„Anschaulichkeit“ aus der Sicht von Lehramtsstudierenden

Ein didaktisches Prinzip für lehramtsspezifische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase

von

Nils Buchholtz & Daniel Behrens, Hamburg

Kurzfassung: Derzeit existieren verschiedene hochschuldidaktische Maßnahmen, das Lehramtsstudium im Gymnasialbereich professionsbezogener zu gestalten. Im Rahmen der Evaluationsstudie TEDS-Telekom wurden dazu an mehreren Hochschulen Lehramtsstudierende zu ihrer Einschätzung von Lehrveranstaltungen interviewt. Einen besonderen Schwerpunkt der Interviews bildete die Frage zur Einbindung von Anschaulichkeit in fachmathematische Lehrveranstaltungen. Die Ergebnisse der Befragung zeigen, dass Lehramtsstudierende ein breites Spektrum individuell geprägter Vorstellungen von Anschaulichkeit aufweisen, und die Wahrnehmung von Anschaulichkeit auch mit der spezifischen Lernmotivation der Studierenden zusammenhängt. Zur mathematikdidaktischen Einordnung der Ergebnisse der Studie wird die Anschaulichkeit innerhalb des Beitrags in den theoretischen Rahmen eines didaktischen Prinzips gestellt, dem in erweiterter Form auch im lehramtsspezifischen Hochschulbereich eine zentrale Rolle zukommt. Ausgehend von den Ergebnissen der Studie werden Implikationen für die Verbesserung der Lehrerausbildung diskutiert.

Abstract: Currently, various measures are taken to orientate the university teacher training program for secondary school teaching more related to the later profession. In the evaluation study TEDS-Telekom student teachers from several universities were interviewed about their perceptions of university courses. A particular focus of the interviews was the question about the integration of visualization resp. vividness in mathematical courses. The results of the survey show that prospective teachers have a broad spectrum of individually embossed notions of vividness and that the perceptions of vividness are associated with the specific learning motivation of the student teachers. Interpreting the results of the study from the perspective of mathematics education, within the contribution the vividness will be discussed in the theoretical framework of a didactic principle, which in an expanded form plays a major role in teacher education. Based on the results of the study implications for the improvement of teacher training programs are discussed.

1 Einleitung

Mathematiklehramtsstudierende für die gymnasiale Oberstufe besuchen ihre fachmathematischen Lehrveranstaltungen in der Regel gemeinsam mit (Mathematik-) Bachelorstudierenden. Die Diskussion um Polyvalenz oder Professionalisierung in der Lehrerausbildung stellt diesen Umstand zwar fortwährend auf den Prüfstand, allerdings ist eine getrennte Ausbildung von Lehramtsstudierenden in der Regel aus kapazitären Gründen an vielen Universitäten bislang nicht machbar und liegt darüber hinaus im Bereich der universitären Selbstverwaltung (vgl. dazu Bruder et al., 2010). Dabei gibt es Hinweise darauf, dass sich der fachliche Wissenserwerb dieser beiden Gruppen von Studierenden in der Studieneingangsphase durchaus unterschiedlich entwickelt (Buchholtz & Kaiser, 2013) und sich insbesondere die Gruppe der Lehramtsstudierenden durch spezifisch-professionsbezogene Bedürfnisse und unterschiedliche Lernvoraussetzungen auszeichnet (Kaiser & Buchholtz, 2014). Auch im Studienverhalten bestehen Unterschiede: So investieren Lehramtsstudierende beispielsweise zwar viel Zeit in die Vor- und Nachbereitung von Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase und in den Besuch von studentischen Arbeitsgruppen/Tutorien, dafür aber (im Gegensatz zu Bachelorstudierenden) so gut wie keine Zeit in den Besuch von zusätzlichen Lehrveranstaltungen (vgl. Stancel-Piątak, Schwippert & Doll, 2011, S. 166); ein Umstand, der durch das Studium des zweiten Faches bedingt sein dürfte, aber letztlich auch Einfluss auf die Aneignung mathematischen Fachwissens nimmt (vgl. dazu Blömeke, Kaiser & Döhrmann, 2011).

Unterschiede zwischen den beiden Gruppen bestehen u. a. auch hinsichtlich der studiengangspezifischen Lernziele, die an die Vermittlung des Fachwissens in mathematischen Lehrveranstaltungen geknüpft werden. So müssen Lehramtsstudierende beispielsweise „über die rein fachliche Sicht hinaus auch über epistemologische Aspekte und über adäquate Vorstellungen zu den grundlegenden Ideen der Analysis Bescheid wissen. Darüber hinaus müssen Lehramtsstudierende in die Lage versetzt werden, die Gegenstände der Schulmathematik aus fachmathematischer Sicht zu durchdringen, einzuordnen, Querverbindungen herzustellen und die fundamentalen Ideen für den Mathematikunterricht herauszuarbeiten“ (Bruder et al., 2010, S. 8). Werden diese professionsorientierten Bedürfnisse von Mathematiklehramtsstudierenden in mathematischen Lehrveranstaltungen ernst genommen, so hat die Vermittlung des mathematischen Fachwissens innerhalb der Lehrerausbildung nicht nur das Ziel, das rein inhaltliche Verständnis der Fachsystematik zu fördern, sondern darüber hinaus – in Vorbildfunktion – auch den Aspekt eines Verstehens für die Berufspraxis zu berücksichtigen. Dies beinhaltet beispielsweise, eine Vielzahl unterschiedlicher Zugänge zu mathematischen Begriffen zu vermitteln oder adaptiv an das schulische Vorwissen anzuknüpfen, um die Lehramtsstudierenden modellhaft zur selbstständigen Transformation mathematischer Fachinhalte in Bildungsumgebungen zu befähigen (vgl. Kaiser & Buchholtz, 2014).

Seit einiger Zeit lassen sich im Bereich der Hochschuldidaktik Bestrebungen ausmachen, Mathematiklehramtsstudierende durch innovative Entwicklungen zur Professionsorientierung innerhalb der Studieneingangsphase in ihrem fachlichen Wissenserwerb zu unterstützen. Ziel der verschiedenen Projekte in diesem Bereich ist im Allgemeinen, den kritischen Übergang zwischen Schule und Hochschule zu begleiten und/oder das Lehramtsstudium in der Studieneingangsphase stärker an den beruflichen Anforderungen von Lehrerinnen und Lehrern zu orientieren. Dabei profilieren sich die einzelnen Projekte in der Regel inhaltlich und formal, beispielsweise in Form von zusätzlichen lehramtsspezifischen Lehrveranstaltungen, Vorkursen, didaktischen Unterstützungen oder speziellen praxisorientierten Vorlesungsstrukturen für Lehramtsstudierende (siehe z. B. Beutelspacher, Danckwerts, Nickel et al., 2011; Ableitinger & Herrmann, 2011; Biehler, Hochmuth, Fischer et al., 2011; Mentz, 2012; Herrmann, 2012; Schwarz, Herrmann, Kaiser et al., 2013). Die Bewegung, die in den letzten Jahren durch die intensive Diskussion der Ansätze solcher Förderprojekte in die lehramtsspezifische Hochschuldidaktik im Fach Mathematik gelangt ist, ist aus Sicht der Lehrerausbildung nur zu begrüßen. Wir möchten allerdings mit diesem Beitrag auf die Notwendigkeit einer wissenschaftlich geleiteten Reflexion hochschuldidaktischer Innovationen hinweisen. Da vielfach den eher konzeptionell geprägten Veröffentlichungen von Urhebern dieser oder ähnlicher Projekte lediglich selbst durchgeführte Befragungen von Studierenden an den entsprechenden Standorten gegenüberstehen, besteht ein gewisser Bedarf nach standortübergreifenden externen wissenschaftlichen Evaluationen der Wirkung derartiger Bestrebungen (vgl. dazu Buchholtz, 2014). Im Folgenden stellen wir hierzu qualitative Ergebnisse aus der empirischen Forschungsstudie *Teacher Education and Development Study – Telekom* (TEDS-Telekom; Buchholtz & Kaiser, 2013; Kaiser & Buchholtz, 2014) vor, die den Wissenserwerb von Mathematiklehramtsstudierenden und insbesondere die Wirkung von hochschuldidaktischen Innovationen aus der Perspektive der Evaluation untersucht. Dabei wurden in der Studie sowohl der Kompetenzerwerb der Studierenden (siehe Buchholtz & Kaiser, 2013) als auch institutionelle Rahmenbedingungen und die individuelle Wirkung einzelner hochschuldidaktischer Aspekte (siehe Buchholtz & Blömeke, 2012) untersucht. Wir konzentrieren uns im Rahmen dieses Artikels dabei auf die Untersuchung eines hochschuldidaktischen Aspekts, dem unserer Ansicht nach eine zentrale Rolle im Prozess der Verbesserung der Mathematiklehrersausbildung zukommt: Es handelt sich um die Einbindung von *Anschaulichkeit* in mathematische Lehrveranstaltungen. Wie wir zeigen werden, wird den Lehramtsstudierenden nicht nur das Verständnis der in den Eingangsveranstaltungen behandelten mathematischen Inhalte erleichtert, wenn verschiedene anschauliche Formen der Vermittlung der Fachmathematik eine Rolle spielen. Die Einbindung von Anschaulichkeit besitzt darüber hinaus Modellcharakter und berücksichtigt professionsbezogene Bedürfnisse, da die Studierenden in die Lage versetzt werden, komplexe mathematische Inhalte in ihrem späteren Beruf ebenfalls anschaulich zu vermitteln[1]. Unsere Ergebnisse zeigen, dass ein Teil der Lehramtsstudierenden gerade deshalb Wert auf anschauliche Lerninhalte legt, weil die Anschaulichkeit von ihnen selbst für beruflich relevant erachtet wird.

