Zur Rolle der Projektion in mathematischer Rede

Ein Beitrag zur Strukturanalyse mathematischer Argumentationen

von

Marc Wermann, Paderborn

Kurzfassung: Neue mathematische Handlungsgegenstände gehen in der Regel durch Abstraktions- und Ideationsprozesse aus bereits bestehenden hervor. Ein jeweils zugehöriger neuer Redebereich, in dem eine Rede von neuen Handlungsobjekten und über sie überhaupt erst möglich ist, wird dabei oft stillschweigend unterstellt. Für die Analyse mathematischer Argumentationen ist die Anbindung solcher Redebereiche an bereits bestehende von großer Bedeutung, da sie eine wesentliche Grundlage für die Rekonstruktion von materialen Vorstellungen zu formalen Handlungsobjekten bildet. In dieser Arbeit wird die Rolle der Projektion, die von formalen in materiale Redebereiche führt, erörtert.

Abstract: New objects of mathematical practices mainly are constituted from existing ones by processes of abstraction and ideation. Corresponding modes of speech, which in the first place allow to speak of and about the new objects, are tacitly presupposed in the course of such processes. As they vastly contribute to the reconstruction of material notions of formal objects the connections of different modes of speech are essential for the analysis of mathematical argumentations. This paper focuses on the role of the projection, leading from formal to material modes of speech.

1 Einleitung

Analysen mathematischer Formulierungen sind ein unverzichtbarer Bestandteil jedweder qualitativer empirischer Forschung der Mathematikdidaktik, die in den Themenkreisen der Begriffsbildung und des Begriffsverständnisses verortet ist. Dabei sehen sich solche Analyseprozesse der grundsätzlichen Schwierigkeit gegenüber, dass die ihnen zugrunde liegenden erhobenen Versprachlichungen (etwa aus schriftlichen Testaten, Audio- oder Videoaufzeichnungen) nie voraussetzungslos formuliert werden, sondern im Gegenteil eingebettet sind in einen facettenreichen Rahmen von impliziten und expliziten Konventionen der jeweils zugehörigen Sprachgemeinschaft des Sprechers. Derartige Rahmungen werden wissenschaftlich in vielerlei Hinsicht grundständig in den Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik untersucht. Hinsichtlich der qualitativen Analyse von Versprachlichungen sind etwa die dokumentarische Methode in der Tradition MANNHEIMS (vgl. NOHL (2009)) oder die Herangehensweise der objektiven Hermeneutik nach OEVERMANN (vgl. dazu etwa die Darstellung nach WERNET (2000)) etablierte methodische Ansätze. Derartige Methoden werden in neuerer Zeit seitens der Fachdidaktik adaptiert (etwa MEYERHÖFER (2005), SCHULZ (2010) u.v.a.) und zielen ihrer Herkunft nach in der Regel auf die Detailanalyse von Versprachlichungen mit Hinblick auf soziale Aspekte und die Verzahnung von Handlungspraxis und subjektiven Sinnzuweisungen des Sprechers ab.

Im Folgenden soll ein weiterer Ansatz zur Strukturanalyse des mathematischen Begriffsverständnisses und mathematischer Argumentationen vorgestellt werden, welcher konzeptionell maßgeblich auf einer der (wieder) aktuellen Diskussion der analytischen Philosophie entstammenden Sichtweise, der sog. *inferentiellen Semantik,* gründet. Ausgehend von diesem Ansatz gelingt es, das Verhältnis von formal gefassten mathematischen Handlungsgegenständen und empirischer Realität (verstanden als die Gesamtheit aller Dinge, die zum handelnden Subjekt, sei es sinnlich vermittelt oder rein gedanklich, in Beziehung stehen) als ein zwischen Versprachlichungen in jeweils zugehörigen „Redebereichen" vermitteltes zu fassen. Als wesentliche Folge eröffnet sich damit eine grundsätzlich neue Zugangsweise zur Deutung mathematischer Rede. Im unmittelbaren Rückgriff auf die fachlichen Inhalte im Bereich formaler Rede steht eine derartige Beschreibung in deutlich direkterem Verhältnis zu einer angestrebten, stoffdidaktisch intendierten Sicht (verstanden als didaktisch orientierte Sachanalysen im Sinne von GRIESEL und KIRSCH) auf Versprachlichungen mathematischer Argumentationen, als es durch die Adaptionen der oben erwähnten, originär sozialwissenschaftlichen Forschungsansätze erreicht werden kann.

2 Terminologische Klärung

2.1 Redebereiche, Inferenzen, inferentielle Semantik

In der Analyse der Konstitution von *Redebereichen* geht es darum, zu untersuchen, wie eine sinnhaltige Rede von den jeweiligen, der Rede zugrunde liegenden Gegenständen und über sie überhaupt möglich ist. Der Terminus des *Redebereichs* ist in einer solchen, zunächst ganz allgemeinen Form ebenso für alltagssprachliche Formulierungen wie auch für formalere, fachspezifische, stark konventions- und regelgebundene Sprachkontexte einschlägig.

In diesem Sinne ist z. B. im alltagssprachlichen Redebereich der Farben sinnvoll von einem Prozess des „Mischens" sprechbar, im Redebereich der Figuren allerdings eine ebensolche Rede zunächst nicht erklärbar. Hingegen ist dort eine Rede vom Prozess des „Drehens" möglich, die in einem intuitiven Sinne im alltagssprachlichen Redebereich der Farben wiederum nicht möglich ist, in einem formalisierten Redebereich der Farben (etwa als koordinatisiertes RGB-Farbmodell) allerdings doch sinnvoll erklärbar sein kann. In formaler mathematischer Rede sprechen wir etwa im Redebereich der rationalen Zahlen, wenn wir die Gleichheit zweier Brüche dokumentieren. LORENZEN (1967, S. 147) spricht bzgl. der in einer solchen Formulierung beinhalteten „semantischen Beziehungen" mit Hinblick auf die hinterliegenden fachinhaltlichen Abstraktionsprozesse auch von einer jeweils etablierten „façon de parler" und sieht diese deutlich getrennt von den formalen Beziehungen zwischen den Handlungsobjekten.

Anhand der sprachlichen Darstellung zwischen einer in diesem Sinne „semantischen" Beziehung nicht formaler Natur und einer echten formalen Beziehung zu unterscheiden, mag im Einzelfall mitunter schwer fallen. Am Beispiel einer Rede im Bereich der reellen Funktionen sei dies daher veranschaulicht: Dass ein Sprecher zu einer Aussage der Form „Jede differenzierbare Funktion ist stetig." gelangt, kann einerseits auf den Vorstellungen, die der Sprecher mit den Begriffen „differenzierbar" und „stetig" (bzw. „differenzierbare Funktion" und „stetige Funktion") verbindet, basieren und damit Resultat eines rein *inhaltlichen Schlusses* sein. Ein solcher Schluss greift, unter Absehen von „pathologischen" Ausnahmefällen, ausschließlich *inhaltlich* auf die seitens des Sprechers mit den beiden Begriffen verbundenen Bedeutungen zurück. In diesem Beispiel mögen mitunter die handlungsgeleiteten Anschauungen zu jeweils prototypisch konnotierten Funktionsgraphen dazu herhalten, dass Lernende aus der Eigenschaft „an den Graphen lässt sich überall eine Tangente anlegen" auf die Eigenschaft „der Funktionsgraph kann ohne Abzusetzen durchgezeichnet werden" schließen.

Denkbar ist andererseits aber eben auch, dass die Aussage Resultat eines symbolkodierten *formalen Schlusses* ist, der, unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ an einer Stelle $\xi \in]a,b[$ aus einer Rechnung der Form

$$\lim_{x\to\xi}\left[f(x)-f(\xi)\right]=\lim_{x\to\xi}\left[\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot(x-\xi)\right]=f'(\xi)\cdot 0=0$$

resultiert. Dabei wird eben nicht auf inhaltliche Ausdeutungen der auftretenden Bezeichnungen (hier: der Symbole $\lim[\ ]$, $x \to \xi$, $f(x)$ etc.) abgehoben, sondern jeder Schritt entsprechend formal, d. h. anhand einer gültigen Regel, eines bekannten Satzes, eines Axioms etc. hergeleitet gedacht.

Wird grundsätzlich der formale mathematische Redebereich fachinhaltlich als ein Modell und eine wahrheitssemantische Interpretation eines formalen Axiomensystems erster Stufe, etwa in Form einer Sprache mit entsprechenden zugehörigen Sprachkonstrukten (einer Signatur zur Fassung der Syntax, einer Struktur zur Fassung der Semantik, darin formulierbar dann Terme, Formeln etc.), unterstellt, so weist diese letzte Anmerkung auf einen augenscheinlichen Befund hin: Kein Mathematiktreibender spricht in diesem Sinne voll formal. Versprachlichungen mathematischer Formulierungen sind stets, misst man sie an einer möglichen durchgängig formalen Formulierung, mindestens durch überleitende alltagssprachliche Formulierungen, wie etwa „… und daraus folgt …“, „… insbesondere gilt…“, „… wähle nun ε so, dass …“ etc. umgangssprachlich „verwässert“, meistens aber weitgehender etwa durch Verweise auf die Anwendung von Sätzen, die der Sprachgemeinschaft oder der Gruppe der konkret adressierten Zuhörerschaft als bekannt unterstellt werden, verkürzt. Nur eine solche, implizit gefasste und tradierte Übereinkunft im Redebereich der Sprachgemeinschaft ermöglicht überhaupt eine gangbare Dokumentationseffizienz mathematischer Überlegungen.

Die Unterscheidung der Bereiche formaler und alltagssprachlicher Rede soll hier nun im Weiteren im Rahmen einer letztlich auf SELLARS (1953) zurückgehenden sprachphilosophischen Konzeption, der sog. *inferentiellen Semantik,* verfolgt werden. Diese Konzeption weist, vielleicht mehr als man auf den ersten Blick vermuten mag, deutliche Bezüge zur Mathematik auf. Durch eine Betonung des Handlungsaspekts des Folgerns bringt sie (vgl. BERTRAM et al. 2008, S. 70) die Sichtweisen HILBERTs, dass nämlich die Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks implizit durch seine inferentielle Rolle definiert wird, und WITTGENSTEINs, der die Bedeutung eines Ausdrucks ausschließlich in dessen (einer erlernten Regel folgenden) richtigem Gebrauch erklärt sieht, zusammen.

