkeit, die $\sigma(n)$ aus ihren jeweiligen Vorgängern zu berechnen:

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \ldots$$

Das Experimentieren ist an dieser Stelle bereits etwas anders belegt als weiter oben: Hier werden keine Beobachtungen zu Vermutungen verdichtet, sondern mathematische Objekte (Formeln) intuitiv manipuliert. Diese Bedeutungsverschiebung von „Experiment“ werden wir später noch einmal unter dem Begriff des „Descarte'schen Experimentes“ aufgreifen.

Euler stellt fest: Die Vorzeichen wechseln bei diesem Ausdruck bei jedem zweiten Mal. Das Prinzip, nach dem die Folge der Verschiebungen 1, 2, 5, 7, 12, 15, ... aufgebaut ist, findet er durch das versuchsweise Bilden von Differenzen. Auch hier ist das Experimentieren ein Spielen mit und Manipulieren von Mustern, geleitet von Erfahrungen und Intuition – Manipulationen, wie z. B. solch eine Differenzenbildung, führen zu Erkenntnissen über die innere Struktur von Zahlenfolgen. Auch hier erscheint ein erkennbares Muster: Die Folge wächst abwechselnd um 1, 2, 3, 4, ... und um 3, 5, 7, 9, ...:

N:	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,	51,	57,	70,	77,	92,	100, ...
Diff.:	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,	6,	13,	7,	15,	8, ...	

Das rekursive Bildungsgesetz $\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \ldots$, das Euler hier gefunden hat, fußt offensichtlich auf einem Schluss aus einigen wenigen Beispielen. Natürlich weiß Euler, dass er damit keinen Beweis der Allgemeingültigkeit seiner Formel errungen hat. Allerdings konstatiert er recht mutig:

> „Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre propose et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra développer. Et comme je dois avertir, que je ne suis pas en état de donner une démonstration rigoureuse de cette loi, je ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples."
>
> („Nach diesen Feststellungen wird es nicht schwierig sein, diese Formel auf jede beliebige Zahl anzuwenden und sich von ihrer Richtigkeit mit so vielen Beispielen, wie man vorbringen möchte, zu überzeugen. Und obwohl ich vorwarnen muss, dass ich nicht imstande bin, einen strengen Beweis dieses Gesetzes zu geben, werde ich seine Rechtmäßigkeit durch eine genügend große Zahl von Beispielen zeigen.")

Hier lesen wir Euler nicht als einen philosophierenden Mathematiker, der über seine Arbeitsweise philosophiert, sondern als einen ausübenden Mathematiker, der sich bemüht, aus der Situation eines mangelnden Beweises das Beste zu machen. Durch Beispiele überzeugt (convaincre, fair voir) er sich und den Leser von der *Richtigkeit* (justesse – in Abgrenzung zu *Wahrheit* = vérité!) seiner Aussage. Hier dienen Beispiele also nicht mehr dazu, neue Erkenntnisse qua Beobachtung zu generieren, sondern bestehende Erkenntnisse durch Prüfung plausibler zu machen. In diesem Sinne verwendet Euler im Zitat zu Beginn unseres Beitrages auch den Begriff „preuve" anstelle von „démonstration". Die Begriffe preuve (frz.), proof (englisch) sind nämlich eng verwandt mit „Probe", also dem Akt des „Prüfens" oder „Vorweisens" (eine Probe seines Könnens geben). Eine Prüfung ist somit kein deduktiver Beweis, sondern eine Erhöhung der Plausibilität, der Glaubwürdigkeit einer Aussage, durch Beispiele.

Euler prüft konsequenterweise seine Formel für $\sigma(1)$ bis $\sigma(20)$ und in den nachfolgenden Paragraphen an den Extrembeispielen $\sigma(101)$ und $\sigma(301)$ und stützt seine Argumentation mit den Aussagen: „Ich denke, diese Beispiele reichen aus, um zu beweisen, dass die Übereinstimmung meiner Regel mit der Wahrheit keinesfalls nur dem Zufall zuzuschreiben ist. […] Diese Überlegungen, auch wenn sie noch weit von einem vollständigen Beweis entfernt sind, lassen dennoch keinen weiteren Zweifel an der außergewöhnlichen Gesetzmäßigkeit, die ich soeben erklärt habe." (Euler, 1751).

Dieser kurze Auszug aus einer Schrift eines Mathematikers, der offenherzig seine Erkenntniswege preisgibt, ist ein plastisches Beispiel dafür, wie es aussehen kann, wenn Mathematiker ihre Entdeckungen auf die Untersuchungen von Mustern und Zusammenhängen von Beispielen gründen und zur (relativen) Erhöhung der Sicherheit ihrer Aussagen wiederum Beispiele heranziehen. Eulers Souveränität bei diesem Vorgehen gründet sich auf seiner tiefen Überzeugung, dass die „Natur der Zahlen" ganz wie die „Natur der Dinge" der Beobachtung und damit einer Art quasi-experimentellem Vorgehen zugänglich ist.

Ein Mathematiker, der durch eine solche quasi-experimentelle Arbeitsweise besonders herausstach, war der Inder Srinivasa Ramanujan, der seine mathematische

Entwicklung größtenteils als Autodidakt und ohne jeden Austausch mit den Mathematikern seiner Zeit vollzog. Seine mathematischen Entdeckungen, die naturgemäß zum Teil Wiederentdeckungen waren, überraschten – als er schließlich in England Kontakt mit der forschenden Mathematik der westlichen Welt aufnahm – die europäischen Zahlentheoretiker aufgrund ihrer Reichweite und Tiefe. Allerdings war ihnen seine Denkweise zutiefst fremd, wie aus den Aufzeichnungen seines Förderers Hardy hervorgeht:

> „His ideas as to what constituted a mathematical proof were of the most shadowy description. All his results, new or old, right or wrong, had been arrived at by a process of mingled argument, intuition, and induction, of which he was entirely unable to give any coherent account. […] He worked, far more than most mathematicians, by induction from numerical examples in a way that was often really startling and without a rival in his day." (Hardy, 1940)

Ein dritter Mathematiker, der sich ausführlich und ausdrücklich mit dieser Sicht auf mathematische Erkenntnisprozesse befasst hat, ist George Pólya. Er hat die in diesen Beispielen anklingende „induktive" Arbeitsweise von Mathematikern, welche in Publikationen in der Regel nicht mehr erkennbar ist, in seinem Zweibänder „Mathematics and Plausible Reasoning" (Pólya, 1954) aus der Erfahrung und Introspektion eines aktiven Mathematikers beschrieben und analysiert. Das oben skizzierte Euler'sche Beispiel (und noch viele weitere) finden sich im ersten Band „Induction and Analogy in Mathematics". Pólyas Verdienst besteht darin, dass er die Methoden mathematischen Erkenntnisgewinns explizit ausdifferenziert: Zunächst unterscheidet er zwei Formen des Schließens: „demonstratives Schließen" und „plausibles Schließen" (Pólya, 1969, S. 9). Demonstratives Schließen folgt einer strengen Logik und dient der *Sicherung* mathematischen Wissens, während plausibles Schließen provisorischen Charakter hat und für die *Generierung* neuen Wissens unabdingbar ist. Mit dem prägnanten Ausspruch „Gewiss, lasst uns beweisen lernen, *lasst uns aber auch erraten lernen*." (Pólya, 1969, S. 10) betont er die Komplementarität der beiden Schlussformen Deduktion und plausibles Schließen für mathematischen Erkenntnisgewinn und unterstreicht die Bedeutung einer „induktiven Haltung" (Pólya, 1954, S. 7). Induktion ist bei Pólya nur eine, wenn auch zentrale Art und Weise des plausiblen Schließens; mit ihr wollen wir uns in diesem Beitrag befassen. Pólya unterscheidet gleich zu Anfang zwei Formen des beispielbezogenen, induktiven Arbeitens:

- Den „suggestive contact", bei dem man durch Erzeugung von Beispielen und die Beobachtung von Mustern zu mathematischen Vermutungen gelangt. Hierunter fallen sowohl Eulers „Beobachtungen" von Beispielen als auch seine „Experimente" im Sinne der tentativen Manipulation von Mustern in Zahlenfolgen und Termen.
- Den „supporting contact", bei dem man anhand weiterer Beispiele die Plausibilität seiner Vermutungen überprüft: Euler zieht dazu bewusst extreme oder

generische Beispiele heran (wie z. B. die 301), um die argumentative Stärke der Prüfung zu erhöhen – ein Gedanke, der dem falsifikationistischen Ansatz der experimentierenden Naturwissenschaften sehr nah ist und dem *experimentum crucis* ähnelt.