Um uns der Bedeutung des „Anschaulichen" im Lehramtsstudium zu nähern, werden wir im folgenden Abschnitt inhaltlich zunächst auf Ansätze zur Einbindung von Anschaulichkeit im Lehramtsstudium und auf den allgemein mit der Anschaulichkeit verbundenen Aspekt des Wechsels von verschiedenen Darstellungsebenen eingehen. Daran angeschlossen wird die zugrunde liegende Evaluationsstudie inhaltlich und methodisch vorgestellt. Die im vierten Abschnitt beschriebenen empirischen Ergebnisse dieser Studie zeigen einen Ausschnitt der Erfahrungen, die Lehramtsstudierende von verschiedenen Hochschulen in ihrem Studium mit der Einbindung von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen gemacht haben. Die Ergebnisse vermitteln insbesondere einen Eindruck der Heterogenität der Vorstellungen zur Anschaulichkeit von mathematischen Lerninhalten, die sich erst im Prozess der Auswertung der Ergebnisse zeigte und die überraschenderweise hochschulübergreifend auftrat. Da diese Auffassungen mathematikspezifische Zugänge der Anschaulichkeit aufgreifen und wir der Ansicht sind, dass eine Synthese dieser Ergebnisse auch einen Beitrag zur mathematikdidaktischen Theorie leisten kann, diskutieren wir in einem abschließenden Abschnitt die Bedeutung der Einbindung von Anschaulichkeit noch einmal theoretisch unter dem Aspekt eines didaktischen Prinzips im Rahmen der lehramtsspezifischen Hochschuldidaktik. Lehrende im Bereich der Eingangsveranstaltungen des Mathematikstudiums können aus den Ergebnissen Anregungen erhalten, welche Aspekte sie in ihren Veranstaltungen mehr berücksichtigen können, um die Lehre in diesem Bereich stärker auf Lehramtsstudierende und ihre spezifischen Anforderungen auszurichten.

---

[1] Wir schließen damit nicht aus, dass auch Mathematik-Bachelorstudierende für das Verständnis mathematischer Inhalte von der Einbindung von Anschaulichkeit in fachmathematischen Lehrveranstaltungen profitieren können, allerdings besteht für diese Studierenden keine vordergründige didaktische Notwendigkeit, Anschaulichkeit prototypisch im Studium zu erfahren.

2 Anschaulichkeit im Mathematiklehramtsstudium – ein sinnvoller Aspekt?

Das von der Deutschen Telekom Stiftung finanzierte Projekt „Mathematik Neu Denken“ (Beutelspacher et al., 2011) – ein Forschungs- und Entwicklungsvorhaben zur Neuorientierung der Gymnasiallehrerausbildung im Fach Mathematik an den Universitäten Siegen und Gießen – zielte darauf, durch die Entwicklung und Durchführung lehramtsspezifischer Lehrveranstaltungen anschauliche und verständnisorientierte Aspekte in das Mathematiklehramtsstudium zu integrieren. Im Mittelpunkt des in den letzten Jahren implementierten Projekts standen in Siegen und Gießen die gleich zu Studienbeginn angelegte Integration von *Hochschulmathematik* und *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (worunter ein vertieftes inhaltliches Verständnis zentraler schulmathematischer Konzepte gefasst wird) sowie die frühe Integration fachdidaktischer Aspekte. Des Weiteren stand eine Umgestaltung der fachwissenschaftlichen Einführungsvorlesungen Analysis und Lineare Algebra im Vordergrund, in der durch die Einbindung von Anschaulichkeit auf die Kraft der Anschauung und auf das Primat der Geometrie gesetzt wurde. Im Wesentlichen wurde innerhalb des Projekts versucht, mathematische Inhalte durch prozessorientierte und beispielbezogene Arbeitsweisen, das Einbeziehen geschichtlicher und philosophischer Aspekte und eine hinreichend explizite schulmathematische Orientierung zu vermitteln (Beutelspacher et al., 2011, S. 21 ff.).

Theoretisch wurde sich dabei auf die Ansätze Felix Kleins bezogen, der bereits zu Beginn des letzten Jahrhunderts anschauliche und verständnisorientierte Ansätze beim Wissenserwerb im Lehramtsstudium betonte. In seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ heißt es „Die Darstellung in der Schule muß nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, psychologisch, nicht systematisch sein. Der Lehrer muß sozusagen ein wenig Diplomat sein, er muß auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen zu können und das wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in anschaulich faßbarer Form darbietet“ (Klein, 1908, S. 8 f.). Schon zu Beginn des letzten Jahrhunderts sieht Klein in der anschaulichen Vermittlung von Mathematik eine so substanzielle Aufgabe für Lehrende, dass er Anschaulichkeit selbst in die eigene hochschulmathematische Lehrveranstaltung integriert. Dieser Ansatz sollte im Projekt „Mathematik Neu Denken“ an den Universitäten Gießen und Siegen auf die heutige Zeit übertragen werden. Beutelspacher u. a. (2011) beschreiben dazu in zahlreichen Beispielen, wie die Anschaulichkeit in Lehrveranstaltungen eingebunden werden kann.

Doch was bedeutet „anschaulich fassbare Form“ eigentlich genau? Auf welche Weise werden mathematische Inhalte „anschaulich“? Die *Anschaulichkeit* – ein so bedeutsamer Aspekt der täglichen Arbeit von Lehrerinnen und Lehrern aller Schulformen (und ebenso auch von Dozierenden an den Hochschulen) – ist und bleibt ein schillernder Begriff. Die Unschärfe des „Anschaulichen" rührt vermutlich nicht zuletzt aus dem Begriff selbst her, der sich einer genauen Definition entzieht und im Allgemeinen durch die subjektive Perspektive der Lehrenden und der Lernenden geprägt ist.

So ist die Anschaulichkeit auf der einen Seite ein didaktisches Mittel zur *Veranschaulichung*, also eine Form der didaktischen Aufbereitung von Lerninhalten durch Lehrende, die das Wahrnehmen und Verstehen der Lernenden fördert. Dabei steht die Veranschaulichung am ehesten im Zusammenhang mit dem kognitionspsychologischen Ansatz von Bruner (1974), in dem – zumindest für den schulischen Bereich – die Anschaulichkeit im Kontext eines Variationsprinzips verschiedener Darstellungsebenen verstanden wird, deren mathematikdidaktische Berücksichtigung sich heute in der Schulpraxis (nicht nur im Primarstufenbereich) weitgehend durchgesetzt hat:

- die enaktive Darstellung, d. h. die Erfassung von Inhalten durch eigene Handlungen;
- die ikonische Darstellung, d. h. die Erfassung von Inhalten durch Bilder oder Graphiken, sowie
- die symbolische Darstellung, d. h. die Erfassung von Inhalten durch Sprache oder mathematische Zeichen.

Das Herstellen von Anschaulichkeit – also das *Veranschaulichen* – lässt sich hierbei durch den bewussten Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsebenen oder zwischen verschiedenen Repräsentationen innerhalb ein- und derselben Darstellungsebene erreichen. Das Veranschaulichen wird dabei allerdings manchmal auch stärker mit dem Gebrauch unterschiedlicher *visueller* Darstellungsformen assoziiert (vgl. dazu Laakmann, 2013), d. h. im Sinne einer Visualisierung (vgl. Kadunz, 2003). Hierbei wird allerdings außer Acht gelassen, dass Anschaulichkeit auf der anderen Seite auch eng verbunden ist mit der *individuellen Anschauung* der Lernenden, die nicht nur auf die sinnliche Erfahrung des Sehens reduziert werden kann (im Sinne des Visualisierungsaspekts), sondern durch alle Sinne zugänglich ist (Böckmann, 1982) und insbesondere als „Innenschau" gleichzeitig Ziel und Ergebnis von Lern- und Verstehensprozessen und somit selbst Einsicht ist (Bildungsaspekt) (vgl. auch Klafki, 1964). Veranschaulichung und Anschauung stehen also insoweit in Beziehung zueinander, „als eine Bedingung für die Anschauungsbildung in der Anschaulichkeit der Erfahrungsinhalte erkannt werden kann." (Walcher, 1975, S. 10). Es stellt sich somit also die Frage, wie entsprechende Veranschaulichungen hochschulmathematischer Inhalte aussehen müssen, damit speziell Lehramtsstudierende von ihnen profitieren können.

Wir wollen in diesem Artikel bewusst keine exemplarische Betrachtung von gelungenen Transformationen abstrakter mathematischer Inhalte in leichter zugängliche, „anschauliche“ Darstellungen vornehmen, sondern auf die notwendige Passung zwischen Veranschaulichungsangebot und dem individuellen Zugang zur Anschauung hinweisen, somit also die Frage nach der individuellen Anschauungsbildung und dem Verständnis von Anschaulichkeit bei Lehramtsstudierenden stellen.

Die Studie TEDS-Telekom (Buchholtz & Kaiser, 2013; Kaiser & Buchholtz, 2014), in der der Ansatz der Universitäten Gießen und Siegen mit traditionellen bzw. weiteren Ansätzen zur gymnasialen Mathematiklehrerausbildung aus einem externen Blickwinkel der Evaluation in Hinblick auf die erzielten Effekte im Bereich der mathematischen, mathematikdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Wissensentwicklung der Studierenden und der Entwicklung der zugehörigen Überzeugungen (*beliefs*) untersucht wurde, bietet hierzu einen Anknüpfungspunkt. Innerhalb einer qualitativen Teilstudie wurden hochschuldidaktische Aspekte und institutionelle Rahmenbedingungen, die mit dem Wissenserwerb in Zusammenhang stehen, hinsichtlich ihrer Wirkung untersucht (siehe z. B. Buchholtz & Blömeke, 2012). Dazu wurden mit insgesamt 23 Gymnasiallehramtsstudierenden aller an der Studie teilnehmenden Universitäten (Gießen, Siegen, Duisburg-Essen, Bielefeld, Paderborn) am Ende ihres vierten Semesters problemzentrierte Leitfadeninterviews (Witzel, 1982) durchgeführt, bei denen sie über die Wahrnehmung und Einschätzung von Lerngelegenheiten und hochschuldidaktischen Aspekten ihres Studiums befragt wurden, so u. a. über die Integration von Anschaulichkeit, Beispielen und Anwendungen in mathematischen Fachveranstaltungen. Acht der Studierenden entstammten dabei dem Projekt „Mathematik Neu Denken“. Da wir uns in diesem Artikel auf den hochschuldidaktischen Aspekt der Einbindung von Anschaulichkeit konzentrieren, verfolgten wir bei der Auswertung der Interviews folgende Fragestellungen:

1. Wie nehmen Lehramtsstudierende Anschaulichkeit in mathematischen Lehrveranstaltungen wahr?
2. Welche persönliche Relevanz besitzt Anschaulichkeit für Lehramtsstudierende?