BRANDOM (2000) deutet diesen Ansatz SELLARs im Sinne einer normativen Pragmatik aus und sieht (a.a.O., S. 37 ff.) gar die Fähigkeit des *Verstehens* in der Art und Weise, wie ein handelndes Subjekt im Umgang mit Dingen oder anderen Individuen Zuweisungen begrifflichen Inhaltes aufgrund von Gründen und Überzeugungen vornimmt. Derartige Zuweisungsakte zeigen in der Art ihrer Eingliederung in ein Netz von Gründen die Art des Begreifens ebendieser Gründe und damit die Art der Beherrschung von Richtigkeiten des theoretischen und praktischen Folgerns. Inferenzen setzen also, grob gesprochen, semantisch verkettete Sprachterme zueinander in Beziehung, und eben in der Art und Weise, wie ein solches „In-Beziehung-Setzen“ vollzogen wird, unterscheiden sich *materiale Inferenzen* des Redebereichs der Alltagssprache (im Weiteren auch kurz *materialer Redebereich*) von *formalen Inferenzen* eines formalen Redebereichs.

Materiale Inferenzen sind dabei solche, deren Richtigkeit im Wesentlichen vom begrifflichen Inhalt der Prämissen und Konklusionen abhängen, während die Richtigkeit *formaler Inferenzen* allein von deren logischer Form abhängt. So ist, analog zum obigen Beispiel, nun etwa im Bereich der alltagssprachlichen Formulierungen z. B. die Gültigkeit des Schlusses „Bastian ist der Sohn von Stefans Bruder. Daher ist Bastian der Neffe von Stefan.“ abhängig von der Bedeutung der Ausdrücke „Bastian“, „Stefan“, „Bruder“, „Sohn“ und „Neffe“ im Gegensatz etwa zum formalen Schluss „$x+3>2 \Rightarrow x>-1$“ in einem Modell eines entsprechend zugehörigen Prädikatenkalküls erster Stufe. SELLARS (1953) zeigt, dass materiale Schlüsse neben formalen eine echte eigene Klasse von Schlussformen bilden, indem er die Unabhängigkeit materialer Inferenzen von formaler Gültigkeit und die Unabdingbarkeit materialer Inferenzen für Sprache und Denken nachweist. Insbesondere lassen sich, wie man mitunter vermuten mag, materiale Schlüsse nicht durchweg durch das Hinzunehmen weiterer Prämissen als verkürzte formale Schlüsse deuten.

Ein Alleinstellungsmerkmal der Fachdisziplin der Mathematik hinsichtlich dieser Unterscheidung der Schlussformen ist es nun, dass es rein materiale Schlüsse in der formal gegründeten Disziplin der Mathematik nicht geben kann. Ein jedweder mathematischer Schluss mag zwar rein inhaltlich und geleitet von den Vorstellungen des Mathematiktreibenden zu den in der Formulierung auftretenden Begriffen, also *material* vollzogen und dokumentiert sein – er muss sich im Selbstverständnis der Fachgemeinschaft aber unabdingbar in einer rein *formalen* Darstellung realisieren lassen. Inwiefern das letztlich mit vertretbarem Aufwand gelingen kann, steht dabei zunächst nicht zur Diskussion. In der Regel verbleibt man bei einer mit umgangssprachlichen Formulierungen angereicherten Zwischenstufe, wie oben schon anklang. Eine solche Zwischenstufe gewährleistet nämlich zum einen den leichteren inhaltlichen Zugriff und ist zum anderen durch die fachinhärente wissenschaftliche Methodik eines rein deduktiven Vorgehens gerechtfertigt, die eine solche voll formale Realisierung prinzipiell garantiert.

2.2 Projektion

Jedwede fachinhaltliche Dokumentation hat sich den Anforderungen zu unterwerfen, die dem Selbstverständnis der zugehörigen Sprachgemeinschaft, insbesondere natürlich auch deren wissenschaftlichen Arbeitsweisen, entstammen. Derartige Anforderungen werden in Teilen explizit kommuniziert, in weiten Teilen eben auch implizit, etwa durch Adaption von Formulierungen seitens der Lernenden in Lehr- und Lernprozessen in Schule und Hochschule tradiert.

Im Fall der Mathematik kommt, gegenüber anderen Disziplinen, aufgrund ihrer letztlich rein formalen Gründung ein fachspezifischer Aspekt hinzu, der sie deutlich von anderen Disziplinen abhebt: Die oben beschriebene Effizienz mathematischer Dokumentationen geht hinsichtlich der Kommunikation mathematischen Wissens mit einer Verlagerung der „Bringschuld der Reformalisierung“ von der Seite des Verfassers auf die Seite des Rezipienten einher. Eine Formulierung wie „Nach dem Mittelwertsatz existiert nun eine Stelle ξ mit …“ etwa präsupponiert zuallererst die Anwendbarkeit des Mittelwertsatzes. Bei konkreter Rezeption einer solchen Formulierung ist somit zum einen der Nachweis für das Vorliegen der Voraussetzungen zur Anwendung des genannten Satzes in der jeweiligen zugrunde liegenden Situation zu erbringen, bzw. es ist sich dieser zu vergewissern. Zum anderen muss der im Satz enthaltene allgemeine, letztlich formal formulierte Schluss auf die konkrete Situation übertragen werden. Mithin sind also nun auf Seiten des Rezipienten diejenigen Schritte nachzuvollziehen, welchen sich der Autor vorher (als „Beweislast"), in der Regel allerdings in umgekehrter zeitlicher Reihenfolge, gegenübersah. Hatte der Autor seinerseits das Allgemeine im Konkreten zu erkennen, muss der Rezipient nun das Konkrete als Ausprägung des Allgemeinen einsehen. Gerade dieser letzte Schritt seitens des Rezipienten, das notwendige Übertragen eines allgemeinen Schlusses auf die konkrete Formulierung, führt in der jeweiligen Situation zu einer Übersetzung des letztlich formal gefassten in einen material gefassten Schluss. Der Rezipient bricht eine formale Formulierung inhaltlich auf, indem er sie mit seinen Vorstellungen zur konkret vorliegenden Situation abgleicht, und geht damit von der allgemeinen zur konkreten, von einer formalen auf eine materiale Sicht über. Dieser Prozess soll, nicht nur beschränkt auf entsprechende Schlussformen, im Weiteren mit dem Terminus der „Projektion" bezeichnet werden und den Übergang von mathematisch formal gefassten, allgemeinen Formulierungen auf inhaltlich gefasste, besondere Formulierungen bezeichnen.

Projektionen treten, das legt diese Fassung des Begriffs direkt nahe, fachinhaltlich im engeren Sinne insbesondere immer dann auf, wenn der Handlungsgegenstand selbst durch „Verallgemeinerungen" aus einem gegebenen Gegenstandsbereich hervorgegangen ist, wie oben anhand des Anwendens von allgemeinen, formal gefassten Sätzen auf eine spezifische, den Voraussetzungen des jeweiligen Satzes genügende Situation aufgezeigt wurde. In einem weiteren Sinne aber liegen Projektionen schon einem jedweden Umgang mit mathematischen Handlungsobjekten zugrunde und sind, wenn man sich auch noch von der speziellen Artikulationsform des Schlusses löst, diejenigen Prozesse, die sich immer dann zeigen, wenn ein Mathematiktreibender die von ihm ausgebildeten (Grund-)Vorstellungen und (Grund-) Verständnisse, die ihrer Natur nach materialen Charakter haben, mit formal gefassten Darstellungen in Beziehung setzt und dabei immer wieder neu abgleicht.

2.3 Abstraktion und Ideation

Abstraktion und *Ideation* sind neben der *Rekursion*, SCHREIBER (1979, S. 168 ff.) folgend, sicher als die beiden wesentlichen, „universellen" Verallgemeinerungsverfahren anzusehen, durch die neue Gegenstandsbereiche aus bereits bestehenden konstruiert werden. Am Beispiel von Abstraktion und Ideation soll daher die Rolle der Projektion in mathematischer Rede aufgezeigt werden. Das Begriffsbildungsverfahren der Rekursion wird an anderer Stelle separat zu behandeln sein, da erste vorbereitende Untersuchungen perspektivisch aufzeigen, dass dies deutlich umfangreicher und auch strukturell erheblich schwieriger fassbar ausfallen wird.

Die Grundlage für das logisch-mathematische Verständnis des Abstraktionsprozesses legt FREGE (1884), der in seinen „*Grundlagen der Arithmetik*" (vgl. dazu auch ANGELELLI (1984)) die Grundgedanken der Klassenbildung bzgl. einer allgemeinen Gleichheitsrelation (auch explizit am Beispiel des Begriffs der „Richtung einer Geraden" in FREGE (1884, § 64 ff.)) als Möglichkeit zur Definition von Begriffen erörtert. In moderner Notation wird im Rahmen dieser Arbeit die Abstraktion, an eine Formulierung von LORENZEN (1962) anschließend, folgendermaßen verstanden: Ist auf einem Gegenstandsbereich G (mit Eigennamen „e_1“, „e_2“, … der Gegenstände, die den Variabilitätsbereich von Variablen „v_1“, „v_2“, … bilden) eine Äquivalenzrelation ~ definiert, so wird für eine bzgl. ~ invariante Aussageform A, d. h. für eine Aussageform A mit

$$\bigwedge x \bigwedge y\left(A(x) \wedge x \sim y \rightarrow A(y)\right)$$

durch

$$\overline{A}\left(\overline{e_k}\right) :\Leftrightarrow \bigwedge x\left(A\left(e_k\right) \wedge x \sim e_k \rightarrow A(x)\right)$$

eine neue prädikative Aussage $\overline{A}\left(\overline{e_k}\right)$ konstruiert, die von $A\left(e_k\right)$ echt verschieden ist (der Laufbereich der Quantoren ist dabei stets der gesamte Gegenstandsbereich). Trifft nämlich $A\left(e_k\right)$ eine Aussage über genau einen Gegenstand, ist $\overline{A}\left(\overline{e_k}\right)$ dagegen nun eine Aussage über all diejenigen Gegenstände, die zu e_k bzgl. ~ in Relation stehen, also eine Aussage über die gesamte Äquivalenzklasse, der e_k zugehörig ist. Die Gegenstände dieser Klasse müssen dabei insbesondere nicht explizit aufgezählt werden, sofern nur der nun neue, abstrakte, „umfassendere“ Aussagegehalt von $\overline{A}\left(\overline{e_k}\right)$ in der Aussage selbst dokumentiert ist.