3 Wissenschaftsphilosophie: Peirce

In diesem Abschnitt wollen wir darstellen, wie sich die Kategorien des vorigen Abschnittes, die aus den Introspektionen und Reflexionen ausübender Mathematiker stammen, im Rahmen einer übergreifenden Epistemologie aus der Wissenschaftsphilosophie wiederfinden (ausführlicher bei Philipp, 2013, S. 7–15). Hierzu beschränken wir uns auf den Ansatz des amerikanischen Mathematikers und Philosophen Charles Sanders Peirce (1839–1914). Peirce unterscheidet in seiner Abhandlung „Three types of reasoning" (Peirce et al. 1960a) drei Formen wissenschaftlichen Schließens. Bei den Benennungen der Peirce'schen Schlussformen werden im Folgenden die Begriffe Deduktion, Induktion und Abduktion verwendet (Näheres bei Fann, 1970, Reichertz, 2003, Richter, 1995, Santaella, 1997, Meyer, 2007).

Peirce beschreibt deduktives Schließen als die „Anwendung allgemeiner Regeln auf besondere Fälle" (Walther & Peirce, 1967, S. 128) und nennt dies auch „notwendiges Schließen". Diese Form des Schließens ist wahrheitsübertragend, das bedeutet, wenn die Voraussetzung wahr ist, ist auch die Folgerung wahr. Eine zweite wichtige Eigenschaft der Deduktion ist, dass sie keine neuen Erkenntnisse hervorbringt, sie ist daher tautologisch. Eine bekannte Regel wird auf einen unbekannten Fall angewendet.

> „Deduction is the only necessary reasoning. It is the reasoning of mathematics. It starts from a hypothesis, the truth or falsity of which has nothing to do with the reasoning; and of course its conclusions are equally ideal." (Peirce et al., 1960a, 5.145)[3]

Die Induktion beschreibt Peirce als den Schluss einer „Regel aus der Beobachtung eines Ergebnisses in einem bestimmten Fall" (Walther & Peirce, 1967, S. 128 f.). Die Induktion ist die Umkehrung der Deduktion und ebenso tautologisch, aber nicht wahrheitsübertragend. Dennoch ist das Ergebnis einer Induktion wahrscheinlich.

> „Induction consists in starting from a theory, deducing from it predictions of phenomena, and observing those phenomena in order to see how nearly they agree with the theory." (Peirce et al., 1960a, 5.170)

[3] Verweise auf Collected Papers von Peirce geben in der Form a.b den Band (a) und den Abschnitt (b) an.

Deutlich wird in dieser Aussage, dass bei induktiven Schlüssen bereits eine theoretische Vorannahme über einen Zusammenhang vorhanden ist und ihre Passung zum Phänomen geprüft wird. Damit spricht Peirce der Induktion die Funktion der Erkenntnisgewinnung ab und schreibt ihr die Funktion zu, eine bereits gebildete Hypothese an einzelnen Fällen zu prüfen, sie also zu bekräftigen oder zu falsifizieren. Eine Hypothese kann dann durch Einzelfälle bestärkt oder auch geschwächt werden: „Induction is the experimental testing of a theory. […] It never can originate any idea whatever." (Peirce et al., 1960a, 5.145).

Die besondere Bedeutung der Induktion liegt im Peirce'schen Begriffsystem also nicht auf der *Erzeugung* von Erkenntnis anhand von Beispielen, sondern verschiebt sich hin zur *Überprüfung* der Gültigkeit einer Hypothese. (Diese Begriffsverschiebung zum üblichen Gebrauch von Induktion führt gelegentlich zu Missverständnissen bei der Verwendung Peirce'scher Kategorien.)

Die Abduktion schließlich bildet für Peirce den Anfang jeder Erkenntnis und ist als einzige der drei Schlussformen erkenntniserzeugend:

> „Abduction consists in studying facts and devising a theory to explain them. Its only justification is that if we are ever to understand things at all, it must be in that way." (Peirce et al., 1960a, 5.145).

Der Abduktion kommt damit die Funktion zu, zu einem beobachteten Phänomen eine erklärende Hypothese zu bilden. Eine solche erste Hypothese hat meist die Eigenschaft, dass sie sehr unsicher ist. Der Prozess der Abduktion selbst ist also der Vorgang, der eine Fragestellung kreiert, deren vorläufige Beantwortung eine Hypothese ist, welche zwar vage, aber dennoch plausibel erscheint. Infolgedessen ist die Abduktion als einzige der drei Schlussformen diejenige, die neues Wissen hervorbringen kann, womit sie im Erkenntnisprozess eine bedeutende Rolle spielt. Peirce beschreibt den Prozess der Abduktion als einen kreativen Akt, der ausgehend von überraschenden Resultaten tentativ eine mögliche Erklärung liefert: „Abduction is the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea […]" (Peirce et al., 1960a, 5.171). Ausgangspunkt für abduktive Schlüsse ist also ein überraschendes Phänomen, zu dessen Verständnis eine Erklärung benötigt wird. Es wird dann ein Fall (case) als mögliche Ursache für das Phänomen gebildet, wobei das Ergebnis (result) auch aus einem anderen Grund entstanden sein kann. Auf diese Weise wird hypothetisch geschlossen (Meyer, 2009).

Peirce führt zur Verdeutlichung der Hypothesenentwicklung durch Abduktion ein von ihm im Verlauf der Entwicklung seiner Philosophie mehrfach verwendetes Beispiel an, das Beispiel der Entdeckung der elliptischen Umlaufbahn des Planeten Mars durch Kepler (Peirce et al., 1960b, 2.96), so wie er insgesamt die Naturwissenschaften als Beispieldisziplinen für die Entwicklung seiner Epistemologie wählt. Keplers Annahme, dass sich die Planeten in kreisförmigen Bahnen um die

Sonne bewegen, wurde durch abweichende Positionen des Planeten Mars in Frage gestellt. Um dieses überraschende Phänomen zu erklären, vermutete Kepler elliptische Umlaufbahnen und konnte so diese Beobachtungen mit einem neuen Gesetz in Einklang bringen.

Wie die Beispiele und Überlegungen aus Abschnitt 1 darlegen, ist eine Übertragung auf mathematischen Erkenntnisgewinn nicht nur möglich, sondern zwingend, wenn man nicht das *Produkt* der sich deduktiv rechtfertigenden Wissenschaft, sondern den *Prozess* der Wissensentstehung beschreiben will. Besonders prägnant wird diese Passung der Peirce'schen Theorie an den beiden Pólya'schen Kategorien: Mit zwei unterschiedlichen Formen der Induktion, dem „suggestive contact" und dem „supporting contact", hat Pólya gleichsam die Peirce'schen Kategorien Abduktion und Induktion rekonstruiert.

In den nachfolgenden Sätzen drückt Peirce die Essenz seiner Ideen aus. Seine Behauptung der Universalität für jeglichen Wissenszuwachs unterstreicht die Passung zu den zuvor dargestellten Argumenten, wie sie Euler oder Pólya vorgebracht haben:

> „Deduction proves that something must be; Induction shows that something actually is operative; Abduction merely suggests that something may be." (Peirce et al., 1960a, 5.171)

> „I say that these three are the only elementary modes of reasoning there are. […] In fourty years diligent study of arguments, I have never found one which did not consist of those elements." (Peirce et al., 1998, 8.209)

In einem interessanten Umkehrschluss erkennt Franklin (2009) in der Tatsache, dass experimentelle Vorgehensweisen und induktives Schließen in der Mathematik stattfinden, ja dass diese Modi sogar wesentlich für erfolgreichen Erkenntnisfortschritt in der Mathematik sind, einen Beleg dafür, dass die Mathematik keineswegs ein rein menschliches Konstrukt darstellt, sondern eine Art empirisches Korrelat, das wir von außen erforschen. Die Tatsache, *dass* Mathematiker experimentieren, unterstützt aus seiner Sicht den Realismus (Aristotelismus, im Extremfall: Physikalismus) als mathematikphilosophische Grundhaltung: Mathematische Gegenstände und Gesetze sind keine menschlichen Konstrukte, sondern existieren unabhängig vom menschlichen Denken. Sie werden folglich nicht erfunden, sondern entdeckt.