3 Methodisches Vorgehen bei der Auswertung der Interviews

Das methodische Vorgehen bei der Auswertung der Interviews orientierte sich an der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2008). Dabei wurden die Aussagen der Studierenden einem theoretisch angeleiteten, systematischen Interpretationsprozess unterzogen, der an jeder Stelle eine individuelle Nachprüfbarkeit der Interpretation gewährleistet, um eine größtmögliche Objektivität herzustellen. Die Interviews wurden dabei durch eine Kategorisierung – also eine in Abhängigkeit von der Fragestellung definierte Klasse von Analyseaspekten – vorstrukturiert und abschließend selektiv mit Rückbezügen zur Fragestellung interpretiert. Dieses Vorgehen wird in Abbildung 1 verdeutlicht. Sie zeigt ein für unsere Zwecke abgewandeltes Modell des Ablaufes von Mayring (2008) zur induktiven Kategorisierung.

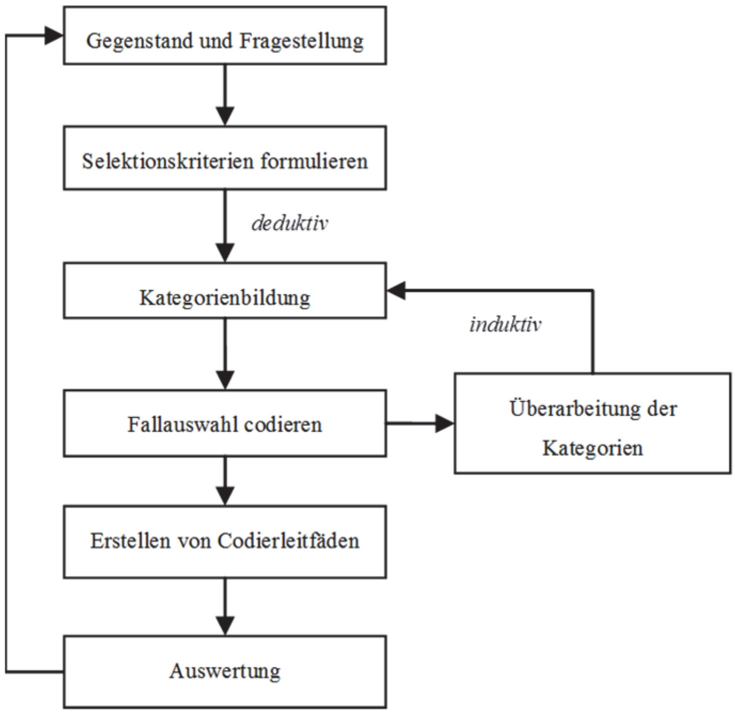

Abb. 1: Ablaufmodell der Kategorisierung, adaptiert nach Mayring (2008)

Der Ablauf beginnt mit dem Forschungsgegenstand (hier den transkribierten Interviews) unter der Fragestellung nach der Wirkung hochschuldidaktischer Aspekte. Für die Auswahl und Auswertung der Analyseeinheiten werden anschließend a priori spezielle Selektionskriterien formuliert, wie in diesem Fall die Erfahrungen der Studierenden mit Anschaulichkeit in mathematischen Lehrveranstaltungen, zu denen die Studierenden retrospektiv befragt wurden. Im Prozess einer deduktiven Herleitung von Kategorien werden individuelle Auswertungskategorien formuliert (beispielsweise „Begründung für die Einbindung von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen“ oder „Verständnis von Anschaulichkeit von Mathematik“), um anschließend eine Fallauswahl mit Hilfe dieser Kategorien zu codieren.

Codieren steht hierbei für die Zuordnung einzelner Textelemente und Aussagen zu den einzelnen Kategorien. Hierzu wurde auf die Software MAXQDA zurückgegriffen. In einer Überarbeitungsphase des entwickelten Kategoriensystems kann es auch dazu kommen, dass sich aus dem Material a posteriori heraus neue Kategorien formulieren lassen bzw. bestehende Kategorien verallgemeinert oder spezifiziert werden. Diesen Schritt bezeichnet man als induktive Kategorienbildung, der insofern besonders bedeutsam ist, da sich speziell durch die induktive Entwicklung neuer Auswertungskategorien neue Erkenntnisse über die Charakteristik des Forschungsgegenstands gewinnen lassen. So fanden sich z. B. in den Antworten der Studierenden hervortretende Antwortmuster, die nicht durch Interviewfragen intendiert gewesen waren. Deduktive und induktive Kategorienbildung ergänzen sich dabei während des Prozesses des Codierens. Die Ergebnisse der Codierung einer Fallauswahl werden in Form von Codierleitfäden operationalisiert, mit denen das gesamte Material ausgewertet und interpretiert wird, wobei die Ergebnisse auf die Fragestellung rückbezogen werden. Alle 23 Interviews wurden diesem Auswertungsprozess unterzogen. Um eine hinreichende Reliabilität des Codierverfahrens zu gewährleisten, wurden verschiedene Teile der Interviews und das Kategoriensystem jeweils 6 geschulten Lehramtsstudierenden der Universität Hamburg zur erneuten Codierung vorgelegt, die im WS 2011/2012 ein forschungspraktisches Seminar zum Lehrerprofessionswissen und zur Qualitativen Inhaltanalyse besuchten. Die Zuordnungen von Textabschnitten zu entsprechenden Kategorien erwiesen sich im paarweisen Vergleich der prozentualen Übereinstimmung der Studierenden in MAXQDA als verhältnismäßig konsistent (min. 56 %, max. 87 %).

4 Ergebnisse

4.1 Idiosynkratische Vorstellungen über „Anschaulichkeit“

Bei der Untersuchung der Fragestellung, welche Formen von Anschaulichkeit die Studierenden in der Studieneingangsphase wahrnehmen, zeigte sich eine erstaunliche Vielfalt der Antworten. Die Äußerungen der Studierenden in den Interviews spiegeln ein differenziertes Verständnis von Anschaulichkeit wider. Es zeigte sich deutlich, dass die Studierenden unter dem Begriff Anschaulichkeit sehr Unterschiedliches verstehen und dass dieser Begriff mit den verschiedensten Beispielen aus dem Erfahrungsbereich der eigenen Einführungsveranstaltungen belegt wird. Es ist zunächst nicht überraschend, dass die Vorstellung, wann ein Begriff anschaulich wird, von Person zu Person variiert. Bereits Lorenz (1993) weist im Bereich der elementaren Arithmetik auf den idiosynkratischen Charakter von Vorstellungsbildern hin. Erstaunlich ist jedoch die Bandbreite an verschiedenen Vorstellungen, die zur Anschaulichkeit mathematischer Begriffe angeführt werden, und dass diese Vorstellungen – bis auf eine Ausnahme – bei Studierenden an allen Standorten ausgemacht werden konnten. So ließen sich innerhalb der Kategorie „Verständnis von Anschaulichkeit“ bislang nicht weniger als fünf verschiedene Ausprägungen identifizieren, oft traten auch mehrere Formen bei ein- und denselben Studierenden auf:

- *Anschaulichkeit durch visuelle Darstellung von Mathematik*
- *Anschaulichkeit durch das beispielhafte Arbeiten mit Mathematik*
- *Anschaulichkeit durch Anwendungsbezüge*
- *Anschaulichkeit durch Rückbezüge zur historischen Genese von mathematischen Begriffen*
- *Anschaulichkeit durch die Verbindung mit Vorwissen aus der Schulmathemathematik*

Im Folgenden werden die verschiedenen in den Aussagen der Studierenden identifizierten typischen Vorstellungen in Kürze beschrieben und jeweils anhand von Beispielen illustriert.

Für Studierende, für die die Anschaulichkeit durch die *visuelle Darstellung* geprägt ist, wird ein mathematischer Inhalt anschaulich, sofern er mit einer Zeichnung, mit einer Skizze oder einem Graphen visuell, d. h. bildlich verknüpft wird. Hier konnte eindeutig der Visualisierungsaspekt der Anschaulichkeit identifiziert werden. Erst durch diese gedankliche Verknüpfung wird ein anschaulicher Kontext des mathematisch-abstrakten Inhalts erzeugt. Begriffe, wie Körper oder Vektorräume aus der linearen Algebra, aber etwa auch Eigenschaften von Funktionen im Bereich der Analysis werden durch ein konkretes Bild für die Studierenden nachvollziehbarer. Beweisideen können anhand einer Zeichnung oft ohne den für die Studierenden mühseligen Formalismus eingesehen werden. Aber nicht nur Begriffe und deren Eigenschaften können durch Bilder veranschaulicht werden, sondern auch Algorithmen und prozedurale Verfahren (vgl. dazu die Unterscheidung unterschiedlicher visueller Darstellungen bei Laakmann, 2013). Die Verknüpfung von Begriffen zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen fördert darüber hinaus das langfristige Behalten der Begriffe.