Bei der Einführung der positiven Brüche über die Äquivalenzrelation $\sim_B$ für Paare von natürlichen Zahlen (LORENZEN spricht bei seinem Zugang, um den Aspekt des konstruierenden Handelns zu betonen, an dieser Stelle von den „Grundzahlen“), wobei die übliche Schreibweise „m_1/n_1“ verwendet wird,

$$m_1/n_1 \sim_B m_2/n_2 \ :\leftrightarrow \ m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_2,$$

ist z. B. „m/n ist ganz“ oder „m/n ist größer als 1“ eine solche invariante Aussage A. Man benutzt anstelle $\overline{A}\left(\overline{e_k}\right)$ auch die „Abstraktor“-Schreibweise $\alpha A\left(e_k\right)$, um den Bezug zur (Grund-)Aussage und den Gegenstandsnamen zu dokumentieren. Die ontische Qualität der αe_k steht fachinhaltlich bei diesem Verfahren zu keiner Zeit in Frage, da jederzeit ein Rückgang in den (Ausgangs-)Gegenstandsbereich G der Abstraktion möglich ist. Daher ist, wie LORENZEN (1967, S. 147) ausdrücklich erwähnt, die Einführung einer solchen Redeweise von „neuen Objekten […] unbedenklich“, weil eine „semantische“ Beziehung zwischen den Konstanten der formalen Theorie und den vermeintlich neuen „Objekten“, die sie bezeichnen, gar nicht existiert. Beim Abstraktionsprozess bildet man schließlich, wie ausgeführt, aus bestehenden Konstanten einer formalen Theorie lediglich neue Konstanten, also wiederum Gegenstände einer rein formalen Sprechweise. In diesem Sinne kann man also unbedenklich rein formal von den oben eingeführten „Brüchen“ sprechen oder etwa, sofern man die Technik des Faktorisierens eines Ringes nach einem Ideal erlernt hat, von den „komplexen Zahlen“ auch dann schon, wenn man die Isomorphie von $R[X]/\left(X^2+1\right)$ zu dem Körper, den man später mit $\mathbb{C}$ bezeichnen wird und in dem man rein symbolisch nicht mehr mit

Äquivalenzklassen von Polynomen operieren wird, noch gar nicht gezeigt bzw. erfahren hat. Ein aufgrund irgendeiner „semantischen Bindung“ sich einstellendes „Gefühl“ für diese „Zahlen“, wie man es im Zuge der eigenen Sozialisation für die natürlichen Zahlen herausgebildet hat, bleibt dabei zunächst vollständig außen vor. In einem solchem Verständnis der Abstraktion werden die Zahlbereichserweiterungen der ganzen Zahlen aus den Grundzahlen (im Sinne LORENZENS), der rationalen aus den ganzen Zahlen, der reellen Zahlen aus den Folgen rationaler Zahlen erlangt, ebenso die Funktionen durch Abstraktion aus Termen und Mengen durch Abstraktion aus Formeln (vgl. die Ausführungen in LORENZEN (1965, Kap. I und II)).

Unter dem Vorgehen der *Ideation* versteht man eine grundsätzlich andere Form der Ausbildung eines neuen, „abstrakteren“ Gegenstandsbereichs aus einem gegebenen. Durch die Hinzunahme von Erfüllungsnormen hinsichtlich spezifischer, „wesentlicher“ Eigenschaften werden neue, „ideale“ Gegenstände aus einem vorliegenden Gegenstandsbereich erschaffen. Dabei muss, wie SCHREIBER (1979, S. 169) ausführt, mitunter aufgrund von Inkonsistenzen im Ausgangsbereich, „ausgedünnt“ werden. Am Beispiel der Geometrie etwa gelangt man von konkret konstruierten geometrischen Figuren zu idealen Formen, indem man die Erfüllungsnormen hinsichtlich Winkelmaßen, Übereinstimmung von Streckenlängen, Parallelität etc. oder, viel basalerer Natur, zuvorderst Anforderungen an die Grundelemente geometrischer Betrachtung, wie Ausdehnungslosigkeit von Punkten etc. hinzunimmt. Im so erhaltenen Gegenstandsbereich der idealen Formen kann nun der Aufbau eines regelgeleiteten Kalküls vollzogen, kann (ideale) Geometrie betrieben werden. SCHREIBER (a.a.O.) charakterisiert die Ideation als eher „prospektives“ denn reproduktives Verfahren. In unscharfer Formulierung wird der Prozess der Abstraktion oft auch als „Verallgemeinerung“ und „Absehen von bestimmten Eigenschaften“ beschrieben, wogegen das Verfahren der Ideation oft als „Hineinsehen“ bestimmter Eigenschaften oder „Hinsehen auf eine Idee“ bezeichnet wird (Letzteres etwa bei BENDER & SCHREIBER (1985, S. 335)).

Wenngleich im Umfeld der Mathematik, deren Gegenstände mithin allesamt abstrakt sind (im Sinne einer nicht direkten Erfahrbarkeit), in den naheliegenden Beispielen oft der reproduktive Aspekt der Ideation eine vermeintlich größere Rolle einnimmt, tritt der prospektive Aspekt insbesondere immer dort stärker hervor, wo es um direkte lebensweltliche Anbindungen geht. Deutlich wird dies etwa im Dreiplatten-Schleifverfahren zur Ideation des Begriffs der „Ebene“ und in vielen ähnlichen Beispielen aus dem Bereich der mathematiknahen Protophysik im Sinne JANICHS und DINGLERS. JANICH (1980, S. 99 ff.) sieht aus diesem Grunde in der Ideation *das* einschlägige Verfahren der Protophysik.

2.4 Begriffliche Projektion

Wenngleich, im Gegensatz zur Abstraktion, einem ideativen Vorgehen in der Geometrie eine formale fachinhaltliche Fassung im Sinne einer Äquivalenzrelation fehlt, ist damit doch schon eine Rede über gestaltgleiche Figuren, mithin eine Rede über eine *Form*, allgemein gängige Praxis und im Alltag eines jeden Menschen erfahrbar. Diesen zunächst noch unscharfen Zusammenhang führt STEKELER-WEITHOFER (1994) in seiner philosophischen Analyse auf das Problem der *Teilhabe* (*methexis*) zwischen *Form* und *Figur* zurück. Diese beiden Gegenstandsbereiche sind durch *ideative Konstitution* (von Figuren zu Formen) und, in der entgegengesetzten Richtung, durch *begriffliche Projektion*, d. h. projektive Anwendung von theoretischer Rede über ideale Formen (von Formen zu Figuren) miteinander verbunden. Auch SCHREIBERs oben angesprochene Charakterisierung der Ideation als „prospektives" Verfahren weist in diese Richtung, wenn er die didaktische Funktion von Idealisierungsprozessen unter den Gesichtspunkten „Erschließung der Realität", „Bewusstmachen von Zwecken", „Konstruktion von Genesen" sieht, die, im Sinne der vorliegenden Arbeit, sowohl von materialer in formale als auch von formaler in materiale Rede führen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Abstraktion und Ideation besteht in der Art und Weise, wie die konstruierten abstrakten Gegenstände mit den Gegenständen des zu Beginn des Prozesses gegebenen Redebereichs in Beziehung stehen. Für die Abstraktion besteht durchweg eine *Isomorphiebeziehung* zwischen den konkreten und abstrakten Gegenständen, indem man zu jedem Abstraktum einen Repräsentanten wählt und umgekehrt in einer Einzelaussage an jede Stelle die Gesamtheit aller Gegenstände der jeweiligen Äquivalenzklasse setzt. Beim Abstraktionsprozess bleibt also, ganz im Gegenteil zur Ideation, der ursprüngliche Gegenstandsbereich rekonstruierbar. Die Rede über ideale Formen sieht sich demzufolge in der projektiven Anwendung auf konkrete Figuren einem Verlust der Erfüllungsnormen gegenüber, die ja unabdingbar konstitutives Moment der Formen selbst waren. Die wesentliche Konsequenz hinsichtlich einer mathematischen Rede ist, dass ein formallogisches Schließen, wie es im Redebereich der idealen Formen eben erst aufgrund der geforderten Erfüllungsnormen möglich ist, in den materialen Konstruktionen überhaupt nicht anwendbar ist. STEKELER-WEITHOFER fasst dies in der folgenden Form:

> „Die Unterstellung eines Reiches der Ideen (gerade auch bei Platon, aber auch noch bei Frege) bedeutet (praktisch betrachtet) in der Tat nichts anderes, als daß man die Voraussetzungen für erfüllt betrachtet, die ein formallogisches Schließen […] erst erlauben." (STEKELER-WEITHOFER 1994, S. 786)

Später spricht STEKELER-WEITHOFER (2008, S. 80) von einer notwendigen „(Re-) Finitisierung" idealer Rede bei projektiver Anwendung auf konstruierte Figuren. Insbesondere greift eine solche Finitisierung stets auf „materialbegriffliche Anwendungskriterien" und ein „System von Maßstäben" zurück, die unter Einsatz eines „Relevanzfilters" in jedem konkreten Fall dazu führen zu entscheiden, ob ein formallogischer Schluss oder eine formallogische Gültigkeit auch zu einem material gültigen Schluss oder einer materialen Wahrheit in der konkreten Situation führt oder eben nicht. Abbildung 1 stellt diese Situation schematisch dar. Mithin stellt sich aus didaktischer Sicht die grundsätzliche Frage, wie man bzgl. Lehr- und Lernsituationen mit der einhergehenden begrifflichen Differenz bzgl. der mathematischen Rede umgeht.

