Vorstellungen zur Null im Kontext der Division durch Null

von

Christian Fahse, Landau

Kurzfassung: In einer fragebogengestützten Erhebung zur Division durch Null bei 73 Schülerinnen und Schülern der 7. Klassen eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums konnten vier Aspekte der Null unterschieden werden: kardinale, operationale, codierende und regelorientierte Auffassungen der Null. Die codierende Auffassung, die die Null z. B. als Zeichen für eine Ausnahmesituation betrachtet, tritt dabei in mehr als einem Viertel der Fälle auf. Es wird aufgezeigt, wie die Einteilung in die vier Auffassungen allgemein bei der Fehlerdiagnostik und bei der Einordnung der entsprechenden Literatur Verwendung finden kann. Konsequenzen für den Unterricht, die sich aus den empirischen Daten und der vorgeschlagenen Systematik ergeben, werden diskutiert.

Abstract: In the present study we analysed students' conceptions of zero in the special context of division by zero. The answers of 73 pupils of grade 7 in a German secondary school were analysed based on a filled in questionnaire. In order to categorize (mis-)conceptions of zero we recommend distinguishing between cardinal, operational, coding and rule-based views of zero. The coding view found in more than a quarter of the questionnaires is relatively frequent. Implications for teaching the subject are proposed as well as the use of the four aspects to classify passages of the literature concerning zero.

1 Einleitung

Der geschichtliche Prozess, der zum heute gebräuchlichen Begriff der Null[1] führte, war wenig geradlinig und zog sich bis in die Neuzeit (Boyer 1944). Vor dem Hintergrund genetischer Ansätze (Wagenschein 1968, Willmann 1909, S. 459ff.) verwundert es daher nicht, dass auch Kinder diesen Begriff mit sehr unterschiedlichen Vorstellungen belegen. Das Entstehen verschiedener Vorstellungen wird dadurch begünstigt, dass im Allgemeinen bereits Vorschulkinder von der Zahl Null wissen (Hughes 1986, S. 64f., Clarke et al. 2008, S. 273f.), ihnen aber gleichzeitig der Hintergrund für eine adäquate Auffassung der Null noch nicht vollständig zugänglich ist. Verschiedene Zahlaspekte fügen sich erst „allmählich" (Padberg & Benz

[1] In diesem Artikel wird nicht orthographisch zwischen der Ziffer Null und der Zahl null unterschieden, da beides zu dem mit dem Nomen „Null" bezeichneten Begriff gehört.

2011, S. 15) in ein Gesamtbild. Zu diesem gehören auch Aspekte, die im Alltag vorkommen, aber in der Mathematik nicht anzutreffen sind.

Ausgangspunkt der vorliegenden Studie ist eine Befragung in einer 7. Jahrgangsstufe zum Ergebnis einer Division durch Null, bei der ein hoher Anteil (etwa drei Viertel) ein falsches Ergebnis nannte. Die Begründungen der Schülerinnen[2] ergaben, dass unterschiedliche Vorstellungen zur Null hierbei eine entscheidende Rolle spielen. Die vorrangig auf Argumentationskompetenzen abzielende Studie untersuchte deshalb zunächst die Vorstellungen zur Null, wie sie im speziellen Kontext der Division durch Null auftreten. Die leitenden Fragen waren, welche Vorstellungstypen zur Null sich zeigen, wie oft diese auftreten und wie sie sich theoretisch begründen lassen. Es ergab sich ein Schema aus vier Aspekten, die durchaus nebeneinander bestehen können: kardinale, operationale, codierende und regelorientierte Sichtweisen der Null. Dabei stellt der codierende Aspekt einen Gegenpol zur kardinalen Sichtweise dar, der bisher möglicherweise in seiner Bedeutung unterschätzt wurde.

Jeder einzelne Aspekt wurde in der Literatur bereits beschrieben, z. T. mit engerem Bezug auf die Division (u. a. Gerster 1989, Grouws & Reys 1975, Hefendehl-Hebeker 1981, 1982, Hughes 1986, Knifong & Burton 1980, Radatz & Schipper 1983, Ruwisch 2008, Schönwald 1989, Spiegel 1995, Tsamir & Sheffer 2000). Dieser Artikel führt die einzelnen Aspekte konsistent in einer Systematik zusammen, die auch theoretisch untermauert wird (Abschnitt 3). Entsprechende Überblicke über die Aspektvielfalt finden sich ebenfalls in der Literatur (Boyer 1944, Kornmann et al. 1999, Müller & Wittmann 1984, S. 172f., Padberg & Benz 2011, S. 13f., Rotman 1985, Wheeler & Feghali 1983).

Bei der kardinalen und der regelorientierten Sichtweise greift die hier vorgelegte Systematik entsprechende Aspekte der Literatur weitgehend auf. Bei der codierenden und operationalen schließt sie sich eher an bekannte Einzelbeobachtungen an, denen aus folgendem Grund eine allgemeinere Bedeutung zugewiesen wird: Die vorgeschlagene Systematik ist weniger nach typischen Sachzusammenhängen strukturiert als nach grundlegenden Vorstellungen zur Null, die in *mehreren* Zusammenhängen zum Tragen kommen können. Infolge des Fokus auf Vorstellungen der Schülerinnen gehören hierzu auch sogenannte „Fehlvorstellungen“. Die Bezeichnung „Vorstellungen“ schließe deshalb im Weiteren Fehlvorstellungen mit ein. Es ist ein Charakteristikum des hier dargestellten Ansatzes, dass er – im Gegensatz zu den oben genannten Quellen mit Ausnahme von Wheeler & Feghali (1983) – „Fehl“-Vorstellungen und „richtige“ Vorstellungen innerhalb derselben

---

[2] Im Folgenden wird nur die weibliche Form genannt, gemeint sind stets Schülerinnen und Schüler.

Systematik betrachtet wissen möchte und deshalb zusammenfassend beschreibt. Dies ist aus folgenden Gründen sinnvoll: Die heute gängige Auffassung der Null ist Ergebnis eines historischen Prozesses, in dessen Verlauf Vorstellungen zu Null auftraten, die nicht per se als falsch einzustufen sind, es sei denn, man beruft sich auf den heutigen mathematischen Ordnungsrahmen. Aber auch dieser ist historisch gewachsen und nicht so eindeutig, wie man vielleicht auf den ersten Blick meinen möchte (vgl. Abschnitt 3). Hinzu kommt, dass in den Schülertexten „ungebräuchliche" Auffassungen der Null durchaus sinnvoll verwendet werden können, so dass eine Dichotomie von „falsch" und „richtig" als grundsätzliche Unterscheidung nicht im Vordergrund steht, auch wenn die Korrektheit in Bezug auf die *heutige* Mathematik als ein Merkmal unter anderen erfasst wird.

Bei der Untersuchung traten durch den speziellen Kontext der Division durch Null keine negativen Zahlen und nur vereinzelt rationale Zahlen auf. Die Beschreibung und Typologie der Vorstellungen zur Null erstreckt sich deshalb nur auf Aspekte der Null in der Grundmenge der nichtnegativen natürlichen Zahlen. Maßzahlaspekte im engeren Sinn und weitere Aspekte (Müller & Wittmann 1984) stehen nicht im Zentrum. Eine vollständige Ausführung der gängigen Zahlaspekte im Hinblick auf die Null findet man in Hefendehl-Hebeker (1981, S. 241f.)

2 Befragung und Methodik

Die hier betrachtete Studie ist Teil einer größer angelegten Erhebung an einem rheinland-pfälzischen Gymnasium. Im vorliegenden Artikel wird speziell die Teiluntersuchung behandelt, in der sich 73 Schülerinnen der 7. Jahrgangsstufe schriftlich u. a. zu den folgenden Aufgabenstellungen äußerten:

- Was ist das Ergebnis der Aufgabe 7 : 0?
- Begründe Deine Meinung so, dass jemand, der die Antwort nicht kennt, es versteht.

Das methodische Design folgt weitgehend dem schleifenförmigen Vorgehen induktiver Kategorienbildung (Mayring 2008, Flussdiagramm in Mayring 2000, S. 4), welches zulässt, dass „deduktiv (mithilfe theoretischer Erwägungen) Hauptkategorien gebildet werden" (Mayring 2008, S. 76). Die Schülertexte wurden durch den Autor zunächst nach Sinnabschnitten codiert. Ähnliche Sinnabschnitte, die sich auf Vorstellungen zur Null beziehen, wurden zu einem Merkmal zusammengefasst („Null ist keine Zahl"). Hinzu kommen Merkmale, die sich aus dem Kontext erschließen. (Beispiel: In der Begründung steht „Man kann nicht dividieren" und im Ergebnis ist 0 angegeben.) Verwandte Merkmale wurden zusammengefasst, z. B. „Division und Multiplikation mit 0 gibt immer 0", „Alle Rechnungen mit Null ergeben Null", aber auch eine Analogie zur Potenzrechnung („7 : 0 = 1, weil das genauso ist wie $7^0 = 1$“) zu „Rechenregeln mit Null“. Bei der Clusterung der Merkmale wurden Hintergrundtheorien bewusst nicht unterdrückt. Z. B. wurde eine Verteilung auf „0 Personen“, also auf „niemanden“ als kardinale Auffassung (s. u.) eingestuft. Dennoch ergaben sich Cluster, die nicht alle mit den gängigen Zahlaspekten übereinstimmten. In einem Wechselspiel von Ausschärfung der theoretischen Begründung und erneuter Sichtung der Daten wurden als Hauptkategorien unter dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerbarkeit vier Aspekte (kardinal, codierend, operational, regelorientiert) entwickelt, die im folgenden Kapitel dargestellt werden. Codiert wurde im Tandem nach diesen vier Hauptkategorien, ergänzt durch die fünfte Kategorie „Sonst“, s. Abschnitt 5.

