Zerlegen und Zusammensetzen

Fähigkeiten von Vorschulkindern beim Umstrukturieren von Bauwerken unter Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen

von

Bianca Beutler, Braunschweig

Kurzfassung: Räumliche Strukturierungen geometrischer Anordnungen sind gedankliche Gliederungen, die mentale Zerlegungen der Gesamtkonfiguration in Teile und mentale Zusammenfassungen einzelner Teile zu Substrukturen beinhalten können. Strukturen können gedanklich aufgelöst und flexibel zu neuen Gliederungen umstrukturiert werden. Für die Analyse des (Um-)Strukturierungsprozesses wird ein diagnostisches Modell vorgestellt, das geometrische und arithmetische Fähigkeitsaspekte vereint. Hiermit werden Strategien von Vorschulkindern beim Umstrukturieren konkreter Bauwerke vor und nach einer mathematischen Frühförderung ausgewertet. Die Analyse zeigt, dass Vorschulkinder insbesondere gedankliche Zerlegungen vornehmen. Mit Beachtung globaler Beziehungen gelingen gleichzeitig Zusammenfassungen und die Beachtung von kardinalen Teil-Ganzes-Beziehungen.

Abstract: Spatial structuring includes mental splitting of a composition into components and composing components to new units. Structures can be decomposed and flexibly restructured again. For analyzing individual (re-)structuring processes, a diagnostic model is proposed including geometric and arithmetic ability aspects. With this, preschooler's abilities to restructure concrete buildings are analyzed. The development of spatial structuring abilities is investigated while comparing strategies before and after a mathematical intervention. Results show, that preschooler's prevalent form of disintegrating a given structure is to mentally divide each given unit into new ones. However, creating superior composite units requires a consideration of global relations. Besides, getting aware of compositions is an advantage in the development of the numerical concept of part-whole-relationships.

1 Einleitung

Für den Mathematikunterricht an Grundschulen ist das Entdecken mathematischer Strukturen in der Leitidee „Muster und Strukturen" verankert. Anders als die anderen Leitideen gelten „Muster und Strukturen" als ein grundlegender Aspekt, der u.a. arithmetische und geometrische Inhalte anspricht (vgl. Wittmann & Müller, 2008, S. 42). So können Kinder beispielsweise im Umgang mit „strukturierte[n] Zahldarstellungen" (KMK, 2004, S. 10) geometrische Gesetzmäßigkeiten der räumlichen Anordnungen nutzen, um arithmetische Zahlbeziehungen zu erkennen.

Auch für die mathematische Bildung im Elementarbereich wird es für wichtig erachtet, dass Kinder mathematische Strukturen erkunden. So formuliert Steinweg (2008, S. 146–149) für den Elementarbereich das Basisthema „Zahl und Struktur“, nach dem Vorschulkinder im Umgang mit verschiedenen Mengenbildern zur Entwicklung strukturierter Mengenvorstellungen angeregt werden sollen.

Strukturierungsfähigkeiten gelten als ein allgemeines, kognitives Characteristikum, welches das Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen unterschiedlicher mathematischer Inhaltsbereiche ermöglicht (vgl. Lüken, 2012, S. 220; Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 45). Deutscher (2012, S. 439 f.) vermutet darüber hinaus, dass sich eine Förderung zum Umgang mit geometrischen und arithmetischen Mustern und Strukturen positiv auf das weitere mathematische Lernen auswirkt. Als Strukturen werden im Allgemeinen die Beziehungen zwischen verschiedenen Teilen oder zwischen Teilen und dem Ganzen eines mathematischen Sachverhalts, wie etwa einer geometrischen Anordnung, bezeichnet (vgl. Lüken, 2012, S. 22; Mulligan, Mitchelmore & Prescott, 2006, S. 209). Strukturen können sowohl der Anordnung inhärent sein als auch durch den Betrachter unter Berücksichtigung seiner Vorkenntnisse und Wahrnehmungsleistungen in die Anordnung hineingedeutet werden (vgl. Mulligan, Mitchelmore & Prescott, 2006, S. 209; Söbbeke, 2005, S. 67). Die räumlichen Strukturierungsfähigkeiten beinhalten somit das flexible, mentale Zerlegen einer Anordnung in Teile, das Erkennen von deren Beziehungen sowie das mentale Zusammensetzen der Teile für eine Betrachtung des Ganzen (vgl. Lüken, 2012, S. 221; Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 266, 488; Battista et al., 1998, S. 503 f.).

Nach Söbbeke (2005) zeichnen sich hohe Strukturierungsfähigkeiten u. a. auch dadurch aus, dass „[s]trukturelle Umdeutungen“ (ebd., S. 128, vgl. auch S. 139) erfolgen. Demnach werden die zunächst hineingedeuteten Strukturen „in Teilen oder vollständig aufgelöst und zu anderen Strukturierungen umgedeutet“ (ebd., S. 128). Diese hier als Umstrukturieren bezeichnete Fähigkeit verlangt also ein flexibles Zerlegen und Zusammensetzen des Ganzen in unterschiedliche Unterteilungen.

Ein Verständnis für Zerlegungen und Zusammensetzungen ist auch für das arithmetische Teil-Ganzes-Konzept der natürlichen Zahlen relevant. Zunächst müssen Kinder Zahlen in ihrer kardinalen Bedeutung erfassen, d.h. die einzelnen Zahlen der Zahlwortreihe als Anzahlen ansteigender Mengengrößen verstehen (vgl. Dornheim, 2008, S. 96; Gelman & Butterworth, 2005, S. 6). Hierauf aufbauend kann ein Verständnis für das „Vereinen von Teil-Anzahlen zu Anzahl-Ganzen bzw. ein Aufspalten von Anzahl-Ganzen in Teil-Anzahlen“ (Gaidoschik 2010, S. 118) entwickelt werden. Dieses Verständnis für „Zahlbeziehungen zwischen Zahlentripeln von Kardinalzahlen“ (Dornheim, 2008, S. 84) bildet die Grundlage für ein Operationsverständnis der Addition und Subtraktion und ist nach Resnick (1983, S. 114) der bedeutsamste Entwicklungsschritt der ersten Schuljahre.

Offensichtlich ist also sowohl für eine räumliche Strukturierung geometrischer Anordnungen als auch für die Entwicklung eines tragfähigen Zahlbegriffs ein mentales Zerlegen eines Ganzen in Teile und ein Zusammenfassen einzelner Teile zu einem Ganzen von zentraler Bedeutung. Unklar scheint bisher jedoch, inwiefern die geometrischen und arithmetischen Fähigkeiten zusammenwirken und wie sich die Fähigkeiten zum Zerlegen und zum Zusammenfassen in beiden Bereichen unterscheiden. Hier setzt die vorliegende qualitative Interviewstudie mit Vorschulkindern an, die Strategien der Kinder beim Umstrukturieren von Bauwerken in den Blick nimmt. Basis der Untersuchung ist ein neues sechsdimensionales diagnostisches Modell, das Kategorien zu verschiedenen Fähigkeitsaspekten von räumlichen Strukturierungsfähigkeiten sowie zu arithmetischen Strategien der Anzahlbestimmung und der Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen berücksichtigt. Alle sechs Dimensionen werden in einem Netzdiagramm vereint, sodass in der Auswertung kindlicher Strategien Zusammenhänge zwischen diesen Kategorien sichtbar werden. Die Interviews fanden vor und nach einem Frühförderprojekt statt, sodass die Strategieanalyse auch Entwicklungsprozesse in den Blick nimmt.

Die Kinder müssen in der konzipierten Aufgabensequenz Körper verschiedener Bauwerke mental zerlegen und zusammensetzen, um die Anzahl an Würfeln für ein Würfelbauwerk von gleichem Volumen und gleichen Abmessungen zu ermitteln. Hierfür ist die gegebene Struktur des Bauwerks gedanklich aufzulösen und eine neue Strukturierung vorzunehmen. Damit fordert die Aufgabensequenz einerseits ein räumliches Umstrukturieren und andererseits eine arithmetische Betrachtung von Anzahlbeziehungen explizit ein.

2 Die Beachtung arithmetischer Teil-Ganzes-Beziehungen

Für das arithmetische Teil-Ganzes-Konzept müssen Kinder lernen, dass Zahlen in Zahlen zerlegt und wieder zusammengesetzt werden können. Die Zerlegung einer Zahl in zwei Zahlen ergibt dabei ein Zahlentripel, z.B. 2/5/7, dessen Teil-Ganzes-Beziehungen in zugehörigen Additions- und Subtraktionsaufgaben stets erhalten bleiben (vgl. Fritz & Ricken, 2008, S. 40). Die bereits im Vorschulalter beginnende Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts ist somit für die weitere Ausbildung eines tragfähigen Zahlbegriffs und Operationsverständnisses von besonderer Bedeutung (vgl. z.B. Dornheim, 2008, S. 96–98, 126, 256; Krajewski, Schneider & Nieding, 2008; Gerster & Schultz, 2004, S. 78 ff; Hunting, 2003). Dennoch wird sie noch im Grundschulalter insbesondere von rechenschwachen Kindern nicht immer vollzogen (vgl. Dornheim, 2008, S. 256, 418; Fritz & Ricken, 2008, S. 55 f.).

Die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts gliedert sich nach Resnick (1992) in vier Phasen: Die erste Phase, das „protoquantitative reasoning“, bezieht sich auf ein frühes Verständnis von Teil-Ganzes-Beziehungen für konkrete Mengen oder Objekte. Kinder verstehen, dass sich diese in Teilmengen bzw. Teilobjekte aufspalten und wieder zusammenfügen lassen, ohne dass sich die Gesamtheit ändert. Ihr Wissen über Mengenbeziehungen besteht zunächst unabhängig vom Wissen über Zählwörter und Abzählprozeduren (vgl. auch Krajewski, 2008; Irwin, 1996; Resnick, 1989). Eine Übertragung des protoquantitativen Mengenwissens auf quantifizierte Mengen erfolgt erst in der zweiten Phase, der „mathematics of quantities". Nun können Kinder Teil-Ganzes-Beziehungen für konkrete oder vorgestellte Mengen mit Bezug auf deren Anzahlen formulieren.

Erst ab der dritten Phase, dem „numerical reasoning", beginnen Kinder, ihr Wissen über Mengen und Anzahlen von Mengen in den Zahlbegriff selbst zu integrieren. Resnick (1992) spricht daher im Gegensatz zur „mathematics of quantities" nun von einer „mathematics of numbers". Die Kinder verstehen, dass nicht nur Mengen, sondern Zahlen selbst wiederum in Zahlen zerlegt und wieder zusammengesetzt werden können. Die besondere Leistung ist hierbei, die „Zahl als Ganzheit (Einheit) einerseits und als Zusammensetzung (Vielheit) andererseits zu verstehen und zwischen beiden Blickwinkeln flexibel zu wechseln (d.h. beide Blickwinkel integriert zu haben)" (Gerster & Schultz, 2004, S. 107). Das Verständnis von Teil-Ganzes-Beziehungen für Zahlen entwickelt sich zunächst für einige Zahlentripel. Erst in der vierten Phase, dem „operational reasoning", weitet es sich zu einem Verständnis für die allgemeinen operativen Beziehungen von Addition und Subtraktion aus. Insbesondere die letzten beiden Phasen sind nach Gaidoschik (2010, S. 116–118) für die Entwicklung eines tragfähigen Zahlbegriffs wesentlich.