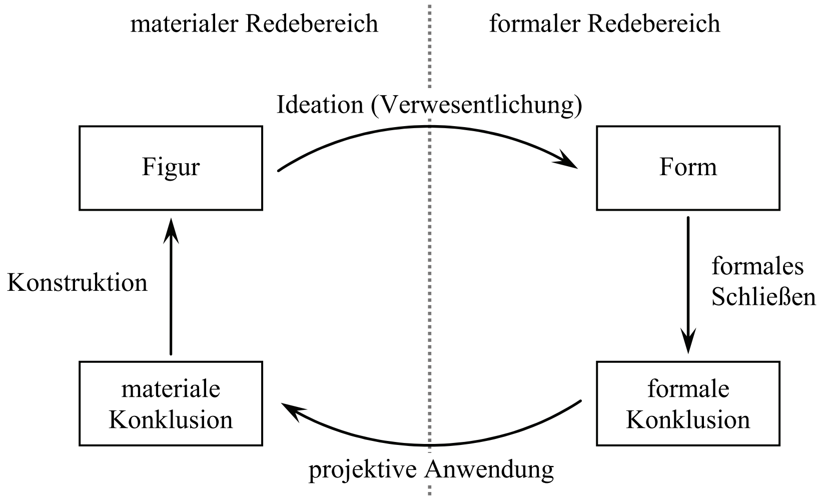


Abbildung 1: Schematische Darstellung zum Zusammenspiel der Redebereiche und Schlussformen von konstruierten Figuren und idealen Formen

Ein Auftreten solcher begrifflicher Differenzen ist im Bereich der Geometrie nicht nur bei händischem Zeichnen zu beobachten, sondern auch beim Gebrauch moderner, rechnergestützter Werkzeuge. In Dynamische-Geometrie-Systemen treten neben der grundsätzlichen Differenz der Figurengeometrie der endlichen, diskretisierten Zeichenfläche zur idealen euklidischen Geometrie solche Differenzen z. B. beim Verschieben oder Ziehen von Elementen auf. Bewegt man Elemente entlang von Pixelpfaden, die (idealen) Formen „entsprechen" sollen, aber in der jeweiligen Auflösung (und damit im Wortsinne) von der „Finitisierung" mehr oder weniger stark abweichen, sind davon betroffene formale Schlüsse nicht mehr gültig. Es gelten dann material im besten Falle abgewandelte, „refinitisierte" Entsprechungen der formalen Schlüsse. Die Tatsache, dass Objekte, die entlang der softwareseitig implementierten Routinen konstruiert wurden, eine scheinbar „ideale Passung" aufweisen, mag nur allzu oft über diesen Umstand hinwegtäuschen und liegt selbstverständlich in einer, dem Nutzer nicht direkt zugänglichen, formalisierten Repräsentation der Handlungsobjekte zur Laufzeit des Systems begründet.

Eine Besonderheit begrifflicher Projektion in mathematischen Kontexten besteht in der notwendigen materialbegrifflichen Ausdeutung von Symbolen, die zur Kodierung im formalen Redebereich herangezogen werden. Folgt man KAMLAH & LORENZEN (1996, II § 2), die ausgehend von der Unterscheidung zwischen „Handlungsverstehen“ und „Redeverstehen“ von einzelnen, konkreten „Zeigehandlungen“ zu potentiell ausführbaren, mithin allgemeinen „Zeigehandlungsschemata“ (als Synonym für „Zeichen“) gelangen, so muss die begriffliche Projektion in umgekehrter Richtung notwendig aus einem symbolkodierten Zeigehandlungsschema des formalen Redebereichs auf eine am Einzelfall einsehbare Zeigehandlung des materialen Redebereichs führen.

In diesem Sinne soll für die spätere Analyse von Aufgabenbearbeitungen im Folgenden jedes Handlungsobjekt einer solchen Zeige*handlung* durch den Zusatz „material“ gekennzeichnet und damit von entsprechend benannten „formalen“ Handlungsobjekten, die in zugehörigen Zeige*handlungsschemata* auftreten, sprachlich unterschieden werden können. Es kann dann, in klarer Unterscheidung, von „materialen Geraden“, „materialen Kreisen“, „formalen Punkten“ „formalen Winkeln“ etc. gesprochen und jederzeit eine eindeutige Zuordnung in den Kontext einer Zeigehandlung oder eines Zeigehandlungsschemas vorgenommen werden.

3 Zur Rolle der Schlussformen im Hinblick auf die Begriffsbildung

3.1 Motivation

BRANDOM (2001, S. 76) hebt hervor, dass die Billigung materialer Inferenzen unabhängig von irgendeiner spezifisch logischen Kompetenz geschieht. Dieser Punkt erscheint mir sehr bemerkenswert und hat mich überhaupt erst veranlasst, an die skizzierten Überlegungen im Themenkreis der analytischen Philosophie anzuknüpfen. Ohne Zweifel wird jeder Mathematiklehrende bestätigen können, dass er sich Situationen großer Unsicherheit dahingehend gegenübersah, inwieweit Lernende die Sphäre des materialen Schließens (mit ihrerseits vermeintlich adäquaten Bedeutungsbelegungen eingehender Begriffe) hin zur Sphäre des formalen Schließens übersteigen bzw. ob und wie die Lernenden diese beiden Schlussweisen miteinander in Zusammenhang bringen.

Es gilt, um an eine Formulierung von FREUDENTHAL (1962, S. 618 ff.) anzuschließen, auszuforschen, inwieweit in Lehr- und Lernsituationen die Verbindung materialer und formaler Schlussweisen zu einer Überwindung des „clean cut“ zwischen Mathematik und „realistic sciences“ beitragen kann bzw. inwieweit sich Verstehenshürden bei Beschränkung auf eine der beiden Sichtweisen manifestieren. Diese Fragestellung und die aus einer möglichen Beantwortung in didaktischer Hinsicht resultierenden Folgerungen sind sicher für jedwedes Lehren von großer Bedeutung. Waren mathematische Formulierungen etwa bis zur Zeit PASCHs, den FREUDENTHAL (a.a.O.) auch als den eigentlichen „father of rigor“ bezeichnet, als untrennbar mit der Frage nach ihrer Anwendbarkeit und damit einer unabdingbar mitgedachten Einbettung in einen zugehörigen, alltagssprachlichen Redebereich gedacht, muss dies spätestens mit Aufkommen der axiomatischen Methode in Frage gestellt werden.

Gerade im schulischen Umfeld wird man hinsichtlich des fachinhaltlichen Aufbaus naturgemäß nicht ein globales Ordnen verfolgen. KRATZ (1993), auf den WEIGAND *et al.* (2009, S. 47) dahingehend als Ausnahme verweisen, geht in seinem Lehrwerk für die Sekundarstufe I in dieser Hinsicht einen Mittelweg, der noch in Ansätzen ein globales Ordnen verfolgt, wenn er die Theorie aus „Definitionen“, unbewiesenen „Fundamentalsätzen“ (welche damit die Rolle von Axiomen einnehmen), „Sätzen“ und „Grundaufgaben“ aufgebaut versteht. Im Vorwort seines Lehrwerks intendiert er, im Sinne der Terminologie dieser Arbeit, eine Sensibilisierung im Bereich der materialen Schlüsse:

> „Es versteht sich von selbst, daß im Geometrieunterricht der Mittelstufe ein lückenloser Aufbau oder gar eine gewisse Axiomatik auch nur ansatzweise nicht in Betracht kommt. Dem Schüler muß jedoch von Anfang an bewußt gemacht werden, daß zwischen Sätzen, die auf unmittelbarer Erfahrung und Überzeugung beruhen, und solchen, die aus „Erfahrungs- und Überzeugungssätzen“ gefolgert werden können, klar zu unterscheiden ist.“(KRATZ 1993, Vorwort)

3.2 Didaktisches Potential einer inferentiellen Sichtweise

Die inferentielle Sichtweise hat nun das Potential, als Bindeglied und Artikulationsform zwischen dem nicht-anschaulichen Sinngehalt in formaler mathematischer Rede und dem anschaulichen Sinngehalt in materialer Rede zu fungieren. In der Art und Weise nämlich, wie Lehrende und Lernende formale und materiale Schlüsse zueinander in Beziehung setzen, deutet sich der Zusammenhang zwischen Allgemeinem und Besonderem eines mathematischen Inhalts aus, wird vom Allgemeinen zum Besonderen bzw. vom Besonderen zum Allgemeinen im Rahmen eines Begriffes, eines Satzes etc. übergegangen.

Im Hinblick auf die Begriffsbildung ist es die Struktur der mathematischen Inhalte selbst, die eine inferentielle Sichtweise einer repräsentationalen mindestens gleichwertig zur Seite stellt. Inhalte mathematischer Begriffe deuten sich eben nicht im Lernen einzelner „Wörter“ und „Sätze“ aus, die als Repräsentationen von Teilen der „mathematischen Welt“ gelehrt oder gelernt werden und in deren Kenntnis man den Anspruch erhebt, dass durch eine Bezugnahme auf sie der jeweilige Teil der „mathematischen Welt“ konstituiert würde. Es sind doch vielmehr die Eigenschaften der Handlungsobjekte, deren Beziehungen untereinander sowie die mannigfachen Beziehungen subjektiver wie intersubjektiver Art in der Sprachgemeinschaft der Lehr- und Lernsituationen, die den begrifflichen Inhalt maßgeblich konstituieren. In diesem Sinne wird eine inferentielle Sichtweise auch den Aspekten gerecht, die NEWEN (2003, S. 427 ff.) für jedwede Theorie der Begriffe als notwendig erachtet: einen objektiven Aspekt (in Bezug auf die Extension), einen subjektiven (in Bezug auf das handelnde Subjekt) und einen intersubjektiven Aspekt (in Bezug auf eine Sprachgemeinschaft, die eine Praxis von Glaubenszuschreibungen pflegt).