3 Qualitative Befunde – Systematik der Vorstellungen zur Null

Die Vorstellungen der Schülerinnen zur Null können nach verschiedenen Aspekten geordnet werden, die – ebenso wie die Zahlaspekte (Müller & Wittmann 1984, S. 173, 180) – einander nicht ausschließen, sondern sich ergänzen. Kinder lernen zunächst verschiedene Aspekte kennen und integrieren diese nur „allmählich“ zu einem Zahlenbegriff (Padberg & Benz 2011, S. 15). Mit „Aspekten“ seien die herausgearbeiteten idealtypischen Vorstellungen gemeint, „Vorstellungen“ beziehe sich auf die konkrete Ausprägung dieser Aspekte bei einzelnen Schülerinnen.

Die vier Aspekte teilen sich in zwei Gruppen: Die ersten drei Aspekte weisen der Null eine semantische Bedeutung zu, der letzte ist dadurch gekennzeichnet, die Null syntaktisch aufzufassen. Die drei semantisch belegten Aspekt werden anhand der folgenden Beispielsituation verdeutlicht: „Zähle die Perlen in der (leeren) Schachtel!“ Die Antwort „0“ können die Kinder mit mehreren Bedeutungen verbinden: „es sind keine Perlen da“, „die Aufgabe ist unsinnig“, „es gab nichts für mich zu tun“. Dies gliedert die folgenden Auffassungen.

3.1 Kardinaler Aspekt – Null als Antwort auf „Wie viele?“

> Eine kardinale Vorstellung liegt vor, wenn bei Null an eine Situation gedacht wird, in der man grundsätzlich zählen könnte, in welcher die Zählhandlung aber mangels Objekten sogleich ordnungsgemäß beendet ist, z. B. „die Anzahl der Perlen in einer leeren Schachtel“. Die Null wird dabei als eine zu anderen Zahlen gleichberechtigte Antwort auf die Frage „Wie viele?“ angesehen.

Dieser Aspekt ist zunächst identisch mit dem Kardinalzahlaspekt der natürlichen Zahlen (Müller & Wittmann 1984, S. 172, Padberg & Benz 2011, S.21f.). Allerdings ist vor dem Hintergrund, dass es eine fachmathematisch und eine am Zählprozess orientierte Deutung des Kardinalen gibt, Folgendes zu beachten: Die Ausweitung des Kardinalzahlaspektes auf die Null ist nicht so trivial, wie es fachmathematisch in der Deutung der Kardinalzahlen als Äquivalenzklassen gleichmächtiger Mengen (z. B. Radatz & Schipper 1983) scheinen mag. Wenn die Null als Äquivalenzklasse der leeren Menge interpretiert wird, ist beim Vergleich leerer Mengen[3] keine Zuordnung zu leisten und damit nichts zu tun – außer, eine Abstraktionsstufe höher, die Gleichmächtigkeit der Mengen festzustellen. Deshalb halten Piaget & Inhelder (1973, S. 208) auch fest, dass „die konkreten Operationen an einen Inhalt gebunden sind, die Existenz eines Inhalts voraussetzen und folglich den Begriff der leeren Klasse von vornherein ausschließen [...]“. Die Null-Klasse[4] – im Ansatz von Piaget eine Voraussetzung für das Zahlverständnis der Null – würde für Kinder auf der konkret-operationalen Stufe nicht zugänglich sein. Dies steht im Widerspruch zu Befunden für Kinder im Vorschulalter (Hughes 1986, Clarke et al. 2008). Dieser Widerspruch löst sich dadurch auf, dass Piaget vor allem das Auftreten der Null-Klasse bei der Klassen*bildung* (Unterteilung einer vorgegebenen Gesamtmenge in zwei Teilmengen) empirisch untersucht (Piaget & Inhelder 1973, S. 205f.) und dem eigentlichen Zählprozess eine zu geringe Relevanz zuweist (vgl. Gasteiger 2010, S. 37, Padberg & Benz 2011, S. 6). In den fünf Zählprinzipien (Padberg & Benz 2011, S. 9) findet sich das Kardinalzahlprinzip, welches besagt, dass „das zuletzt genannte Zahlwort [...] die Anzahl der Elemente der abgezählten Menge [angibt]“ (Padberg & Benz 2011, S. 9, vgl. Kruckenberg 1950, S. 180). Dieses Kardinalzahlprinzip lässt sich nicht auf die leere Menge anwenden, es sei denn, man wollte *vor* Beginn des Auszählens stets das Zahlwort „Null“ nennen[5], was aber völlig unüblich ist. Offensichtlich sind bereits Vorschulkinder in dieser Situation handlungsfähig und wissen, dass „Null“ die erwartete Antwort auf „Wie viele?“ ist. Sie verlassen aber damit ihr konkretes Handlungsschema des Auszählens[6] nach dem Eindeutigkeitsprinzip (der eindeutigen Zuordnung von Zahlwörtern zu Elementen) und *in diesem Sinn* ist Piagets Zurückweisung eines

[3] Zur Begründung, in didaktischer (und auch in fachmathematischer) Hinsicht von mehreren leeren Mengen sprechen zu können, siehe Hefendehl-Hebeker (1989).

[4] Im Sprachgebrauch von Piaget ist hier nicht unbedingt an eine Äquivalenzklasse gedacht, da er auch bei „Mengen“ („ensembles“) durchgängig von „Klassen“ („classes“) spricht.

[5] Rotman (1985, S. 25) spricht von der Null als einem Startpunkt („starting-point“) für den Zählprozess, hat dabei aber nicht die konkrete Zahlwortreihe, sondern die virtuelle Präsenz des (zählenden) Subjektes im Sinn – eine Betrachtungsweise, die ihm z. B. erlaubt, Parallelen zwischen der Null und dem Fluchtpunkt in der Perspektivenlehre zu ziehen. Im Kontext des Auszählens spielt darüber hinaus die Null als Skalenbeginn wie beim Maßzahlaspekt keine Rolle.

[6] Für Hefendehl-Hebeker (1981, S. 241) ist deshalb „die Zahlangabe ‚Null‘ nicht Ergebnis einer Zählhandlung, sondern Ausdruck des Urteils, daß nichts zum Zählen da ist.“

Verständnisses der kardinalen Auffassung der Null auf der konkret-operationalen Stufe Recht zu geben.

3.2 Codierender Aspekt – Null als Zeichen für eine Ausnahmesituation

> Die codierende Auffassung deutet die Null semantisch, aber nicht kardinal: etwa als Zeichen für das Fehlen eines Ergebnisses, die Sinnlosigkeit eines Prozesses oder das Abbrechen einer intendierten Handlung – kurz für eine Ausnahmesituation. Als Ergebnis steht das Zeichen „0“ für eine Aussage *über* die Aufgabe bzw. die Handlungssituation. Die Null ist deshalb in dieser Sicht von anderer Art als die übrigen Zahlen.

Das Auszählen nicht vorhandener Gegenstände funktioniert nicht mit dem gewohnten Handlungsschema bzw. die gestellte Aufgabe 7 : 0 „geht nicht“: In beiden Fällen „kommt nichts heraus“, wobei das Wort „nichts“ die Codierung eines fehlgeschlagenen Prozesses mit 0 nahelegt.

Dennoch kann die Null als Zeichen anderer Art gleichzeitig auch Zahlcharakter haben, indem sie z. B. wegen der Beziehung zum „nichts“ als kleiner als jede positive Zahl angenommen wird oder innerhalb von Termen wie 2 · (7 : 0) + 5 verrechnet wird. Insbesondere im Zählprozess, in welchem verschiedene Zahlaspekte zusammenfließen (Müller & Wittmann 1984, S. 173), sind bei der Null der kardinale und der codierende Aspekt untrennbar verknüpft: Beim Auszählen der Elemente einer leeren Menge ist nicht zu unterscheiden, ob das Handlungsschema abgebrochen (codierend) oder auf diesen Spezialfall erweitert wird (kardinal), wobei die erste Deutung auf der konkret-operationalen Stufe näher liegt. Dass eine Unterscheidung beider Aspekte wichtig ist, zeigt sich erst außerhalb des Zählprozesses, z. B. im Kontext der Division durch Null.