Resnicks (1992) vier Phasen der Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts können zusammen mit Überlegungen von Gaidoschik (2010) als Basis für die Konzeption eines diagnostischen Modells zu kindlichen Strategien im Umgang mit quantifizierten Mengen herangezogen werden. Auch wenn sich Resnicks Phasen primär auf mentale Repräsentationen beziehen, hat dies dennoch „Auswirkungen darauf, welche Strategien einem Kind prinzipiell zugänglich sind" (Gaidoschik, 2010, S. 118). Allerdings müssen einige Anpassungen vorgenommen werden: So ist zunächst eine basale Kategorie zu ergänzen, in der Kinder ihr Wissen über die Zahlwortsequenz und die Abzählprozedur lediglich zum Auszählen einer Gesamtmenge anwenden, jedoch noch keine weitere Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen vornehmen. Eine erste Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen erfolgt, wenn Kinder beispielsweise Additions- oder Subtraktionsaufgaben durch Handlungen mit konkretem Material darstellen und sie mittels der Rechenstrategie des *Alles Auszählens* oder des *Weiterzählens* bzw. *Rückwärtszählens* auswerten. Nach Gaidoschik (2010, S. 117) handelt es sich hierbei um eine Anwendung des Teil-Ganzes-Konzepts auf der Ebene der „mathematics of quantities". Ebenfalls dieser Ebene zuzuordnen ist das zählende Kopfrechnen „mit dem Gedanken an quantifizierte Gegenstände" (ebd.). Die Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen erfolgt also durch einzeln auszählende Verfahren bzw. zählendes Rechnen. Diese Strategien beruhen hauptsächlich auf einem ordinalen Zahlkonzept, nach dem Zahlen insbesondere mit ihrer Position in der Zahlwortreihenfolge verknüpft sind (vgl. Dornheim, 2008, S. 83).

Damit Kinder langfristig die Ebene der „mathematics of numbers“ erreichen, ist die Ablösung vom zählenden Rechnen zugunsten nichtzählender Rechenstrategien von Vorteil (vgl. Gaidoschik, 2010, S. 118). Die Grundlage hierfür ist ein Verständnis von Kardinalzahlen, d.h. von Zahlen als Anzahlen, die jeweils auf die zugehörige Mengengröße referieren (vgl. Gelman & Butterworth, 2005, S. 6). Durch die Benennung einer Menge mit der zugehörigen Kardinalzahl wird anders als bei einem ordinalen Auszählen nun die Menge als Ganzheit betrachtet. Dies ist nach Gaidoschik (2010, S. 119f.) sowohl für die einzelnen Teilmengen als auch für die Gesamtmenge nötig, damit sich ein vollständiges Zahlentripel festigen kann. Für die diagnostische Erfassung unterschiedlicher Qualitäten in der Teil-Ganzes-Beachtung ist es daher wichtig zu unterscheiden, ob ein Kind lediglich einzelne Teilmengen oder bereits alle zu einer Zahlzerlegung zugehörigen Mengen durch Kardinalzahlen benennt. Im letzteren Fall berücksichtigen die Kinder dann eine vollständige Teil-Ganzes-Beziehung, die nicht nur eine konkrete Mengensituation beschreibt, sondern auch generelle Gültigkeit im Sinne einer Zahlzerlegung, Additions- oder Subtraktionsaufgabe besitzt. Derartige Betrachtungen können somit zu arithmetischen Erkenntnissen über Zahlbeziehungen führen.

Erreicht wird die Ebene der „mathematics of numbers“ schließlich, wenn Kinder „ein bestimmtes, im Sinne von Teilen und Ganzem gedachtes Zahlentripel bereits auch automatisiert“ haben (Gaidoschik, 2010, S. 119). In dieser Kategorie besitzt ein Kind somit Wissen über einzelne Teil-Ganzes-Beziehungen von Zahlen und wendet es für die Auswertung einer vorliegenden Mengensituation an. Sie kann von der vorherigen Kategorie zur Nennung aller relevanten Kardinalzahlen abgegrenzt werden, indem ein Kind hier die zugehörige Zahlzerlegung oder Rechenaufgabe explizit verbalisieren muss. Aus der kindlichen Beachtung einzelner Mengenbeziehungen kann allerdings nicht auf ein allgemeines Teil-Ganzes-Verständnis für die Rechenoperationen der Addition und Subtraktion im Sinne von Resnicks „operational reasoning“ geschlossen werden. Somit wird auf eine entsprechende Kategorie an dieser Stelle verzichtet.

Für ein Modell zur Diagnose der kindlichen Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen ergeben sich insgesamt fünf Kategorien, beginnend mit *keine Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen* bis hin zur *Anwendung von automatisierten Zahlentripeln* (s. Abb. 1). Die kindlichen Strategien im Umgang mit quantifizierten Mengen können diesen Kategorien zugewiesen und als Indiz für die zugrunde liegende Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts angesehen werden:

Kategorien	**Beispiele**
Keine Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen	Auszählen der Gesamtmengen
Ordinales Erfassen von Teil- (und Gesamt-) Mengen	Alles Auszählen für Teilmengen
	Alles Auszählen für Teilmengen und Gesamtmengen
	Weiterzählen
Kardinales Erfassen einiger Teil- und Gesamtmengen	Totum pro parte
	Anzahlnennungen von Teilmengen
	Anzahlnennungen von Gesamtmengen, Zeigen der Teilmengen
	Anzahlnennungen von Teilmengen, Auszählen der Gesamtmengen
Kardinales Erfassen von Gesamt- und zugehörigen Teilmengen	Anzahlnennungen von Teilmengen und Gesamtmengen
Anwenden von Zahlentripeln	Anwenden von Rechenfakten auf Mengenbeziehungen

Abbildung 1: Kategorien zur Beachtung von arithmetischen Teil-Ganzes-Beziehungen

Die Entwicklung eines Teil-Ganzes-Konzepts für Zahlen kann also durch ein Anwenden von Kardinalzahlen auf Teil-Ganzes-Beziehungen von Mengen unterstützt werden. Besonders geeignet erscheinen hierfür Mengendarstellungen, die bereits durch ihre räumliche Struktur eine Gliederung in Teilmengen nahelegen. So kann in teilstrukturierten Anschauungsmitteln des Arithmetikunterrichts der Grundschule wie dem 20er- oder 100er-Feld, den Rechenschiffchen oder dem Rechenrahmen (vgl. Radatz et al., 1996, S. 35 f.) eine Gesamtmenge nicht nur in allen ihren Einzelelementen erfasst werden, sondern vor allem auch als Zusammenfassung von vornehmlich Fünfer- oder Zehner-Teilmengen (vgl. z.B. Hess, 2012, S. 120 ff.). Im Elementarbereich können Teil-Ganzes-Beziehungen von Anzahlen z.B. mit Hilfe von Fingerbildern (vgl. Steinweg 2008, S. 149; Gerster & Schultz, 2004, S. 67 ff.), in Teilmengen gegliederten Würfelbildern (vgl. Gerster & Schultz, 2004, S. 337) oder sonstigen flexibel strukturierten Mengen (vgl. ebd., S. 337 ff; Müller & Wittmann, 2007a, S. 8 f.; Bobis, 1993) angebahnt werden. Auch die Strukturierung von Würfelgebäuden kann Zahlbeziehungen veranschaulichen (vgl. Abb. 2).

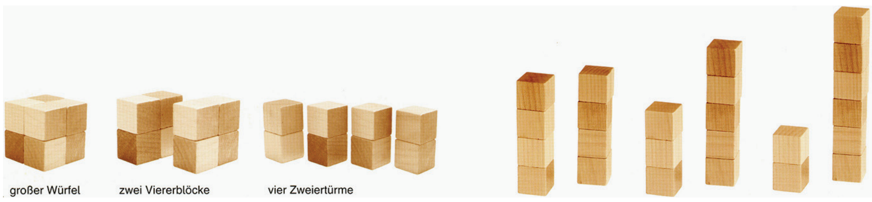


Abbildung 2: Zerlegungen der 8 mit Würfelbauwerken (Müller & Wittmann, 2007b, S. 20)

Besonders förderlich erscheint es, wenn die Gesamtmenge als Zusammensetzung aus (quasi-)simultan erfassbaren Teilmengen dargestellt wird, sodass nur die drei Kardinalzahlen der Zahlzerlegung in Erscheinung treten und direkt aufeinander bezogen werden können. Beispielsweise wird in Abbildung 2 (links) ein Würfelbauwerk aus acht Würfeln derart in Substrukturen zerlegt, dass eine Zerlegung in zwei Teilmengen zu je vier Würfeln oder eine Zerlegung in vier Teilmengen zu je zwei Würfeln sichtbar wird. Ausgehend von der Zerlegung der Acht in zwei simultan erfassbare Vierertürme können weitere Teil-Ganzes-Beziehungen systematisch abgeleitet werden, indem Türme und Anzahlen gegensinnig verändert werden (Ausschnitt s. Abb. 2, rechts). Demgegenüber müssen Kinder bei einer zusammenhangslosen Anzahlbestimmung durch einzelnes Auszählen alle benötigten Zahlwortsequenzen reproduzieren und dafür jedes einzelne Element sukzessive erfassen. Dies erschwert es den Kindern, die Mengen jeweils als Ganzes zu erfassen und das Zahlentripel hervorzuheben. Demnach kann die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts für Zahlen durch das Erkennen und Nutzen von räumlichen Strukturen für die Simultan- und Quasi-Simultanerfassung unterstützt werden (vgl. Dornheim, 2008, S. 124/125). Fischer (1990) und Bobis (1993) konnten zeigen, dass eine Förderung von Kindergartenkindern in Teil-Ganzes-Aktivitäten zu einer signifikanten Verbesserung beim Verständnis von Zahlkonzepten, beim Operationsverständnis von Addition und Subtraktion und beim Stellenwertverständnis führt.

3 Räumliche Strukturierungsfähigkeiten

Strukturierungsfähigkeiten wurden in diversen Studien erforscht und es sind verschiedene Modelle zu deren qualitativen Abstufungen und Entwicklung entstanden (vgl. z.B. Mulligan & Mitchelmore, 2009; van Nes, 2009; Söbbeke, 2005; Merschmeyer-Brüwer, 2001; Outhred & Mitchelmore, 2000; Battista et al., 1998; Battista & Clements, 1996). Als Grundlage der Erforschung räumlicher Strukturierungen dienen beobachtbare Strukturierungsleistungen z.B. in Form von Zeichnungen oder Gliederungen bei Anzahlbestimmungen, die als Indikator für interne Repräsentationen gelten. Trotz unterschiedlicher theoretischer und empirischer Herangehensweisen der Studien lassen sich folgende Gemeinsamkeiten in der Beschreibung von räumlichen Strukturierungsfähigkeiten feststellen. So werden die kindlichen Handlungen zweifach hinsichtlich der Berücksichtigung von geometrischen Beziehungen und des Einsatzes arithmetischer Strategien analysiert. Zudem wird die Passung zwischen den individuell hineingedeuteten Strukturierungen und den intendierten bzw. für die Aufgabenstellung naheliegenden Strukturen analysiert (vgl. auch Steinweg, 2001). Geringe Strukturierungsfähigkeiten werden meist mit idiosynkratischen Zeichnungen (vgl. Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 42) bzw. konkret empirischen Deutungen (vgl. Söbbeke, 2005, S. 135) häufig in Kombination mit einer stark zerlegenden Gliederung in Einzelelemente und ein damit verbundenes Abzählen in Einerschritten beschrieben. Strukturen werden dann von den Kindern gar nicht oder nur teilweise erkannt, können nicht genutzt und nicht hergestellt werden (vgl. van Nes, 2009, S. 94). Im Gegensatz dazu zeichnen sich hohe Strukturierungsfähigkeiten durch eine Integration von numerischen und räumlichen Aspekten aus (vgl. Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 42), die oft durch eine Strukturierung in Subeinheiten unter Beachtung von Beziehungen zwischen diesen Teilen untereinander und zum Ganzen gekennzeichnet ist (vgl. Söbbeke, 2005, S. 139). Den Kindern gelingt eine flexible, zielgerichtete Strukturierungsleistung selbst für ungeordnete Mengen (vgl. van Nes, 2009, S. 95) sowie ein flexibles Umstrukturieren (vgl. Söbbeke, 2005, S. 139). Zur Anzahlerfassung treten strukturbezogene Abzählstrategien, quasi-simultane Erfassungen und Rechenoperationen auf (vgl. Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 485).