Auch PESCHEK setzt sich in diesem Sinne mit dem Verhältnis von materialen und formalen Fassungen mathematischer Inhalte auseinander, wenn er in seiner Analyse von Abstraktions- und Verallgemeinerungsprozessen die Begriffsbildung in den Mittelpunkt einer Erörterung stellt, die den Übergang „vom sinnlich Wahrnehmbaren zur logischen Notwendigkeit“ (PESCHEK 1989, S. 227) thematisiert. Für diese, der begrifflichen Projektion entgegengesetzte Richtung vom Besonderen zum Allgemeinen, greift er die „reflektive Abstraktion“ („abstraction réfléchissante“) PIAGETs auf, welche konstitutiv die Parallelität von „Koordinationsformen“ von Handlungen und logischen (Denk-)Strukturen annimmt:

> „Nun haben alle diese Koordinationsformen Parallelen in logischen Strukturen, und mir scheint, daß es derartige Koordinationen auf der Ebene der Handlungen sind, die die Grundlage der sich später im Denken entwickelnden logischen Strukturen bilden.“ (PIAGET 1973, S. 26)

Kann man nun zum einen PESCHEKs vierfache Unterscheidung in „empirische und theoretische Abstraktion“ sowie „empirische und theoretische Verallgemeinerung“ entlang seiner originären Charakterisierungen in den oben dargestellten materialen und formalen Redemodi wiederfinden, ermöglicht das inferentielle Modell auch ein Schließen eben derjenigen Lücke, die in PESCHEKs vorsichtiger Formulierung anklingt:

> „Die in der Mathematik interessierenden und in Begriffen (im weitesten Sinn) repräsentierten Beziehungen sind also meist über Handlungen vermittelbar. Genauer: Durch Handlungen werden Beziehungen hergestellt; den mathematischen Begriffen können dann vielfach Handlungen zugrunde gelegt werden in dem Sinn, daß die durch die Handlungen hergestellten Beziehungen zwischen realen Objekten strukturgleich den durch die mathematischen Begriffe intendierten Beziehungen zwischen mathematischen Objekten (Begriffen) sind.“ (PESCHEK 1989, S. 247)

Ohne Zweifel gibt es eine Vielzahl von mathematischen Begriffsbildungen, in denen die in diesem Sinne in den Begriffen „repräsentierten Beziehungen“ nicht über Handlungen vermittelbar sind. Beispiele dafür sind alle auf dem Grenzwertbegriff der Analysis aufbauenden Begriffsbildungen, da sich diese der konzeptionell grundsätzlich unterstellten Parallelität von Handlungen und logischen (Denk-)Strukturen nicht unterwerfen. Es sind im Gegenteil vielmehr das Nicht-Fortbestehen einer solchen Parallelität und die Nicht-Vermittelbarkeit durch entsprechende Handlungen bei unendlichen Prozessen, die einen Zugang zu den Begriffen erheblich erschweren.

Am Beispiel der Begriffsbildung des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion etwa sieht man sich bei der Approximation durch Integrale von Treppenfunktionen dem bekannten grundlegenden Problem bei der materialen Ausdeutung des Grenzwerts in der Form gegenüber, dass der Approximationsprozess selbst, material gefasst, „nie aufhört". Sind die einzelnen Integrale von Treppenfunktionen und der Übergang von einer Treppenfunktion zu einer „feineren" (bei entsprechender Definition der Feinheit einer zugrunde liegenden Zerlegung des Intervalls) sehr wohl material als „Rechtecksummen" und „Verfeinerung" deutbar, kann die formale Setzung des Integralwerts der approximierten Funktion als Grenzwert der Integrale der approximierenden Treppenfunktionen eben nicht durch eine zugehörige Handlung repräsentiert werden.

In solchen Fällen, in denen keine Handlung zur Vermittlung der in den Begriffen repräsentierten Beziehungen zur Verfügung steht, kann diese Lücke durch eine Fokussierung auf die Übergänge auf der Ebene der formalen und materialen Inferenzen geschlossen werden. Indem nämlich in der Richtung begrifflicher Projektion vom Allgemeinen auf das Besondere ein allgemeiner formaler Schluss in einen zugehörigen materialen Schluss im Einzelfall übertragen wird, kommen die Beziehungen, die den Begriff ausmachen, zum Tragen, und zwar, im Sinne der Projektion, notwendigerweise sowohl formal als auch material. Eine solche Übertragung sollte sich in der Regel durch eine entsprechende Dokumentation ausdrücken, mag aber auch, die Rekonstruktion deutlich erschwerend, „still" geschehen, im Sinne der „tacit models" nach FISCHBEIN (2001).

3.3 Beispiele

Die im Folgenden abgedruckten Aufgabenbearbeitungen wurden von Seminarteilnehmenden in Seminaren des Autors verfasst, die thematisch jeweils keinerlei fachinhaltliche Berührung mit den Themenkreisen hatten, denen die Aufgaben entstammen. Die Bearbeitungen wurden auf freiwilliger Basis und unter üblichen Testatbedingungen (Einzelarbeit, Vereinzelung, zeitliche Limitierung) erhoben. In diesem Sinne handelt es sich sicher um authentische Einblicke bzgl. des deklarativen und prozeduralen Wissens von Studierenden im 5. bzw. 6. Semester in den jeweiligen Themenkreisen. Es wird (bei Stichprobenumfängen von $N = 21$ bzw. $N = 23$) selbstverständlich keinerlei Anspruch auf Repräsentativität erhoben, sondern das Ziel verfolgt, Beispiele für das Zusammenspiel von materialen und formalen Schlussweisen in den Bearbeitungen aufzuzeigen. Die abgedruckten Bearbeitungen geben die Dokumentationen der Studierenden jeweils vollständig wieder, lediglich Leerräume wurden der Platzersparnis wegen eingekürzt. Bei der Kommentierung der Bearbeitungen wird, wenngleich die Dokumentationen auf weitere Fehlvorstellungen hinweisen, durchweg auf die rekonstruierbaren Übergänge zwischen verschiedenen Redebereichen seitens der Studierenden fokussiert.

3.3.1 Beispiel 1 – Konstruktion einer Winkelhalbierenden

Zu einem material durch eine Figur gegebenen Winkelfeld α sollte die Winkelhalbierende konstruiert und das Funktionieren des angewandten Verfahrens begründet werden. Saskia konstruiert dazu (Abbildung 2) drei weitere Punkte A, B und C durch Schnitte mit Kreisbögen und deutet den Strahl von S durch C (im Weiteren kurz $\overline{SC}$) an. Die geometrischen Objekte sind nun im Kontext ihrer Zeichnung zunächst material als Figuren und noch nicht in Beziehung zu idealen Formen zu verstehen, was gängige Praxis und aus der Sicht der Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen auch angestrebt ist, damit sich überhaupt materiale Vorstellungen von Figuren zu den entsprechenden idealen Formen ausbilden können. Grundsätzlich handelt es sich auch hierbei schon um „stille" elementare Projektionsakte, wenn eine materiale Strecke mit dem idealen Strahl, materiale Punkte mit idealen Punkten etc. identifiziert werden.

Die Argumente, die Saskia für das Funktionieren ihrer Vorgehensweise zur Winkelhalbierung dokumentiert, beziehen sich im Folgenden durchweg auf die Richtigkeit ihrer Konstruktion. Vor dem Hintergrund ihrer gelungenen Konstruktion – immerhin hat sie die gesuchte Winkelhalbierende gezeichnet – spielt für sie das Begründungsbedürfnis hinsichtlich der Durchführbarkeit der Konstruktion keine Rolle. Die angeführten Gründe für die Richtigkeit ihres Verfahrens, also die Klärung der Frage, warum es sich bei ihrem letztlich skizzierten Strahl $\overline{SC}$ um die materiale Entsprechung der gesuchten formalen Winkelhalbierenden handelt, zeigen deutlich das Zusammenspiel von materialen und formalen Schlüssen.

Grundsätzlich möchte Saskia die Winkelhalbierende als Diagonale einer Rautenfigur konstruieren („es entsteht eine Raute") und bezieht sich explizit auf die Eigenschaft der formalen Raute („Eigenschaft der Raute"), dass deren Diagonalen auch Winkelhalbierende der zugehörigen Innenwinkel sind. Der Konstruktion der Rautenfigur liegt vorab ein Projektionsakt zugrunde, der definierende Eigenschaften der Rautenform (etwa „Eine Raute ist ein ebenes, konvexes Viereck mit der Eigenschaft, dass seine Seiten alle gleichlang sind.") auf die konkrete Situation ausprägt (α soll Innenwinkel der Rautenfigur sein, zwei Seiten der Raute sollen damit auf den Winkelschenkeln abgetragen werden). Es liegt also ihrer Konstruktion der Punkte S, A und B zunächst ein Übergang von formalem zu materialem Handlungsobjekt, von Rautenform zu Rautenfigur, zugrunde.