Bezogen auf das Eingangsbeispiel könnte die kardinal gegebene Antwort „0“ mit dem Wort „Perlen“ in der Rolle einer Einheit ergänzt werden, nicht jedoch bei der codierend gegebenen Antwort „0“. Entweder man bleibt *in* der Zählhandlung, sieht auf die Objekte, die Perlen, und registriert, dass keine Perle da ist. Oder man blickt *auf* die Zählhandlung und stellt die Ausnahmesituation fest, dass es nichts zu zählen gibt. Ob hierbei der Abbruch der intendierten (Zähl-)Handlung oder eher die Rückmeldung „die Aufgabe ist unsinnig“ betont wird, soll innerhalb der codierenden Auffassung nicht unterschieden werden.

Bei der hier verwendeten Terminologie ist Folgendes zu beachten: Während die Bezeichnung „kardinal“ im Wesentlichen mit dem gleichnamigen Zahlaspekt bei Müller & Wittmann (1984) übereinstimmt, wird „codierend“ in diesem Artikel in einem anderen Sinn verwendet. „Codierend“ ist bei Müller & Wittmann lediglich die Bedeutung einer Zahl als Bezeichner von Objekten auf einer Nominalskala wie Postleitzahlen. Padberg & Benz (2011) ordnen einen derartigen Aspekt deshalb zu

Recht nicht unter die Zahlaspekte ein bzw. halten solch eine Zuordnung zumindest für „fragwürdig" (a.a.O. S. 15). Müsste dies nicht auch für die hier gegebene Definition von codierend als metazeichenhaftem Aspekt gelten? Die Antwort geben Interviews, mit denen die schriftliche Befragung ergänzt wurde: Hier bestätigte sich, dass wie bereits oben angeführt die Null als Substitut für „geht nicht" durchaus auch als Zahlenergebnis angesehen wird, mit dem man weiterrechnen kann. Weiterhin zeigt sich dies auch in einigen Schülertexten, in denen codierende und kardinale Aspekte der Null nebeneinander verwendet werden (s. Abschnitt 4).

Dass eine Vermischung von kardinalem und codierendem Aspekt der Null für die Schülerinnen auch außerhalb des Zählprozesses durchaus nahe liegen könnte, zeigt folgende Überlegung. Die Schülerantworten vom Typ „es kommt kein Ergebnis heraus, also ist das Ergebnis 0" könnte man so deuten, dass keine, also „0 viele" Ergebnisse herauskommen und dieses an sich richtige „Zwischenergebnis" fälschlicherweise als Endergebnis genannt wird. Dabei wird das Zeichen „0" zu einem Zeichen *über* ein Charakteristikum der Aufgabe. Zu dieser Interpretation passt die vielen Lehrkräften geläufige Beobachtung, dass bei der Angabe der Lösungsmenge eines unlösbaren Gleichungssystems statt {} bisweilen {0} angegeben wird. Es vermischen sich also die Ebenen der Betrachtung. Statt in der Arithmetik zu bleiben, entstammt das codierend benutzte Zeichen „0" einer Metaebene, auf der es eine kardinale Bedeutung bezüglich der Ergebnisanzahl hat. Diese Beziehung zwischen kardinal und codierend erschwert es den Kindern und Jugendlichen, zwischen den einzelnen Aspekten der Null genau zu trennen. Während beim Zählprozess eine Trennung der Aspekte nicht praxisrelevant ist, ist sie in der Sekundarstufe, z. B. bei der Division durch Null und bei Lösungsmengen, unverzichtbar.

3.3 Operationaler Aspekt – Null als die Aufforderung „Tue nichts!"

> Bei der operationalen Auffassung ist die Null das Zeichen dafür, dass nichts zu tun, nichts zu rechnen ist.

Beim Zählen der Perlen verbindet sich mit der Antwort 0, dass gar nichts zu tun, z. B. keine Zeigegeste nötig ist. Ebenso gibt es beim Addieren und Subtrahieren von Null nichts, was Kinder als Tätigkeit auffassen würden. Die Multiplikation als fortgesetzte Addition bestätigt ebenfalls mit der enaktiven Deutung von $0 \cdot 7$ als „Lege keine Siebenerreihe hin, tue nichts" diesen operationalen Aspekt der Null.

Streng genommen ist der operationale Aspekt wegen der semantischen, aber nicht kardinalen Interpretation der Null ein Unterfall des codierenden. Im Hinblick auf die Fehlerdiagnostik scheint es sinnvoll, ihn eigens aufzuführen. Außerdem könnte man ihn nicht nur semantisch, sondern in naheliegender Weise auch syntaktisch deuten: „In Rechnungen kann man die Null einfach weglassen". Diese Regel funktioniert bei der Addition und Subtraktion (sogar mit der Null als Minuend), führt allerdings bei der Multiplikation zum Fehler $7 \cdot 0 = 7$. Letzteres wird als Fehlvorstellung mehrfach in der Literatur beschrieben (Hefendehl-Hebeker 1981, S. 240, 244, Padberg & Benz 2011, S. 147).

3.4 Regelorientierter Aspekt – keine Deutung der Null jenseits der Rechenregeln

Die regelorientierte Auffassung verbindet mit der Null keinerlei inhaltliche Bedeutung, sondern sieht die Null ausschließlich über ihre formalen Verknüpfungen mit anderen Zahlen und über formale Regeln festgelegt. Dieser Aspekt entspricht dem Rechenzahlaspekt, schließt aber Fehlvorstellungen ein.

Der geläufige Rechenzahlaspekt wird in einen algorithmischen und einen algebraischen Aspekt untergliedert (Padberg & Benz 2011, S. 15). Ersterer steht für Regeln wie „Addition mit Null ergibt den jeweils anderen Summanden“, „Null mal eine Zahl ergibt Null“. Diese Rechenregeln sind für den algorithmischen Aspekt lediglich auswendig gelernte Spezialfälle des Einmaleins oder Einspluseins.

Für die algebraische Sichtweise ist die Null das neutrale Element der Addition, woraus in einem Ring die absorbierende Eigenschaft $0 \cdot a = 0$ folgt. Das Verbot der Division durch Null folgt dann aus der *Entscheidung*, eine *bestimmte* Gesetzmäßigkeit, im Wesentlichen das Distributivgesetz, im Sinne des Permanenzprinzips weiter bestehen zu lassen.

Für Kinder liegt es vielleicht näher, andere Regeln, wie z. B. die absorbierende Eigenschaft der Null, von der Multiplikation auf die Division auszudehnen – ganz analog zum eben angeführten Permanenzprinzip. Deshalb werden hier zu dem regelorientierten Aspekt auch „Phantasieregeln“ gezählt, in denen eine Regel falsch erinnert bzw. falsch konstruiert wird, z. B. bei der Übergeneralisierung „Alle Rechnungen mit Null ergeben Null“.

Die folgenden Überlegungen legitimieren einerseits, dass wiederum nicht zwischen richtigen und falschen Auffassungen getrennt wird, und andererseits die Zusammenfassung des algorithmischen und des algebraischen Aspektes unter der einen Charakterisierung, dass gesetzte Regeln dominieren: Für die Division durch Null hätte durchaus ein Zahlenergebnis festgelegt werden können. Dies zeigt z. B. die Literatur zur Definition von 0^0 (Knuth 1992, S. 406f.). Auch „unendlich“ als Ergebnis von $7 : 0$ kommt nicht nur in Betracht, sondern existiert bereits als akzeptiertes Ergebnis, etwa auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, auf der die Inversion $1/z$ mit $1/0 = \infty$ holomorph auf $z = 0$ fortgesetzt werden kann. Grundsätzlich sind also verschiedene Definitionen von $7 : 0$ möglich. Als Festsetzungen fallen sie ebenfalls unter den regelorientierten Aspekt, wären aber im Kontext der Algebra weniger zweckmäßig.

3.5 Einordnung der Aspekte

Zusammengefasst strukturieren sich die vier Aspekte wie folgt: Der kardinale Aspekt bezieht sich semantisch auf die Anzahl, der codierende und der operationale beziehen sich semantisch auf die Aufgabenstellung und das rechnende Subjekt, der regelorientierte betrachtet Zahlen, aber im Gegensatz zum kardinalen rein formal.

Die folgenden Ausführungen klären die Beziehung dieser vier Aspekte zu den noch nicht angesprochenen Zahlaspekten. Der *Ordnungszahlaspekt* der Null findet sich z. B. beim Rückwärtszählen wie bei einem Raketenstart (Padberg & Benz 2011, S. 49). Da in den Schülertexten zur Division durch Null dieser Aspekt nicht auftrat, wird er hier nicht weiter betrachtet. Dennoch kann man auch hier das Aspektquartett anwenden: Wenn man die Zahlwörter des Count-down als Sekunden bis zum Start deutet, dann liegt ein kardinaler Aspekt der Null vor, wenn an das strukturerhaltende Hinzufügen der Null an die totalgeordnete Menge $(\mathbb{N}, <)$ der natürlichen Zahlen gedacht wird, dann geschieht dies regelorientiert.

Der *Operatoraspekt* ist eng an die Multiplikation gebunden („Vielfachheit", Wortfolge „einmal, zweimal, ...", vgl. Padberg & Benz 2011, S. 14) und würde bezogen auf die Null dort mit dem operationalen Aspekt übereinstimmen: Etwas „null mal tun" entspricht dem „gar nichts tun". Der operationale Aspekt ist aber weiter gefasst, da er jenseits der genannten Wortfolge auch auf andere Rechenarten anwendbar ist.