> „Aber wenn man ein Bild irgendwie vor Augen hat, ja, wie früher in der Schule, sage ich mal. (..) Unterschied zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, (…) dass man überall eine Tangente dran zeichnen kann. (.) Gut, die Definition hatten wir, aber, dass wir das einfach nur mal gezeichnet haben, zum Beispiel anhand der Wurzelfunktion oder irgendwo (.) als Beispiel, ich glaube, dann wäre das noch mehr hängengeblieben.“ (Studentin, Universität Paderborn)

> „Dass man auch wirklich einfach mit Bildern arbeitet, dass man das graphisch sieht zum Beispiel. Einsatz von dynamischer Geometriesoftware zum Beispiel, da kann man dann

> ja auch einzelne Funktionen schon schön zeigen; wie ist das denn überhaupt. Und solche (.) bildlichen Anschauungen." (Studentin, Universität Gießen)

> „Man verknüpft ja beides. Damals in der …-Vorlesung, die ich jetzt gehört habe, da gab es halt auch so eine Theorie der dualen Codierung und wenn man ein Wort mit einem Bild verknüpft, dann ist das Verständnis besser und man kann es auch länger behalten." (Studentin, Universität Essen)

Einige Studierende erklärten, dass ihnen Begriffe, Sätze oder zum Teil auch mathematische Beweise erst durch das eigene *beispielhafte Arbeiten* mit denselben anschaulich geworden seien. Durch das Anwenden in Übungsaufgaben oder auch anderen Sachkontexten werden mathematische Inhalte veranschaulicht und die Beispiele gedanklich mit den gelernten Inhalten verknüpft. Wichtig ist hierbei für die Studierenden nicht nur, dass ihnen die Beispiele durch den Dozenten in verständlicher Form dargestellt werden, sondern darüber hinaus auch das eigene Aktivwerden und das prozesshafte Arbeiten mit Prototypen. Das Verknüpfen einzelner Inhalte wird durch direktes Anwenden oder, wie die Studierenden oft auch sagen, durch „das Rechnen" begünstigt. Die aktive Auseinandersetzung mit Mathematik fördert eine differenziertere Betrachtung der einzelnen Inhalte, verknüpft Neuerlerntes mit Altbekanntem und fördert ebenfalls das langfristige Behalten der Inhalte. Für die spätere Berufspraxis der angehenden Lehrerinnen und Lehrer ist es von zentraler Bedeutung, für zentrale mathematische Begriffe, Sätze oder Beweise im Studium einen vertrauten Pool an (Gegen-)Beispielen auszubilden, damit auf diese später zurückgegriffen werden kann.

> „Okay, wir machen jetzt ein Beispiel, da ging natürlich die Sonne vor allen auf. (..) Hey, vielleicht verstehe ich das jetzt endlich mal! Und die Beispiele fingen dann in der Regel schon immer an mit ‚Sei K ein Körper'. Also da war die Anschaulichkeit, die man sich aus Beispielen erhofft, vom Winde verweht." (Student, Universität Essen)

> „Diese Veranschaulichung kommt auch immer daher, dass man sich diese Begriffe in irgendeiner Art und Weise erkämpft (.) in Anführungszeichen. Meistens dadurch, dass man lange darüber redet und versucht, sich das (..), also, das ist halt auch wieder so ein Beispiel, was ich mir unter dem Begriff konstruiere, und was ein anderer unter dem Begriff konstruiert, und wenn man das dann abgleicht, dann redet man schon mal sehr viel darüber. Und ich finde, das hilft ungemein. (.) Und deswegen trägt das auch dazu bei, dass man diese Begriffe auch irgendwie miteinander vertieft, also, (.) darüber reden hilft dann." (Student, Universität Siegen)

> „Also, ich habe auch selbst bei mir immer die Erfahrung gemacht, dass, wenn ich immer ein Beispiel habe, wo das wirklich mal konkret durchgerechnet wurde, dass ich mir nur das Beispiel mal angucken kann, dass mir das <u>extrem</u> hilft. Und das war schon so eine Sache, die ich immer vermisst habe." (Student, Universität Essen)

Im Gegensatz zur vorherigen Kategorie, bei dem die Beispiele vermehrt dem innermathematischen Bereich entliehen sind, wird bei der *Anschaulichkeit durch Anwendungen* die Betonung auf außermathematische Anwendungen gelegt. Der mathematische Inhalt wird den Studierenden veranschaulicht, indem sie gezeigt bekommen, inwiefern er sich in außermathematischen (seltener auch innermathematischen) Bereichen wiederfinden und anwenden lässt. Dabei wird hauptsächlich von einem „Bezug zur Realität" gesprochen. Mathematik wird sinnvoll und anschaulich in der Beschreibung der Realität, wie beispielsweise bei der Modellierung von Stauprozessen im Bereich Verkehr oder in Anwendungen im Bereich der Informatik (Binärsystem). Anschaulich wird ein Begriff dann, wenn man den Nutzen des Gedankengutes erkennen kann, also ein Begriff auch eine erkennbare utilitaristische Funktion zugewiesen bekommt. Andere Wissenschaften, wie die Biologie (Populationsentwicklungen), Kunst (Goldener Schnitt) oder die Wirtschafts- oder Sozialwissenschaften (Preisoptimierungen oder Spieltheorie) zeigen eine Reihe von interessanten Anwendungsbezügen zwischen dem universitären Mathematikinhalt und den in den Wissenschaften jeweilig benötigten Sachkontexten. Physikalische Anwendungen hingegen, die an vielen Universitäten im Bereich der Analysis eine zentrale Rolle spielen, werden – von Studierenden mit Zweitfach Physik einmal abgesehen – eher als zu kompliziert und realitätsfern wahrgenommen.

> „Wenn da nicht so steht: ‚Sie haben das so und so gegeben', sondern da steht ein wenig Prosa, wie: ‚Sie haben jetzt hier einen Stau'; dass man da halt sieht, dass damit auch reale Sachen gehen, aber es im Endeffekt vom Umfang her doch nur ein Beispiel ist, dann finde ich so was auch hilfreich, weil es ja gerade das ist, was ich vorhin gefordert hatte." (Student, Universität Essen)

> „Wenn ich mir es anschaulich vorstellen kann, fällt es mir schon einfacher (.) damit umzugehen und (..) es besser einzubringen und auch anwenden zu können. Was für mich persönlich sehr wichtig ist, [ist], wenn ich das anwenden kann. Wenn ich nicht nur das Abstrakte vorführen kann, sondern die Anwendung, was für mich auch später wichtig sein wird." (Student, Universität Essen)

> „Zum Beispiel, dass viel erklärt wurde. In Analysis II werden ja auch Differentialgleichungen behandelt und (.) dazu gibt es natürlich [einen] direkten Bezug zur Physik und direkte Naturphänomene. Dass man so sich eine Kurve aufzeichnet oder irgendwelche (..) Start- und Endpunkte hat und daraus eine Zwischengerade ermittelt und so etwas, das ist in der Analysis sehr anschaulich." (Student, Universität Bielefeld)

In den Aussagen der Studierenden der Universität Siegen finden sich auch Hinweise über Anschaulichkeit durch historische Bezüge. Offensichtlich spiegeln sich hier die Erfahrungen mit dem Projekt „Mathematik Neu Denken" wider. Die Studierenden haben ein großes Interesse am prozesshaften Arbeiten und beschreiben, dass Mathematik für sie an Anschaulichkeit gewinnt, wenn ihnen die *historische Entwicklung* zu einer Theorie dargelegt wird oder sie selbst die Gedankengänge, die zu der Entwicklung eines Begriffes oder eines Beweises geführt haben, nachvollziehen können. Lösungsverfahren, Begriffe oder ganze eigenständige Themenbereiche werden weniger als abstrakt, dogmatisch oder unmotiviert angesehen, wenn die mathematischen Inhalte in den Gesamtkontext des mathematischen Verständnisses eingebunden werden, etwa in Form von nachvollziehbaren heuristischen Problemlöseprozessen.

> „Ja als Beispiel. Zum Beispiel in der Analysis I hatten wir sehr viele geschichtliche Elemente beim Professor … und da war natürlich immer die Anschaulichkeit. Die stand schon im Vordergrund, weil wir oft geguckt haben: Wie haben das denn die Griechen und die Babylonier gemacht, und dadurch war für mich jetzt da ein guter Kontext, dass man einfach weiß, wo kommt die Mathematik her.“ (Studentin, Universität Siegen)

> „Es kann natürlich aus der Anschauung heraus kommen. Also wenn ich jetzt zum Beispiel an Taylor-Polynome denke (.) und man sagt: Naja, ich versuche jetzt mal die Funktion irgendwie anzunähern, und dann kommt man ja auch darauf. Also die Anschauung selber ist ja irgendwie da, nur man sieht das Polynom ja, das man hat. (.) Man kann ja dann natürlich fast modellbildend so lange daran arbeiten, bis man es hat. (..) Ja, man kann aber auch umgekehrt vorgehen und im Prinzip – wie war das – historische Exkurse daran erkennen. Das fand ich auch immer wieder sehr interessant, zum Beispiel Thema Cantor und wie sind Mengen abzählbar.“ (Student, Universität Siegen)

> „Und dann ging es so, ja, um den Begriff Funktion, wie der sich halt so herausgebildet hat. Also da wurde dieses Prozesshafte dann auch deutlich. […] Also, ich finde es eigentlich wichtig, dass man Sachen nicht einfach vorgesetzt kriegt, sondern, man kann sich das eigentlich viel besser merken, wenn man so weiß, wo das herkommt, also wie eine Formel zustande kommt. Und deswegen habe ich eher so die Vorstellung, dass man Mathematik <u>so</u> selber erleben sollte und das dann anwenden [sollte]. Ich finde, das klappt besser.“ (Studentin, Universität Siegen)

Einen zentralen Einfluss auf die Anschaulichkeit mathematischer Begriffe übt schließlich die Verbindung zum *Vorwissen aus der Schule* aus. Die Erfahrung der Unterschiedlichkeit in der Art, wie Mathematik in der Schule und in der Universität behandelt wird, führt dazu, dass die Studierenden sich in spezifischer Weise direkt über den „Bruch“ beim Übergang zwischen Schule und Hochschule äußern und mathematische Begriffe dann anschaulich empfinden, wenn sie ihnen aus der Schule bekannt sind oder an schulisch gelernte Inhalte anknüpfen. Einerseits ist diese Vorstellung von Anschaulichkeit durch den eigenen Wissenserwerb geprägt: Die Studierenden beschreiben dezidiert, dass sie für das Verständnis der mathematischen Begriffe der universitären Mathematik immer wieder auf ihr bereits vorhandenes Schulwissen rekurrieren und dieses häufig auch die einzige Quelle für anschauliche Repräsentation mathematischer Begriffe ist und bleibt. Andererseits ist diese Vorstellung aber auch durch die Orientierung an der späteren beruflichen Praxis geprägt. Für die universitäre Lehre kommt der Einbindung der durch die Schule geprägten Vorstellung von Anschaulichkeit eine entscheidende Rolle zu: Ihr Aufgreifen unterstützt die Studierenden nicht nur in ihrer späteren eigenen Lehrtätigkeit, sondern darüber hinaus gestaltet sich ohne eine aktive und kritische Auseinandersetzung mit der durch die Schule geprägten Anschaulichkeit eine langfristige Entwicklung des Schulwissens hin zu universitärem Wissen schwierig, weil die Studierenden oft nicht in der Lage sind (oder nicht in die Lage versetzt werden), zu erkennen, an welchen Stellen die schulische Anschauung an Grenzen stößt und durch das universitäre Wissen über mathematische Begriffe ergänzt bzw. ersetzt werden muss.