4 Soziologie: Lakatos, Heintz

Ob man nun eine solche *ontologische* Grundposition teilt oder nicht, in jedem Fall haben die Beispiele der letzten beiden Abschnitte die deutlichen *epistemologischen* Parallelen des abduktiven und induktiven Arbeitens der Mathematik mit den Naturwissenschaften aufgezeigt. Die Prozesse der Herausbildung und Überprüfung mathematischer Hypothesen an Beispielen können mit einigem Recht als „mathematisches Experimentieren“ verstanden werden.

Es ist das Verdienst des ungarischen Mathematikers und Philosophen Imre Lakatos, diesen Charakter mathematischen Erkenntnisgewinns auf die *sozial-kommunikativen Interaktionen von Wissenschaftlern* bezogen und konkretisiert zu haben. Er verwendet dabei den Begriff des „quasi-empirischen“ Arbeitens, der in seiner Intention zunächst als gleichbedeutend mit „quasi-experimentell“ angesehen werden kann. In seiner „Logik der Beweise und Widerlegungen“ (Lakatos, 1979, S. XII) beschreibt Lakatos – im Gegensatz zu Pólya – nicht den Prozess, wie man zu einer Vermutung gelangt, sondern den Umgang mit einer vorhandenen Vermutung, wie sie im Verlauf des Versuches einer Beweisführung immer wieder angezweifelt und modifiziert wird. Im Versuch, die Vermutung zu stützen oder zu widerlegen, werden nach Lakatos zwei Arten von Gegenbeispielen konstruiert: Lokale Gegenbeispiele stellen nicht die Vermutung an sich in Frage, sondern zeigen die „Lückenhaftigkeit der Beweisführung“ (Lakatos, 1979, S. 5) auf, während globale Gegenbeispiele die Vermutung selbst anzweifeln. An dieser Stelle beschreibt Lakatos verschiedene Methoden im Umgang mit einem globalen Gegenbeispiel: Verwerfen der Vermutung, Verwerfen des Gegenbeispiels als irregulär, Verbesserung der Vermutung durch Einschränkung des Gültigkeitsbereichs, Umdeutung des Gegenbeispiels, Akzeptanz des Gegenbeispiels und Spezifizierung der Vermutung. Deutlich wird hierbei der hermeneutische, spiralige und sozial-kommunikative Charakter des Prozesses mathematischen Erkenntnisgewinns. Ergänzend zu Pólya wird hier wieder die zentrale Bedeutung des Beispiels, der „Beobachtung“ (um mit Euler zu sprechen) für den Erkenntnisprozess hervorgehoben.

Während Lakatos’ Darstellung eher theoretisch angelegt war – wenn auch plastisch dargestellt in Form eines Dialoges in einer hypothetischen Schulklasse –, untersucht die Soziologin Bettina Heintz die sozial-kommunikativen Prozesse in der realen Community der Mathematiker auf Basis einer umfassenden soziologischen Studie (Heintz, 2000a). Sie beschäftigt sich mit der Frage, wie mathematisches Wissen konkret entsteht und von der Fachgemeinschaft akzeptiert wird. Hierzu führt sie eine Feldstudie am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn durch. Dabei zeigt sie mithilfe wissenschaftssoziologischer Modelle und empirisch auf eine Vielzahl von Interviews gestützt auf, wie die verschiedenen Teilprozesse mathematischer Erkenntnisgewinnung im Rahmen unterscheidbarer (Arbeits-)„Kontexte“ unterschiedlich ausgeprägt und bedeutsam sind.

Heintz unterscheidet in Anlehnung an eine gängige Identifikation von unterschiedlichen „Kontexten“ in der Wissenschaftstheorie (Hoyningen-Huene, 1987) drei Zusammenhänge wissenschaftlichen Arbeitens (Heintz, 2000b): den Entdeckungskontext (context of discovery), den Rechtfertigungskontext (context of validation) und den Überzeugungskontext (context of persuasion). Im „context of discovery“

hat die Gewinnung von mathematischen Ideen mit ihrem experimentellen und induktiven Charakter eine große Bedeutung. Mathematikerinnen und Mathematiker formen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge in der Regel nicht etwa durch Ableitung aus bestehenden Sätzen (deduktiv), sondern durch „experimentelles Arbeiten" mit Beispielen, oder wie es im Rahmen ihrer Studie ein Mathematiker äußert:

> „Die Grossen sind auch deshalb so gross, weil sie so viel wissen. Sie kennen viele Beispiele und haben viel mit ihnen experimentiert. Darüber spricht man nicht. Man schreibt auch nicht in seinem Paper, wie man zu einer Vermutung gekommen ist. Was für immense Rechnungen manchmal dahinter stecken oder wie viele spezielle Beispiele." (Heintz 2000a, S. 150)

Im „context of validation" können experimentell gewonnene Ideen geprüft und bewertet werden. Mittels Beweisen wird mathematisches Wissen gesichert. Allerdings ist der Validierungsprozess damit noch nicht beendet. Erst durch die Akzeptanz in der mathematischen Gemeinschaft wird neues Wissen auch zu einer wissenschaftlichen Tatsache. Bedeutend sind bei diesem Vorgang nach Heintz wissenschaftliche Kommunikationsformen, die in diesem Sinne Überzeugungsarbeit darstellen (context of persuasion) (Heintz, 2000b).

In ihren interviewgestützten Analysen arbeitet Heintz plastisch die tatsächliche Praxis des Mathematiktreibens heraus und konstatiert: „Damit rückt das Experiment, das praktische Forschungshandeln […] in den Mittelpunkt […]" (Heintz, 2000a, S. 110). Das mathematische Tun unterscheidet sich vom Tun in anderen Disziplinen dadurch, dass es sich um ein gedankliches Tun handelt, das im Notieren von Gedanken und in Zeichnungen oder Skizzen sichtbar werden kann (Heintz, 2000a). Heintz sieht den mathematischen Beweis als Endpunkt eines vielschichtigen Suchprozesses und stellt die Frage, was alles geschieht, *bevor* ein Beweis geführt wird, denn Mathematiker sichern die Gültigkeit ihrer Vermutungen ab, ehe sie sie beweisen. Heintz bezieht sich an dieser Stelle auf Pólya, der dieses Vorgehen von Mathematikern dem plausiblen Schließen zuordnet und es als induktiven Prozess versteht. Auf diesem Weg gelangen Mathematiker zu neuen Ideen und bewerten sie anhand „informeller Wahrheitskriterien" (Heintz, 2000a, S. 145), von denen Heintz als eines von drei Hauptkriterien *quasi-empirische Bestätigung* nennt. Damit meint sie, dass es, wie ein Mathematiker formuliert, „[…] in zahlreichen Beispielen richtig ist […]" (Heintz, 2000a, S. 145).

Ausgangspunkt eines mathematischen Experiments ist ein Phänomen, das sich in Beispielen zeigt. Heintz beschreibt den Moment der Entdeckung als den Moment, in dem eine Form von Ordnung sichtbar wird. Dazu ist es nötig, eine neue Idee zu entwickeln, deren Entstehung nicht unbedingt nachvollzogen werden kann, wie dieser Interviewausschnitt verdeutlicht: „Das ist manchmal wirklich unerklärlich. Man weiß nicht, warum einem die Idee einfällt" (Heintz, 2000a, S. 149). Analog beschreibt Peirce diesen Moment als eine Art Geistesblitz. Die Beispiele nehmen dabei die Funktion ein, Vertrauen in eine Vermutung zu gewinnen und sie zu prüfen. Daher kann sie mit der Funktion von Fakten in den empirischen Wissenschaften verglichen werden. Der Umgang mit Beispielen kann insofern nach Heintz als ein empirischer charakterisiert werden. Sie spricht von „quasi-empirischer Erfahrung“ (Heintz, 2000a, S. 152) und hebt die Bedeutung von Beispielen als eine Art Werkzeugkasten von Mathematikern hervor.