Der *Maßzahlaspekt* (Zahlen als „*Maßzahlen* bezüglich einer gewählten Einheit", Padberg & Benz 2011, S. 14, Hervorhebung im Original) ist gemäß Kirsch (1979, S. 42ff.) mit der kardinalen Auffassung natürlicher Zahlen verwandt. Dies zeigt sich auch bezogen auf die Null: Null Perlen in einer leeren Schachtel ist ein ebenso situationsgerechtes Ergebnis wie 0 mm/m² Regenwasser im Zylinder eines Niederschlagsmessers. Die kardinale Sicht, die in diesem Artikel an den konkreten Zählprozess gebunden ist, denkt ohnehin immer eine bestimmte Einheit mit (im Beispiel die Quasieinheit „Perlen", vgl. Schönwald 1989, S. 56f.) und schließt den Maßzahlaspekt deshalb hier ein.

Für die Null sind damit von den sechs Zahlaspekten (Kardinalzahl, Ordinalzahl, Maßzahl, Operatoraspekt, Rechenzahl, Codierungsaspekt) zwei im Wesentlichen übernommen (Kardinalzahl und Rechenzahl), einer erweitert (Operatoraspekt) und einer grundsätzlich neu gefasst worden (Codierungsaspekt).

4 Vorstellungen zur Null im Kontext der Division

Auch die Division kann mit verschiedenen Vorstellungen belegt werden: Vorstellungen zum Verteilen, zum Messen bzw. Aufteilen, zur Umkehrung der Multiplikation und auch vermeintliche algebraische Regeln können vorliegen. Diese Vorstellungen zur Division verbinden sich im Kontext der Aufgabe 7 : 0 mit denen zur Null. Typische Schülertexte zu den Aspekten, also den gefundenen Hauptkategorien einschließlich der drei Unterkategorien im operationalen Fall (s. u.), findet man in Abb. 1.

Kardinal – Verteilen (Ergebnis: geht nicht)

[...] *Wenn ich 7 Kugeln habe und verteile sie an 0 Kinder, dass geht ja gar nicht.*

Kardinal – Hineinpassen und **codierend** (Ergebnis: 0)

[...] *Man kann die Null sehr oft in die 7 stecken aber es wird nie 7 ergeben, also 0.*

Codierend (Ergebnis: 0 (Null))

Man kann ja 7 nicht durch Null teilen, weil es nichts zum teilen gibt. Also 0.

Operational – Perspektive des Verteilenden (Ergebnis: 7)

Du hast 7 Äpfel und diese 7 Äpfel muss man in einer Gruppe von 0 Personen aufteilen. Da du sie niemanden geben musst kannst du alle behalten.

Operational – Perspektive der Empfangenden (Ergebnis: 0)

Also... Du willst zum Beispiel deine 7 Bücher von der Bibliothek abholen. Aber du darfst keine (0) Runden laufen. Also kannst du dir keine Bücher holen und hast dann 0.

Operational – rechnerisch (Ergebnis: 7)

7:0=7, denn man soll ja einfach nur durch 0 rechnen und 0 ist ja nichts!

Regelorientiert (Ergebnis: 0)

Weil wenn man null durch oder mal eine Zahl nimmt kommt immer null raus.

Abb. 1: Beispiele aus Schülertexten der 7. Jahrgangsstufe für die verschiedenen Aspekte, die auch im Verbund auftreten. Orthographie nicht verändert.

Die *kardinale* Vorstellung zeigte sich meist im Zusammenhang mit dem Verteilen in der Interpretation des Divisors als konkreter Anzahl (7 Äpfel werden an 0, also keine Personen verteilt). Das Aufteilen trat bei konkreten Beispielen nicht auf, sondern nur in der Form „Wie oft passt die 0 in die 7?“. Auch dies wurde einer kardinalen Auffassung der Null zugeordnet, da die Vorstellung des Hineinpassens vom Wort her an anschauliche Vorstellungen von Mengen geknüpft ist. Dass Schülerinnen „0 passt nicht in die 7“ synonym zu „es gibt keine Einmaleinsaufgabe mit 0, die 7 ergibt“ ohne jegliche Vorstellung des Vervielfachens von Mengen verwenden könnten, wurde außer Acht gelassen.

Die *codierende* Vorstellung liegt vor, wenn begründet wird, dass die Aufgabe in irgendeiner Weise „nicht geht“ und gleichzeitig Null als Ergebnis angegeben wird. Ein weiterer Indikator liegt vor, wenn die Null weder als Anzahl noch als Rechenzahl aufgefasst wird („Null ist nichts, also kommt auch nichts heraus“ (Ergebnis: 0), „Null hat keine Bedeutung“, „Null ist keine richtige Zahl“).

Die *operationale* Auffassung trat in drei Ausprägungen auf. Zum einen liegt sie vor, wenn 0 als Anweisung aufgefasst wird, nichts zu *rechnen*, in diesem Fall muss das Ergebnis 7 sein (operational-rechnerische Sicht). Ansonsten werden konkrete Beispiele betrachtet wie „7 Äpfel werden auf 0 Personen verteilt“. Hier ergeben sich, je nach Ergebnis (7 oder 0), zwei weitere Unterfälle (Hefendehl-Hebeker 1981, S. 245): Richtet man das Augenmerk auf den *Verteilenden*, der ja gar nicht verteilt, so schließt man, dass er 7 behalten kann. Hat man hingegen die *empfangenden Personen* oder das *Verteilte* im Blick, so führt dies auf das Ergebnis 0, da keine Äpfel verteilt werden. Diese beiden Unterfälle gehen durch die Interpretation des Divisors als „0 Personen“ mit einer kardinalen Sicht einher.

Eine *regelorientierte* Auffassung liegt vor, wenn explizit Rechenregeln, gleichgültig, ob falsch oder richtig, genannt werden, wenn Kalküle des schriftlichen Rechnens oder Umkehraufgaben verwendet werden sowie wenn Parallelen zu anderen algebraischen Strukturen gezogen werden, z. B. zur Multiplikation oder Potenzbildung. Zur regelorientierten Auffassung wurde auch eine Berufung auf den Taschenrechner, quasi als große arithmetische Faktensammlung, gezählt. Weitere Autoritätsargumente wie „es ist so definiert“, „man *darf* es nicht“, „ich habe mir es (die Regel) so gemerkt, habe sie auswendig gelernt“ sind ebenfalls Indikatoren für diesen Aspekt.

5 Quantitative Befunde

Die Texte wurden durch den Autor und einen Promovenden in der Mathematikdidaktik mit mehrjähriger Unterrichtserfahrung in Mathematik ausgewertet. Beide ordneten unabhängig voneinander die Schülertexte den vier Aspekten sowie der Kategorie „Sonst“ zu. Letztere liegt vor, wenn kein Aspekt erkennbar war, z. B. weil 7 : 0 nicht als Divisionsaufgabe aufgefasst wurde oder keine Begründung angegeben wurde. Die Zuordnung stimmte in 12 von 73 Fällen nicht überein. Texte, in denen keine Übereinstimmung bei den beiden Codierern vorlag, wurden mit „Unklar“ gekennzeichnet. Schülertexte können sprachlich unscharf oder in sich widersprüchlich sein. Der Prozentsatz von 16% nicht klar einzuordnenden Texten ist vor diesem Hintergrund akzeptabel. Relative Häufigkeiten der Aspekte bezogen auf die 61 Texte, bei denen von vornherein Übereinstimmung vorlag, findet man in Abb. 2. Um einen Eindruck von der Tendenz der unklaren Texte zu bekommen, wurde in den unklaren Fällen ein Konsens gesucht, der bei allen Fällen bis auf einen gelang. Die relativen Häufigkeiten bezogen auf die 72 Texte mit Konsensbildung finden sich in Abb. 2 zum Vergleich. Es zeigt sich, dass sich die relativen

Anteile ohne und mit Konsensbildung nur um wenige Prozentpunkte unterscheiden (s. Abb. 2: „Klar“ vs. „Konsens“), was zudem für eine zufriedenstellende Reliabilität spricht. Die Texte können mehrere Aspekte zeigen, weshalb sich die Prozentzahlen nicht zu 100% summieren. Lediglich die regelorientierte Sicht findet sich in Abb. 2 nur, wenn keine andere vorliegt. Denn ihr Kern besteht ja darin, dass keine weitere semantische Bedeutung der Null benötigt wird.

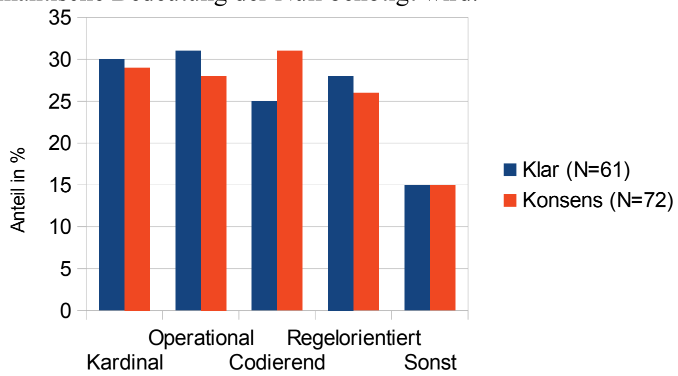

Abb. 2: Relative Häufigkeiten der Aspekte in der 7. Jgst. (mehrfache Zuordnung möglich).