3.1 Ein sechsdimensionales diagnostisches Modell zu räumlichen Strukturierungsfähigkeiten und arithmetischen Strategien

Räumliche Strukturierungsfähigkeiten werden beeinflusst von anderen räumlichen Fähigkeiten wie der Raumvorstellung (vgl. Pittalis & Christou, 2010; van Nes & van Eerde, 2010). Für die mentale Strukturierung von Würfelbauwerken unterscheidet Merschmeyer-Brüwer (2001, S. 264) drei „Fähigkeitsaspekte“, die vom individuellen räumlichen Vorstellungsvermögen beeinflusst werden und für eine differenzierte Diagnose räumlicher Strukturierungsfähigkeiten relevant sind. Der erste umfasst die „Strukturierungskomplexität“, die sich auf „unterschiedlich komplexe Elemente als den Strukturierungsprozess leitende Einheiten“ (Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 264) bezieht. So kann sich ein Kind nur an der Vorderansicht eines Bauwerks, an sichtbaren Flächen oder an einzelnen dreidimensionalen Objekten orientieren. Es kann jedes Element einzeln erfassen, einige Elemente lokal als Gruppe gliedern oder gar die gesamte Anordnung global in Substrukturen unterteilen. Ein weiterer Fähigkeitsaspekt ist eine gelingende „Strukturierungskoordination“ (Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 266). Hiernach muss das Kind während des Strukturierungsprozesses die Beziehungen der einzelnen Strukturierungsschritte und Substrukturen untereinander berücksichtigen, um kein Element doppelt zu erfassen oder auszulassen. Entscheidend ist auch das „Gedächtnis für die Abfolge bereits vorgenommener und weiterer in Aussicht genommener Strukturierungsschritte“ (ebd.). Ein besonders für große Bauwerke sowie Schrägbilder von Würfelbauwerken wichtiger dritter Fähigkeitsaspekt stellt die „Tiefendecodierung“ (Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 265) dar. So müssen Kinder nicht nur sichtbare, sondern ggf. auch verdeckte Würfel erfassen. Bei konkreten Bauwerken können diese im Inneren des Bauwerks liegen, bei Schrägbilddarstellungen können in der abgebildeten Ansicht zudem einzelne Bausteine durch andere verdeckt und dadurch nicht abgebildet sein.

Für die Beschreibung individueller Strukturierungsstrategien sind nach Merschmeyer-Brüwer (2001) also die Fähigkeitsaspekte der Strukturierungskomplexität, der Strukturierungskoordination und der Tiefendecodierung zu unterscheiden. Zusätzlich können kindliche Strukturierungen danach analysiert werden, ob sie „essential structural features“ (Mulligan & Mitchelmore, 2009, S. 34) der geometrischen Anordnung berücksichtigen. Essentielle Strukturen können beispielsweise die Gliederung einer Anordnung in Reihen und Spalten bzw. Stangen und Schichten sein. In speziellen Anordnungen können auch strukturelle Beziehungen von typischen Mengenbildern wie z.B. Spielwürfelbildern integriert sein, die dann ebenfalls als essentiell gelten. Die Beachtung essentieller Strukturen bietet in bestimmten Aufgabenformaten und Lösungsstrategien Vorteile, z.B. beim Bestimmen der Anzahl aller Elemente einer Anordnung (vgl. Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 278 ff.; Shannon, 1978; Potter & Levy, 1968). Für arithmetische Anschauungsmittel bezeichnet Söbbeke (2005, S. 124) derartige Strukturen als „intendierte“ Strukturen, da sie „vom Hersteller oder der Lehrperson bewusst in der Darstellung angelegt sind“. Keine Beachtung von essentiellen Strukturen kann diagnostiziert werden, wenn Kinder ein Bauwerk auseinandernehmen, um dann z.B. mit losen Körpern umzugehen, oder wenn ihre Strukturierungen eher willkürlich erscheinen. Auch eine teilweise Beachtung essentieller Strukturen ist denkbar.

Für eine Analyse arithmetischer Strategien, die Kinder während räumlicher Strukturierungsprozesse verwenden, sind einerseits die Strategien zur Anzahlbestimmung (vgl. Söbbeke, 2005, Merschmeyer-Brüwer, 2001, Steinweg, 2001) und andererseits die Beachtung von arithmetischen Teil-Ganzes-Beziehungen (s. Abschnitt 2) relevant. Die Anzahlbestimmung kann sich vom *Abzählen in Einerschritten* über *elaboriertere Zählstrategien* wie einem Zählen in Schritten oder einem Weiterzählen ab einer simultan erfassten Anzahl bis hin zum *rechnerischen Anzahlerfassen* erstrecken. Höhere arithmetische Strategien sind vor allem auch bei höheren räumlichen Strukturierungsfähigkeiten zu erwarten (vgl. Merschmeyer-Brüwer, 2001; Söbbeke, 2005). Diese Strategien sind von der Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen zu unterscheiden, auch wenn sie sich in Teilen überschneiden können: Beispielsweise kann während einer rechnerischen Anzahlbestimmung auch eine Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen enthalten sein, gleichfalls sind Rechnungen aber auch ohne einen direkten Mengenbezug möglich. Im Gegenzug können während der Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen zwar Strategien der Anzahlbestimmung zur Quantifizierung von Teil- und/oder Gesamtmengen genutzt werden. Eine Gliederung in Teilmengen kann aber auch allein durch gestische Handlungen angedeutet werden. Zudem ist es nur für die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts bedeutsam, ob lediglich einzelne Teil- und Gesamtmengen quantifiziert werden oder die Mengenbeziehungen eines vollständigen Zahlentripels Berücksichtigung finden.

Für eine gemeinsame Analyse räumlicher Strukturierungsfähigkeiten und arithmetischer Strategien ergibt sich ein diagnostisches Modell, das die drei Fähigkeitsaspekte räumlicher Strukturierung nach Merschmeyer-Brüwer (2001), die Beachtung essentieller Strukturen sowie die arithmetischen Strategien der Anzahlerfassung und die Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen integriert. Als Zusammenführung ergibt sich ein sechsdimensionales Netzdiagramm, das sich als Analysewerkzeug zur Auswertung kindlicher Strategien eignet (s. Abb. 3).

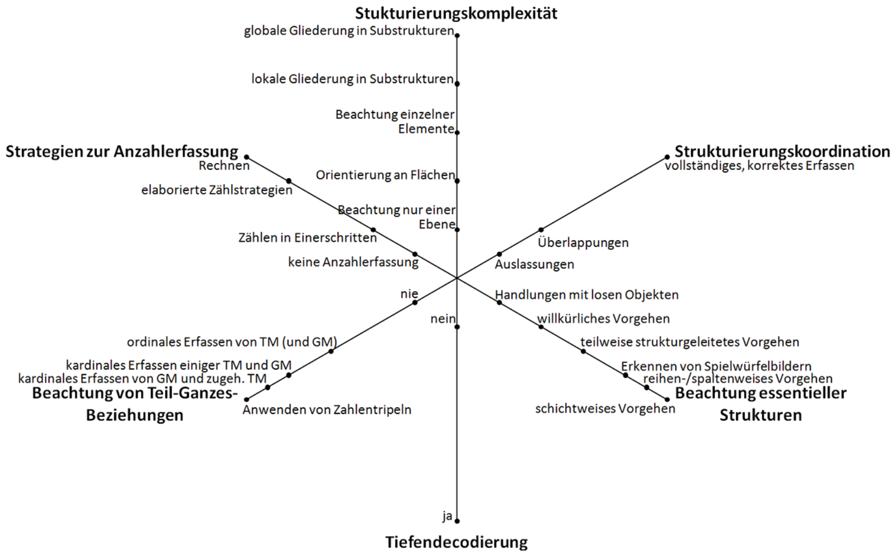


Abbildung 3: Diagnostisches Modell zu räumlichen Strukturierungsfähigkeiten und arithmetischen Strategien

Die Kategorien jeder Dimension sind auf jeweils einer Achse so angeordnet, dass sich relative, graduelle Abstufungen ergeben, die aus den obigen Überlegungen bzw. den genannten Modellen zu verschiedenen Niveaus von Strukturierungsfähigkeiten hervorgehen (vgl. Mulligan & Mitchelmore, 2009; van Nes, 2009; Söbbeke, 2005; Merschmeyer-Brüwer, 2001; Outhred & Mitchelmore, 2000; Battista et al., 1998; Battista & Clements, 1996). Weiterhin wurde achsenübergreifend darauf geachtet, dass die jeweils niedrigsten und höchsten Kategorien dieselben Abstände zum Ursprung aufweisen. Dazwischenliegende Kategorien verteilen sich zwischen diesen Extremen durch eine relative Abschätzung, die aus inhaltlichen Überlegungen hervorgeht. Beispielsweise werden beim Erkennen von Spielwürfelbildern, beim reihen-/spaltenweisen Vorgehen und beim schichtenweisen Vorgehen in hohem bis höchstem Maße essentielle Strukturen berücksichtigt. Demnach sind diese Kategorien am Ende der Achse verortet. Analog eingestuft sind in der

Dimension zur Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen die Kategorien zur kardinalen Beachtung einiger Teilmengen und Gesamtmengen bis hin zum Anwenden von Zahlentripeln. Für empirische Erhebungen bietet das Netzdiagramm somit erstmalig ein Werkzeug zur grafischen Veranschaulichung beobachteter Strategiekomponenten, indem die jeweils diagnostizierten Kategorien auf die Achsen abgetragen werden. Individuell erreichte Kategorien lassen sich durch Linienzüge verbinden, sodass Strategieprofile und Zusammenhänge zwischen den Dimensionen grafisch sichtbar werden.

3.2 Die Fähigkeit zum Umstrukturieren

Die besondere Fähigkeit des Umstrukturierens bzw. nach Söbbeke (2005, S. 138 f.) der „strukturelle[n] Umdeutung" ermöglicht es den Kindern, eine einmal erkannte oder hineingedeutete Untergliederung einer Anordnung flexibel zu verändern, um weitere Gliederungen zu finden. Nach Söbbeke können vor allem Kinder mit höheren Strukturierungsfähigkeiten strukturelle Umdeutungen vornehmen. D.h. von diesen Kindern werden generell die beachteten Elemente und Elementgruppen „als Teile des Ganzen gesehen, strukturbezogen zerlegt und zusammengefügt" (Söbbeke, 2005, S. 138). Sie sind in der Lage, eine Anordnung in Substrukturen zu untergliedern und Beziehungen zwischen ihnen und zur Gesamtanordnung herzustellen und sie beachten zunehmend intendierte Strukturen (vgl. Söbbeke, 2005, S. 139).

Söbbeke berichtet beispielsweise vom Umgang einer Viertklässlerin mit einem Ausschnitt eines Hunderterpunktefelds, das zusätzlich zur Zeilen-Spalten-Struktur durch gestrichelte Linien vorstrukturiert ist. Dem Mädchen gelingt eine flexible Umstrukturierung, sodass es die Darstellung mit verschiedenen Rechenaufgaben beschreiben kann (s. Abb. 4).