Diese zusammenfassende Sicht einer soziologischen Arbeit, die die Fachkultur der Mathematik zum Gegenstand hat, ergänzt die subjektive Perspektive des „working mathematician“ auf seine Arbeit um die des sozialen Rahmens, in dem dies stattfindet. Auf diese Weise lässt sich nicht nur erklären, welche Funktion quasi-empirische Erkenntnisprozesse, sondern auch welchen Ort sie im Wissenschaftsbetrieb haben: Es ist der Kontext der Entdeckung, in dem Mathematiker experimentieren und in dem zeitweilig experimentelle Formen der Gewinnung und Prüfung von wissenschaftlicher Erkenntnis stattfinden.

Im nachfolgenden Abschnitt kehren wir zur Perspektive der ausübenden Mathematiker zurück und lassen eine Teilcommunity der heutigen Mathematik zu Wort kommen, die gegen die hier beschriebenen, die heutige Formen der Mathematik prägenden Kontexte der mathematischen Arbeit und Kommunikation explizit aufbegehren und die dem Experimentieren in der Mathematik einen neuen Stellenwert einräumen wollen.

5 „Moderne“ Mathematik: Borwein, Zeilberger u. v. a.

Im 20. Jahrhundert hat sich eine Bewegung gebildet, die sich als „experimentelle Mathematik“ bezeichnet (Epstein & Levy 1995) und die sich ebenfalls auf die Bedeutung induktiver und abduktiver Prozesse beim mathematischen Erkenntnisgewinn beruft: „Should we give the impression that the best mathematics is some sort of magic conjured out of thin air by extraordinary people when it is actually the result of hard work and of intuition built on the study of many special cases?“ (Epstein & Levy, 1995, S. 670)

Diese Bewegung mündete in der Gründung der Zeitschrift *Experimental Mathematics* (1992 ff.), die auf der Überzeugung gegründet ist, dass die „mathematische Community von einer umfassenderen Darstellung des experimentellen Prozesses profitieren kann“ (ebd., „statement of philosophy“). Die Experimentelle Mathematik sieht in der Erzeugung und Kommunikation von substantiellen Vermutungen und Heuristiken auf der Basis von Beispielen einen großen Wert für die Forschung, auch wenn ein formaler Beweis (noch) nicht gefunden ist.

Experimentelle Mathematik ist abzugrenzen von Angewandter Mathematik, da es hierbei nicht um die Entwicklung von mathematischen Modellen für Anwendungen, sondern um die Entwicklung rein innermathematischer Konzepte geht. Als

Einsatzfelder für experimentelle Mathematik kristallisieren sich vor allem solche Bereiche heraus, bei denen die untersuchten Beispiele und Zusammenhänge mit der Unterstützung von eigens erstellter oder universeller Computersoftware (wie z. B. CAS) generiert werden. Besondere Schwerpunkte der experimentellen Mathematik findet man daher im klassischen Feld der Zahlentheorie, aber auch in modernen Themenfeldern, die sich erst im engen Zusammenhang mit den Einsatzmöglichkeiten von Computern entwickelt haben, wie die Chaostheorie und die Theorie zellulärer Automaten (z. B. Berlekamp et al., 2001). Nur mit Computerunterstützung lassen sich hier die nötigen großen Anzahlen und komplexen Muster erzeugen und untersuchen.

Eine typische Fragestellung, die mit Ansätzen der experimentellen Mathematik bearbeitet wird, ist die Frage nach dem Wert bestimmter unendlicher Reihen oder Integrale. Diese kann man beispielsweise zunächst numerisch bis zu einer hohen Genauigkeit bestimmen und dann mit Hilfe eines so genannten „inverse symbolic calculator“ (z. B. oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/) darauf prüfen, ob das Ergebnis als einfache Kombination bekannter mathematischer Konstanten darstellbar ist. Interessanterweise greift dieser Ansatz die oben am Beispiel von Euler, Gauß und Ramanujan beschriebenen klassischen Vorgehensweisen wieder auf. Hier wird lediglich der Computer als kognitives Werkzeug eingesetzt, sozusagen als Verstärkung des Gehirns.

Pragmatisch betrachtet beziehen sich Argumente heutiger „experimenteller Mathematik“ vornehmlich auf die Forderung nach einer größeren Offenheit für induktive Argumente in der *Darstellung* mathematischen Wissens. Wissenschaftsphilosophisch kann man dies allerdings zuspitzen und das Primat der Deduktion für die Mathematik grundsätzlich in Frage stellen: Barrow (1994) illustriert diese Argumentationslinie durch das Gedankenexperiment eines Erstkontaktes mit Außerirdischen, die nicht nur eine außergewöhnlich leistungsfähige Technologie besitzen, mit der sie viel effektiver als wir Beispiele erzeugen und prüfen können, und die den Wahrheitswert einer Aussage nicht in der Existenz eines möglicherweise recht umständlichen Beweises messen: „Reliance upon deductive proof would have crippled their pace of scientific development, and so this notion that everything should be proved just faded away as a philosophical curiosity.“ (Barrow, 1994, S. 180).

Einige Mathematiker, wie etwa der notorische Querdenker Zeilberger, folgen dieser Denkweise konsequent weiter und gründen ihre alltägliche Forschungspragmatik (Erzeugen und Überprüfen von Vermutungen mit Computerhilfe) als auch ihre wissenschaftstheoretische Grundposition auf die Kraft der Induktion (Zeilberger 1993). Sie betonen dabei die Grenzen der Deduktion und entwerfen ein (provokatives) Bild der Mathematik als experimenteller Wissenschaft:

> „As wider classes of identities, and perhaps even other kinds of classes of theorems, become routinely provable, we might witness many results for which we would know how to find a proof (or refutation), but we would be unable, or unwilling, to pay for finding such proofs, since ‚almost certainty' can be bought so much cheaper. I can envision an abstract of a paper, c. 2100, that reads: ‚We show, in a certain precise sense, that the Goldbach conjecture is true with probability larger than 0.99999, and that its complete truth could be determined with a budget of \$10B'." (Zeilberger 1993).

Solche Extrempositionen verdecken allerdings die durchaus steigende Akzeptanz des „exploratorischen Experimentierens" in der modernen Mathematik (Sørenson 2010) und differenzierte Legitimationsversuche für eine computergestützte, experimentelle Mathematik, wie z. B. bei Borwein & Bailey (2004). Letztere nennen als verschiedene Funktionen des Computers im Rahmen experimenteller Mathematik:

1. Gaining insight and intuition.
2. Discovering new patterns and relationships.
3. Using graphical displays to suggest underlying mathematical principles.
4. Testing and, especially, falsifying conjectures.
5. Exploring a possible result to see if it is worth formal proof.
6. Suggesting approaches for formal proof.
7. Replacing lengthy hand derivations with computer-based derivations.
8. Confirming analytically derived results.

Während bei 1. bis 3. die Rolle des Computers als „abduktives Werkzeug" hervorsticht, bezieht sich 4. und 5. klar auf die Rolle der induktiven Prüfung (im Sinne von Peirce). Die Punkte 6. bis 8. wiederum machen deutlich, dass der Computer die mathematische Deduktion keineswegs ersetzt, sondern nur in der Funktion eines Werkzeugs ergänzt.

6 Experimentieren in den empirischen Wissenschaften und in der Mathematik

Die vorangegangenen Abschnitte haben exemplarisch komplementäre Sichten auf die Frage geworfen, welche Rolle „Experimentieren" als Modus der Erkenntnisgewinnung in der Disziplin Mathematik einnimmt. Jenseits der sich deutlich abzeichnenden Konvergenz der Konzepte ließen sich allerdings auch spezifische Unterschiede feststellen, die sich schon in der Vielzahl der verwendeten, durchaus nicht synonymen Begriffen manifestierten: Quasi-Experiment, quasi-empirisches Arbeiten, induktives und plausibles Schließen, Induktion etc. Abschließend soll daher noch ein synthetisierender Blick auf die Formen des „mathematischen Experimentierens" und auf seine Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Experimentieren in den Naturwissenschaften geworfen werden.