Bei den relativen Häufigkeiten der einzelnen Aspekte in Abb. 2 sind folgende Punkte zu beachten: Die Sichtweisen der Null traten oft im Verbund auf. In Abb. 1 ist dies im zweiten Beispiel der Fall, aber auch im dritten und vierten, da sich hier mit „0 Personen“ und „0 Runden“ zusätzlich eine kardinale Sicht zeigte. Auf diese Weise wurden 19 Texte mehr als einer Kategorie zugeordnet. 15% zeigten keinen der vier Aspekte – ein niedriger Wert, wenn man bedenkt, dass es auch sehr kurze oder verfehlte Texte gibt, die z. B. 7 : 0 als Fußballergebnis deuten.

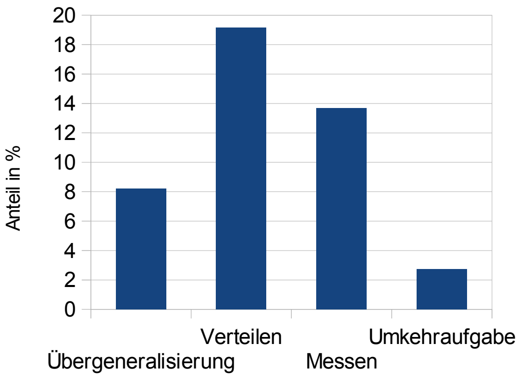

Abb. 3: Die häufigsten Vorstellungen zur Division als relativer Anteil in Prozent der Jahrgangsstufe (Mehrfach-Nennung möglich).

Nur ein Teil der Texte lässt Vorstellungen speziell zur Division erkennen, vor allem aufgrund von kurzen oder regelorientiert geprägten Texten. Lediglich in 30 von 73 Texten konnten folgende Vorstellungen zur Division identifiziert werden (vgl. Abb. 3). Die Übergeneralisierung, also das fälschliche Übertragen der neutralen oder absorbierenden Eigenschaft der Null bei Addition oder Multiplikation auf die Division, ist mit einem Anteil von 8% nicht zu vernachlässigen. Die Probe mittels der Umkehroperation, durch die sicher alle möglichen Ergebnisse widerlegt werden könnten, wurde nur sehr selten, nämlich von zwei Schülerinnen, verwendet. Am häufigsten trat mit fast 20% das Verteilen auf, wobei dieser Wert lediglich eine untere Abschätzung darstellt. Denn den unklaren oder knappen Schülertexten („es wird nicht geteilt“) liegt möglicherweise auch eine Verteilungsvorstellung zugrunde. Division als Aufteilen bzw. Messen trat bei konkreten Beispielen nicht auf, sondern nur in der Form „Wie oft passt die 0 in die 7?“.

6 Diskussion der Befunde

Etwa ein Viertel der Texte zeigte mehr als einen der vier Vorstellungstypen zur Null, obwohl die Kombination zweier Sichtweisen zu logischen Differenzen führen kann. Möglicherweise sehen die Schülerinnen deshalb hierin kein Problem, da der Kontext den Aspekt determiniert (s. Abb. 1, zweiter Schülertext): Dass die Aufgabe „nicht geht“, wird codierend mit 0 im Ergebnis übersetzt, im Kontext des Hineinpassens ist hingegen eine mengenartige, also kardinale Auffassung der Null üblich. Solche Abhängigkeiten vom Kontext werden durch die Verwendung der Null im Alltag bestätigt (s. u.). Weiterhin ist es möglicherweise lernpsychologisch von

Vorteil, konkurrierende Aspekte nebeneinander bestehen zu lassen: Die Kinder können nicht überblicken, welche Vorstellungen sich für sie zukünftig als tragfähig herausstellen werden.

Wenn Vorstellungen nebeneinander bestehen können, kann auch nicht ausgeschlossen werden, dass nur eine Auswahl an individuell vorhandenen Vorstellungen in der konkreten Begründung verwendet wurde. Es ist z. B. zu vermuten, dass so gut wie alle Schülerinnen auch über eine kardinale Auffassung verfügen.[7] Die angegebenen Häufigkeiten stellen damit lediglich Mindestwerte für das Auftreten dieser Sichtweisen bei den Schülerinnen dar und sind an die konkrete Frage nach 7 : 0 gebunden. Mit diesen Einschränkungen lässt sich festhalten, dass etwa je ein Viertel der Schülerinnen eine kardinale, eine operationale, eine codierende und eine regelorientierte Sichtweise verwendeten. Die codierende ist damit erstaunlich stark vertreten, zumal 11% der Texte eine operational-rechnerische Sicht zeigen, die ebenso wie die codierende deutlich einer kardinalen Auffassung entgegensteht.

Es stellt sich daher die Frage, inwieweit eine codierende Verwendung an den speziellen Kontext der Division durch Null gebunden ist. Hierzu wurden 83 Schülerinnen aus vier Klassen der Jahrgangsstufe 11 nach dem Ergebnis von $\sqrt{-49}$ schriftlich befragt. Es nannten 8% die Null als Ergebnis und führten als Begründung an, dass man die Wurzel nicht ziehen könne. Wenn man bedenkt, dass in allen Klassen die Unmöglichkeit des Wurzelziehens aus negativen Zahlen zumindest als Regel behandelt wurde, so zeigt dies einerseits, wie dominant die codierende Vorstellung der Null sein kann, und andererseits, dass der Prozentsatz codierender Vorstellungen stark vom Kontext abhängt.

Insgesamt bestätigen die Befunde zur Division durch Null die bereits in der Literatur beschriebenen Fehlvorstellungen (vgl. Abb. 4):

- 7 : 0 = 7, da man 7 behält bzw. die 7 stehen bleibt (operational-verteilend bzw. operational-rechnerisch, Hefendehl-Hebeker 1981, S. 245, Hefendehl-Hebeker 1982, S. 59, Gerster 1989, S. 29, Padberg & Benz 2011, S. 167).
- 7 : 0 = 0, da nichts verteilt wird (operational-empfangend, Hefendehl-Hebeker 1981, S. 245, Hefendehl-Hebeker 1982, S. 58, 59).
- 7 : 0 = 0, da man diese Aufgabe nicht rechnen kann, die Verteilung fehlschlägt (codierend, Padberg & Benz 2011, S. 167, allgemein „‚0' als Zeichen für ‚geht nicht'[...] für ‚nichts'" in Gerster 1989, S. 27).

---

7 Vgl. Hughes 1986, S. 53ff. Hughes findet kardinale Vorstellungen bereits im Vorschulalter.

- Vermeintliche Rechenregeln, auch Übertragung der absorbierenden Eigenschaft der Null von der Multiplikation auf die Division (Hefendehl-Hebeker 1981, S. 240, Ruwisch 2008, S. 680, Padberg & Benz 2011, S. 167).
- Das Aspektquartett erfasst damit die geläufigsten der in der Literatur beschriebenen Fehlertypen. Nicht erfasst werden Fehler wie der folgende beim Hineinpassen „7 : 0 ist 0, da die 0 null mal in die 7 passt.“, der die folgende Interpretationsmöglichkeit zulässt: Mit fortgesetzter Addition oder mit Vervielfachen wird ein Ausschöpfen der 7 mit Nullen versucht. In beiden Fällen entsteht als Zwischenergebnis die 0, die dann fälschlicherweise als Ergebnis genannt wird. Dieser Fehler der Verwechselung der Argumentationsebenen (Zwischen- vs. Endergebnis) hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der codierenden Auffassung, die ja auch die Ebene der Aussagen *über* eine Aufgabe mit der Ebene eines Ergebnisses *innerhalb* der Aufgabenstellung verwechselt (s. Kap. 3).

7 Ausgewählte weitere Anwendungen des Aspektquartetts

Das Aspektquartett wurde zunächst anhand einer Clusterung von Schülertexten gewonnen. Ob sich hierdurch Begriffe ergaben, die auch für einen größeren Bereich außerhalb der Division tragfähig sind, soll in diesem Kapitel an ausgewählten Beispielen sowie an drei Textstellen der Literatur untersucht werden. Zunächst werden Situationen gesichtet, in denen speziell die codierende Vorstellung zum Tragen kommt. Anschließend soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden, wie die vier Aspekte als Quartett angewandt werden können – dies gelingt nicht nur bei der Null als Zahl, sondern auch als Ziffer. Zwei kurze Passagen der Literatur thematisieren das Zusammenspiel der vier Aspekte, das der Sache nach unvermeidlich ist, aber Fehlvorstellungen hervorrufen kann. Die letzte Literaturpassage führt dabei wieder zur Division zurück.