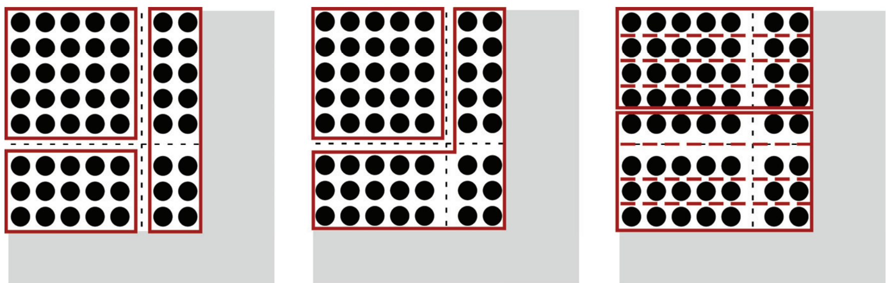


Abbildung 4: Verschiedene Gliederungen des Ausschnitts aus dem 100er-Punktefeld (Markierungen entsprechen der verbal geäußerten Gliederung des Mädchens; eigene Darstellung entsprechend den Analyseergebnissen in Söbbeke, 2005, S. 242, 248, 254)

Das Mädchen ermittelt zunächst die Anzahl aller sichtbaren Punkte und gliedert diese dafür in drei Bereiche. Als passende Rechenaufgabe wählt es eine Addition der sichtbaren und der nicht sichtbaren Punkte, also 56 + 44 (s. Abb. 4, links, bzw. Söbbeke, 2005, S. 225 ff.). Später fasst es zwei vorher gebildete Substrukturen zusammen und findet so innerhalb der sichtbaren Punkte die Rechenaufgabe 25 + 31 (s. Abb. 4, Mitte, bzw. Söbbeke, 2005, S. 244 ff.). Eine vollständig neue Zerlegung und Zusammensetzung der sichtbaren Punkte in zweimal vier Siebenerreihen führt es schließlich zur Additionsaufgabe 28 + 28 (s. Abb. 4, rechts, bzw. Söbbeke, 2005, S. 250 ff). Für die letzte Umstrukturierung bricht das Mädchen damit nicht nur seine eigene vorher hineingedeutete Struktur auf, sondern abstrahiert auch von der vorgegebenen Strukturierung der senkrechten, gestrichelten Linie. Es kombiniert hierbei eine Zerlegung eigener und vorgegebener Substrukturen mit Zusammenfassungen zu neuen Substrukturen.

Auch dreidimensionale Konfigurationen lassen sich durch mentales Zerlegen oder Zusammenfassen umstrukturieren. Einerseits können z.B. Würfelbauwerke in verschiedene Gliederungen strukturiert und demnach umstrukturiert werden. Andererseits können Aufgaben ein Umstrukturieren auch explizit einfordern. Es lassen sich drei verschiedene Arten intendierter Umstrukturierung bei diesen Aufgaben unterscheiden: Umstrukturierungen durch Zerlegungen, durch Zusammensetzungen und durch gleichzeitige Zerlegungen und Zusammensetzungen. Bei der ersten Art intendierter Umstrukturierung sollen Kinder unstrukturierte Umrisse, Schatten oder Ummantelungen mental zerlegen und eine Untergliederung in homogene (s. Abb. 5, links) oder zusammengesetzte heterogene Körper (s. Abb. 5, rechts) vornehmen, insbesondere wenn sie den Bauprozess zunächst mental vorausplanen.

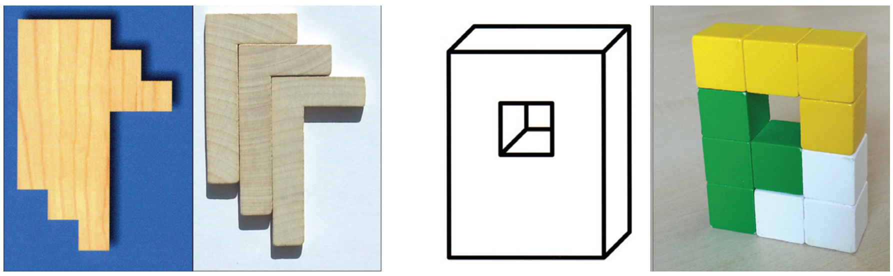


Abbildung 5: Umstrukturieren durch Zerlegen (Vorlage und Nachbau; links: Janssen, 2007, K. 6; rechts: Hirt & Luginbühl, 2003, Somatangram 7)

Die zweite Art intendierter Umstrukturierung liegt vor, wenn Kinder Körper eines gegebenen Schrägbilds oder Bauwerks zusammenfassen sollen, um den Nachbau eines entsprechenden Bauwerks aus zusammengesetzten (s. Abb. 6, links) oder größeren Körpern (s. Abb. 6, rechts) zu planen.

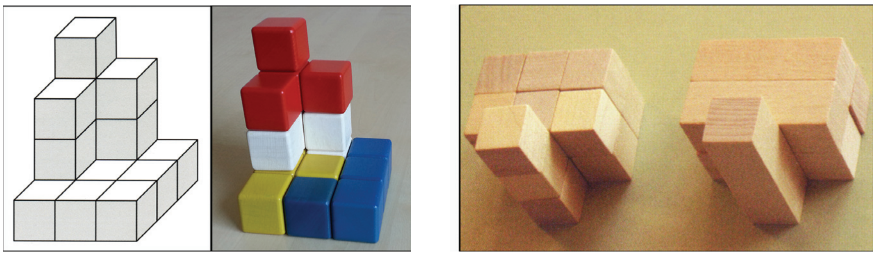


Abbildung 6: Umstrukturieren durch Zusammenfassen
(Vorlage und Nachbau; links: Nikitin, 1990a, S. 32; rechts: Martens, 2011, S. 116)

Die dritte Art intendierter Umstrukturierung erfordert eine Abstraktion von einer vorherigen Struktur für die mentale Gliederung in eine neue Struktur und somit ein gleichzeitiges Zerlegen gegebener Einheiten und neues Zusammensetzen zu neuen Einheiten. Beispielsweise kann im Umgang mit farbigen Stäben das Legen einer gegensinnig veränderten Additionsaufgabe ein derartiges mentales Umstrukturieren einfordern (s. Abb. 7, links). Ebenso müssen Kinder eine Anordnung verschiedener Formen vollständig umstrukturieren, wenn sie diese Anordnung mit verschieden farbigen Würfelflächen nachlegen sollen. So müssen sie die gegebene Anordnung mental in die quadratischen Würfelflächen zerlegen bzw. aus den Würfelflächen die übergeordneten Formen zusammensetzen (s. Abb. 7, rechts).

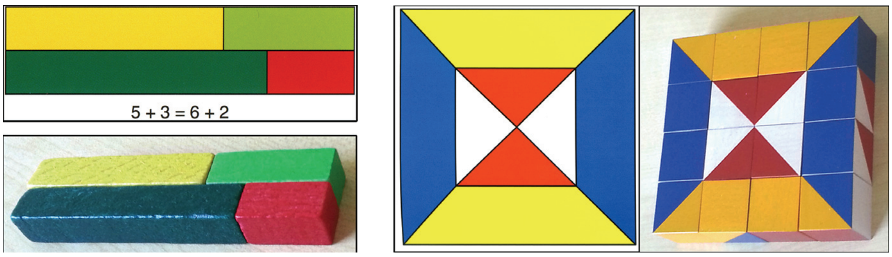


Abbildung 7: Umstrukturieren durch gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen
(Vorlage und Nachbau; links: Besuden, 2007, K. 29; rechts: Nikitin, 1990b, C 16)

Eine besondere Herausforderung beim Umstrukturieren durch Zerlegungen, durch Zusammensetzungen oder durch gleichzeitige Zerlegungen und Zusammensetzungen ist es, die benötigte Struktur mittels räumlicher Strukturierungsfähigkeiten zunächst mental vorauszuplanen. Gleichzeitig spielt die Raumvorstellung, speziell das Erkennen räumlicher Beziehungen und die gedankliche Vorstellung von räumlichen Objektbewegungen eine entscheidende Rolle (vgl. Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 18 f.). Zusätzlich können Kinder Strategien eines groben oder direkten

Größenvergleichs und des Abmessens der vorgegebenen Konfiguration mit Hilfe eines zu verwendenden Bausteins kombinieren (vgl. Eichler & Lafrentz, 2004).

4 Design der Studie

Im Rahmen einer qualitativen Interviewstudie zu Zusammenhängen räumlicher Strukturierungsfähigkeiten und der Zahlbegriffsentwicklung befasst sich ein Teil der Untersuchung mit kindlichen Strategien beim Umstrukturieren geometrischer Anordnungen. In diesem, hier vorzustellenden Teil wird folgenden Fragen nachgegangen:

- Wie gelingt Vorschulkindern die Umstrukturierung von Bauwerken im Sinne von Zerlegungen, Zusammensetzungen oder gleichzeitigen Zerlegungen und Zusammensetzungen vor und nach einer halbjährigen mathematischen Frühförderung?
- Inwiefern berücksichtigen Vorschulkinder die Arten intendierter Umstrukturierung in ihrem Umstrukturierungsprozess zu beiden Erhebungszeitpunkten?
- Wie verschränken sich die einzelnen Fähigkeitsaspekte räumlicher Strukturierungsfähigkeiten, die Strategien der Anzahlbestimmung und die Beachtung arithmetischer Teil-Ganzes-Beziehungen miteinander in den Umstrukturierungsstrategien der Vorschulkinder vor und nach einer halbjährigen mathematischen Frühförderung?

Da wichtige Entwicklungsschritte zu räumlichen Strukturierungsfähigkeiten und zum Zahlbegriff im Vorschulalter stattfinden, ist die Untersuchung auf Vorschulkinder im letzten Jahr vor der Einschulung gerichtet. Zu dieser Zeit hat vermutlich noch kein expliziter Kontakt zu arithmetischen Anschauungsmitteln stattgefunden, sodass eine gegenseitige Beeinflussung der räumlichen und arithmetischen Fähigkeiten allein durch diese Methoden der Veranschaulichung weitgehend ausgeschlossen werden kann. Die erste Erhebung fand im ersten Halbjahr des letzten Kindergartenjahres statt (9/2011–11/2011), eine zweite folgte kurz vor Beginn der Sommerferien vor Schulbeginn (5/2012–6/2012). Die erste Erhebung wurde mit 25 Vorschulkindern (11 Mädchen und 14 Jungen) durchgeführt, von diesen nahmen 22 (10 Mädchen und 12 Jungen) an der zweiten Erhebung teil.

Die Untersuchungszeitpunkte sind abgestimmt auf ein extern durchgeführtes mathematisches Frühförderprojekt (Martens, 2011), welches bei den Probanden auf spielerische Art insbesondere durch gezielte Bauerfahrungen mit Würfeln und Quadern den Erwerb arithmetischer Konzepte anregen soll. Beispielsweise werden Größenbeziehungen verschiedener Quader untersucht, die ähnlich zu Cuisenaire-Stäben (vgl. auch die farbigen Stäbe von Besuden, 2007) als geometrische Repräsentanten von Anzahlen zu denken sind. Kinder werden zur Umstrukturierung verschiedener Bauwerke angeleitet, bei der hauptsächlich Konfigurationen aus Quadern in Würfelbauwerke übersetzt werden oder umgekehrt (vgl. Abb. 6, rechts). Sie bauen verschiedene Bauwerke nach und analysieren sie hinsichtlich räumlicher Beziehungen, Symmetrien und Anzahlen. So ergibt sich neben der primären Grundlagenforschung zu allgemeinen Zusammenhängen der beschriebenen Fähigkeitsbereiche sekundär eine Evaluation des Frühförderprogramms in Form eines Vorher-Nachher-Vergleichs. Die didaktische und methodische Gestaltung der Förderung selbst ist jedoch nicht Gegenstand der hier vorzustellenden Untersuchung.

Für eine quantitative Verortung hinsichtlich numerisch-rechnerischer Fähigkeiten wurde zu beiden Testzeitpunkten mit allen Kindern der TEDI-MATH (Kaufmann et al., 2009) durchgeführt. Hierfür wurden alle Aufgaben der für die jeweilige Altersstufe vorgesehenen Gesamtbatterie in Einzelinterviews präsentiert. Zum ersten Erhebungszeitpunkt (EZP) entsprach dies einem, zum zweiten EZP zwei Interviews von je ca. 25 min. Der Test umfasste Aufgaben zur Kenntnis der Zahlen, Ziffern und Zahlwortreihe, zum Abzählen, zum Ordnen und Klassifizieren nach numerischer Größe, zur Addition mit und ohne Abbildungen und zum approximativen Größenvergleich. Der Test zum zweiten EZP enthielt zusätzlich Aufgaben zum Ziffernvergleich nach Größe, zur Mengeninvarianz, zur numerischen Inklusion, zu Zahlzerlegungen, zur unvollständigen Addition, zur Subtraktion, Textaufgaben und Aufgaben zu Kenntnissen operativer Beziehungen verschiedener Rechenaufgaben.

