Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen

Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problemlösestile

von

Mandy Fuchs, Neubrandenburg

Kurzfassung: Der vorliegende Beitrag umfasst – ausgehend von einer komplexen interdisziplinären Sichtweise – insbesondere eine theoretisch begründete Modellierung mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter, eine abstrakt-analytische Strukturierung von Ansätzen zum (mathematischen) Problemlösen und eine auf theoretischen Positionen basierende empirisch-konstruktiv gewonnene Klassifizierung von spezifischen Problembearbeitungsstilen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler.

Abstract: Starting from a complex interdisciplinary approach this study uses established theoretical modelling of mathematical aptitude development in primary school age; conceptional-analytical structuring approach to (mathematical) problem solving and a theoretical position based on empirical constructions gained from the classification of specific mathematical problem solving styles of potentially gifted third and fourth form primary school children.

1 Einleitung

> „Keine Gesellschaft kann es sich leisten, ihre begabtesten Mitglieder zu ignorieren, und alle Gesellschaften müssen sich ernsthaft damit auseinandersetzen, wie sie besondere Talente am besten fördern und ausbilden können." (Winner 1998, S. 9)

Seit ca. 20 Jahren hat das Thema „Hochbegabung" in einer breiteren Öffentlichkeit sowie in bildungspolitischen und wissenschaftlichen Diskussionen eine zunehmende Aufmerksamkeit erhalten. Ursachen hierfür sind *zum einen* die Notwendigkeit einer verstärkten Förderung hochbegabter Kinder, die Bildungsexperten aus den schlechten Ergebnissen deutscher Schüler[1] in internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS, PISA und IGLU ableiteten. *Zum anderen* gab es aus der Wirtschaft

---

[1] In diesem Artikel wird bei Verwendung der männlichen bzw. weiblichen Form jeweils das andere Geschlecht mitgemeint.

Forderungen nach immer mehr Spitzenkräften für die Bereiche Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften. Ein größeres wissenschaftliches Interesse erwächst zudem aus der aktuellen Inklusionsdebatte mit einer zunehmenden Kenntnisnahme, vielfach sogar Akzeptanz bisheriger Forschungsergebnisse zur Begabtenproblematik sowie aus der Einsicht, dass im Schulalltag überforderte Lehrer und betroffene Eltern hochbegabter Kinder eine qualifiziertere Hilfe benötigen.

Die offensichtliche große Komplexität des Themenbereiches lässt jedoch keine simplen und keine schnell zu realisierenden Konzepte für eine angemessene Förderung hochbegabter Kinder zu.[2] Die Vielschichtigkeit und Interdisziplinarität der Thematik spiegelt sich bereits darin wider, dass es in der Begabungsforschung viele verschiedene, z. T. konträre Definitionen und Modelle zur Hochbegabung gibt (vgl. z. B. Renzulli 1978, 2003, Gagné 2000, Heller 2001, Gardner 1994) gibt. Bei aller Unterschiedlichkeit der Theorieansätze sind neben der Akzeptanz des komplexen Charakters der Thematik Hochbegabung drei weitere generelle Trends erkennbar, die sowohl in der wissenschaftlichen Forschung innerhalb Deutschlands als auch weltweit zunehmend akzeptiert werden:

- die Bereichsspezifik von Begabung,
- die dynamische Entwicklung einer Begabung im Kindes- und Jugendalter und
- die Notwendigkeit einer möglichst frühen Diagnostik und sinnvollen Förderung begabter Kinder.

Zum Forschungsstand zur mathematischen Begabungsentwicklung im Grundschulalter erfolgte von Käpnick (1998) die bisher umfangreichste empirische und theoretische Untersuchung im deutschsprachigen Raum. Er entwickelte ein spezielles Merkmalssystem und kennzeichnete grob gewisse Ausprägungstypen von mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern, was in nachfolgenden Untersuchungen von ihm selbst und von anderen (u. a. Peter-Koop 2002, Fuchs 2006) prinzipiell

---

[2] Hinsichtlich der komplexen Sichtweise tragen in letzter Zeit zum einen Ergebnisse der Hirnforschung (z. B. Roth 2001, Hüther & Hauser 2012) sowie Untersuchungen zur Kreativität und zur emotionalen Intelligenz (z. B. Csikszentmihalyi 1996, Winner 1998, Goleman 1999a, 2000) immer mehr zur Erhellung des Begabungsbegriffes bei. Zum anderen ist zu beobachten, dass der Begabungsbegriff zunehmend unter Einbeziehung co-kognitiver Merkmale erweitert wird. So untersuchte Renzulli (2003) in seinen wissenschaftlichen Studien verschiedene Kategorien von Persönlichkeitsmerkmalen, die der Drei-Ringe-Konzeption von Begabung unterliegen. Er bezeichnete solche Kategorien, wie Optimismus, Mut, Hingabe an ein Thema oder Fach u. a. als co-kognitive Faktoren, da sie mit den kognitiven Merkmalen, die im Allgemeinen mit der Entwicklung menschlicher Fähigkeiten verbunden werden, interagieren und diese so fördern. Auch in anderen Modellen wie „The Autonomous Model for the Gifted and Talented“ (Betts & Kercher 1999) wird immer mehr von einer ganzheitlichen Sichtweise auf die Persönlichkeit ausgegangen, was auch meinen Intentionen entspricht.