> „Also, eher existiert das [Schulwissen und das universitäre Wissen], ich würde mal sagen 90 Prozent so nebeneinander, und dann hat man so manchmal, wenn man so Übungen gemacht hat, hat man es gesehen: So etwas Ähnliches hast du schon mal in der Schule gemacht, aber (.) wie in der Schule, dass das so aufeinander aufbaut, und man genau wusste, womit das jetzt zusammenhängt, das ist mir jetzt im Studium (.) nicht so klar geworden." (Studentin, Universität Paderborn)

> „Also ich finde schon, dass das [Schulwissen] wichtig ist, und wenn man, (.) also wenn es wirklich Bezüge [zur Schulmathematik] gibt, dann finde ich, sollte man die auch durchaus nennen. Weil das dann auch für alle einfacher wird. Wenn man dann so auf Wissen aufbaut, das man schon hat, (.) ist das, finde ich, einfacher." (Studentin, Universität Siegen)

> „Das [Schulwissen] ergänzt das (.) Anschauliche total einfach, weil hier [in der Universität] gar nichts anschaulich erklärt wird, sondern einfach nur: So und so und ganz rein mathematisch, aber man kann dann durch das Schulwissen, das man hat, sich dann so erklären: Ja, sie meint jetzt das und das, nur wesentlich komplizierter oder so." (Student, Universität Paderborn)

4.2 Das Verhältnis von Anschaulichkeit und fachbezogener Lernmotivation

Unsere zweite spezifische Fragestellung zu den Erfahrungen der Studierenden mit Anschaulichkeit in der Studieneingangsphase lautete: Welche persönliche Relevanz besitzt Anschaulichkeit für Studierende? Die Ergebnisse zeigen, dass die individuelle Auseinandersetzung mit der Anschaulichkeit seitens der Studierenden durchgängig durch die fachbezogene Lernmotivation geprägt ist. Zu beobachten ist dabei, dass sich die Begründungen und Bewertungen der Studierenden über die Sinnhaftigkeit der Einbindung von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen grob unterscheiden, wobei im Wesentlichen zwei Perspektiven identifiziert werden konnten:

- *Perspektive des eigenen mathematischen Wissenserwerbs*
- *Perspektive der späteren beruflichen Praxis*

Ein wichtiger Grund, Anschaulichkeit von mathematischen Begriffen herzustellen, ist für die Studierenden, dass ihnen damit der *eigene Wissenserwerb* in den Einführungsveranstaltungen erleichtert wird. Aussagen, die dieser Kategorie zugeordnet wurden, beschreiben, dass neue Inhalte leichter erlernt werden können, wenn die universitären Inhalte anschaulich sind und an zugehörige schulische Inhalte angeknüpft werden. Auf diese Weise werden die neu erlernten fachlichen Inhalte in den bisherigen Wissensstand eingeordnet und es entstehen weniger Lernschwierigkeiten, denn bleiben die Inhalte sehr abstrakt, so müssen unbekannte fachmathematische Inhalte erst mühsam erlernt werden. Gerade zu Beginn des Studiums versuchen Studierende, die noch in der Schulmathematik verhaftet sind, solche Rückschlüsse zu vollziehen und an die Arbeitsweise der Schule anzuschließen. Die Studierenden sind daran interessiert, Verständnisbarrieren selbst aus dem Weg zu räumen, weshalb das Interesse, das diese Studierenden an der Anschaulichkeit von mathematischen Begriffen haben, eher fachlich geprägt ist und auch ihr Lehramtsstudium in erster Linie durch ihr Interesse am Unterrichtsfach motiviert ist. Die Studierenden wollen mehr über die Mathematik als Wissenschaft erfahren und ihren mathematischen Horizont erweitern, und sie erwarten, dass sie dabei an Bekanntes anknüpfen können. Die Verantwortung für das Herstellen solcher Bezüge und das Aufgreifen der ihnen bekannten Arbeitsweise sehen die Studierenden eindeutig beim jeweiligen Dozenten.

> „Klar, wenn in der Uni[versität] halt Stoff vorkommt, den man in der Schule schon gemacht hat, dann ist das natürlich leichter. Denn selbst wenn die Dozenten weiter gehen oder wenn sie es anders einführen, weißt du in dem Moment, wo gesagt wird: Ja wir machen jetzt Integrale oder wir machen jetzt Ableitungen, […] du weißt einfach, wo es drauf hinaus läuft […].Wenn man das Ende dann schon kennt, kann man es auch, während es geschieht, einfach besser nachvollziehen.“ (Student, Universität Essen)

> „Also, ich denke, wichtig ist, wenn man gerade neue Themen aufgreift, die in der Schule noch nicht behandelt wurden, dass man dann auf jeden Fall das Anschauliche den Studenten beibringt, damit man es sich besser vorstellen kann und weiß, worum es überhaupt geht. (..) Ich denke, gerade wenn es anschaulich ist, durch Zeichnungen oder durch Beispiele, dann hat man das auch immer, wenn man das liest, nochmal vor Augen und kann darauf zurückgreifen und weiß, was man da gerade eigentlich macht.“ (Student, Universität Paderborn)

> „Und ja, die Methodik in der Uni[versität], dieses vollständige Selbst-Erarbeiten; in der Schule wird einem gesagt: Ja, lest euch das durch, oder in der Klausur kommt das dran, lernt das. Und in der Uni[versität]: Der Prof hält die Vorlesung, schreibt etwas an, beendet die Vorlesung und geht raus. (..) Man hat seine Übung, die man im Internet abrufen kann, man muss vollständig alleine lernen. (.) Das Lernen lernen nochmal, das fehlt komplett in der Schule, dass man dieses Lernen beigebracht kriegt, das selbstständige. Das fehlt wirklich komplett, deswegen hatte ich auch im ersten Semester relativ große Probleme hier.“ (Student, Universität Bielefeld)

Andererseits – und das ist ein anderer wichtiger Grund für die Einbindung von Anschaulichkeit in fachliche Lehrveranstaltungen – erwarten die Studierenden, dass sie bei der Erweiterung der Schulmathematik durch die Hochschulmathematik eine entsprechende didaktisch orientierte Anschauung entwickeln können. Durch die Möglichkeit einer tiefen Durchdringung der Materie auf einem anschaulichen Niveau eignen sich die Studierenden die Fähigkeit an, später in der *beruflichen Praxis* das Abstraktionsniveau für die Behandlung von zentralen schulmathematischen Inhalten eigenständig adäquat wählen zu können. Es gehört zu den beruflichen Anforderungen von Mathematiklehrkräften, die Hochschulmathematik geeignet „herunterzubrechen“. Schülerinnen und Schülern müssen geeignete didaktische Reduktionen und Veranschaulichungen mathematischer Fachinhalte angeboten werden, die ohne den Einblick in die entsprechende Veranschaulichung von abstrakter universitärer Mathematik nur bedingt realisierbar sind. Die Studierenden betonen, dass sie selbst diese Arten der Reduktion im Studium in Form von adäquaten Lerngelegenheiten kennenlernen müssen, und bewerten die Qualität fachmathematischer Veranstaltungen danach, inwieweit praktische und anschauliche Inhalte vermittelt werden. Hierbei spiegelt sich deutlich ein durch die spätere Tätigkeit des Unterrichtens geprägtes Studieninteresse wider.

> „Also ich denke, das ist ein wichtiger Punkt, damit man einfach –, also in Richtung Didaktik, einfach später die Begriffe –, also wenn ich was vor Augen habe, kann ich es ja auch besser erklären, und je tiefer ich das ja verstanden habe, und auch wenn ich es von mehreren Seiten verstanden habe, denke ich, kann ich es auch besser vermitteln.“ (Studentin, Universität Siegen)

> „Ja [die Einbindung von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen wünsche ich mir] in dem Umfang, dass man das dann auch auf die Schule übertragen könnte. Ich finde das sehr wichtig, Schülern das sehr bildlich darzustellen, wenn sie irgendwie Verständnisprobleme haben oder einfach auch allgemein, und, wenn wir das nie vorgeführt bekommen, dann können wir das auch nie machen.“ (Studentin, Universität Paderborn)

> „Also finde ich es dann auch wichtig zu sagen: Ich bin jetzt ein Lehramtsstudent, ich muss das vielleicht auch gar nicht auf so einem hohen Niveau können, weil ich will ja wieder zurück in die Schule. Das heißt ja nicht, dass ich deswegen dümmer bin oder so, ich habe ja nur einen ganz anderen Blick auf mein Studium.“ (Studentin, Universität Siegen)

Oft lassen sich die Aussagen der einzelnen Studierenden eindeutig einer der beiden Perspektiven zuordnen. Insgesamt wird aber aus beiden Perspektiven die Anschaulichkeit der Hochschulmathematik von den Studierenden eingefordert. Wir verstehen die Perspektiven, mit der die Studierenden auf die Frage nach dem Sinn von Anschaulichkeit in mathematischen Lehrveranstaltungen antworten, als habituelle Ausdrucksformen ihrer diesbezüglichen Lernmotivation (vgl. dazu auch Laakmann, 2013). Schiefele bezeichnet Lernmotivation als den „in einer konkreten Situation aktuell auftretenden Zustand […], über einen gegebenen Lerngegenstand Wissen erwerben zu wollen“ (Schiefele, 2008, S. 38). Wir gehen davon aus, dass beide Perspektiven der Antworten der Studierenden (die Perspektive der beruflichen Praxis und die Perspektive des eigenen Wissenserwerbs) zu einem großen Teil intrinsisch motiviert sind und somit von situativen Bedingungen und Persönlichkeitsmerkmalen abhängen. Für die Einbindung von Anschaulichkeit in der lehramtsspezifischen Hochschuldidaktik bedeutet dies, dass Lehrende sich diese unterschiedliche Motivstruktur bewusst machen und Möglichkeiten zur persönlichen Identifikation der Lernenden mit den Lerninhalten bereitstellen sollten.