Zunächst ist festzustellen, dass die Erkenntnisprozesse, welche in den vorangehenden Beispielen als „Experiment“ bezeichnet werden, durchaus unterschiedlichen Charakter haben. Im intuitiven Manipulieren von Formeln, wie es etwa Euler vorführt, würde ein Naturwissenschaftler zunächst einmal *kein* Experiment sehen, allenfalls ein „freies Probieren“ – diese Facette des Begriffes „Experimentieren“ ist im außerwissenschaftlichen Kontext durchaus gebräuchlich, etwa in der „experimentellen Kunst“. Eine Typologie, die diese unterschiedlichen Qualitäten prägnant abbildet, hat der britische Biologe und Nobelpreisträger Peter Brian Medawar in seiner Schrift „Induction and Intuition in Scientific Thought“ (Medawar 1969; ein fachübergreifendes Pendant zu Pólya 1954) herausgearbeitet und mit wissenschaftshistorischem Weitblick prägnant bezeichnet (dargestellt nach Leuders & Philipp, 2012, S. 77–78):

Bacon'sche Experimente: Hierbei handelt es sich um explorative Untersuchungen von Phänomenen mit dem Ziel des Auffindens von Zusammenhängen. Sie finden im „context of discovery“ statt und haben das Ziel der Generierung neuen Wissens durch Abduktion. Auf welche Weise diese Beispiele erzeugt werden, ob etwa durch Analogie, durch systematische Variation oder durch intuitives Manipulieren, ist dabei weniger relevant als die Tatsache, dass sie einen „suggesting contact“ (Pólya, 1954) zum Phänomenbereich herstellen sollen. Steinle (2005) bezeichnet diesen Modus als „exploratives Experiment“ und beschreibt disziplinunabhängig charakteristische Vorgehensweisen.

Kant'sche Experimente: Dies sind reine Gedankenexperimente, in denen allein durch das logische Spiel mit den Voraussetzungen unserer Erkenntnis neue Erkenntnisse entstehen können. Ein solches Experiment fußt stark auf Deduktion, das Neue entsteht durch die bewusste Abwandlung der Voraussetzungen. In der Naturwissenschaft finden solche Experimente bei der Entwicklung neuer Theorien statt, in der Mathematik konstituiert diese Experimentform Erkenntnisprozesse, die im Kleinen von der Variation von Voraussetzungen in Definitionen oder im Großen von der Exploration von Axiomensystemen ausgehen (z. B. bei der Gewinnung nicht-euklidischer Geometrien). In der Mathematik könnte man daher diesen Experimenttyp mit Fug und Recht auch als „Hilbert'sche Experimente“ (vgl. z. B. Davis & Hersh, 1999, S. 339) bezeichnen.

Galilei'sche Experimente: Dieser Experimenttyp ist der in den empirisch arbeitenden Wissenschaften dominierende und dient der Absicherung von Wissen im falsifikationistischen Ansatz, wie ihn Karl Popper in seinem kritischen Rationalismus herausarbeitete (Popper, 1963). In dieser Tradition hat sich eine methodische Hochform des Experimentes herausgebildet, das durch Variablenkontrolle, Randomisierung und wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung das Problem der Verallgemeinerbarkeit des Einzelexperiments (Induktionsproblem) angeht. Den dahinter stehenden Prozess der Prüfung einer Hypothese am Beispiel (und nur diesen Schritt und nicht etwa die Gewinnung der Hypothese bezeichnet Peirce als „Induktion“) ist, wie die hier diskutierten Beispiele gezeigt haben, auch präsent in Prozessen mathematischen Erkenntnisgewinns. Die Prüfung an einer großen Zahl von Beispielen, an generischen oder an Extrembeispielen dient der Steigerung von Plausibilität (bei nichtgelingender Widerlegung) und wird von Pólya als „supporting contact“ bezeichnet. Sogar das Argument, dass die Stärke des Plausibilitätsgewinns von der Qualität der Beispiele abhängt, ist in Naturwissenschaft und Mathematik analog: Die Aufgabe des Wissenschaftlers besteht gerade darin, möglichst *kritische* Beispiele zu wählen, er muss temporär als der stärkste Widersacher seiner eigenen Theorien auftreten. Erst nach einer solchen Phase experimentellen Arbeitens scheiden sich die Wege von Mathematik und Naturwissenschaften, da letzteren jenseits des kritischen Experiments keine Möglichkeiten einer deduktiven Absicherung zur Verfügung stehen.

Aristotelische Experimente: Der Vollständigkeit halber sei noch dieser Experimenttyp genannt, der nicht dem Prozess der Wissensgewinnung, sondern dem Erklären und Veranschaulichen von Zusammenhängen an besonders prägnanten Beispielen dient. Das aristotelische Experiment ist eher von pädagogischem Charakter und entspricht dem, was in den Fachdidaktiken als „Demonstrationsexperiment“ bezeichnet wird.

Die hier genannten vier Kategorien von Experimenten sind „skalierbar“, man kann sie zur Beschreibung kurzer Phasen in konkreten Erkenntnisprozessen individueller Wissenschaftler, ja sogar von Mathematiklernenden verwenden (Leuders et al., 2011). Instruktionsmodelle des „entdeckenden Lernens“ (discovery learning) in der Schule, welche vor allem die wissenschaftstheoretische Qualität des Lernprozesses hervorheben, betonen beispielsweise die Bedeutung der ersten drei „authentischen“ Experimenttypen. Eine höhere Effektivität von schulischen Lernprozessen, die sich an wissenschaftlichen Erkenntnisprozessen orientieren, ist damit allerdings nicht per se zu begründen, die Diskussion über Chancen und Gefahren von Demonstrationsexperimenten muss differenzierter geführt werden.

Man kann die vier Medawarschen Experimenttypen aber auch zu einem Analysewerkzeug für eine abgrenzende oder integrierende wissenschaftsphilosophische Charakterisierung von ganzen wissenschaftlichen Arbeitsfeldern und Disziplinen machen. Bei der alltäglichen Arbeit eines Mathematikers ist die Generierung von Hypothesen durch deduktives Spiel, durch abduktive Exploration oder durch induktive Prüfung an Beispielen mitunter eng verzahnt, aber auch hier lassen sich in der Regel in verschiedenen Phasen oder in verschiedenen Bereichen dominantere, respektive jeweils effektivere Formen des Experimentierens identifizieren. Die Bewegung der „experimentellen Mathematik“ zeichnet sich ja gerade dadurch aus, dass sie die Frage nach den geeigneten Formen von Experimenten zu einem methodologischen Diskurs erhebt.

Der typische Charakter des mathematischen „quasi-empirischen“ Experiments soll nun durch eine systematische Gegenüberstellung mit der „Hochform“ des Experimentes (als die das Galilei’sche angesehen wird), wie es in anderen Disziplinen wie etwa den Naturwissenschaften, der Psychologie oder der Medizin verstanden wird, verdeutlicht werden. Dabei soll noch einmal die Frage gestellt werden: Ist das „mathematische Experiment“ nur eine schwache Metapher, eine starke strukturelle Analogie oder gar eine Homologie, also eine ursächliche erklärbare Gleichartigkeit zum „naturwissenschaftlichen Experiment“?

Als Bezugspunkt und Konkretisierung für diese Gegenüberstellung betrachten wir einen umfassenden, mehrschrittigen Prozess anhand eines zahlentheoretischen Beispiels (angelehnt an Pólya, 1954). Eine analoge Analyse von Experimentierprozessen bei Schülerinnen und Schülern findet sich in Leuders & Philipp (2012).