Das Hauptaugenmerk der Studie liegt auf zusätzlich zu beiden Testzeitpunkten durchgeführten halbstandardisierten, videografierten Einzelinterviews mit eigens für diese Studie entwickelten Aufgaben zur räumlichen Strukturierung. Bis auf kleinere Anpassungen wurden zu beiden EZP dieselben Aufgaben eingesetzt, um so eine möglichst gute Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Eine Beeinflussung von der ersten zur zweiten Erhebung kann aufgrund des langen zeitlichen Abstands weitgehend vernachlässigt werden, da sich die Kinder zum zweiten EZP weder an die Aufgaben noch an die Lösungsschritte erinnern konnten. Zudem wurde den Kindern für gewöhnlich nicht zurückgemeldet, ob ihre Lösungen korrekt waren und niemals wurden korrekte Lösungswege erläutert. Die Bearbeitung aller Aufgaben der Gesamterhebung hat in Abhängigkeit von der Vorgehensweise, der Bearbeitungsgeschwindigkeit und der Ablenkungsbereitschaft jedes Kindes zusätzlich zum TEDI-MATH durchschnittlich ca. 75 min gedauert. Zum ersten EZP wurde diese Bearbeitung auf drei und zum zweiten EZP auf zwei Interviews aufgeteilt. Ungefähr ein Fünftel der Interviewdauer nahm die Bearbeitung der Aufgabensequenz zum Umstrukturieren ein.

5 Die Aufgabensequenz zum Umstrukturieren von Bauwerken

Das gesamte Aufgabenkompendium der Einzelinterviews umfasst sechs Aufgabensequenzen zu verschiedenen Strukturierungsleistungen mit verschiedenen geometrischen Anordnungen. Als Anordnungen wurden in Reihen und Spalten strukturierte Punktefelder, Quadratgitter, konkrete Bauwerke und Schrägbilder von Bauwerken erstellt. Die dargestellten oder herzustellenden Mengen bestehen dabei immer aus mehr als drei Elementen, damit anstatt einer Simultanerfassung andere Strategien der Anzahlerfassung nötig sind. Wiederum wird auf ungeordnete Mengen verzichtet, da diese weniger für nichtzählende Mengenerfassungen und somit auch weniger für eine Fokussierung auf Kardinalzahlen und Teil-Ganzes-Beziehungen geeignet sind (vgl. Abschnitt 2). Alle Aufgabensequenzen wurden unter weiteren Aufgaben in einer Vorstudie erprobt, anhand der dort gewonnenen Erkenntnisse ausgewählt und ggf. angepasst.

Eine dieser Aufgabensequenzen behandelt drei Aufgabentypen zum Umstrukturieren. Neben den im Folgenden genauer dargestellten sechs Aufgaben zum Umstrukturieren konkreter Würfelbauwerke (s. Abb. 8) umfasste die Sequenz auch Aufgabenstellungen zum Umstrukturieren von Flächen und von in Schrägbildern dargestellten Bauwerken. Ausgangspunkt jeder Aufgabe ist die Präsentation einer geometrischen Konfiguration, die im Falle der konkreten Bauwerke aus nichtwürfelförmigen Körpern zusammengesetzt ist. Das Ziel der Aufgaben ist stets ein Umstrukturieren der gegebenen Konfiguration in eine Anordnung aus Würfeln von vorgegebener Größe. Die intendierte Umstrukturierung entspricht einem Zerlegen gegebener Einheiten in kleinere Einheiten (A1, A2), einem Zusammenfassen gegebener Einheiten zu neuen größeren Einheiten (A3) oder einem vollständigen Auflösen der gegebenen Struktur durch ein gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen zu neuen Einheiten (A4–A6).

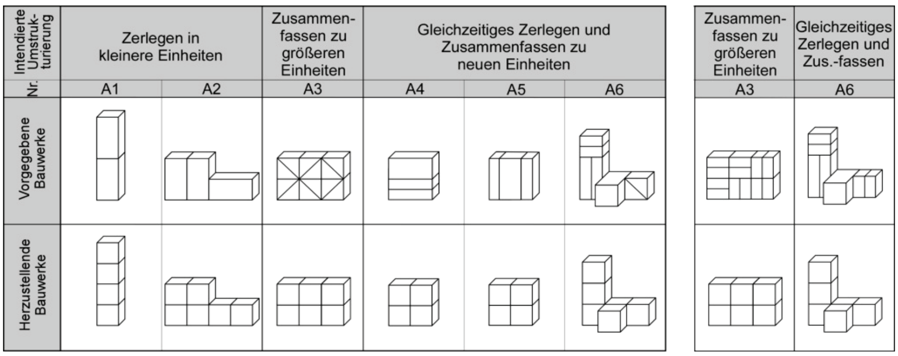


Abbildung 8: Aufgabensequenz zum Umstrukturieren von Bauwerken
(links: 1. EZP.; rechts: Veränderungen beim 2. EZP)

Jede Aufgabe beginnt mit der Präsentation des heterogenen Bauwerks unter einem Plexiglaskasten. Das Kind erhält ein Grundelement der herzustellenden Struktur, hier also einen Würfel, und wird gefragt: „Wie viele von diesen Klötzen brauchst du für ein Bauwerk, das genauso groß ist wie dieses Bauwerk hier?“ Das Kind soll die Würfelanzahl zunächst gedanklich ermitteln, indem es das gegebene Bauwerk mental umstrukturiert bzw. einen möglichen Bauprozess vorausplant und versprachlicht. Falls das Kind nicht von sich aus die eigene Vorgehensweise erläutert, wird eine Erklärung von der Interviewleiterin direkt eingefordert. In einem zweiten Schritt erhält das Kind weitere Würfel (insgesamt 20) mit dem Auftrag: „Dann nimm dir so viele Klötze und baue das Bauwerk, das genauso groß ist wie dieses!“ Zuletzt wird in einem dritten Schritt der Plexiglaskasten entfernt, das Kind darf das vorgegebenen Bauwerk für einen direkten Größenvergleich herausnehmen und das eigene Bauwerk ggf. korrigieren.

In A1 ist insbesondere die Höhe des Bauwerks von Bedeutung, da die Würfel in eindimensionaler Weise aufgeschichtet werden müssen. Diese Aufgabe dient insbesondere auch der Absicherung des Aufgabenverständnisses. In den Aufgaben A2 bis A5 ist neben der Höhe auch die Breite des Bauwerks zu beachten, indem die Würfel in einer zweidimensionalen Ebene platziert werden müssen. In A6 ist ein dreidimensionaler Aufbau gefordert.

Für die Umstrukturierung als Zerlegung müssen die Kinder in A1 und A2 vorgegebene Quader mental in je zwei Würfel zerlegen. Dieselben Zerlegungen sind auch in A4 und A6 inbegriffen. Im Frühförderprogramm werden diese Quader als „Zweier“ behandelt. Für eine Umstrukturierung als Zusammenfassung müssen die Kinder in A3 immer zwei aneinandergrenzende halbe Würfel zu einem Würfel gedanklich zusammenfassen. Zum ersten EZP sind die halben Würfel als Dreiecksprismen, zum zweiten EZP als Quader realisiert. Derartige Zusammenfassungen sind auch in A6 enthalten. Ein gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen erfordern nichtwürfelförmige Quader in der Größe eines halben „Zweiers“. In A4 und A6 sind diese Quader mental in je zwei Teile zu zerlegen, sodass eine neue Zusammenfassung von je zwei der vier Teile zwei Würfel ergeben. In A5 muss zusätzlich ein dazwischen liegender „Zweier“ mental in vier Teile zerlegt werden, um insgesamt eine Zusammenfassung zu vier Würfeln vornehmen zu können. Die Körper in der Größe von halben Würfeln oder nichtwürfelförmigen halben „Zweiern“ werden im Frühförderprogramm nicht thematisiert.

Anstelle des Umstrukturierens können die Kinder die vorgegebene Strukturierung missachten und nur die äußeren Abmessungen der Bauwerke berücksichtigen. Die Anzahlen benötigter Würfel können sie dann durch eine Zerlegung der Gesamtform in Würfel ermitteln (vgl. Abb. 5) oder durch die antizipierte Größe mehrerer Würfel abschätzen. Ein direkter Größenvergleich und ein direktes Messen werden während der Anzahlbestimmung und des Bauens der Würfelbauwerke durch den Plexiglaskasten über dem vorgegebenen Bauwerk weitestgehend verhindert.

6 Ergebnisse

Die Grundlage der Auswertung bilden die entstandenen Videoaufnahmen der Interviews, alle hierzu angefertigten Transkripte und die Testergebnisse des TEDI-MATH. Mit Hilfe der Software *Altas.ti* werden die Daten einerseits hinsichtlich der Lösungskorrektheit und der Strategien zum Umstrukturieren kodiert. Andererseits werden die individuellen Strategien der räumlichen Strukturierung inkl. der arithmetischen Strategie zur Anzahlbestimmung und der Beachtung arithmetischer Teil-Ganzes-Beziehungen ausgewertet. Die Strategien werden pro Kind in das sechsdimensionale Netzdiagramm abgetragen (s. Abb. 3) und miteinander verglichen. Letzteres soll anhand eines Fallbeispiels näher erläutert werden.

6.1 Quantitative Analyse der Lösungskorrektheiten

Im ersten Analyseschritt wurden alle Bearbeitungen danach ausgewertet, ob das Kind die korrekte Anzahl an benötigten Würfeln ermittelt (Schritt 1), das korrekte Würfelbauwerk herstellt (Schritt 2) und nach Entfernung des Plexiglaskastens und einem direkten Vergleich beider Bauwerke ein korrektes Bauwerk vorliegt bzw. hergestellt wird (Schritt 3). Die Anzahlen korrekter Lösungen für den ersten und zweiten EZP zeigt Abbildung 9. So lässt sich ein Überblick über die Leistungen der Stichprobe gewinnen. Die Stichprobe ist aufgrund ihrer Größe jedoch nicht repräsentativ.

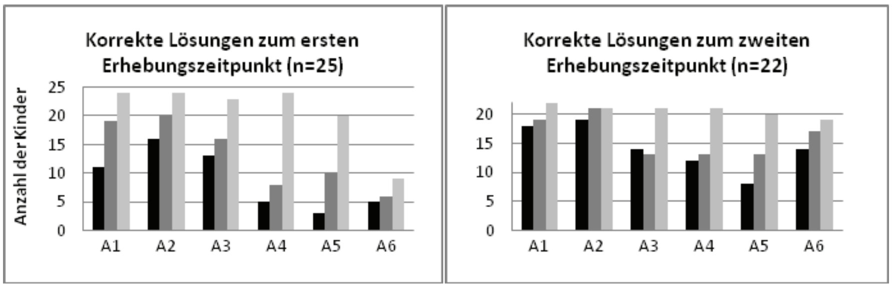


Abbildung 9: Korrekte Lösungen beim Umstrukturieren konkreter Bauwerke
(■ Schritt 1: Anzahlermittlung; ■ Schritt 2: BW-Herstellung; ■ Schritt 3: BW-Korrektur)

Anhand der Diagramme lässt sich wie erwartet ein genereller Zuwachs an korrekten Lösungen von Schritt 1 über Schritt 2 zu Schritt 3 sowohl zum ersten als auch zum zweiten EZP ablesen. Die erste Anzahlermittlung gestaltet sich damit für die Kinder am schwierigsten, gefolgt von der Herstellung des zugehörigen Würfelbauwerks. Nur bei A3 zum zweiten EZP revidiert ein Kind die korrekt ermittelte Würfelanzahl im nachfolgenden Bauprozess. Die ggf. notwendige Korrektur des eigenen Würfelbauwerks stellt für die meisten Kinder kein Problem dar, wenn in Schritt 3 nach dem Entfernen des Plexiglaskastens ein direkter Größenvergleich des vorgegebenen mit dem hergestellten Bauwerk möglich wird. Das Bauwerk in A6 eignet sich allerdings aufgrund seiner dreidimensionalen Bauart nicht für einen direkten Vergleich, sodass zum ersten EZP nur neun Kinder hierfür ein korrektes Würfelbauwerk herstellen können. Wie erwartet zeigt sich auch ein Anstieg korrekter Lösungen vom ersten zum zweiten EZP für alle Aufgaben und alle Bearbeitungsschritte.