Rheinberg (2006, S. 510) ergänzt dazu: „Versuche, (Lern-)Motivation über eine besondere Gestaltung der (Lern-)Situation anzuregen sind danach umso erfolgreicher, je besser die situativ gebotenen Anreize zur Motivstruktur des jeweiligen Lerners passen."

5 Zwischenfazit

Aus den Ergebnissen der Befragungen der TEDS-Telekom Studie werden zwei Gründe deutlich, warum die Einbindung der Anschaulichkeit in der Studieneingangsphase für Lehramtsstudierende sinnvoll ist: Erstens wird den Studierenden auf diese Weise der eigene Wissenserwerb erleichtert, weil bei neu zu Lernendem oftmals an bereits Erfahrenes angeknüpft werden kann. Die Studierenden können mathematische Fachinhalte besser verstehen und langfristiger behalten, wenn sie ihnen in einer anschaulichen Form vermittelt wird. Werden dabei spezifische Formen der Anschaulichkeit intendiert, wie z. B. das Aufgreifen historischer Bezüge an den Universitäten Gießen und Siegen, so nehmen die Studierenden diese Bezüge durchaus wahr und können sie vermutlich für ihre berufliche Praxis auch langfristig nutzen. Es besteht dennoch ein breites Spektrum an Vorstellungen darüber, unter welchen Voraussetzungen mathematische Begriffe für die Studierenden anschaulich werden, das hochschulübergreifend (d. h. auch an Universitäten ohne spezielle lehramtsspezifische Fördermaßnahmen) von den Studierenden entweder in Form von eigenen Erfahrungen oder Desideraten expliziert wird.

Zweitens motiviert die Einbindung von Anschaulichkeit den fachlichen Wissenserwerb durch das Erkennen einer beruflichen Relevanz. Die Studierenden erwerben durch sie die Fähigkeit, das Abstraktionsniveau für die Behandlung mathematischer Inhalte im Hinblick auf die verschiedenen kognitiven Fähigkeiten ihrer Schülerinnen und Schüler eigenständig zu wählen, und verfügen selbst über ein Repertoire an anschaulichen Begriffen. Durch die Einbindung von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen werden die Lehramtsstudierenden also stärker auf die zukünftige berufliche Praxis vorbereitet. Ein weiterer Grund für die Einbindung von Anschaulichkeit – auf dessen ausführliche Beschreibung wir aus Platzgründen allerdings verzichten – kann auch darin gesehen werden, dass der von vielen Studierenden in der Studieneingangsphase erfahrene „Bruch" zwischen Schule und Universität vermindert wird (vgl. dazu auch Buchholtz & Blömeke, 2012).

Wir wollen im Folgenden die Vielfalt der Vorstellungen von Anschaulichkeit und die Begründungen für die Einbindung von Anschaulichkeit in fachmathematische Lehrveranstaltungen in einen mathematikdidaktischen Zusammenhang stellen, da die empirischen Ergebnisse der Befragung auch einen Beitrag zur theoretischen Annäherung an den Begriff der Anschaulichkeit leisten können.

6 Das didaktische Prinzip der Anschaulichkeit im Rahmen der lehramtsspezifischen Hochschuldidaktik

Im Folgenden befassen wir uns mit der Anschaulichkeit auf der Ebene allgemeiner didaktischer Grundsätze für die Vermittlung von Mathematik, die u. E. nicht nur in der Schule, sondern auch in der Hochschule eine Rolle spielen (sollten). Aus diesem Grund diskutieren wir die Anschaulichkeit im Rahmen eines *didaktischen Prinzips*, dessen Gültigkeit wir speziell für die lehramtsspezifische Hochschuldidaktik herausarbeiten. Die Ergebnisse unserer Befragung machen dabei deutlich, dass ein didaktisches Prinzip der Anschaulichkeit in diesem Fall weiter bzw. präziser beschrieben und gefasst werden sollte, als dies in allgemeinen unterrichtsbezogenen Ausführungen zu didaktischen Prinzipien der Fall ist.

Ein Blick in die Literatur vermittelt zu didaktischen Prinzipien nämlich generell kein eindeutiges Bild. Da es kaum detaillierte Forschungsergebnisse über die Gültigkeit, Reichweite oder Tragfähigkeit von didaktischen Prinzipien gibt, existiert – in Abhängigkeit des Umfangs und der Differenziertheit der entsprechenden Auflistungen – eine Vielzahl didaktischer Prinzipien, die sich häufig an theoretischen Ansätzen einzelner Forscherinnen und Forscher orientieren (z. B. Piaget, Bruner, Wittmann oder Freudenthal) und sich einander teilweise gleichen oder sogar gegensätzlich erscheinen können. Unter didaktischen Prinzipien, darin sind sich die verschiedenen mathematikdidaktischen Beschreibungen aber weitgehend einig (vgl. z. B. bei Wittmann, 1975; Griesel, 1974; Zech, 1996), werden in der Regel grundlegende bzw. allgemeine Annahmen oder Orientierungen für die Planung und Durchführung von Unterricht verstanden, die entweder normativ aus der Lehr-Lern-Theorie abgeleitet werden oder sich empirisch in der Unterrichtspraxis oder in der methodisch-didaktischen Tradition über lange Zeit bewährt und in Form von handlungsrelevantem Wissen verdichtet haben. Zech (1996, S. 114 f.) fordert überdies gewisse Eigenschaften für ein didaktisches Prinzip, die sich zumindest dazu eignen, didaktische Prinzipien kategorial zu erfassen. Diese sind (Reihenfolge leicht geändert):

1. eine allgemeine, aber eindeutige Formulierung;
2. ein mutmaßlich breiter Gültigkeitsbereich;
3. die Praktikabilität;
4. eine gute Begründung.

Im Folgenden werden wir diese Kriterien in Hinblick auf die Übertragung eines didaktischen Prinzips der Anschaulichkeit auf die lehramtsspezifische Hochschullehre diskutieren:

Zu 1. Die explizite Formulierung eines didaktischen „Prinzips der Anschaulichkeit“ findet sich in der mathematikdidaktischen Literatur (selbst für den schulischen Bereich) selten (z. B. bei Michael, 1983) oder allenfalls spezifischer als „Prinzip der Variation der Veranschaulichung“ (Dienes & Golding, 1970), das im Zusammenhang mit dem bereits skizzierten kognitionspsychologischen Ansatz des Repräsentationswechsels von Bruner (1974) steht. Tatsächlich lässt sich eine explizite, allerdings recht allgemeine Formulierung dieses Prinzips bei Zech (1996, S. 119) für ein Prinzip der Anschaulichkeit, dessen Gültigkeit sich auch auf den lehramtsspezifischen Hochschulbereich erstreckt, weitgehend übernehmen: „Das Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel lautet: Ein mathematischer Unterrichtsgegenstand sollte, soweit möglich, auf mehrere Weisen verkörpert bzw. veranschaulicht werden.“ Allerdings sollte sich das Prinzip u. E. hierbei nicht allein auf den Brunerschen Ansatz beziehen, da dieser zwar im Wesentlichen den von uns in den Äußerungen der Studierenden identifizierten Visualisierungsaspekt der Anschaulichkeit beinhaltet, mathematisch jedoch zu unspezifisch bleibt und hierbei der wichtige Aspekt weiterer Zugänge zur *individuellen Anschauung* nur unzureichend berücksichtigt wird. Die von uns durchgeführten Interviews zeigten ja gerade ein breites Spektrum der individuellen Vorstellungen von Anschaulichkeit bei Lehramtsstudierenden, die es sinnvoll erscheinen lassen, das Brunersche Spektrum der Darstellungsmodi für die Vermittlung von Hochschulmathematik an Lehramtsstudierende entsprechend den unterschiedlichen Zugängen zur individuellen Anschauung anzugleichen bzw. zu erweitern (vgl. 4.1)[2]. Auf eine notwendige Erweiterung des Brunerschen Ansatzes wies insbesondere bereits der leider kürzlich verstorbene Arnold Kirsch (1977) hin: „Wir können hier keine Theorie oder auch nur Phänomenologie der Repräsentationsweisen mathematischer Gegenstände entwickeln. Diese Aufgabe […] erfordert eine mathematik-spezifische Modifikation oder Differenzierung des Brunerschen Schemas E-I-S, nicht etwa nur eine Einordnung der gängigen Repräsentationsweisen in dieses Schema“ (Kirsch, 1977, S. 97). Hinzu kommt, dass für die Übertragung eines didaktischen Prinzips der Anschaulichkeit auf die Hochschulmathematik eine Erweiterung der Brunerschen Repräsentationsweisen allein auch schon dadurch erforderlich wird, dass Studierende über wesentlich höheres Vorwissen verfügen und sich die abstrakte Hochschulmathematik der Visualisierung oft weitgehend entzieht. Kirschs Ansätze des „Zugänglichmachens“ bieten daher u. E. die Möglichkeit, Bruners Ansatz im Rahmen der Anschaulichkeit in der Hochschuldidaktik entscheidend zu erweitern, da hierbei die verschiedenen von den Lehramtsstudierenden geäußerten Zugänge zur individuellen Anschauung berücksichtigt werden. So sieht Kirsch im „Zugänglich-

[2] Gleichermaßen könnten diese Überlegungen im Übrigen auch hinsichtlich der individuellen Anschauung von Schülerinnen und Schülern geführt werden.