Bei der Begründung der Folgerungen „$\overline{SA} = \overline{SB}$" und „$\overline{BC} = \overline{AC}$" aus ihrer Zeichnung spricht Saskia formal. Selbst wenn man die formale Schreibweise als lediglich symbolkodierte Abkürzungen materialer Rede interpretierte, wird dennoch deutlich, dass sie in den Bereich formaler Rede gewechselt ist, wenn sie von *einem* Kreis („des gleichen Kreises") bzw. dessen Radius („Radius des Kreises") spricht. Material hat sie nämlich in der Tat vier echt verschiedene Kreis*bögen* konstruiert: Die Kreisbögen der Kreise $K_S\left(\left|\overline{SA}\right|\right)$ und $K_S\left(\left|\overline{SB}\right|\right)$ sind, der Zeichnung deutlich als unzusammenhängend entnehmbar, nicht in einer Konstruktionshandlung erzeugt, die Kreisbögen der Kreise $K_A(|\overline{AC}|)$ und $K_B(|\overline{BC}|)$ aufgrund der unterschiedlichen Mittelpunkte erst recht nicht. Saskia spricht hier, im Hinblick auf ihre Zeichnung, also in mehrfacher Hinsicht kontrafaktisch: die Radien je zweier verschiedener Kreisbögen werden in der Regel, auch bei gleichem Mittelpunkt, nicht formal und aufgrund der separaten Konstruktionen auch nicht material gleich („=") sein. Demnach entspricht ihre Formulierung „des gleichen Kreises" hier in materialer Unschärfe der Klasse aller Kreise mit materialem Radius $|\overline{SA}|$, einem Objekt, das wiederum nur rein formal fassbar ist. Diese Klasse wird dann wiederum in Projektion auf die materiale Größe $|\overline{SA}|$ eines Radius verengt.

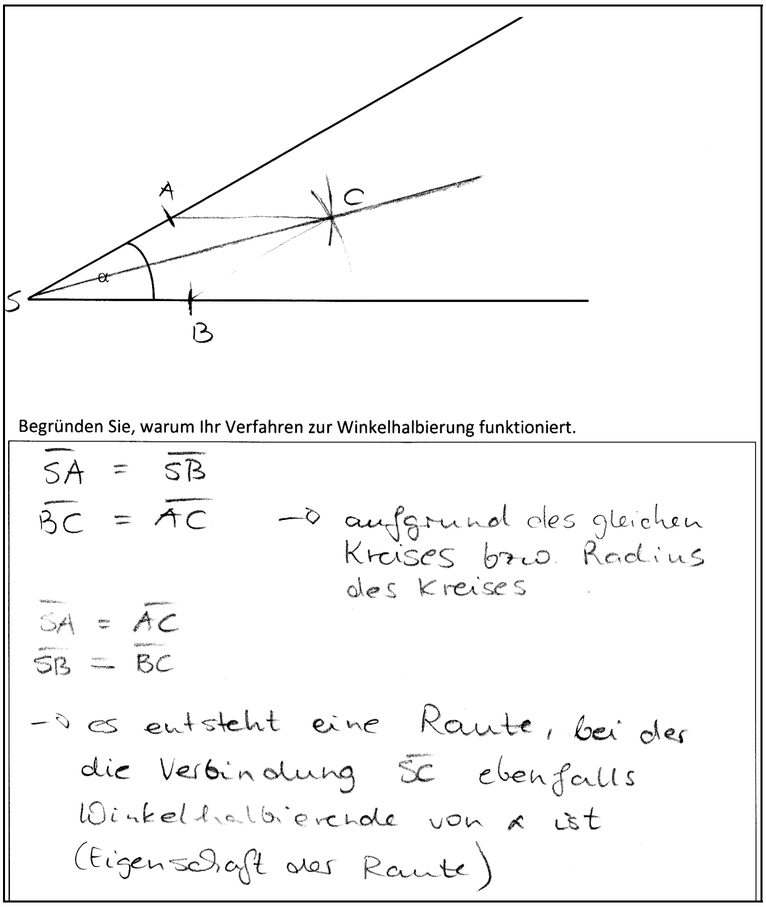


Abbildung 2: Bearbeitung von Saskia zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden

Gerade in diesen letzten beiden Schritten, der Formalisierung im Zuge der Klassenbildung und der direkt folgenden pragmatischen Finitisierung, in der dann von der Kreis*form* der vier still identifizierten materialen Kreise auf die materiale Streckenlänge $\left|\overline{SA}\right|$ übergegangen wird, zeigt sich, wie engmaschig materiale und formale Rede ineinander verwoben sind.

Nur die stille Identifikation der materialen Kreise erlaubt es Saskia überhaupt, nach Übersetzung in die formale Sprechweise und aufgrund der Transitivität der eben *dort* geltenden Gleichheitsrelation von den formalen Streckengleichheiten „$\overline{SA} = \overline{SB}$“ und „$\overline{BC} = \overline{AC}$“ über die Identitäten „$\overline{SA} = \overline{AC}$“ und „$\overline{SB} = \overline{BC}$“ insgesamt auf die Gleichungskette „$\overline{SB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{SA}$“ zu schließen. Erst aufgrund dieser formalen Fassung sieht sie dann in die Figur ihres konstruierten Vierecks *SBCA* die Form einer Raute hinein und wechselt damit wiederum in den formalen Redebereich, dem der Schluss „*SBCA* ist Raute $\Rightarrow$ die Diagonale $\overline{SC}$ halbiert den Winkel $\angle ASB$“ entstammt.

In der projektiven Anwendung dieses formalen Schlusses auf ihre materiale Konstruktion folgert sie die Halbierung des materialen Winkelfeldes $\angle ASB$. Bei dieser Projektion geht die Implikation des angewendeten formalen Satzes, genauer: die Anwendung der formalen Schlussfigur des Modus Ponens („*P* ist Raute.“ | „Wenn *S* Raute, dann halbieren die Diagonalen von *S* die zugehörigen Innenwinkel.“ || „Diagonalen von *P* halbieren die zugehörigen Innenwinkel.“), in denjenigen Fall einer materialsprachlichen Subjunktion über, in dem Prämisse und Konklusion wahr sind.

Wenngleich es aus fachinhaltlicher Perspektive keine materialen Inferenzen geben kann, die nicht als Projektionen formaler Inferenzen auftreten, können aus fachdidaktischer Sicht Lernende aber sehr wohl, wie hier am Beispiel von Saskia, aufgrund der von ihnen mit den formalen Handlungsobjekten durch elementare Projektionsakte verbundenen Handlungsobjekten material schließen. Sie nutzen dabei mitunter nur implizit die zugrunde liegenden formalen Redeweisen. So ist die eben genannte materialsprachliche Subjunktion nicht anders zu verstehen als eine Vervollständigung des Diagramms (Abbildung 3) im Bereich materialer Rede. Die materialsprachliche Subjunktion ist, beginnend bei der formalen Rautenform, so verstehbar als eine Hintereinanderausführung von Projektion (1), einem nachfolgenden erneuten Übergang ideativer Natur in den formalen Redebereich (2), einem formalem Schluss (3) und anschließender Projektion (4). Der Ausgangspunkt einer solchen Inferenz ist auch nicht der vermeintliche materialsprachliche Bereich, sondern der formale Redebereich. Durch einen nachträglichen Schritt der Verkürzung der Argumentation, in dem eben der erste Projektionsschritt (1) herausgenommen wird, gelangt man zu einer rein materialen Inferenz.

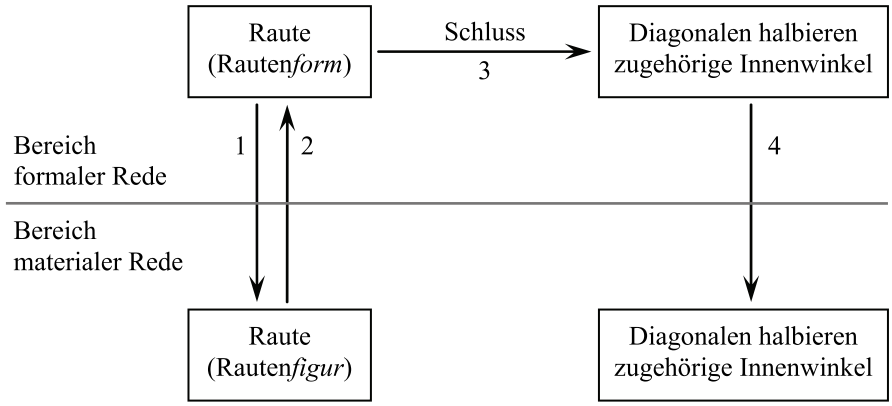


Abbildung 3: Schematische Darstellung zur materialsprachlichen Subjunktion in Saskias Bearbeitung

Die Verwendung des Adverbs „ebenfalls“ in Saskias Dokumentation gibt für den letzten Projektionsschritt mindestens zwei möglichen Deutungen Raum:

- Saskia lässt, in einer mentalen Handlung, gleichsam dem empraktischen „Überlegen einer Folie“ auf das Winkelfeld, den formalen Rauteninnenwinkel $\angle ASB$ mit α zur Deckung kommen und das „ebenfalls“ rechtfertigt als Argument einer deckungsgleichen Passung die Zuweisung des Attributs der Winkelhalbierenden auch für den dann in das Winkelfeld α eingebetteten materialen Strahl $\overrightarrow{SC}$ der Rautenfigur *SBCA*.

oder

- Saskia sieht von vornherein, da ihr vorab durchgeführter Konstruktionsprozess vollständig in der vorgegebenen Skizze verlief, ein stringentes Nebeneinander der beiden Redebereiche der idealen Rautenform und ihrer in der vorgegebenen Skizze konstruierten Rautenfigur.

In jedem Fall ist ihr „ebenfalls“ nochmals ein deutliches Indiz für das Nebeneinander mindestens zweier verschiedener Redebereiche und die implizite („stille“) Nutzung des zugrunde liegenden formalen Schlusses. In dem unter Verwendung des bestimmten Artikels formulierten Hinweis „(Eigenschaft der Raute)“ manifestiert sich, in Abgrenzung zur vorherigen Wahl des unbestimmten Artikels („es entsteht eine Raute“), in einem projektiven „So-Reden-Als-Ob“ deutlich die der Argumentation zugrunde liegende Finitisierung von Form auf Figur.