Der *codierende Aspekt* der Null ist leicht zu unterschätzen, da er einer fachmathematischen Auffassung am fernsten liegt. Dabei findet er sich an einigen Stellen im Alltag, z. B. auf digitalen Thermometern als Symbol dafür, dass ein Wert nicht verfügbar ist. Auch die Preisangabe 2,00 € anstelle der ebenfalls geläufigen 2,– € könnte man in dieser Gegenüberstellung als Ausdruck einer codierenden Sicht deuten. In einem Einzelfall, den der Autor beobachten konnte, interpretierte eine Lehrkraft eine 0 in einer Notenliste nicht als 0 Notenpunkte, sondern als Zeichen für das Fehlen einer Note. Gebräuchliche Datumsstempel fassen die Null ebenfalls nicht kardinal auf, wenn sie die Null zwischen 9 und den Sonderzeichen und nicht vor der 1 einfügen. Dass selbst in der fachwissenschaftlichen Literatur „nicht definierbar“ mit Null gleichgesetzt wird, belegt folgendes Zitat aus Beiser (1981, S. 486). Es bezieht sich auf den Isospin I beim Zerfall des neutralen Pions in zwei

Photonen ($\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$): „A π^0 has [...] $I_3 = 0$, while I is not defined for photons: there is no component I_3 of isotopic spin on either side of the equation, which is consistent with its conservation”.

Eine außergewöhnliche Analyse, die die Bedeutung der codierenden Auffassung aus theoretischer Sicht unterstreicht, findet man bei Rotman (1985). Er folgt einem semiotischen Ansatz und konstruiert Zahlen über Protozahlen. Dies sind Strichfolgen, ganz analog zu der Konstruktion von Zahlen durch Lorenzen (1974, S. 105). Er sieht die Null als Zeichen über Zeichen, nämlich als ein Zeichen für die Abwesenheit von Zeichen (Strichen), das außerhalb der anderen Zahlzeichen steht (“a meta-sign, a sign-about-signs outside [the number system]”, S. 26). Obwohl Rotman eine kardinale und eine ordinale Auffassung der Null direkt anspricht, verneint er in beiden Fällen aus semiotischen Gründen die Gleichartigkeit der Null zu anderen natürlichen Zahlen (a. a. O. S. 25). Im Sinne des hier vertretenen Aspektquartetts ist dies eine codierende Auffassung, neben die Rotman nur den Rechenzahlaspekt stellt (a. a. O. S. 26). Rotman unterstreicht die Relevanz des codierenden Aspekts, indem er letztlich auch den kardinalen (und ordinalen) Aspekt der Null darauf zurückführt. Auch wenn die Auffassung von Rotman sehr extrem ist, wird einmal mehr deutlich, dass der codierende Aspekt nicht als reine Fehlvorstellung angesehen werden darf, sondern lediglich als mathematisch unergiebig.

Während die sechs gängigen Zahlaspekte im Wesentlichen Situationen des Zahlgebrauchs beschreiben, systematisiert das Aspektquartett Vorstellungen, die grundsätzlich in verschiedenen Kontexten auftreten können. Dies erlaubt z. B. im Folgenden die Anwendung des Quartetts auf eine Analyse des *Maßzahlaspektes* der Null.

Beim Messen, etwa der Länge 0 m, drückt die kardinale Sicht die Ausdehnung des Punktes aus (der „Strecke, die gleich wieder aufhört“, analog zum sogleich beendeten Zählprozess). Operational gesehen ist bei 0 m keine Länge abzutragen[8] oder noch einfacher: Es gibt nichts zu tun, da nichts, z. B. kein Gegenstand, da ist. Entsprechend besagt die codierende Sicht, dass keine Messung vorliegt bzw. möglich ist. Ein weiterer Beleg dafür, wie naheliegend solche nicht-kardinalen Vorstellungen sind und dass sie im Alltagsleben ihren Platz haben, ist Folgendes: „0:00“ auf der Stoppuhr bedeutet nicht, dass die Bewegung 0,00 s benötigte (kardinal), sondern dass die Messung noch nicht begonnen hat (codierend). Stoffdidaktisch gesehen ist der Maßzahlaspekt eng mit dem Kardinalzahlaspekt verwandt (Kirsch

---

[8] Als operational könnte man in einem erweiterten, aber wörtlichen Sinn die Vorstellung von 0 als der Marke auf dem Maßstab ansehen, an dem eine Längenmessung als Handlung zu beginnen hat. „0“ als „Lege hier an!“ – vgl. die „Orientierungsfunktion“ der Null innerhalb einer Skala bei Hefendehl-Hebeker 1981, S. 242.

1979), bei der Null liegt jedoch psychologisch gesehen der operationale bzw. der codierende Aspekt viel näher, denn ähnlich wie beim Zählprozess gibt es keine Messhandlung im eigentlichen Sinn. Selbst der regelorientierte Aspekt findet bei der Null als Maßzahl eine Anwendung: Regelorientiert kann man 0 m als Produkt $0 \cdot m$ deuten (dies liegt wegen des Kürzens von Einheiten nahe), woraus sich fragwürdige Gleichungsketten wie $0 \cdot m = 0 = 0 \cdot s$ (zur Gültigkeit vgl. Griesel 1969, S. 92) ergeben können.

Auch bei der Null als *Ziffer* in einem Stellenwertsystem können alle vier Aspekte identifiziert werden (s. Abb. 4). In der Zahl 103 ist 0 kardinal die Antwort auf „Wie viele Zehnerbündel?“, sie gibt operational an, dass kein Zehnerbündel hinzuzulegen bzw. zu berücksichtigen ist und sie bezeichnet codierend den Umstand, dass keine Zählziffer in der Zehnerspalte zu finden ist. Letzteres wird gemeinhin als Ausgangspunkt für die historische Einführung der Ziffer 0 als Zeichen für das Nicht-Vorhandensein von Zeichen gesehen (Ruwisch 2008, Boyer 1944) – die Null als „Platz-Halter“ bzw. „Lückenzeichen“ bei Stellenwertsystemen seit den Babyloniern (Gericke 1984, S. 13). Regelorientiert wird die Ziffer 0 als Rechenzahl in folgender Potenzdarstellung aufgefasst: $(103)_{10} = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Damit sind auch in diesem Kontext alle vier Sichtweisen der Null sinnvoll.

Aspekt	**Null als Zahl**	**Null als Ziffer**	**Null als Divisor (7 : 0)**	**Ergebnis**
kardinal „Wie viele?“	Zählvorgang prinzipiell möglich – keine Objekte	Es gibt keine Bündel bei dieser Stelle des Stellenwertsystems.	Verteilen: mangels Personen sinnlos	Geht nicht
			Messen: Die 0 passt unendlich oft in die 7 und es bleibt noch ein Rest.	Unendlich oder geht nicht
operational „Tue nichts!“	Handlung prinzipiell möglich – Anweisung, nichts zu tun	An dieser Stelle ist nichts zu tun, z. B. hinzulegen.	Teile die 7 nicht, behalte 7 (Perspektive des Verteilenden)	7
			Es wird nichts verteilt. (Perspektive des Empfangenden)	0
			Rechne nichts, 7 bleibt.	7
codierend Ausnahmezeichen	Zeichen für einen Prozess ohne Ergebnis	Zeichen dafür, dass an dieser Stelle keine Ziffer (1, ..., 9) steht	Die Division ist nicht ausführbar.	0
regelorientiert Rechenzahl	keine Deutung, nur formale Regeln	$(a0c) = a \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$	Division als Umkehrung der Multiplikation, Distributivgesetz	Geht nicht
			Übergeneralisierung	0, 1 oder 7

Abb. 4: Die vier Aspekte der Null in verschiedenen Zusammenhängen. Die genannten Ergebnisse verstehen sich aufgrund inkonsistenter Argumentationen oder im Verbund auftretender Vorstellungen nur als die plausibelsten Ergebnisse beim jeweiligen Aspekt.