Experimentieren in den empirischen Wissenschaften	Quasi-empirisches Experimentieren in der Mathematik
Den interessierenden Phänomenbereich eingrenzen, Werkzeuge zur Beschreibung des Bereiches sammeln bzw. anpassen (Definitionen, Operationalisierungen, Messverfahren).	Den interessierenden Phänomenbereich eingrenzen, Definitionen zur Beschreibung des Bereiches sammeln bzw. anpassen, *z. B. bei der Betrachtung der Gleichungen: 3 + 7 = 10, 3 + 17 = 20, 13 + 17 = 30. Die Summanden sind Primzahlen. Die Summe ist immer gerade. Das Phänomen erscheint interessant, möglicherweise beruht es auf einem Zusammenhang.*

Hier wird implizit angenommen, dass mathematische Phänomene einen überindividuellen Realitätscharakter besitzen – dies ist die „Arbeitshypothese“ des Mathematikers in seiner täglichen Arbeit. Insbesondere Schülerinnen und Schülern dient diese Phase zu einer ersten Orientierung im Problemraum.

Bestehende Theorien danach ausloten, welche Zusammenhänge sie bereits vorhersagen bzw. erklären können.	Bestehende Theorien zum Bereich ausloten. *Die Summe zweier ungerader Zahlen ist immer gerade. Alle Primzahlen mit Ausnahme der 2 sind ungerade. Wenn die Summe von zwei Primzahlen gerade ist, sind die beteiligten Primzahlen ungerade. Wenn die Summe von zwei Primzahlen ungerade ist, muss eine 2 beteiligt sein.*

Als Theorie kann hier beispielsweise ein logischer Zusammenhang aufgefasst werden: „Wenn ..., dann ...“ oder ein funktionaler/stochastischer Zusammenhang: „*x* hängt von *y* auf diese Weise ab ...“. Das Ausloten hat deduktiven Charakter und entspricht am ehesten dem Kantschen Experiment. Häufig werden solche theoretischen Aspekte von Schülerinnen und Schülern nicht explizit geäußert.

Den Phänomenbereich explorieren, durch systematische Variation Phänomene erzeugen, interessante Variablen identifizieren.	Den Phänomenbereich explorieren, durch systematische Variation Beispiele erzeugen, interessante Variablen identifizieren, *z. B. kann man systematisch gerade Zahlen als Summe zweier Primzahlen darzustellen versuchen: 6 = 3 + 3. Geht es immer so weiter? 8 = 3 + 5, 10 =3 + 7 = 5 +5; hier gibt es mehrere Möglichkeiten. 12 = 5 + 7. Hier funktioniert die 3 nicht, möglicherweise kann es auch Zahlen geben, bei denen die 5 oder die 7 auch nicht funktioniert. Vielleicht kann man bei geraden Zahlen eher in der Nähe der Hälfte geeignete Primzahlen finden?*

Dies ist der Kern des explorativen, Bacon’schen Experimentes: Solange die Zusammenhänge im Phänomenbereich noch nicht offen liegen, werden Phänomene generiert und auf systematische Zusammenhänge hin untersucht. Sofern sich die Generierung durch mehr oder weniger systematische Variation bestimmter Variablen vollzieht, verdichten sich Vermutungen darüber, welche (unabhängige) Variablen einen besonders relevanten Einfluss haben und welche (abhängigen) Variablen besonders sensitiv reagieren. Die hierbei nötige Kompetenz des Erkennens von Mustern und Strukturen stellt einen curricularen Kern vorschulischer und schulischer mathematischer Förderung dar.

Hypothesen über einen kausalen Zusammenhang der Variablen aufstellen, ggf. den Zusammenhang mathematisieren.	Hypothesen über einen mathematischen Zusammenhang aufstellen. *Auch wenn es noch kein klares Verfahren zur Zerlegung in Primzahlen gibt, kann man doch die Vermutung aufstellen: Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden.*

Die hypothetisierten Zusammenhänge können deterministisch oder stochastisch sein. In den empirischen Wissenschaften müssen die zugrundeliegenden Variablen erst explizit mathematisch modelliert werden. In den Naturwissenschaften ist eine Variable in der Regel eine physikalische Messgröße. In der Psychologie bedeutet es einen besonderen Aufwand, Konstrukte und passende Messgrößen zu erarbeiten und empirisch abzusichern. In der Mathematik liegt die Variable bereits mathematisiert vor. Dennoch ist nicht evident, *welche* Variable für ein Phänomen entscheidend ist. Das Beispiel zeigt auch, dass Variablen nicht unbedingt metrische Größen sein müssen, sondern auch kategoriale Variablen sein können, wie z. B. die Parität („gerade/ungerade“).

Ein Experiment planen: relevante unabhängige Variablen zur Variation festlegen, weitere Variablen kontrollieren (fixieren, randomisieren).	Die Überprüfung der Hypothese an Beispielen planen: relevante Variable und deren Variation identifizieren. *Zur Prüfung werden eine Reihe gerader Zahlen ausgewählt, die dann im nächsten Schritt auf eine Zerlegung in zwei Primzahlen untersucht werden sollen. Hier kann man versuchen, „zufällig“ auszuwählen, oder möglicherweise kritische Beispiele aussuchen, z. B. Zahlen mit vielen Teilern.*

In den empirischen Wissenschaften ist die Aufklärung von *Kausalität* zwischen Variablen ein wesentliches Ziel des experimentellen Vorgehens. In der Mathematik ist dies weniger gravierend, weil ja die Absicherung des vermuteten Zusammenhangs von Variablen aus einer späteren deduktiven Behandlung folgt. Die Untersuchung, inwiefern verschiedene experimentell gewonnene Implikationen möglicherweise auch in ihrer Umkehrung gelten, ist in der Mathematik auch unabhängig von einer Ursache-Wirkungs-Annahme in einem naturwissenschaftlichen Zusammenhang. In beiden Bereichen ist aber die Identifikation der relevanten Variablen für die Aussagekraft eines Experimentes entscheidend. Wählt man unpassende unabhängige oder abhängige Variablen, so kann das Ergebnis ausbleiben oder keine Aussagekraft für die Hypothese besitzen. Auch im mathematischen Experiment kann es beispielsweise geschehen, dass man eine mit anderen Variablen konfundierende unabhängige Variable wählt, indem man nur Fälle in einem systematisch eingeschränkten Beispielraum betrachtet.

Das Experiment durchführen, Rahmenbedingungen konstant halten, Daten über unabhängige und abhängige Variable erfassen.	Beispiele erzeugen und Ergebnisse/ Konsequenzen bestimmen. *60 = 3 + Primzahl? nein* *60 = 5 + Primzahl? nein* *60 = 7 + 53 usw.* *1000 = 491 + 509*

Der Vorgang des Durchführens ist in der Mathematik auf den ersten Blick unproblematischer, insbesondere weil der Raum einer unbetrachteten Variablen (z. B. Temperatur) in der Regel keiner besonderen „technischen“ Kontrolle bedarf. Dafür kann die Prüfung des Zusammenhangs zu umfassenden und komplexen mathematischen Aktivitäten führen. Dennoch ist auch beim mathematischen experimentellen Arbeiten die Konzentration auf die relevanten Variablen („Was ändere ich? Was beobachte ich?“) entscheidend dafür, wie reichhaltig, bedeutsam und sicher die Ergebnisse der experimentellen Phase sind. Wenn man durch das Experiment beispielsweise keine Gegenbeispiele findet, lohnt der Versuch eines deduktiven Beweises. Misslingt dieser, könnte es unter Umständen an den mangelhaft definierten Voraussetzungen liegen, sprich gerade an der mangelnden Variablenkontrolle bzw. der mangelhaften Identifikation relevanter Randbedingungen.

Die Konformität der Daten mit der Hypothese überprüfen, *z. B. durch inferenzstatistische Auswertung im Kontrollgruppendesign.*	Die Konformität des Ergebnisses mit der Hypothese überprüfen. *Die Hypothese erscheint nach Prüfung von Beispielen immer „plausibler“: Jede der gewählten geraden Zahlen lässt sich tatsächlich als Summe zweier Primzahlen darstellen.*

Dies ist sowohl in den Naturwissenschaften als auch in der Mathematik der kritische Schritt des Galilei’schen Experimentes, das Resultat der prüfenden Induktion. Bei komplexen Experimenten (Psychologie, Hochenergiephysik) kann der Weg von den Daten bis zur Hypothesenprüfung ein komplexer sein.