Grundsätzlich hat Saskia mit ihrem Vorgehen natürlich nur einen echten Teil der materialen Winkelhalbierenden konstruiert, nämlich denjenigen, der in der von ihr konstruierten Figur der Raute einer Diagonalen entspricht. Für ihre in der Zeichnung angedeutete Fortsetzung der Diagonalen der Raute (hin zum Strahl $\overline{SC}$) wird von ihr kein weiteres Argument die Eigenschaft der Winkelhalbierenden angeführt. Deutlich wird dadurch, dass der von Saskia gewählte formale Redebereich zugleich eine Einschränkung für die projektive Anwendung mit sich bringt. Die von Saskia genutzte Eigenschaft der Diagonalen der Raute wird auch unter Vernachlässigung der ideativen Erfüllungsnormen (und eine solche Vernachlässigung erkennt man deutlich etwa in den Ungenauigkeiten ihrer Skizze) nicht den „Gültigkeitsbereich" des Rautenabschlusses übersteigen können. Die Wahl eines formalen Redebereichs kann in anderen Bearbeitungen naturgemäß eine deutlich andere sein. Die Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ im gleichschenkligen Dreieck *SBA* etwa wiese die beschriebene Beschränkung nicht auf.

3.3.2 Beispiel 2 – Grenzwert einer reellen Zahlenfolge

Die Bearbeitung von Sven zeigt exemplarisch die Interdependenz der Redebereiche im Themenkreis der Analysis auf. Die gestellte Aufgabe verlangte die Betrachtung der reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

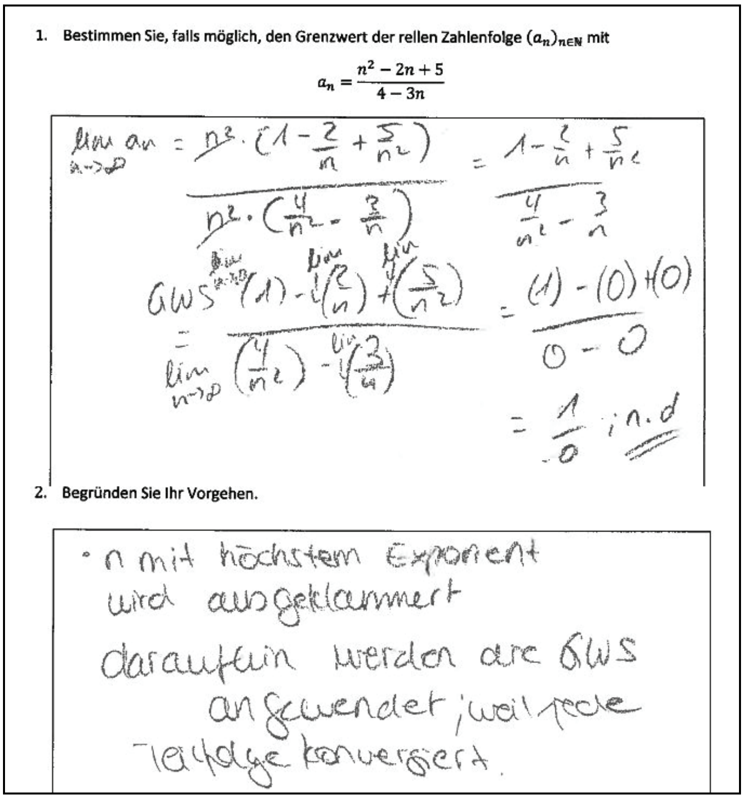
$$a_n = \frac{n^2 - 2n + 5}{4 - 3n},$$

hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens.

Svens Argumentation (Abbildung 4) basiert (abgesehen von offensichtlichen Dokumentationsfehlern wie etwa dem Vergessen des „lim"-Symbols) auf der mehrfachen Anwendung von Grenzwertsätzen für konvergente Zahlenfolgen. Sven kürzt den gegebenen Bruch nach Faktorisieren von Zähler und Nenner der gegebenen Folge von Quotienten durch n^2 . Entlang seiner materialsprachlichen Begründung („*n* mit höchstem Exponent wird ausgeklammert"), die sich aus der inhaltlichen Bedeutung der Termini „*n* mit höchstem Exponent" und „ausklammern" im Einzelfall konstituiert, veranlasst ihn dies zu einer Projektion aus dem formalen in den materialen Redebereich: Sven wendet ein für diesen Typ von Folgen (Folgen von Quotienten ganzrationaler Funktionen in der Variablen des Folgenindex) als einschlägig gelerntes allgemeines Zeigehandlungsschema (im Sinne von Abschnitt 2.4) hier am gegebenen Handlungsobjekt in einer konkreten Zeigehandlung an.

Die Tatsache, dass bei dieser Handlung des Kürzens durch n^2 , die letztlich einem Repräsentantenwechsel im Rahmen der zugrunde liegenden Term-Abstraktion entspricht, die Konvergenzeigenschaften der zugehörigen Folge unverändert bleiben, wird von ihm, in gelernter gängiger Praxis der fachmathematischen Sprachgemeinschaft, nicht explizit formuliert. Erst dieser formale Repräsentantenwechsel aber erlaubt es Sven, anstelle von divergenten Zähler- und Nennerfolgen nun mit konvergenten Folgen zu operieren und damit ab seinem dritten Gleichheitszeichen überhaupt erst, was seiner Vorgehensweise der Einzelbetrachtung von Zähler- und Nennerfolge betrifft, eine Rede im formalen Bereich der konvergenten Folgen und der Grenzwertsätze für diese Handlungsobjekte zu formulieren. Die Frage, inwiefern Sven dieser Wechsel der Rede bewusst ist, bleibt nur indirekt an seiner weiteren Bearbeitung ausdeutbar.

Sven bestimmt dann richtig, wiederum in Projektion, nämlich der Anwendung der Grenzwertsätze auf den konkreten Fall, die Einzelgrenzwerte von Zähler und Nenner des Bruches. Zunächst dokumentiert Sven die Existenz der Einzelgrenzwerte „$(1)-(0)+(0)$“ sowie „$0-0$“ von Zähler und Nenner, und seine etwas ungewöhnliche Notation der Klammerung im Zähler lässt vermuten, dass auch tatsächlich jeder Summand des Zählerterms (und später auch im Nenner, wenngleich dort gewöhnlich notiert) einzeln betrachtet wurde. Die Grenzwerte aller in Zähler und Nenner auftretenden Summanden existieren einzeln und somit auch die Grenzwerte von Zähler und Nenner.



1. Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert der rellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^2-2n+5}{4-3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n^2\cdot\left(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n}\right)} = \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n}}$$

$$\text{GWS} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1)-\lim\left(\frac{2}{n}\right)+\lim\left(\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)-\lim\left(\frac{3}{n}\right)} = \frac{(1)-(0)+(0)}{0-0} = \frac{1}{0}\ ;\ \text{n.d}$$

2. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

• n mit höchstem Exponent wird ausgeklammert
daraufhin werden die GWS angewendet, weil jede Teilfolge konvergiert.

Abbildung 4: Bearbeitung von Sven zur Konvergenzeigenschaft einer Folge

Aus seinem formal erhaltenen Ergebnis „$\frac{1}{0}$“ und dessen materialer Deutung als „n. d.“ (gängig für „nicht definiert“) müsste er nun wieder in den formalen Redebereich wechseln und den Schluss ziehen, dass der entsprechende Grenzwertsatz für diesen konkreten Quotienten gar nicht anwendbar ist und dementsprechend nach Revision seiner Dokumentation (die letzten drei Gleichheitszeichen gelten nicht) schließlich nach einer anderen Möglichkeit suchen, über die Konvergenz zu entscheiden. Ein „n. d.“ ist letztlich keine Entscheidung hinsichtlich der Konvergenz der gegebenen Folge, dennoch sieht Sven dies ohne Zweifel (er unterstreicht „n. d.“ doppelt) als sein Ergebnis an.

Sven präsupponiert somit in diesem letzten Schluss die Isomorphiebeziehung der zugrundeliegenden Abstraktionen („Quotientenfolge“ aus Folgen ganzer Zahlen) unberechtigt auch für die Begriffsbildung des Grenzwerts, die sich aber eben nicht ohne zusätzliche Einschränkungen einhergehend aus den konstituierenden Folgen auf die Quotientenfolge übertragen lässt. Seine fehlerhafte Projektion hin zur Feststellung des nicht definierten Grenzwerts der gegebenen Quotientenfolge ist in diesem Zuge fachinhaltlich natürlich gar nicht durchführbar.

Zu einem gewissen Grad ist Svens Vorgehen sicher dem Umstand geschuldet, dass in der Anwendung der Grenzwertsätze die Chronologie der Dokumentation dem Entscheiden über die Konvergenzeigenschaft der Folge in der Regel entgegenläuft. Deutlich wird daran auch, dass eine, dem Konsens der Sprachgemeinschaft folgend, still dokumentierte formale Rede (hier: das zunächst vorläufige Setzen von Gleichheitszeichen) zu fehlerbehafteten Projektionsakten und damit zu fehlerhafter materialer Rede führen kann.

Ein weiterer bedeutsamer Punkt, der an Svens Bearbeitung deutlich wird, ist seine eigenständige Verallgemeinerung von den korrekten Grenzwertsätzen hin auf eine eigene Version auch für Fälle des bestimmt divergenten Typs, wie dem in der gestellten Aufgabe. Hinsichtlich der begrifflichen Projektionen gehen damit entsprechende Modifikationen des formalen Zeigehandlungsschemas einher. Deutlich kann man diese Modifikationen an Svens eigener Formulierung in seiner Begründung ablesen („weil jede Teilfolge konvergiert“) – hier wird in materialer Unschärfe zunächst die Bezeichnung „Teilfolge“ falsch benutzt. Offensichtlich meint er seinerseits die „Zählerfolge“ und die „Nennerfolge“, also „(Bestand-)Teile“ des gegebenen Bruches in der Darstellung des n-ten Folgeglieds. Mag man dies oberflächlich zunächst „nur“ als eine sprachliche Ungenauigkeit ansehen, doch sie legt den Kern des Fehlers in der falschen Benutzung des Terminus „Teilfolge“ frei: Sven überträgt offenbar die entsprechenden formalen Zeigehandlungsschemata für Summe und Produkt von Folgen, die in eben einer solchen Formulierung gelten, auf den hier vorliegenden Fall einer Folge von Quotienten. Teilfolgen der gegebenen Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind jedoch von der Form $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit monoton wachsendem $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Sven geht hier von den materialen Zeigehandlungen, die er an

Zähler und Nenner richtig vornimmt, am Ende seiner formal notierten Rechnung zum vermeintlichen Quotienten der existenten Grenzwerte von Zähler und Nenner über, erkennt diesen als nicht definiert, kann dies aber nicht in einen Projektionsakt des entsprechenden Grenzwertsatzes für Folgen von Quotienten einbinden.