Neben dem bereits besprochenen Ansatz von Rotman (1985) mögen auch die folgenden zwei *Literaturstellen* exemplarisch belegen, dass sich Literaturpassagen durch die Anwendung des Aspektquartetts systematisieren lassen. Die ausgewählten Abschnitte aus dem oft in der Literatur zitierten Artikel von Hefendehl-Hebeker (1981) verdeutlichen dabei die Beziehung zwischen den Aspekten und beschreiben häufige Fehlvorstellungen:

> „Das […] Fehlerbeispiel 5 – 0 = 0 kann verschiedene Ursachen haben. Eine mögliche Vorstellung geht davon aus, mit Null zu operieren bedeute, nicht zu operieren, also nichts zu tun. Nun gilt bekanntlich: ‚Von nichts kommt nichts.‘ Also müßte das Ergebnis 0 sein. Auch eine oberflächliche Analogie zur Multiplikation ist denkbar.“ (Hefendehl-Hebeker 1981, S. 243)

Die ersten Sätze beziehen sich – sogar wörtlich – auf den operationalen Aspekt. Dieser genügt aber nicht zur Deutung des Fehlers, es muss das Argument „von nichts kommt nichts“ hinzutreten. Das erste „nichts“ bezieht sich auf das „nichts tun“ in der Aufgabe, das zweite „nichts“ auf das Ergebnis und zwar beim Sprichwort im Sinn von „man hat nichts geschafft, es ist nichts herausgekommen“. Die Verknüpfung dieser Ansicht mit dem Ergebnis 0 zeugt von einer codierenden Sicht. Im letzten Satz findet sich zusätzlich der regelorientierte Aspekt, der durch die indirekt angesprochene falsche Analogie „alle Subtraktionen mit Null ergeben Null“ vertreten ist. Dies zeigt, wie in einem sehr kurzen Abschnitt die verschiedenen Vorstellungen vermengt auftreten. Dies gilt auch für die nächste, auf die Division durch Null bezogene Passage, in der die kardinale Vorstellung zwar keine Rolle spielt, aber mittels „0 DM“ bzw. „0 Kinder“ ebenfalls enthalten ist:

> „Keine der Anweisungen
> (i) Verteile 0 DM an 5 Kinder!
> (ii) Verteile 5 DM an 0 Kinder!
> führt zu einer sinnvollen Handlung. Beide verlangen etwas, das eigentlich ‚nicht geht‘, denn man kann praktisch nichts tun. Daß (i) in einem anderen Sinne nicht ausführbar ist als (ii), ist für Kinder schwer zu durchschauen.“ (Hefendehl-Hebeker 1981, S. 245)

Hier findet man zum einen die Beschreibung, dass für die Kinder die operationale Auffassung und die codierende gut zusammenpassen, da ihnen eine Aufforderung zum „nichts tun“ paradox erscheint. Zum anderen wird gezeigt, wie leicht Kinder die Null codierend auffassen können (hier im Ergebnis bei (i)), diese Auffassung zunächst bestätigt bekommen und sie dann auf sehr ähnliche Kontexte wie z. B. bei (ii) übertragen, wo sie überraschenderweise falsch ist. Für das Unterrichten in der konkreten Unterrichtssituation ist es wichtig, die Vielfalt der Fehlvorstellungen und wie hier ihre mögliche Entstehung zu kennen. Leitlinien zur Behandlung der Null und speziell der Division durch Null werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

8 Unterricht

Viele Autoren sind der Auffassung, dass die Division durch Null nicht in der Primarstufe behandelt werden sollte (z. B. Padberg & Benz 2011, S. 164). Gerster (1989, S. 29) bezweifelt, dass eine Frage nach dem Ergebnis im Unterricht natürlich auftritt. Bezogen auf die Primarstufe ist die Division durch Null eine strukturlogische Problematisierung der (Nicht-)Abgeschlossenheit der Division, die in keinem Anwendungskontext natürlich vorkommt (vgl. Hefendehl-Hebeker 1981, S. 246).

Auch wenn diese häufig vertretene Meinung bezüglich *Anwendungen* richtig ist, ergibt sich dennoch die Frage nach dem Ergebnis einer Division durch Null in einem zeitgemäßen Unterricht fast zwangsläufig, insbesondere in Aufgabenstellungen, die das Erfinden eigener Aufgaben anregen (z. B. Ulm 2004, Rasch 2007, 2011). Die Faszination, die von der Null ausgeht (vgl. Rasch 2011, S. 73, Schülerkommentar, Hefendehl-Hebeker 1981, S. 240, Allinger 1980), führt die Schülerinnen in offenen Unterrichtsphasen dazu, bereits in der Primarstufe Aufgaben mit der Zahl Null und auch mit dem Divisor Null selbst zu erzeugen (Schülerarbeiten in Rasch 2007, S. 21, 72). Für den Unterricht bietet die hier vorgeschlagene Einteilung die Möglichkeit, die operationale Vorstellung (0 als „tue nichts“) und die codierende („0 als Zeichen für ein sinnloses Ergebnis“) zu erkennen, offensiv zu thematisieren und beim Rechnen klar zurückzuweisen.

Padberg & Benz (2011) weisen mehrfach daraufhin, dass die Null nicht als „nichts“ interpretiert werden dürfe, weil dies „typische Fehler“ beim Rechnen mit der Null bewirke (a. a. O. S. 51). Radatz & Schipper (1983, S. 57) führen genauer aus, dass das „Nicht-Verständnis der Null [...] das Operieren mit der Null erschwert [...]“ und sprechen sogar von einem „magische[n], nicht-numerische[n] Verständnis der Null, etwa im Sinn von ‚nichts‘, ‚nicht ...‘, ‚kein‘ u. a.“ (a. a. O. S. 82). Dagegen bleibt einzuwenden, dass in den von diesen Autoren gegebenen Aufgabenbeispielen Situationen gezeigt werden, die von den Kindern natürlicherweise mit dem Wortfeld von „nichts“ umschrieben werden (Radatz & Schipper 1983, S. 58, S. 83, Padberg & Benz 2011, S. 49, 50, 164).

Mit der „Nichts“-Assoziation wird auch eine anschauliche Deutung der Division durch Null in der Literatur sehr kritisch gesehen (Padberg & Benz 2011, S. 164, Radatz & Schipper 1983, S. 83, Hasemann 2003, S. 79, 118, Hefendehl-Hebeker 1981, S. 245, 246, Tsamir & Sheffer 2000, S. 104, Grouws & Reys 1975, S. 75). Zumindest für die Sekundarstufe zeichnet sich in der vorliegenden Studie ein anderes Bild ab. 21 % der Schülerinnen verwendeten ein konkretes Beispiel, durchliefen also den Modellierungskreislauf (Schupp 1988, S. 11, Fig. 2) rückwärts[9], indem sie sich von der zu 7 : 0 rekonstruierten Alltagssituation Schlüsse auf das mathematische Modell erhofften. Von diesen konkret Argumentierenden erkannten 40% richtig die Unmöglichkeit des Verteilens, gaben aber daraufhin infolge einer codierenden Auffassung der Null das Ergebnis 0 an. Die Unsinnigkeit des Verteilens ist also durchaus einsichtig zu machen und führt zum richtigen Ergebnis, wenn man einer codierenden Auffassung im Unterricht konsequent begegnet. Die Befunde widersprechen damit einer abwertenden Haltung gegenüber konkreten Beispielen bei der Division durch Null.

Etwas allgemeiner wird hier deshalb entgegen der vorherrschenden Meinung in der Literatur auch die Ansicht vertreten, dass man eine Auffassung der Null als „nichts“ nicht aus dem Unterricht verbannen sollte. Es ist stattdessen sinnvoller, diese Vorstellung aufzugreifen und den Schülerinnen die Problematik dieser

---

[9] Dieses „Demodellieren“ ist nicht mit dem „Interpretieren“ (Schupp 1988) zu verwechseln, da es nicht die Problemlösung, sondern die Problemstellung rückübersetzt.

Sichtweise vor Augen zu führen, z. B., indem man am Beispiel des Regenauffanggefäßes fragt, was man in die Wetterdatentabelle an trockenen Tagen einträgt und was, wenn das Gefäß zerbrochen ist. Die Tabelle in Abb. 5 wendet das Aspektquartett auf die „Nichts“-Deutung der Null in schulgemäßer Ausdrucksweise an.

kardinal	nichts im Sinn von „0 viele einer Sorte“ oder „kein“, z. B. keine Perle
operational	nichts zu tun
codierend	nichts kommt heraus / nichts hat geklappt
regel-orientiert	— (keine Interpretation als „nichts“)

Abb. 5: „nichts“ im Zusammenhang der vier Sichtweisen

Es wurde bereits dargelegt, welche Fehlvorstellungen die operationale wie auch die codierende Sichtweise nach sich ziehen (s. Abb. 4, letzte Spalte). Selbst bei der *regelorientierten* Sicht besteht neben der Übergeneralisierung die Gefahr, dass sich „syntaktische Aspekte […] von den semantischen abkoppeln.“ (Müller & Wittmann 1984, S. 178). Es verbleibt damit der *kardinale* Aspekt der Null als derjenige, der für den Unterricht am tragfähigsten ist. Diese Meinung wird häufig vertreten (Padberg & Benz 2011, S. 49, Hefendehl-Hebeker 1981, S. 247, Gerster 1989, S. 29).

Einen behutsamen Übergang von nicht-kardinalen Vorstellungen zu kardinalen schlägt bereits Hefendehl-Hebeker (1981, S. 243) beim Stellenwertsystem vor. Wie kann man diesen Übergang gestalten? Bei der codierenden Vorstellung hilft die Einführung eines neuen Zeichens. 16% der Schülerinnen wussten um die Unmöglichkeit der Division durch Null, schlossen dann aber codierend auf 0 als Ergebnis („es geht nicht, also 0“). Es lohnt sich nicht nur aus diesem Grund, „gn“ als Zeichen für „geht nicht“ früh einzuführen. Um einer Fixierung auf Zahlenergebnisse (Tsamir & Sheffer 2000) zu begegnen, sollten unlösbare Aufgaben bereits bei Subtraktionen und Textaufgaben regelmäßig einfließen und nicht erst bei der Wurzel- und Logarithmusrechnung. Dies hat ganz allgemein den Vorteil, dass schematische, nicht verständnisorientierte Lösungsstrategien unterlaufen werden und speziell bei der Null die Wendung der codierenden Sicht zum korrekten „gn“ vorbereitet wird. Ergänzend sollte man nach einem Vorschlag von Gerster (1989) etwa bei der Division 0 : 7 die Sprechweise „7 geht nicht in die 0“, die zu einer codierenden Auffassung führen könnte, durch die Sprechweise „7 geht 0-mal in die 0“ ersetzen, welche kardinal die Anzahl der Siebenen angibt, die in 0 hineinpassen.