machen durch Wechseln des Mediums der Repräsentation“ einen zentralen Aspekt des Vereinfachens bzw. Elementarisierens und verweist dabei explizit auf die Brunerschen Repräsentationen und insbesondere auf die enaktive Darstellung und die ikonische Repräsentation. Kirsch spricht hier auch vom „Zugänglichmachen durch Beginn auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation“. Für die Übertragung des Prinzips der Anschaulichkeit auf die Hochschule heißt dies, das Vorwissen der Studierenden – in der Regel das Schulwissen – konsequent aufzugreifen und insbesondere dort in der Studieneingangsphase auf den Einsatz von konkreten Veranschaulichungen und Wechsel der Darstellungsmodi Wert zu legen, wo Studierende Verständnisschwierigkeiten aufweisen, die sich dadurch ergeben, dass „neue“ Mathematik erlernt werden muss, die von der Schule her wenig vertraut ist. Und hierbei ist das Brunersche Spektrum um bildungsorientierte Zugänge wie beispielsweise historische Bezüge oder modellbildende außermathematische Anwendungen als Formen der Darstellung mathematischer Inhalte zu erweitern. Die Konfrontation mit der abstrakten Hochschulmathematik trägt hier nämlich zu neuen Verständnisproblemen bei, die zu einer ähnlichen Ausgangssituation wie zu Beginn des Schulunterrichts führen. Lehramtsstudierende des Fachs Mathematik müssen sich in der Studieneingangsphase zwar ebenfalls mit neuartiger, teilweise „fremder“ höherer Mathematik auseinandersetzen, es können hier aber bereits differenziertere kognitive Verarbeitungsprozesse mathematischer Lerninhalte vorausgesetzt werden, so dass sich die Formen der Anschaulichkeit „stufengemäß“ auf die konkrete Erfahrungsgrundlage beziehen können (vgl. auch Aebli, 1983).

Zu 2. Unstrittig ist, dass der Anschaulichkeit in der Hochschulmathematik Grenzen gesetzt sind, die sich aber nicht nur inhaltlich aufgrund des hohen Komplexitätsgrades der Lerninhalte durch den notwendigen Abstraktionsgrad ergeben. So führt Michael (1983, S. 93 ff.) drei typische Entstellungen des Prinzips durch unangemessene Verwendung durch Lehrende an:

- *Die Irreführung der Anschauung durch die Wahl inadäquater Veranschaulichung* (z. B. das aus der Didaktik der Geometrie bekannte Problem, dass Schülerinnen und Schüler ein gleichschenkliges Dreieck nur als solches erkennen können, wenn es „aufrecht“ steht);
- *die Inaktivierung der Anschauung durch Überangebote von Veranschaulichung* (so verdeckt die Perfektionierung der Anschaulichkeit die Transformation des Komplexen in das Anschauliche durch den Lehrenden und führt zu einer „trägen Übersättigung“ auf Seiten der Lernenden);
- *die Verfehlung der Anschauung durch Verselbstständigung der Veranschaulichung* (im Kontext der naturwissenschaftlichen Bildung warnte Wagenschein (1989, S. 71) davor, Modelle für die Wirklichkeit selbst zu halten: „Die falsch,

nämlich anschaulich verstandene Theorie verdeckt das nur nach gründlichem Studium verständliche Wesentliche: eben die Unanschaulichkeit.“).

Jahnke (1984) berichtet ferner über empirische Ergebnisse, bei denen die Einbindung von Anschaulichkeit aufgrund der Stofffülle sogar kognitive Konflikte und Überforderung bei Schülern hervorgerufen haben soll, wenn Veranschaulichungen nicht „selbst-offensichtlich“ bzw. keine „aus sich heraus ‚sprechenden Bilder‘“ sind (Jahnke, 1984, S. 33). Es ist also zu entscheiden, wie viel Anschaulichkeit den Lehramtsstudierenden hilft bzw. zugemutet werden kann und wie Veranschaulichungen methodisch eingesetzt werden. Jahnke schlägt zur Aneignung von Veranschaulichungen dazu einen explorativen und antizipativen Umgang vor (Jahnke, 1984, S. 41). Die Entscheidungen, mathematische Lerninhalte der Studieneingangsphase anschaulich zu vermitteln, obliegen im Einzelfall den Dozentinnen und Dozenten. Kirsch (1977) wandte sich allerdings dagegen, die Anschaulichkeit pauschal dem hohen Abstraktionsgrad der Mathematik zum Opfer fallen zu lassen, und plädierte insbesondere aus verständnisfördernden Gründen für eine weitreichende Integration von Anschaulichkeit, insbesondere motiviert durch den didaktischen Auftrag der Lehrenden: „Mit der Betonung der Vollwertigkeit auch der ‚unteren‘ Darstellungsmedien vernachlässigen wir scheinbar die Aufgabe des intermodalen Transfers […]. Nichtsdestoweniger können wir schon auf der untersten Stufe vollwertige Mathematik treiben und jedenfalls Zugänge eröffnen, die nichts verfälschen oder verbauen“ (Kirsch, 1977, S. 99). Für die Gültigkeit des Prinzips im Rahmen der lehramtsspezifischen Hochschuldidaktik gilt also: Solange die Anschaulichkeit nicht zu einer Verfälschung von Inhalten führt oder das Voranschreiten verhindert, kommt ihr die nützliche Funktion zu, einen verständnisorientierten Zugang auch zur Hochschulmathematik zu bereiten.

Zu 3. Für den Bereich der Primarstufe lässt sich die Praktikabilität des Prinzips empirisch bestätigen. So konnte Lorenz (1993) beispielsweise für den Bereich des arithmetischen Anfangsunterrichts zeigen, dass durch die Verwendung von externer Veranschaulichung die Produktion interner Bilder anregt wird und so langfristig für eine Verinnerlichung der mathematischen Inhalte gesorgt wird. Für eine Übertragung der Praktikabilität auf die lehramtsspezifische Hochschuldidaktik müssen die Formen der Vermittlung der mathematischen Fachinhalte von den jeweiligen Dozentinnen und Dozenten erst gefunden bzw. entwickelt werden. Es existieren hier mittlerweile zwar einige Materialien und *best practice*-Sammlungen für den lehramtsspezifischen Hochschulbereich, auf die Dozentinnen und Dozenten bei Bedarf zurückgreifen können, um ihre Lehrveranstaltungen – ggf. auch nur im Rahmen ausgewählter Lerninhalte – lehramtsspezifisch zu gestalten (z. B. Allmendinger, Lengnink, Vohns & Wickel, 2013; Ableitinger, Kramer & Prediger, 2013; Beutelspacher et al., 2011; Bauer, 2012), allerdings besteht hier noch weiterer Entwicklungsbedarf an Materialien, die hochschulmathematische Fachinhalte professionsbezogen und unter Berücksichtigung lehramtsspezifischer Zugänge anschaulich aufbereiten. Unsere Ergebnisse deuten aber insbesondere darauf hin, dass den Studierenden die Berücksichtigung von Visualisierungen, beispielgebundenem Arbeiten, außermathematischen Anwendungsbezügen, historischen Bezügen und Referenzen der Schulmathematik das Lernen und langfristige Behalten der mathematischen Fachinhalte erleichtert bzw. erleichtern würde.

Zu 4. Um das didaktische Prinzip der Anschaulichkeit auf die lehramtsspezifische Hochschuldidaktik übertragen zu können, muss auch Zechs Forderung nach einer guten Begründung erfüllt sein. Michael (1983, S. 77) spricht hier auch von einer notwendigen „Intention", die der Anschaulichkeit innewohnen muss, und von einer „Motivationshilfe, um den Lehrprozess in Gang zu setzen oder zu halten." Hier lohnt ein Blick in die Schulpädagogik. So formulieren Hintz, Pöppel und Rekus (1993) die Anschaulichkeit als Unterrichtsprinzip als „aktuelle lebensbedeutsame Beziehung der Schüler zu den Aufgaben des Unterrichts, […] die [mit] ihrem Lern- bzw. Erkenntnisinteresse korrespondiert und ihre Selbsttätigkeit begründet." (Hintz, Pöppel & Rekus, 1993, S. 13). Anschaulichkeit kann hier einerseits generell auf den Lebensweltbezug von Unterricht bezogen werden, andererseits aber auch auf die konkrete individuelle Wahrnehmung von und Begegnung mit Unterrichtsgegenständen sowie die persönliche Identifikation mit Lerninhalten. So werden Lerninhalte anschaulich, wenn Schülerinnen und Schüler eine persönliche Relevanz in ihnen erkennen können. Eine Begründung für das didaktische Prinzip der Anschaulichkeit in der lehramtsspezifischen Hochschullehre kann auf Grund unserer Ergebnisse in Abschnitt 4.2 nun gleich zweifach gegeben werden. So legen die Lehramtsstudierenden offensichtlich ein unterschiedliches subjektives Gewicht auf die Einbindung anschaulicher Lerninhalte, so dass auch hier eine persönliche Relevanz von Anschaulichkeit gegeben ist, die sich in Form einer spezifischen Studienmotivation niederschlägt. Einerseits wird den Studierenden nämlich durch die Einbindung von Anschaulichkeit der eigene Wissenserwerb erleichtert, andererseits erfahren sie durch die Einbindung von Anschaulichkeit beispielhaft die Vermittlung von mathematischen Fachinhalten in unterschiedlichen Darstellungen, die sie langfristig dazu befähigen, in ihrer eigenen späteren Berufspraxis selbst mathematische Inhalte anschaulich zu vermitteln.