Das Ergebnis analysieren: Hat sich die Plausibilität der Hypothese erhöht? Habe ich ggf. entscheidende Variablen vergessen?	Das Ergebnis analysieren: Hat sich die Plausibilität der Hypothese erhöht? Prüfen, ob ggf. entscheidende Variablen vergessen wurden. *Wurden hinreichend unterschiedliche/viele/generische Beispiele betrachtet? Möglicherweise sind 60 und 1000 zu speziell? Mögli_cherweise wird es erst bei sehr großen Zahlen immer schwieriger und dann unmöglich?*

In der Mathematik und den empirischen Wissenschaften ist ein negatives Ergebnis idealiter eine Widerlegung der Hypothese. In der Forschungsrealität sind die Konsequenzen weit komplexer: Es folgt z. B. eine Reanalyse der Daten, eine Modifikation der Hypothese, eine Modifikation des Experimentes, eine Modifikation der Definitionen. Dass dies auch in der Mathematik geschieht, hat Lakatos (1979) plastisch dargelegt. Bei positivem Ausgang ist man in Mathematik und Naturwissenschaft gleichermaßen darauf angewiesen, die Aussagekraft und die Reichweite des Ergebnisses zu bewerten. In beiden Bereichen kann das positive Ergebnis nur als Erhöhung der Plausibilität einer Hypothese gewertet werden. Das Ausmaß dieser Plausibilitätserhöhung ist jedoch nicht empirisch zugänglich, wohl aber einer systematischen Analyse und einem rationalen Diskurs.

In der Mathematik setzt nun aber ein Erkenntnisprozess ein, der sich in den empirischen Wissenschaften nicht findet. Die Untersuchung der Strukturen hat möglicherweise nicht nur zu einer Erhöhung der Plausibilität geführt, sondern es wurden Strukturen identifiziert, die es möglich erscheinen lassen, die Hypothese deduktiv zu klären. In diesem Schritt gibt es für den Beweis in der linken Tabellenspalte kein Pendant. Eine theoretisch-deduktive Überprüfung kann allerdings anders stattfinden.

Zum Beispiel Hinweise auf eine Passung zu anderen Theorien suchen, durchaus auch durch mathematische Deduktion.	Einen Beweis konstruieren. *Möglicherweise steckt in der systematischen Suche nach Primzahlsummen bereits eine Idee für einen Algorithmus, der die Existenz der Zerlegung sichert? Während die Überzeugung, dass die Vermutung richtig ist, sich auf experimentellem Weg schnell festigt, ist ein solcher naheliegender Beweis nicht zu erkennen. Schlimmer noch: Ein Beweis für die hier beschriebene Goldbach'sche Vermutung ist bislang nicht gefunden.*

Während experimentelle Ergebnisse der empirischen Wissenschaften in die Phase der Publikation und Diskussion münden, ist das Ergebnis eines mathematischen Experimentes also nur eine Vorstufe zur deduktiven Absicherung. Dieser Prozess kann noch mindestens so komplex wie der bisher beschriebene experimentelle sein.

Publikation, kritische Diskussion des Experimentes in der Wissenschaftlergemeinschaft, ggf. Replikation, Modifikation, Erweiterung.	Publikation, kritische Diskussion des Beweises in der Wissenschaftlergemeinschaft, ggf. Korrektur, Erweiterung, weitere, alternative Beweise.

Im „context of persuasion“ unterscheiden sich die Wissenschaften nur in einem Punkt: In der Mathematik wird die deduktive Absicherung, in den empirischen Wissenschaften die experimentelle kritisch auf ihre Überzeugungskraft geprüft. In beiden Bereichen allerdings werden das Ergebnis und seine Bedeutung für die Theorieentwicklung diskutiert. Dabei gibt es weit mehr Kriterien für die „Wahrheit“ im Sinne der Überzeugungskraft, z. B. die Einfachheit, die Relevanz usw.

6 Experimentieren in der fachdidaktischen Lehr-Lern-Forschung

Der Anlass für die vorstehende, theoretische Beschäftigung mit experimentellen Prozessen in der Mathematik war für uns nicht allein die Klärung mathematikphilosophischer Zusammenhänge, sondern die erkenntnistheoretische Fundierung einer empirischen Fragestellung: Lassen sich Prozesse individueller Erkenntnisgewinnung bei Schülerinnen und Schülern auch empirisch als experimentelle Prozesse im oben beschriebenen Sinne verstehen, empirisch erfassen und möglicherweise auch systematisch fördern?

Der empirische Blick auf mathematisches Denken von Schülerinnen und Schülern durch die Theoriebrille des Experimentierens ist bislang kaum in der Literatur zu finden. In den Naturwissenschaften jedoch hat das Experiment als zentrales Instrument der Erkenntnisgewinnung einen hohen Stellenwert. Daher findet man entsprechende Ansätze und Modelle eher in den Didaktiken der Naturwissenschaften als in der Mathematikdidaktik. Dazu gehören einfache Phasenmodelle des Experimentierens ebenso wie die Modellierung differenzierter Prozessschritte beim Experimentieren. Das Modell der „Scientific Discovery als Dual Search“ (SDDS) von Klahr und Dunbar (1988; 2000) bildet den Prozess des Experimentierens als eine Suche in zwei Räumen ab, einem Hypothesensuchraum und einem Experimentesuchraum. Wesentliche Schritte im Experimentierprozess sind die Bildung und Prüfung von Hypothesen sowie deren Evaluation. Um diese Schritte (immer wieder) vollziehen zu können, sind ständige Wechsel zwischen den beiden Suchräumen nötig. Besonders deutlich wird in diesem Modell die Komplexität der ablaufenden Prozesse, die eher zirkulären Charakter haben als einem Phasenmodell zu folgen.

In die Mathematikdidaktik hat das Konzept des Experimentierens bislang wenig Eingang gefunden. Verschiedene Modelle zum Problemlösen greifen teilweise ähnliche kognitive Prozesse Lernender auf, fokussieren dabei aber weniger mathematischen Erkenntnisgewinn als vielmehr das kreative Verknüpfen von Operationen, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen (vgl. Philipp, 2013). Experimentell-induktives Vorgehen beim Mathematiktreiben hat aber, wie die historischen Wurzeln andeuten, einen eigenen Stellenwert in mathematischen Lernsituationen.

Die Bedeutung induktiven Denkens beim Mathematiklernen betonen Haverty et al. (2000). In ihrer Untersuchung konnten sie induktive zielführende Vorgehensweisen Studierender beim Finden passender Funktionsterme zu vorgegebenen Datensätzen identifizieren: (1) das Sammeln von weiteren Beispielen (Daten), (2) das Finden von Mustern in den Daten und (3) das Generieren von Hypothesen. Erfolgreiche Probanden zeigten dabei Vorgehensweisen in allen drei Bereichen und bauten Erkenntnisse sukzessive auf. Ähnliche Ergebnisse beschreiben auch Leuders et al. (2011) bei der Untersuchung experimenteller Prozesse Mathematiklernender in offenen explorativen Situationen. Darüber hinaus wird aber auch ein vierter zentraler Bereich genannt, das Überprüfen von gefundenen Hypothesen.

In beiden Ansätzen wird die Rolle der „Erforschung“ von selbst generierten Beispielen als Basis mathematischer Erkenntnisgewinnung verdeutlicht. Der experimentelle Charakter wird insbesondere im Zusammenspiel der vier Vorgehensweisen (Abb. 1) klar, indem zwei wesentliche Funktionen von Experimenten erfüllt werden: Mathematisches Experimentieren hat hypothesengenerierenden, aber auch konfirmatorischen Charakter. Damit zeigt sich, dass Arbeitsweisen von Mathematikern bei der Entstehung neuen mathematischen Wissens eine große Ähnlichkeit aufweisen mit denen Lernender.