4 Fazit

Eine jede mathematische Rede besteht, sofern sie nicht künstlich voll formal gehalten wird, aus einer Verbindung materialer und formaler Formulierungen. Die Sensibilisierung für das Zusammenspiel der beiden zugrunde liegenden, grundsätzlich verschiedenen Redebereiche ist somit für jede Form des Mathematiktreibens unerlässlich. Insbesondere in Lehr- und Lernsituationen zu Begriffsbildungsprozessen sieht man sich in verstärktem Maße einem Abgleich materialer und formaler Rede gegenüber, wenn man (implizit oder explizit) der Frage nachgeht, wie man von neuen Handlungsobjekten überhaupt sprechen kann. Aus fachdidaktischer Sicht ist es ein Grundanliegen, dass sich zu abstrakten, formal gefassten Handlungsobjekten entsprechende Grundvorstellungen und Grundverständnisse (nach BENDER 1991 und VOM HOFE 1995) auf Seiten der Lernenden etablieren. Demgemäß ist jedes mathematische Reden in Lehr- und Lernsituationen immer auch ein Anlass, das Ziel zu verfolgen, nicht ein „entfremdetes Nebeneinander“, sondern mindestens ein plausibles „Miteinander“ beider Redemodi zu befördern. Die angeführten Beispiele legen nahe, mathematische Argumentationen von Lernenden stets mindestens hinsichtlich der dabei verwendeten Schlüsse materialen und formalen Charakters zu analysieren und die Abhängigkeiten der Schlüsse in beiden Redebereiche zu thematisieren.

Dem Prozess der Projektion kommt als Bindeglied von formaler zu materialsprachlicher Rede eine besondere Bedeutung zu. Da Lernende in ihrer Alltagswirklichkeit materialsprachlich formulieren und schließen, gilt es aus didaktischer Sicht zum einen, den formalen Redebereich aus dem materialsprachlichen plausibel zu erschließen, zum anderen aber auch, die Rolle der projektiven Anwendung zu thematisieren und das Zusammenspiel beider Redebereiche herauszuarbeiten und nicht etwa den formalen Redebereich als angestrebtes Lehrziel zu benennen, den man, einmal erreicht, möglichst nicht mehr zu verlassen habe.

Die obigen Ausführungen sollen für eine inferentiell semantische Sicht auf mathematische Argumentationen sensibilisieren und bei der Erörterung der Rolle der Projektion aufzeigen, wie diese Sicht förderlich zur Analyse der Feinstruktur mathematischer Rede eingesetzt werden kann. Zumindest für diejenige Rede, deren Handlungsobjekte einem Ideations- oder Abstraktionsprozess entstammen, erscheint dieses Konzept als eine tragfähige Ergänzung zu bestehenden anderen Herangehensweisen und steht konzeptionell durch die enge Anbindung an die fachinhaltlichen formalen Fassungen der jeweiligen Rede einer stoffdidaktischen Methodik deutlich näher als adaptierte Verfahren aus anderen Bezugswissenschaften. Insbesondere scheint mit dieser Methode, sofern man neben Rechnungen oder Konstruktionen auch (material) versprachlichte Begründungen einfordert, eine sehr effiziente Möglichkeit zur Hand zu sein, mögliche Fehlvorstellungen in Argumentationen ausfindig zu machen und in der Beschreibung der Differenz von materialer und formaler Fassung ein Instrument zur Dokumentation einer theoriegeleiteten Diagnostik. Methodisch scheint dabei das „Explizit-Machen", von „stillem", in tradierten Konventionen gebundenem Wissen und Tun eine tragende Rolle zu spielen. Dies gibt zumindest Anlass zu prüfen, inwieweit man fachdidaktisch in dieser Richtung noch weiter dem Ansatz BRANDOMs lohnenswert folgen kann, der mit dem Konstrukt einer „deontischen Kontoführung" diesen Weg innerhalb der analytischen Philosophie einschlägt.

Grundsätzlich aber steht dem geschilderten Vorgehen mit einem konsequenten Axiomatizismus, der letztlich in gewisser Weise darin gipfelt, dass etwa Modelle von Axiomensystemen wiederum mittels einer axiomatischen Modelltheorie beschrieben werden, aus fachdidaktischer Sicht keine wirkliche Alternative gegenüber. Die erlebte Erfahrung eines jeden Mathematiktreibenden, dass es, etwa mit den natürlichen Zahlen und den euklidischen geometrischen Formen, Modelle gibt, in denen die formal deduzierten theoretischen Sätze der Mathematik zu wahren Aussagen werden, die wiederum, vermittelt durch den Prozess der Projektion, material in Konstruktionen und Operationen in lebenswirkliche Erfahrung und Anwendung gelangen, birgt im besten Sinne einen viel natürlicheren Anlass, die Konsistenz der zugrunde liegenden formalen Strukturen zu plausibilisieren und sich in das vertiefte Studium dieser Strukturen zu begeben.

Literatur

ANGELELLI, I. (1984): Frege and abstraction. In: Philosophia Naturalis, 21, S. 453–471.

BENDER, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: POSTEL, H.; KIRSCH, A.; BLUM, W. (HRSG.): Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, S. 48–60.

BENDER, P.; SCHREIBER, A. (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky und Stuttgart: B.G. Teubner.

BERTRAM, G.W.; LAUER, D.; LIPTOW, J.; SEEL, M. (2008): In der Welt der Sprache. Konsequenzen eines semantischen Holismus. Frankfurt: Suhrkamp.

BRANDOM, R. (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt: Suhrkamp. Original: Articulating reasons. An Introduction to Inferentialism. 2. Auflage. Harvard: Harvard University Press, 2000.

BRANDOM, R. (2000): Expressive Vernunft. Frankfurt a. M.: Suhrkamp. Original: Making it Explicit. Harvard: Harvard University Press, 1994.

FISCHBEIN, E. (2001): Tacit Models and Infinity. In: Educational Studies in Mathematics, 48 (2), S. 309–329.

FREGE, G. (1884): Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau: Verlag W. Koebner.
FREUDENTHAL, H. (1962): The main trends in the foundations of geometry in the 19th century. In: NAGEL, E. et al. (Hrsg.): Logic, methodology, and philosophy of science. Stanford: Stanford University Press, 613–621.
JANICH, P. (1980): Die Protophysik der Zeit. Konstruktive Begründung und Geschichte der Zeitmessung. Frankfurt: Suhrkamp.
KAMLAH, W.; LORENZEN, P. (1996): Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens. 3. Auflage, unveränderter Nachdruck der 2. Auflage von 1973. Stuttgart: Metzler.
KRATZ, J. (1993): Mathematik 7 Geometrie. München: Bayerischer Schulbuch Verlag
LORENZEN, P. (1962): Gleichheit und Abstraktion, In: Ratio, 4, S. 77–81. Wiederabdruck in: LORENZEN, P. (1974): Konstruktive Wissenschaftstheorie, Frankfurt a. M.: Suhrkamp, S. 190–198.
LORENZEN, P. (1965): Differential und Integral: Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. Frankfurt: Akademische Verlags-Gesellschaft.
LORENZEN, P. (1967): Formale Logik. Berlin: Walter de Gruyter & Co (ehemals Sammlung Göschen, Bd. 1176/1176a).
MEYERHÖFER, W. (2005): Tests im Test: Das Beispiel PISA. Leverkusen: Barbara Budrich.
NEWEN, A. (2003): Die ungeklärte Natur der Begriffe. Eine Analyse der ontologischen Diskussion. In: Proceedings der GAP 5, Bielefeld 22.–26.09.2003, S. 419–434.
NOHL, A.-M. (2009). Interview und dokumentarische Methode: Anleitungen für die Forschungspraxis. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
PESCHEK, W. (1989): Abstraktion und Verallgemeinerung. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 10(3), S. 211–285.
PIAGET, J. (1973): Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt: Suhrkamp
SCHREIBER, A. (1979): Universelle Ideen im mathematischen Denken: ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: mathematica didactica 2, S. 165–171. Wiederabdruck in: SCHREIBER, A. (2011): Begriffsbestimmungen. Berlin: Logos, S. 63–71.
SCHULZ, A. (2010): Ergebnisorientierung als Chance für den Mathematikunterricht? München: Utz Verlag.
SELLARS, W. (1953): Inference and meaning. In: Mind LXII (3), S. 313–338
STEKELER-WEITHOFER, P. (1994): Ideation und Projektion. Deutsche Zeitschrift für Philosophie, 42 (5), S. 783–798.
STEKELER-WEITHOFER, P. (2008): Formen der Anschauung: Eine Philosophie der Mathematik. Berlin: de Gruyter.
VOM HOFE, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
WEIGAND, H.-G.; FILLER, A.F.; HÖLZL, R.; KUNTZE, S.; LUDWIG, M.; ROTH, J.; SCHMIDT-THIEME, B.; WITTMANN, G. (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag
WERNET, A. (2000). Einführung in die Interpretationstechnik der Objektiven Hermeneutik. Opladen: Leske + Budrich.

Anschrift des Verfassers

Dr. Marc Wermann
Universität Paderborn
Fachgruppe Mathematikdidaktik
33098 Paderborn
wermann@math.upb.de

Eingang Manuskript: 15.05.2013
Eingang überarbeitetes Manuskript: 03.03.2014
Online verfügbar: 28.04.2014