7 Diskussion

Die derzeitigen hochschuldidaktischen Entwicklungen der Lehrerausbildung im Fach Mathematik konzentrieren sich besonders auf die Studieneingangsphase und setzen damit an der entscheidenden (Bau-)Stelle des Lehramtsstudiums an. Gemeinsame aktuelle Bestrebungen der Verbände DMV, GDM und MNU zur schritt-weisen Verbesserung der Lehrerausbildung beschäftigen sich aktuell erneut mit der Frage, ob die Trennung zwischen Lehramtsstudierenden und Bachelorstudierenden zugunsten von lehramtsspezifischen Veranstaltungen wünschenswert und kapazitär machbar sei. Auch ein Absenken des Niveaus für Lehramtsstudierende in der Studieneingangsphase ist dabei anscheinend prinzipiell denkbar, das zu verantwortende Ausmaß muss allerdings von den Universitäten klargestellt werden (Bruder et al., 2010). Unstrittig bleibt, dass Mathematik-Lehramtsstudierende die Hochschulmathematik in ihrer ganzen Bandbreite und ihrem eigenen Abstraktionsniveau kennenlernen sollten, um später über hinreichendes Fachwissen zu verfügen, um auch komplexere Rückfragen von Schülerinnen und Schülern beantworten zu können oder Erklärungen von mathematischen Inhalten auf anspruchsvollerem Niveau entwickeln zu können. Die hier untersuchten Aussagen machen aber deutlich, dass von Seiten der Studierenden gewünscht bzw. erwartet wird, dass in den mathematischen Fachveranstaltungen stärker Rücksicht auf ihre Bedürfnisse als zukünftige Lehrerinnen und Lehrer genommen wird und dass eine anschauliche Vermittlung der mathematischen Inhalte in den Einführungsvorlesungen nicht unterbleibt, solange sie keine unzulässige Vereinfachung darstellt. Lohnenswert erscheint es daher aus Sicht der universitären Lehre, mit Hilfe der Einbindung von Anschaulichkeit in der Studieneingangsphase sensibel auf eine mögliche Überforderung insbesondere Studierender mit schlechteren Eingangsvoraussetzungen zu reagieren und möglicherweise so frustrationsbedingtem Studienabbruch vorzubeugen. Ein Ergebnis der TEDS-Telekom Studie ist die Erfahrung, dass die Gruppe der Studierenden offenbar über sehr viele unterschiedliche Zugänge zum Verständnis mathematischer Begriffe verfügt, die in Veranstaltungen für Lehramtsstudierende insgesamt eine stärkere Berücksichtigung finden können, wie etwa beispielsweise durch Rückbezüge zur historischen Genese von mathematischen Begriffen oder durch die Verbindung mit Vorwissen aus der Schulmathematik. Im Projekt „Mathematik Neu Denken“ wurden diese Formen von Anschaulichkeit in mathematische Lehrveranstaltungen integriert, und die Studierenden nehmen diese Formen offensichtlich auch wahr und berichten, wie hilfreich diese Bezüge für das Lernen und Verstehen von mathematischen Fachinhalten – auch für eine spätere Vermittlung in der Schulpraxis – für sie waren. Anschauliche Zugänge zu mathematischen Begriffen werden aber von nahezu allen in der Studie untersuchten Studierenden gewünscht.

Die Lehrenden der mathematischen Fachveranstaltungen stehen hier in der Verantwortung, der Gruppe von Lehramtsstudierenden, die durchschnittlich etwa 60 % aller Mathematikstudierenden in Deutschland ausmacht (Berechnungsgrundlage WS 2006/2007, vgl. Dieter et al., 2008), adäquate Lehrveranstaltungen anzubieten, deren Ziel es bei den unablässig hohen Abbruchquoten sein sollte, auch Studierende mit schlechteren Eingangsvoraussetzungen im Studium zu halten. Langfristig und nachhaltig wird das Lernen des Unterrichtens von Mathematik vermutlich erst dann, wenn die Studierenden bereits in dieser frühen Phase Erfahrungen mit einer verständnisorientierten, anwendungsbezogenen und anschaulichen Vermittlung von Mathematik machen, die sie so auch in ihrer späteren beruflichen Praxis selbst umsetzen können.

Literatur

Aebli, H. (1983): *Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett-Cotta (11. Auflage 2001).

Ableitinger, C., Kramer. J. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerausbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Wiesbaden: Springer.

Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2011): *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A. & Wickel, G. (Hrsg.) (2013): *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Heidelberg: Springer.

Bauer, T. (2012): *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spieß, S. & Wickel, G. (2011): *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Biehler, R., Hochmuth, R., Fischer, P. R. & Wassong, T. (2011): Transition von Schule zu Hochschule in der Mathematik: Probleme und Lösungsansätze. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 111–114). Münster: WTM-Verlag.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Döhrmann, M. (2011): Bedingungsfaktoren des fachbezogenen Kompetenzerwerbs von Lehrkräften. Zum Einfluss von Ausbildungs-, Persönlichkeits- und Kompositionsmerkmalen in der Mathematiklehrerausbildung für die Sekundarstufe I. *Zeitschrift für Pädagogik* (57. Beiheft), *57*, 77–103.

Böckmann, K. (1982): Warum soll man im Unterricht visualisieren. Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In H. Kautschitsch, W. Metzler (Hrsg.), *Visualisierung in der Mathematik* (S. 11–33). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Henn, H.-W., Kramer, J. & Pinkernell, G. (2010): Schnittstelle Schule – Universität. Positionspapier der Gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule/Hochschule der DMV, GDM und MNU. http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Materialien/PDF/schnittstellen-muenchen.pdf (Letzter Zugriff 09.06.2014).

Bruner, J.S. (1974): *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin-Verlag.

Buchholtz, N. (2014): *Multiperspektivische Ansätze zur Messung des Lehrerprofessionswissens in der Mathematiklehramtsausbildung*. Dissertation. Hamburg: Universität Hamburg. Abrufbar unter http://ediss.sub.uni-hamburg.de/volltexte/2014/6583/. (Letzter Zugriff 04.04.2014).

Buchholtz, N. & Blömeke, S. (2012): Mathematik unterrichten lernen. Zur Wirksamkeit hochschuldidaktischer Innovationen in der Mathematik-Lehrerausbildung. In D. Bosse, L. Criblez & T. Hascher (Hrsg.), *Reform der Lehrerbildung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Teil 1: Analyse, Perspektiven und Forschung* (S. 255–276). Immenhausen bei Kassel: Prolog-Verlag.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2013): Improving Mathematics Teacher Education in Germany: Empirical Results from a longitudinal Evaluation of innovative Programs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(4), 949–977.

Dienes, Z. P. & Golding, E. W. (1970): *Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für Lernen in Zyklen*. Freiburg: Herder.

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D. & Törner, G. (2008): Zahlen rund um das Mathematikstudium – Teil 3. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, *16*(3), 176–182.

Griesel, H. (1974): Überlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 6, 115–119.

Herrmann, A. (2012): Mathematik besser verstehen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 979–980). Münster: WTM-Verlag.

Hintz, D., Pöppel, K. G. & Rekus, J. (1993): *Neues schulpädagogisches Wörterbuch*. Weinheim, München: Juventa.

Jahnke, H. N. (1984): Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1984* (S. 32–41). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kadunz, G. (2003): *Visualisierung. Die Verwendung von Bildern beim Lernen von Mathematik*. München: Profil.

Kaiser, G. & Buchholtz, N. (2014): Overcoming the gap between university and school mathematics. The impact of an innovative programme in mathematics teacher education at the Justus-Liebig University in Gießen. In S. Rezat & M. Hattermann (Hrsg.), *Transformation – A key idea in mathematics education* (S. 85–105). Heidelberg: Springer.

Kirsch, A. (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 82*(1), 87–101.

Klafki, W. (1964): *Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung*. 3./4. Auflage. Weinheim: Beltz.

Klein, F. (1908): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: Teubner.

Laakmann, H. (2013): *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer-Verlag.

Lorenz, J. H. (1993): Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung, IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd. 18*. Köln: Aulis.

Mayring, P. (2008): *Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken* (10. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Mentz, I. (2012): Eine dialogische Lineare Algebra 1 – ein neuer Weg in der Studieneingangsphase des Mathematikstudiums. In M. Kleine & M. Ludwig (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 589–595). Münster: WTM-Verlag.

Michael, B. (1983): *Darbieten und veranschaulichen: Möglichkeiten und Grenzen von Darbietung und Anschauung im Unterricht*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Rheinberg, F. (2006): Motivationstraining und Motivierung. In D. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (3. Auflage, S. 510–515). Weinheim: Beltz.

Schiefele, U. (2008): Lernmotivation und Interesse. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der pädagogischen Psychologie* (S. 38–49). Göttingen: Hogrefe.

Schwarz, B., Herrmann, P., Kaiser, G., Richter, B. & Struckmeier, J. (2013): Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums – Erste Erfahrungen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen. In G. Greefrath, M. Stein & F. Käpnick (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 938-941). Münster: WTM-Verlag.

Stancel-Piątak, A., Schwippert, K. & Doll, J. (2011): Lerngelegenheiten von Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehramtsstudierenden. In S. Blömeke, A. Bremerich-Vos, H. Haudeck, G. Kaiser, G. Nold, K. Schwippert & H. Willenberg (Hrsg.), *Kompetenzen von Lehramtsstudierenden in gering strukturierten Domänen. Erste Ergebnisse aus TEDS-LT* (S. 159–175). Münster: Waxmann.

Wagenschein, M. (1989): *Verstehen lernen: genetisch-sokratisch-exemplarisch*. Weinheim, Basel: Beltz.

Walcher, K. P. (1975): *Eine psychologische Untersuchung der Begriffe Anschauung, Anschaulichkeit und Veranschaulichung*. Meisenheim am Glan: Anton Hain.

Wittmann, E. C. (1975): Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1975* (S. 226–235). Hannover: Schroedel.

Witzel, A. (1982): *Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen*. Frankfurt/New York: Campus Verlag.

Zech, F. (1996): *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (8. Auflage). Weinheim: Beltz.

Anschrift der Verfasser

Dr. Nils Buchholtz
Universität Hamburg
Fakultät für Erziehungswissenschaft, Psychologie und Bewegungswissenschaft
Von-Melle-Park 8
20146 Hamburg
E-Mail: Nils.Buchholtz@uni-hamburg.de

Daniel Behrens
Universität Hamburg
Fakultät für Erziehungswissenschaft, Psychologie und Bewegungswissenschaft
Von-Melle-Park 8
20146 Hamburg
E-Mail: d.bns@web.de

Eingang Manuskript: 13.05.2013
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.07.2014
Online verfügbar: 19.08.2014