Der operationalen Sichtweise könnte bereits in der Primarstufe enaktiv begegnet werden, indem man Handlungen mit der Null ausführt: Zu 7 + 0 wird eine Kiste mit 7 Kugeln und eine weitere mit 0 Kugeln *hingestellt*. Bei der algebraischen Vorstellung sollte man Übergeneralisierungen, die in fast jeder Lerngruppe auftreten, zunächst durch Konfrontation mit anderen Schülermeinungen problematisieren. Der Vergleich der Rolle der Null bei Addition und Multiplikation kann anschließend bereits in der Grundschule Übergeneralisierungen widerlegen, so dass man diese unter dem Schlagwort „Phantasieregeln“ explizit thematisieren kann, indem man z. B. die Lerngruppe fragt, wie es zu diesem Fehler kommt.

Abbildung 3 zeigt, dass gerade Divisionsvorstellungen wie Messen und Umkehroperation, die hier und auch etwa bei Bruchzahlen ergiebiger als die Verteilungsvorstellung sind, im Unterricht noch stärker betont werden könnten. Beides würde dazu führen, dass eine kardinale oder eine korrekte regelorientierte Sichtweise der Null im Kontext der Division gestärkt würde. Der behutsame Übergang zu kardinalen Vorstellungen kann auf diese Weise auf der Sekundarstufe durch eine Integration regelorientierter Vorstellungen zur Null weitergeführt werden, die für das volle Verständnis insbesondere der Division durch Null unerlässlich sind – auch wenn Argumentationen über konkrete Beispiele ebenfalls zielführend sein können.

9 Fazit

Der Anteil der Schülerinnen, die bei der Division durch Null ein falsches Ergebnis nennen, ist mit etwa 3/4 in der 7. Jahrgangsstufe recht hoch. Hierauf sollte man als Sekundarstufenlehrkraft gefasst sein und die Vorstellungen kennen, die zu den falschen Ergebnissen 7 und 0 führen, um ihnen im Unterricht geeignet begegnen zu können. Die Vorstellungen zur Null, die in qualitativen oder stoffdidaktisch geprägten Studien genannt werden, konnten empirisch nachgewiesen und gut durch die Aspekte *kardinal – operational – codierend – regelorientiert* systematisiert werden.

Das Aspektquartett steht nicht im Widerspruch zu Aspektsammlungen in der Literatur, sondern eröffnet einen zusätzlichen Ordnungsrahmen, der semantischen, aber nicht-kardinalen Auffassungen einen angemessenen Stellenwert einräumt. Denn es zeigt sich, dass die codierende Sicht in den Schülertexten nicht zu vernachlässigen ist. Bei den gängigen Aufstellungen über Vorstellungen zur Null wird sie als „Fehlvorstellung“ nur in Teilaspekten berücksichtigt. In der dargestellten Untersuchung erwies sie sich als nicht nur für Schülerinnen, sondern auch kulturgeschichtlich und im Alltag bedeutsam. Gleichzeitig bietet diese Kategorie einen diagnostischen Blick auf Schülervorstellungen und beschreibt das didaktische Ziel beim Unterricht zur Null: Die codierende und auch die verwandte operationale Sichtweise thematisieren und herausstellen, dass beide in der Mathematik gegenüber der kardinalen nicht zielführend sind.

Danksagung

Der Autor dankt für Hilfe und wesentliche Hinweise Herrn Tobias Rolfes, Prof. Dr. Jürgen Roth, Prof. Dr. Renate Rasch, Herrn Dr. Lorenz Fahse, Herrn Michael Johann, Prof. Dr. Silke Ruwisch. Der Artikel ist dem Andenken an Prof. Wolfgang Kroll † gewidmet.

Literatur

Allinger, G. D. (1980). Johnny got a zero today. Mathematics Teacher, 73, 187–190.

Beiser, A. (1981). Concepts of Modern Physics. New York: McGraw Hill.

Boyer, C. B. (1944). Zero: The Symbol, the Concept, the Number. National Mathematics Magazine, 18(8), 323–330.

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. Journal für Mathematik-Didaktik, 29, 259–286.

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte: Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster: Waxmann.

Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike und Orient. New York: Springer. Zitiert nach der 6. Auflage im Fourier-Verlag (Wiesbaden 2003).

Gerster, H.-D. (1989). Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren. Grundschule, 21(12), 26–29.

Griesel, H. (1969). Algebra und Analysis der Größensysteme (Teil 1). Mathematisch-physikalische Semesterberichte, 16, 56–93.

Grouws, D. A. & Reys, R. E. (1975). Division involving zero: an experimental study and its implications. Arithmetic Teacher, 22, 74–80.

Hasemann, K. (2003). Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (1981). Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, besonders in der Primarstufe. mathematica didactica, 4, 239–252.

Hefendehl-Hebeker, L. (1982). Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. Journal für Mathematik-Didaktik, 2(1), 47–65.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Gibt es wirklich nur eine leere Menge? mathematica didactica, 12, 197–204.

Hughes, M. (1986). Children and number: Difficulties in Learning Mathematics. Oxford: B. Blackwell.

Kirsch, A. (1979). Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Eine didaktisch orientierte Begründung der Zahlen und ihrer Anwendbarkeit. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Knifong, J. & Burton, G. (1980). Intuitive Definitions for Division with Zero. Mathematics Teacher, 73, 179–186.

Knuth, D. E. (1992). Two notes on notation. The American Mathematical Monthly 99(5), 403–422.
Kornmann, R., Frank, A., Holland-Rummer, C. & Wagner, H. J. (1999). Probleme beim Rechnen mit der Null: Erklärungsansätze und pädagogische Hilfen. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
Kruckenberg, A. (1950). Die Welt der Zahl. Handbuch für den Rechenunterricht der Volksschule. Hannover: Schroedel. (1. Auflage 1935)
Lorenzen, P. (1974). Methodisches Denken. Frankfurt: Suhrkamp.
Mayring, P. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse. New York: Springer. (10. Auflage)
Mayring, P. (2000). Qualitative Inhaltsanalyse. Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research [Online Journal], 1(2). Abrufbar über: http://qualitative-research.net/fqs/fqs-d/2-00inhalt-d.htm [1.6.2012].
Müller, G. & Wittmann, E. C. (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe: Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.
Radatz, H. & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.
Rasch, Renate (2007). Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1/2. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen. Seelze: Lernbuchverlag bei Friedrich in Velber.
Rasch, Renate (2011). Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 3/4. Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen. Stuttgart: Klett.
Rotman, B. (1985). On Zero. Mathematics Teaching, 113, 24–29.
Ruwisch, S. (2008). Vorstellungen über null und Null. In E. Vasarhélyi (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13.3. bis 18.3.2008 in Budapest. Münster: WTM-Verlag, 677–680. Verfügbar unter: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_RUWISCH_Silke.pdf [1.10.2013]
Piaget, J. & Inhelder, B. (1973). Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen, Teil 1. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.
Schönwald, H. G. (1989). Nichts, Null und leere Menge. mathematica didactica, 12(1), 56–60.
Schupp, Hans (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. Der Mathematikunterricht, 34(6), 5–16.
Spiegel, H. (1995). Ist 1 : 0 = 1? Ein Brief – und eine Antwort. Grundschule, 27(5), 8–9. Eine veränderte Version ist verfügbar unter: http://math-www.upb.de/~hartmut/Eigene_Texte/Nicole.pdf [1.2.2012]
Tsamir, P. & Sheffer, R. (2000). Concrete and Formal Arguments: The Case of Division by Zero. Mathematics Education Research Journal, 12(2), 92–106.
Ulm, V. (2004). Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen: Sekundarstufe. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
Wheeler, M. & Feghali, I. (1983). Much Ado About Nothing: Preservice Elementary School Teachers' Concept Of Zero. Journal for Research in Mathematics Education, 14 (3), 147–155.

Wagenschein, M. (1968). Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim: Beltz.

Willmann, O. (1909). Didaktik als Bildungslehre nach ihren Beziehungen zur Sozialforschung und zur Geschichte der Bildung. Braunschweig: Vieweg (4. Auflage abrufbar unter http://archive.org/stream/didaktikalsbild00will#page/458/mode/2up [1.6.2013], 1. Auflage in 2 Bänden (1882, 1889)).

Anschrift des Verfassers

Dr. Christian Fahse
Institut für Mathematik
Universität Koblenz-Landau
Fortstraße 7
76829 Landau
E-Mail: fahse@uni-landau.de

Eingang Manuskript: 21.12.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 14.11.2013
Online verfügbar: 07.01.2014