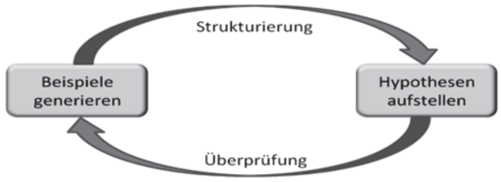

Abb. 1: Modell experimenteller Prozesse beim Mathematiklernen

7 Fazit und Ausblick

Experimentelle, abduktive und induktive Vorgehensweisen spielen bei der Gewinnung neuer mathematischer Erkenntnisse eine bedeutende Rolle, wie das historische Beispiel von Euler gezeigt hat. Analysiert man diese Arbeitsweisen vor dem theoretischen Hintergrund des (Quasi-)Experimentierens, wie Euler selbst sein Vorgehen bezeichnet, so lassen sich strukturelle Parallelen zum Experimentierverständnis in den Naturwissenschaften aufzeigen, die es nahe legen, das Experiment auch in der Mathematik als bedeutende Arbeitsweise anzuerkennen. Dabei wird deutlich, dass bei aller Nähe zu den Naturwissenschaften auch ein wesentlicher Unterschied darin besteht, dass Mathematik und Naturwissenschaften Objekte unterschiedlichen Charakters untersuchen.

Das Wissen über die Bedeutung solcher Prozesse im mathematischen Erkenntnisprozess ist aber auch hilfreich, um bei Schülerinnen und Schülern individuelle Erkenntnisprozesse verstehen und anregen zu können (vgl. Leuders et al. 2011; Philipp, 2013). Damit kommt dem Experiment in der Mathematik eine doppelte Bedeutung zu: Es ist wissenschaftliche Methode und Modell für die individuelle Genese mathematischer Erkenntnisse zugleich.

Die besondere Hervorhebung, die das Experiment in diesem Beitrag erfährt, soll dazu beitragen, ein besseres Verständnis der experimentellen Seite der Mathematik zu entwickeln und ihren Nutzen für die Lehr- und Lernforschung zu betonen, ohne dabei auch die andere Seite der Mathematik zu vernachlässigen, oder wie Pólya es beschreibt: „Nach Euklid dargestellt, erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft; aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle induktive Wissenschaft“ (Pólya, 1949, S. 9).

Literatur

Barrow, J. D. (1994). Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit. Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Berlekamp, E. R.; Conway, J. H.; Guy, R .K. (2001). Winning Ways for your Mathematical Plays (2nd ed.). Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters Ltd.

Borwein, J. M.; Bailey, D. H. (2004). Mathematics by experiment. Plausible reasoning in the 21st century. Natick, Mass.: A. K. Peters.

Devlin, K. J. (1998). Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akad. Verlag.

Epstein, D.; Levy, S. (1995). Experimentation and Proof in Mathematics. In: Notices of the AMS, Jg. 42, H. 6, S. 670–674.

Euler, L. (1751). Decouverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport a la somme de leurs diviseurs. (Discovery of an extraordinary law of numbers in relation to the sum of their divisors). In: Bibliotheque impartiale (3), S. 10–31.

Euler, L. (1761). Specimen de usu observationum in mathesi pura. (Example of the use of observation in pure mathematics). In: Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae: Anonymos, Vol. 6, S. 185–230.

Fann, K. T. (1970). Peirce's theory of abduction. The Hague: Nijhoff.

Franklin, J. (2009). Aristotelian Realism. In: Irvine, Andrew D. (Hrsg.): Philosophy of mathematics. Amsterdam: Elsevier (Handbook of the philosophy of science, 4), S. 103–155.

Hardy, G. H. (1940). Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work. Cambridge: University Press.

Haverty, L., Koedinger, K. R., Klahr, D., & Alibali, M. W. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. Cognitive Science, Jg. 24, H. 2, S. 249–298.

Heintz, B. (2000a). Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Berlin: Springer.

Heintz, B. (2000b). „In der Mathematik ist ein Streit mit Sicherheit zu entscheiden". Perspektiven einer Soziologie der Mathematik. In: Zeitschrift für Soziologie, Jg. 29, H. 5, S. 339–369.

Hoyningen-Huene, P. (1987). Context of Discovery and Context of Justification. Studies in History and Philosophy of Science, Jg. 18, S. 501–515.

Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. Cognitive Science, (12), 1–48.

Klahr, D., & Dunbar, K. (2000). Exploring science: The cognition and development of discovery processes. A Bradford book. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Lakatos, I. (1979). Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen. Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie. Braunschweig: Vieweg.

Leuders, T. & Philipp, K. (2012). Experimentelles Arbeiten in der Mathematik – ein Brückenschlag zur Naturwissenschaft mit Blick auf Peirce, Pólya und Medawar. In: W. Rieß, M. Wirtz, B. Barzel, A. Schulz (Hrsg.), Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten. Münster: Waxmann, S. 75–88.

Leuders, T.; Naccarella, D.; Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jg. 32, Nr. 2, 205–231.

Lolli, G. (2008): Experimental Methods in Proofs. In: Lupacchini, R.; Corsi, G. (Hrsg.): Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof. Milano: Springer, S. 65–79.

Medawar, P. B. (1969). Induction and intuition in scientific thought. London: Methuen.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim u. a.: Franzbecker.

Meyer, M. (2009). Abduktion, Induktion – Konfusion. Bemerkungen zur Logik der interpretativen Sozialforschung. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Jg. 12, H. 2, S. 302–320.

Peirce, C. S.; Hartshorne, C.; Weiss, P. (1960a). Pragmatism and pragmaticism and Scientific metaphysics. [2. print]. Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard Univ. Press (Collected papers of Charles Sanders Peirce / ed. by Charles Hartshorne …; Vol. 5 and 6).

Peirce, C. S.; Hartshorne, C.; Weiss, P. (1960b). Principles of philosophy and Elements of logic. 2. print. Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard Univ. Press (Collected papers of Charles Sanders Peirce / ed. by Charles Hartshorne …; Vol. 1 and 2).

Philipp, K. (2013). Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Pietschmann, H. (1996). Phänomenologie der Naturwissenschaften. Berlin/Heidelberg: Springer.

Pólya, G. (1949). Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern: Francke.

Pólya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics (Mathematics and plausible reasoning / G. Pólya, Vol. 1) Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1969). Induktion und Analogie in der Mathematik. Zweite Aufl. Basel u. a.: Birkhäuser.

Reichertz, J. (2003). Die Abduktion in der qualitativen Sozialforschung. Qualitative Sozialforschung: Vol. 13. Opladen: Leske + Budrich.

Richter, A. (1995). Der Begriff der Abduktion bei Charles Sanders Peirce. Europäische Hochschulschriften. Reihe 20, Philosophie, Vol. 453. Frankfurt Main: Lang.

Santaella, L. (1997). The development of Peirce's three types of reasoning: Abduction, Deduction and Induction. 6th Congress of the IASS.

Shadish, W.; Cook, T.; Campbell, D. (2002). Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference. Boston: Houghton Mifflin.

Sørenson, H. K. (2010). Exploratory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm. In: Löwe, B.; Müller, T. (Hrsg.): Texts in Philosophy, Vol. 11, PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice. London: College Publications, S. 341–360.

Steinle, F. (2005). Explorative Experimente: Ampère, Faraday und die Ursprünge der Elektrodynamik. Boethius: Bd. 50. Stuttgart: Steiner Verlag.

Stewart, I. (2001). Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Walther, E., Peirce, C. S. (1967). Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften. Baden-Baden: Agis-Verlag.

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Communications on Pure and Applied Mathematics 13, 1–14.

Zeilberger, D. (1993). Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture. In: Notices of the American Mathematical Society, H. 46, S. 978–981.

Anschrift der Verfasserin und des Verfassers

Prof. Dr. Timo Leuders
Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematische Bildung
Kunzenweg 21
D-79117 Freiburg
leuders@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Kathleen Philipp
Pädagogische Hochschule Zürich
Fachbereich Mathematik
Lagerstr. 2
CH-8090 Zürich
kathleen.philipp@phzh.ch

Eingang Manuskript: 28.02.2014
Eingang überarbeitetes Manuskript: 23.01.2015
Online verfügbar: 02.03.2015