In den Diagrammen sind weiterhin verschiedene Schwierigkeitsgrade der einzelnen Aufgaben anhand der differierenden Häufigkeiten korrekter Lösungen erkennbar. Insbesondere Schritt 1 ist hier aufschlussreich. Im Hinblick auf die drei Typen intendierter Umstrukturierung ist Folgendes festzustellen: Die Aufgabe zum Umstrukturieren im Sinne des gedanklichen Zerlegens gelingt den meisten Kindern (A2[1]: 16/25 Kinder zum 1. EZP, 19/22 Kinder zum 2. EZP). Die Aufgabe zum Umstrukturieren im Sinne des Zusammenfassens gelingt etwas weniger Kindern (A3: 13/25 zum 1. EZP, 14/22 zum 2. EZP). Die geringsten Lösungshäufigkeiten zeigen sich bei den Aufgaben zum gleichzeitigen mentalen Zerlegen und Zusammenfassen (A4: 5/25 zum 1. EZP, 12/22 zum 2. EZP; A5: 3/25 zum 1. EZP, 8/22 zum 2. EZP; A6: 5/25 zum 1. EZP, 14/22 zum 2. EZP). Demnach ist insbesondere A5 mit der mentalen Zerlegung verschiedener Körper für eine vollständig neue Zusammensetzung zu vier Würfeln anspruchsvoll. Offensichtlich profitieren die Kinder hier nicht aus den Erfahrungen der vorherigen Aufgabe A4. Beide Bauwerke von A4 und A5 sind aus denselben Körpern zusammengesetzt, besitzen dieselben Außenmaße und verlangen daher dasselbe Würfelbauwerk. Die Strategie des groben Größenvergleichs und Abschätzens der Gesamtgröße auf Basis vorheriger Erfahrungen könnte somit die Bearbeitung von A5 erleichtern, dennoch analysieren die meisten Kinder die vorliegende Zusammensetzung der Bausteine von neuem.

Beim Vergleich der Lösungskorrektheiten jedes einzelnen Kindes vom ersten zum zweiten EZP ergeben sich bei 15 von 22 Kindern gleichbleibende Leistungen oder geringfügige Verbesserungen. Es zeigt sich intraindividuell ein ähnliches Leistungsniveau beim Umstrukturieren mit in etwa gleichbleibenden interindividuellen Unterschieden. Die Ausnahmen bilden vier Kinder mit zum ersten EZP mittleren bis schlechten Ergebnisse, die zum zweiten EZP nahezu vollständig korrekte Ergebnisse erzielen (u.a. Maria[2]). Zwei weitere Kinder steigern sich von zunächst fast

---

1 A1 als Absicherung des Aufgabenverständnisses bleibt unbeachtet.

2 Der Name ist aus Gründen des Datenschutzes geändert.

ausschließlich inkorrekten Ergebnissen auf gute Ergebnisse und ein weiteres Kind zeigt eine leichte Verschlechterung hin zu überwiegend inkorrekten Ergebnissen.

6.2 Strategieanalyse zum Umstrukturieren

Die qualitative Analyse der kindlichen Strategien beim Umstrukturieren während der ersten Anzahlbestimmung gibt weiteren Aufschluss. Analog zur Einteilung der Aufgaben nach Typen intendierter Umstrukturierung zeigen sich auch in den kindlichen Strategien *ausschließlich Zerlegungen* (U1), *ausschließlich Zusammenfassungen* (U2), eine Kombination von *Zerlegungen einzelner Körper und Zusammenfassungen anderer Körper* (U3) sowie ein vollständiges Auflösen der gegebenen Struktur durch ein *gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen* (U4). Einzelne Kinder zählen lediglich vorgegebene Körper, sodass *keinerlei Umstrukturierung* erfolgt (U0).

Abbildung 10 zeigt typische Strukturierungen exemplarisch für A4 mit den hier vorkommenden Strategien U0, U1 und U4. Es ergeben sich individuelle Strukturierungen je nachdem, wie stark die antizipierten Würfelgrößen variieren oder wie systematisch oder willkürlich eine Umstrukturierung erfolgt. Die Zahlen entsprechen den mündlichen Abzählprozessen bzw. Zeigereihenfolgen.

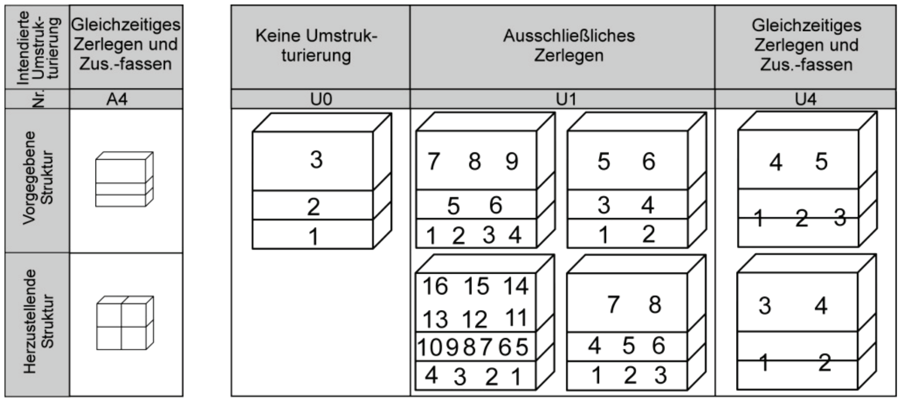


Abbildung 10: A4 mit typischen Vertretern von Umstrukturierungen

Die Strategieverteilungen über die einzelnen Aufgaben zeigt Abbildung 11.

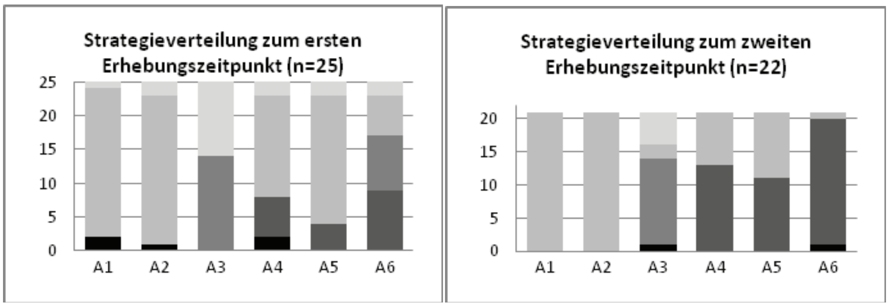


Abbildung 11: Verteilung der Umstrukturierungsstrategien
(U0; U1; U2; U3; U4; unklar)

Keinerlei Umstrukturierung (U0) ist zum ersten EZP für alle Aufgaben, zum zweiten EZP nur für A3 zu finden. *Ausschließliche Zerlegungen* (U1) können nur in A1 und A2 zur korrekten Lösung führen, dennoch tritt diese Strategie bei allen Aufgaben auf außer zum ersten EZP in A3. Sie wird mit Abstand am häufigsten angewandt. *Ausschließliche Zusammenfassungen* (U2) können nur in A3 zur korrekten Lösung führen und werden auch nur in dieser Aufgabe als einzige Strategie angewandt. Eine Kombination von *Zerlegungen einzelner Körper und Zusammenfassungen anderer Körper* (U3) führt bei keinem Bauwerk zur korrekten Lösung und kommt nur zum ersten EZP in A6 vor. Eine Kombination von Zerlegungen, Zusammenfassungen und *gleichzeitigem Zerlegen und Zusammenfassen* (U4) kann in A4 bis A6 zur korrekten Lösung führen und wird auch nur für diese Aufgaben angewandt. Einige wenige Vorgehensweisen sind nicht klar identifizierbar.

Der Vergleich vom ersten zum zweiten EZP ergibt neben der steigenden Anzahl an korrekten Lösungen also auch eine Strategieveränderung. So findet *keinerlei Umstrukturierung* (U0) zum ersten EZP insgesamt 18-mal verteilt über alle Aufgaben statt, zum zweiten EZP ist es nur bei fünf Kindern für A3 zu beobachten. Dazu steigt vom ersten zum zweiten EZP die Verwendung von *gleichzeitigem Zerlegen und Zusammensetzen* (U4) in den Aufgaben A4 bis A6 deutlich an. Beispielsweise nutzen für A4 zum ersten EZP sechs Kinder U4, fünfmal führt dies zur korrekten Lösung. Zum zweiten EZP nutzen 13 Kinder U4 und alle bis auf eines gelangen so zur richtigen Lösung.

Mit den Strategien U0 und U3 entstehen in der vorliegenden Aufgabensequenz stets fehlerhafte Lösungen. Weitere Fehlertypen in den anderen Strategien sind ein Zerlegen in zu kleine Einheiten und ein Ausbleiben von Zusammenfassungen. Allgemein tendieren Kinder eher zum Zerlegen als zum Zusammenfassen und unterschätzen häufig die Größe eines Würfels. Erfolgt jedoch eine mentale Zusammenfassung, wird diese zielführend eingesetzt. So wird die Strategie U2 ausschließlich für A3 mit einer Erfolgsquote von 100% angewandt.

6.3 Analyse von Fähigkeitsaspekten räumlicher Strukturierung und arithmetischen Strategien

Dem entwickelten diagnostischen Modell (s. Abschnitt 3.1) zufolge werden räumliche Strukturierungsfähigkeiten durch die Analyse der Strukturierungskomplexität, der Strukturierungskoordination, der Beachtung essentieller Strukturen und der Tiefendecodierung erfasst. Arithmetische Fähigkeiten zeigen sich in den Strategien zur Anzahlermittlung und in der Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen. Durch diese Analyse kann beispielhaft die besondere Leistungssteigerung von Maria vom ersten zum zweiten EZP näher beleuchtet werden. Die differenzierte Strategieanalyse für eine Fallstudie anstelle eines zusammenfassenden Überblicks über alle Kinder hat einerseits den Vorteil, die qualitative Analyse mit Hilfe des diagnostischen Modells näher erläutern zu können. Andererseits kann nur anhand von Fallstudien eine tiefgreifende Analyse des komplexen Zusammenwirkens einzelner Fähigkeitsaspekte erfolgen. Das Fallbeispiel von Maria ist dabei so ausgewählt, dass ihr Fall im Vergleich zu denen anderer Kinder besonders typische Strategieverschränkungen enthält.

Zum ersten EZP verwendet Maria in der Aufgabe A4 beim ersten Anzahlermitteln die Umstrukturierungsstrategie U1, zerlegt die vorliegenden Bauwerke also nur in kleinere Einheiten. Zum zweiten EZP wendet sie sich von dieser Strategie ab und gelangt durch eine globale Umstrukturierung des gesamten Bauwerks zur korrekten Lösung.

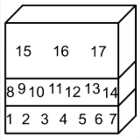
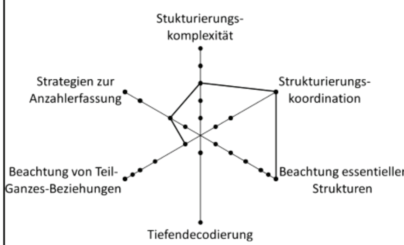
Transkript	Strukturierung	Netzdiagramm
I: (gibt Bauwerk, Plexiglaskasten darüber) Bau mir mal mit diesen hier (gibt einen Würfel) ein Bauwerk, das genauso groß ist wie das (zeigt Bauwerk). Wie viele brauchst du? **M:** (...) 11 vielleicht? **I:** 11 von denen hier? (zeigt Würfel) **M:** M-hm (bestätigend). **I:** Wo sind denn die 11? **M:** Also hier sind schon mal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (unterer Quader), 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (mittlerer Quader), 15, 16, 17 (oberer Quader). (lacht) **I:** 17 von denen hier? (zeigt Würfel) **M:** Ja.		

Abbildung 12: Marias Anzahlbestimmung zum ersten EZP, Aufgabe A4
(I: Interviewerin, M: Maria)

Zum ersten EZP (s. Abb. 12) ermittelt Maria zunächst still die Anzahl und nennt „11“ als Lösung. In ihrer Erläuterung bestimmt sie die Anzahl erneut, zählt nun laut bis 17, während sie mit dem Finger auf die jeweiligen Bausteine zeigt. Sie orientiert sich an der vorgegebenen Struktur, indem sie Quader für Quader zählt. Dabei beachtet sie allerdings nicht die Größe des vorgegebenen Würfels trotz zweier Hinweise der Interviewerin. Somit zerlegt sie mit der Strategie U1 die Quader in zu kleine Einheiten. Wie bei vielen anderen Kindern auch variiert die Größe ihrer Einheiten in Abhängigkeit von der Größe der vorgegebenen Quader. Aufgrund der willkürlich gewählten Einheiten endet jede Anzahlbestimmung mit einem anderen Ergebnis.

Hinsichtlich der Strukturierungskoordination beachtet Maria also jeden einzelnen Körper, hier jeden Quader für sich. Da sie alle drei Quader berücksichtigt, ist ihre Strukturierungskoordination ein vollständiges Erfassen aller Elemente. Sie beachtet essentielle Strukturen des gegebenen Bauwerks, indem sie ihren Auszählprozess schichtweise gliedert. Die Tiefendecodierung spielt hier keine Rolle, da keine verdeckten Bausteine zu beachten sind. Hinsichtlich der arithmetischen Strategien verwendet Maria ein Zählen in Einerschritten ohne auf Teil-Ganzes-Beziehungen einzugehen.

Im nachfolgenden Aufgabenschritt versucht Maria, ihre Strukturierung im Bau des Würfelbauwerks umzusetzen. Sie erstellt zunächst ein Bauwerk aus neun Würfeln, indem sie drei einzelne Würfel nebeneinanderlegt und durch weiteres Hinzufügen einzelner Würfel zwei weitere Ebenen daraufsetzt. Mit Verunsicherung ergänzt sie anschließend einen weiteren Turm von drei Würfeln, schiebt das Bauwerk dichter an den Plexiglaskasten und verändert das 3×4-Bauwerk nach einigen Umbaumaßnahmen zu einem 3×2-Bauwerk. Sie entfernt sich damit von ihrer vorherigen Strukturierung und behilft sich abschließend mit einem nahezu direkten Größenvergleich. Das vollständig korrekte Bauwerk kann sie erst nach Entfernung des Plexiglaskastens und einem direkten Größenvergleich von vorgegebenem und eigenem Bauwerk (Schritt 3) herstellen. Die Lösung erstaunt sie vollkommen.

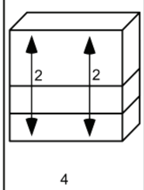
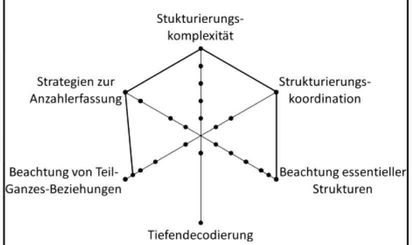
Transkript	Strukturierung	Netzdiagramm
I: (gibt Bauwerk, Plexiglaskasten darüber, gibt einen Würfel) Wie viele brauchst du denn jetzt? **M:** (...) 6. **I:** Wie kommst du auf 6? **M:** Weil hier können ja 3, nein 2.. 2 (deutet mit Spanne zwischen Daumen u. Zeigefinder auf Bauwerk)! Und hier noch mal 2 (deutet ebenso etwas versetzt auf das Bauwerk). 4 können da? **I:** 4 nur? **M:** (nickt, hält erneut Daumen und Zeigefinder) Ja, 4.		

Abbildung 13: Marias Anzahlbestimmung zum zweiten EZP, Aufgabe A4

Zum zweiten EZP (s. Abb. 13) beginnt Maria zunächst möglicherweise mit der Strategie des ausschließlichen Zerlegens (U1), da sie als Lösung die Anzahl „6“ erhält, wie es eine mentale Zerlegung jedes Quaders in zwei Einheiten ergeben würde. Bei ihrer nachfolgenden Begründung deutet sie mit der Spanne zwischen Daumen und Zeigefinder erst links, dann weiter rechts auf das Bauwerk. Sie beachtet also die Höhe des Bauwerks bzw. gliedert es in zwei vertikale Stangen. Ihre erste Vermutung, dass eine Stange durch drei Würfel nachzubauen ist, resultiert vermutlich entsprechend ihrem ersten Lösungsansatz aus der vorliegenden Gliederung. Schließlich erkennt sie, dass sie nur zwei Würfel pro Stange benötigt, indem sie die Gesamthöhe des Bauwerks oder die unterschiedlichen Höhen der verschiedenen Quader berücksichtigt. Vielleicht stellt sie auch einen indirekten Vergleich mit der antizipierten Höhe von ein oder zwei Würfeln her. Sie bricht in ihrer neuen Strukturierung des Bauwerks die gegebene Gliederung auf und berücksichtigt übergeordnete Größenbeziehungen, sodass ihre Strukturierungskomplexität als eine globale Gliederung in Substrukturen interpretiert werden kann. Ihre Strukturierungskoordination führt wie zum ersten EZP zur vollständigen Erfassung. Sie kann sich von der gegebenen Strukturierung in horizontale Ebenen lösen und gliedert das Bauwerk nun in vertikale Stangen. Diese Strukturierung kann als eine weitergeführte Beachtung essentieller Strukturen gedeutet werden, da sie sich an essentiellen Strukturen des herzustellenden Bauwerks statt an denen des gegebenen Bauwerks orientiert. Eine ähnliche Analyse erfolgt auch bei Söbbeke (2005, S. 249), wenn sie kindliche Strukturierungen als „stringent weitergeführt“ bezeichnet. Zur arithmetischen Anzahlerfassung zählt Maria nun nicht mehr in Einerschritten wie zum ersten EZP, sondern ermittelt das Ergebnis „4“ durch Nachrechnen oder per Faktenabruf aus der Zusammensetzung von zwei und zwei. Hinsichtlich der Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen benennt sie mit Bezug auf die konkreten Mengen beide Teilmengen und die Gesamtmenge durch Kardinalzahlen, ohne jedoch die zugehörige Additionsaufgabe explizit zu versprachlichen.

Die Konstruktion des zugehörigen Würfelbauwerks gelingt Maria, indem sie mit beiden Händen zwei Würfel zur Erstellung der unteren Ebene zusammenschiebt. Mit je einem Würfel pro Hand wird parallel die zweite Ebene daraufgesetzt. Sie gliedert das Bauwerk nun also wie ganz am Anfang in horizontale Schichten statt in vertikale Stangen, sodass sie kurzzeitig irritiert ist und über die Notwendigkeit einer dritten Schicht nachdenkt. Sie fragt zunächst: „Da kommt hier noch einer hin, ne?“, beschließt dann aber korrekt, dass dies nicht nötig ist.

Im Vergleich vom ersten zum zweiten EZP haben sich sowohl die arithmetischen Strategien als auch die Strukturierungskomplexität maßgeblich verbessert. Zum ersten EZP herrschte noch eine Zerlegung in kleine, willkürliche Einheiten begleitet durch ein Auszählen in Einerschritten. Zum zweiten EZP hingegen gelingt ihr nun eine globale Sicht auf das Bauwerk mit einer gleichzeitigen mentalen Zerlegung vorgebebener Bausteine, einer Zusammenfassung zu homogenen Würfeleinheiten und eine übergeordnete Zusammenfassung der antizipierten Würfel zu quantifizierten Substrukturen. Beide Substrukturen werden zudem für das Endergebnis additiv zusammengefasst.

Marias Fallbeispiel zeigt typische Verschränkungen von Strategien und Fähigkeitsaspekten, wie sie auch bei vielen anderen Kindern beobachtet werden können. Ihre Leistungen zum ersten EZP sind typisch für viele Kinder mit eher geringen Strukturierungsfähigkeiten. Ihre Leistungen zum zweiten EZP sind hingegen typisch für Kinder mit höheren Strukturierungsfähigkeiten. Nicht viele Kinder zeigen jedoch eine derart starke Leistungsverbesserung wie Maria. Somit kann Marias Fallbeispiel vor allem eine große qualitative Bandbreite in den kindlichen Strategien und Fähigkeiten abbilden. Andersartige Entwicklungsverläufe sind durch weitere Fallstudien noch zu erforschen.

7 Diskussion der Ergebnisse

Eine fortgeschrittene Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung ermöglicht ein Erkennen und flexibles Nutzen arithmetischer und geometrischer Aspekte einer gegebenen Struktur bzw. ein zielorientiertes mentales Zerlegen einer geometrischen Anordnung und Zusammenfassen einzelner Elemente zu Substrukturen (vgl. z.B. Lüken, 2012; Mulligan & Mitchelmore, 2009; Söbbeke, 2005; Merschmeyer-Brüwer, 2001). Höhere Strukturierungsleistungen zeichnen sich zudem durch die Fähigkeit zum flexiblen strukturellen Umdeuten, d.h. Umstrukturieren, aus. Bei diesem werden zuvor hineingedeutete und gegebene Strukturen aufgelöst und die Elemente einer Anordnung zu neuen Substrukturen gegliedert (vgl. Söbbeke, 2005). Die vorliegende Studie zeigt, dass Vorschulkindern ein Umstrukturieren im Sinne von ausschließlichen, mentalen Zerlegungen gegebener Einheiten in kleinere Einheiten deutlich besser gelingt, als ein Umstrukturieren, welches darüber hinaus mentale Zusammenfassungen einzelner Teilelemente zu neuen Substrukturen einfordert. Das mentale Zerlegen scheint zudem eine von den Kindern bevorzugte Strategie zu sein, unabhängig von der intendierten Art der Umstrukturierung in der jeweiligen Aufgabe. Typische Fehler sind demnach meist ein Zerlegen in zu kleine Einheiten, deren Größe oft in Abhängigkeit von den vorgegebenen Körpern variiert. Ein Zusammenfassen von Einheiten zu übergeordneten Substrukturen bleibt häufig aus. Die Ergebnisse für diese Stichprobe und die spezielle Anforderung des Umstrukturierens konkreter Bauwerke fügen sich dabei in allgemeine Modelle zu Strukturierungsfähigkeiten, nach denen ein stark zerlegendes Vorgehen schon auf niedrigen Entwicklungsstufen und ein flexibles Zusammenfassen von Einzelelementen zu größeren Einheiten erst auf höheren Entwicklungsstufen erfolgt (vgl. z.B. Söbbeke, 2008, S. 43–45; Merschmeyer-Brüwer, 2001, S. 485).

Zusätzliche Hinweise über einzelne Aspekte der räumlichen Strukturierungsfähigkeiten lassen sich aus der differenzierten Analyse der Strukturierungskomplexität, der Strukturierungskoordination und der Beachtung essentieller Strukturen wie im Fallbeispiel von Maria gewinnen. Während eine gelingende Strukturierungskoordination für alle Strategien des Umstrukturierens erforderlich scheint, nimmt die Strukturierungskomplexität hier besonderen Einfluss. So kann eine geringe Strukturierungskomplexität, nach der das Kind einzelne vorliegende Elemente der Anordnung als für den eigenen Strukturierungsprozess leitende Einheit wählt, beim Umstrukturieren nur zur Strategie des mentalen Zerlegens führen. Erst eine globale (ggf. auch lokale) Gliederung in Substrukturen führt zur Beachtung räumlicher Beziehungen innerhalb der geometrischen Anordnung, die über die Grenzen von Einzelelementen hinausgehen. Eine höhere Strukturierungskomplexität ist damit Voraussetzung für ein gelingendes Umstrukturieren, das auch mentale Zusammenfassungen enthält. Ein gelingendes Umstrukturieren kann weiterhin dadurch unterstützt werden, dass nicht nur essentielle Strukturen des gegebenen Bauwerks, sondern auch des herzustellenden Bauwerks beachtet werden.

Die Fähigkeit zum Zusammenfassen von Einzelelementen zu einer größeren Ganzheit ist auch für die Entwicklung eines Teil-Ganzes-Konzepts von Zahlen und damit für die Entwicklung eines tragfähigen Zahlbegriffs und Operationsverständnisses von besonderer Bedeutung (vgl. Gaidoschik, 2010; Gerster & Schultz, 2004; Resnick, 1983). In der vorliegenden Studie wird im Fallbeispiel von Maria deutlich, dass nicht beim Zählen in Einerschritten, sondern beim nichtzählenden Anzahlerfassen eine Zusammenfassung von Einzelelementen zu übergeordneten Teilmengen erfolgt. Ihre Benennung von Teilmengen durch Kardinalzahlen fasst sie schließlich weiter zusammen zu einer Gesamtmenge mit zugehöriger Gesamtkardinalzahl. Alle Kardinalzahlen ergänzen sich zu einem Zahlentripel, das als Zahlzerlegung arithmetische Gültigkeit unabhängig von der konkreten Mengenkonfiguration besitzt. Wie bei Maria kann somit vorhandenes arithmetisches Wissen für die Auswertung konkreter Situationen verwendet oder umgekehrt aus der Betrachtung konkreter Mengen Wissen über Zahlbeziehungen generiert werden.

Eine räumliche Strukturierung, die eine Zusammenfassung von Einzelelementen zu übergeordneten Substrukturen und die Beachtung von Beziehungen zwischen den Substrukturen und zur Gesamtkonfiguration beinhaltet, bietet also nicht nur für ein gelingendes Umstrukturieren, sondern auch für die Berücksichtigung arithmetischer Teil-Ganzes-Beziehungen eine wichtige Basis. So zeigt sich für die vorliegende Stichprobe auch ein Zusammenhang zwischen der Qualität der Umstrukturierungsleistung und dem Auftreten von Teil-Ganzes-Betrachtungen. Denn die Vorschulkinder, die bei geometrischen Strukturierungen das gleichzeitige Zerlegen und Zusammenfassen zu neuen Einheiten beherrschen, zeigen in der Tendenz auch eine vermehrte Beachtung arithmetischer Teil-Ganzes-Beziehungen mit Hilfe von Kardinalzahlen. Passend zu Studien zum Zusammenhang von Strukturierungsfähigkeiten und Mathematikleistung (vgl. Lüken, 2012, s. auch Mulligan, Mitchelmore & Prescott, 2005) gehören auch hier die Kinder, die entweder gar nicht umstrukturieren oder nur zerlegen (z.B. zum ersten EZP 4/25 Kinder), auch zu den Kindern, die im TEDI-MATH beim Abzählen und Rechnen mehrfach durch unterdurchschnittliche Leistungen auffielen. Nur Maria zeigt zum ersten EZP niedrige Umstrukturierungsfähigkeiten trotz hoher Rechenleistungen. Ebenso sind vier von fünf Kindern, die im TEDI-MATH beim Abzählen und Rechnen mehrfach durch überdurchschnittliche Leistungen auffielen, in der Gruppe der Kinder wiederzufinden, welche ein Zerlegen, Zusammenfassen und gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen beherrschen.

Vom ersten zum zweiten EZP steigen die Häufigkeiten korrekter Lösung für alle Aufgaben und Aufgabenschritte an. Sowohl das mentale Zerlegen von nichtwürfelförmigen Quadern in Würfel, wie es im Frühförderprojekt thematisiert wurde, als auch das Umstrukturieren mit gleichzeitigen Zerlegungen und Zusammenfassungen gelingt zum zweiten EZP mehr Kindern. Entsprechend passen die verwendeten Strategien des Umstrukturierens zum zweiten EZP besser zu den in den Aufgaben intendierten Umstrukturierungen. Inter- und intraindividuelle Leistungsunterschiede bleiben vom ersten zum zweiten EZP weitgehend erhalten, sodass eine gewisse Stabilität der Strukturierungsfähigkeiten vermutet werden kann. Ähnlich wie bei Mulligan, Mitchelmore und Prescott (2005) zeigen nur einige Kinder mit zum ersten EZP schwächeren Leistungen besondere Entwicklungsverläufe. Beispielsweise verbessert Maria ihre vormals fast ausschließlich inkorrekten Lösungen für die Anzahlbestimmung und Bauwerkherstellung zu nahezu vollständig korrekten Lösungen für alle Arbeitsschritte. Interessanterweise zeigt Maria bereits zum ersten EZP höhere Rechenkompetenzen im TEDI-MATH und eine häufigere Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen, als es bei anderen Kindern mit vergleichbaren Strukturierungsleistungen der Fall ist. Möglicherweise haben ihre guten arithmetischen Fähigkeiten oder zumindest ein stärkeres Suchen nach mathematischen Beziehungen die weitere Entwicklung räumlicher Strukturierungsfähigkeiten begünstigt (vgl. Mulligan & Mitchelmore, 2009; Mason, 1996). Auch könnte sie dadurch in besonderem Maße vom Frühförderprojekt profitieren haben. Eine genauere Abklärung dieser Hypothesen kann nach weiteren Analysen der individuellen Fähigkeitsveränderungen nicht nur für die Aufgabensequenz zum Umstrukturieren, sondern auch für alle weiteren in den Interviews gestellten Aufgaben erfolgen. Da das diagnostische Modell allgemeine Strukturierungsfähigkeiten und arithmetische Strategien fokussiert, können weitere Aufgabensequenzen mit eben diesem analysiert und mit den vorliegenden Ergebnissen der Teilstudie direkt verglichen werden. Die grafische Darstellung unterschiedlicher Verschränkungen zwischen den Fähigkeitsaspekten und Strategien erleichtert dann die aufgabenübergreifenden Typenbildungen.

Literatur

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken Borrow, C. (1998): Student's spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education 29(5)*, 503–532.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996): Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal of Research in Mathematics Education 27(3)*, 258–292.

Besuden, H. (2007): *Mathematik mit farbigen Stäben*. Velber: Kallmeyer.

Bobis, J. (1993). Visualization and the development of mental computation. In: Atweh, B., Knes, C., Carss, M. & Booker, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Brisbane, 117–122.

Deutscher, T. (2012): *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen.* Wiesbaden: Vieweg/Teubner.

Dornheim, D. (2008): *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.

Eichler, K.-P. & Lafrentz, H. (2004): Vorerfahrungen von Schulanfängern zum Vergleichen und Messen von Längen und Flächen. *Grundschulunterricht 51(7/8)*, 42–47.

Fischer, F. E. (1990): A part-part-whole curriculum for teaching number in the kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education 21*, 207–215.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008): *Rechenschwäche*. München: Ernst Reinhardt.

Gaidoschik, M. (2010): *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Gelman, R. & Butterworth, B. (2005): Number and language: how are they related? *Trends in Cognitive Sciences 9(1)*, 6–10.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Freiburg i. B. In: http://opus.bsz-bw.de/phfr /volltexte/ 2007/16/pdf/gerster.pdf. Zuletzt eingesehen am 25.10.2012.

Hess, K. (2012): *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen*. Seelze: Kallmeyer/Klett.

Hirt, U. & Luginbühl, S. (2003): *Spiele mit dem Somawürfel. Schauen und Bauen 2*. Velber: Kallmeyer.

Hunting, R. (2003): Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behavior 22*, 217–235.

Irwin, K. C. (1996): Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education 27(1)*, 25–40.

Janssen, S. (2007): *Wie leg' ich's richtig? Für 2 bis 4 Spieler in Vorschule und Schule*. Embsen/Seelze: Der kleine Verlag/Kallmeyer.

Kaufmann, L., Nuerk, H.-C., Graf, M., Krinzinger, H., Delazer, M. & Willmes, K. (2009): *TEDI-MATH – Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse*. Bern: Huber.

KMK (Hrsg.) (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. München, Neuwied: Wolters Kluwer.

Krajewski, K. (2008): Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In: Petermann, F. & Schneider, W. (Hrsg.): *Angewandte Entwicklungspsychologie. Bd. 7. Enzyklopädie der Psychologie*. Göttingen: Hogrefe, 275–304.

Krajewski, K., Schneider, W. & Nieding, G. (2008): Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht* 55, 118–131.

Lüken, M. (2012): *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Martens, P. (2011): *Mathematik erleben. Das Vorschulprojekt in 24 Spieleinheiten*. Braunschweig: PMI.

Mason, J. (1996): Expressing generality and roots of algebra. In: Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Hrsg.): *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer, 65–86.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): *Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkinder zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen*. Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2007a): *Das kleine Zahlenbuch. Teil 1: Spielen und Zählen*. 3. Auflage. Seelze Velber: Kallmeyer.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2007b): *Das kleine Formenbuch. Teil 2: Falten – Bauen – Zeichnen*. 1. Auflage. Seelze Velber: Kallmeyer.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. (2005). Case studies of children's development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study. In: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Hrsg.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*. Melbourne: PME, 1–9.

Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2006): Integrating Concepts and Processes in Early Mathematics: The Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAP). In: Novotná, J., Moraová, H. & Stehlíková, N. (Hrsg.): *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*. Prag: PME, 209–216.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009): Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. In: *Mathematics Education Research Journal 21*, 33–49.

Nikitin Material (1990a): *Geowürfel – Geo-cubes*. Essen: LOGO Lern-Spiel-Verlag.

Nikitin Material (1990b): *Musterwürfel – Pattern cubes*. Essen: LOGO Lern-Spiel-Verlag.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000): Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education 31(2),* 144–67.

Pittalis, M. & Christou, C. (2010): Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics 75*, 191-212.

Potter, M. C. & Levy, E. I. (1968): Spatial enumeration without counting. *Child Development 39(1)*, 265–272.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Resnick, L. B. (1983): A Developmental Theory of Number Understanding. In: Ginsburg, H. P. (Hrsg.): *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press, 109–151.

Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. *American Psychologist 44*, 162–169.

Resnick, L. B. (1992): From Protoquantities to Operators: Building Mathematical Competence on a Foundation of Everyday Knowledge. In: Leinhardt, G., Putnam, R. & Hattrup, R. (Hrsg.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale: Erlbaum, 373–429.

Shannon, L. (1978): Spatial strategies in the counting of young children. *Child Development 49(4)*, 1212–1215.

Söbbeke, E. (2005): *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern: Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.

Söbbeke, E. (2008): „Sehen und Verstehen" im Mathematikunterricht. Zur besonderen Funktion von Anschauungsmitteln für das Mathematiklernen. In: Vásárhelyi, E. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: Martin Stein, 39–46.

Steinweg, A. S. (2001): *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern – Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Steinweg, A. S. (2008): Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In: Hellmich, F. & Köster, H. (Hrsg.): *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 143–159.

van Nes, F. (2009): *Young Children's Spatial Structuring Ability and Emerging Number Sense*. Utrecht: All Print.

van Nes, F. & van Eerde, D. (2010): Spatial structuring and the development of number sense: A case study of young children working with blocks. *Journal of Mathematical Behavior 29*, 145–159.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Aufgabenbeispiele – Unterrichtsanregungen – Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor, 42–65.

Anschrift der Verfasserin

Bianca Beutler
TU Braunschweig
Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik
38106 Braunschweig
b.beutler@tu-braunschweig.de

Eingang Manuskript: 02.11.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 06.08.2013
Online verfügbar: 12.09.2013