bestätigt wurde bzw. als eine Basis ihrer Untersuchungen diente (u.a. Nolte 2004; Ertel, Fritzlar 2004). Bemerkenswert am Modell von Käpnick ist *erstens* die Einbeziehung begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften und die damit verbundene komplexe Sicht, welche die Begabung nicht auf kognitive bzw. im engen Sinne mathematische Fähigkeiten reduziert. *Zweitens* stellte Käpnick heraus, dass es schon im Grundschulalter verschiedene individuelle Ausprägungen mathematischer Begabungen gibt (vgl. Käpnick 1998, S. 200–209, 250–255). Relativ offen blieb aber, welche individuellen Vorgehensweisen mathematisch begabte Grundschüler beim Problembearbeiten bevorzugen, wie konstant diese schon sind und inwiefern sich die Problemlösestile[3] mathematisch begabter Kinder von denen der „normal" bzw. unterdurchschnittlich entwickelten Kindern unterscheiden. Diese Defizite sind angesichts der großen Bedeutung von Problemlösekompetenzen für produktives mathematisches Tun sowohl für die Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder als auch für die Breitenförderung von erheblicher Relevanz.

Auch aufgrund des angesprochenen wissenschaftlichen Desiderats sind Lehrer in der Schulpraxis häufig unsicher bzgl. des Einsatzes von Problemaufgaben wie auch einer individuellen Förderung mathematisch begabter Kinder. Das bedingt wiederum, dass viele diesbezügliche Potenziale im Grundschulalter, in einer Entwicklungsphase, in der generell entscheidende Weichen für das gesamte Lernen und für die Persönlichkeitsentwicklung als Ganzes gestellt werden, und in der Kinder bekanntlich eine besonders hohe Lernfähigkeit entwickeln, weitestgehend ungenutzt bleiben.

2 Hauptziele und forschungsmethodische Anlage der Untersuchungen

Ausgehend von der gekennzeichneten Problemsituation bestanden die *Hauptziele* meiner Untersuchungen

- im begründeten Bestimmen verschiedener Problemlösestile von Dritt- und Viertklässlern mit einer potenziellen mathematischen Begabung,
- in der Analyse der Stabilität bzw. Instabilität der Problemlösestile mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler im Verlaufe zweier Grundschuljahre,
- in der Entwicklung eines praktikabel einsetzbaren Analyserasters zur Ermittlung der Problemlösestile mathematisch begabter Grundschüler sowie
- in der Zusammenstellung von Orientierungshilfen für Lehrer beim Erkennen und Fördern mathematisch begabter Grundschulkinder.

---

[3] Die Begriffe „Problemlösestil" und „Vorgehensweise beim Problemlösen" werden in diesem Beitrag synonym verwendet.

Entsprechend der Zielstellung der Arbeit dienten die Untersuchungen in erster Linie der Erkundung und Identifizierung spezifischer Problemlösestile von Dritt- und Viertklässlern mit einer potenziellen mathematischen Begabung. Daher war der Charakter der Arbeit eine *Erkundungsuntersuchung*. Hiervon ausgehend war das Untersuchungsdesign dadurch gekennzeichnet, dass in einem schrittweisen Prozess wechselseitiger Beeinflussung von theoretisch-analytischen und theoretisch-konstruktiven Untersuchungen zu Problemlösestilen mathematisch begabter Kinder, in Verbindung mit empirischen Untersuchungen, begründete Positionen zu den Hauptzielen der Arbeit gewonnen wurden. Die Untersuchungen hatten (vor allem aufgrund des beschränkten Umfangs der empirischen Untersuchungen) einen explorativen und hypothesengenerierenden Charakter. Sie dienten also dazu, Hypothesen zu gewinnen und zu präzisieren.

Wichtige theoretische Ausgangspositionen der Untersuchungen waren die bereits angesprochenen Trends in der internationalen wie nationalen Begabungsforschung (vgl. Abschnitt 1) und die hiermit verbundene hohe Komplexität und Interdisziplinarität mathematischer Begabungen.

Aus der Akzeptanz der Komplexität einer mathematischen Begabung ergab sich konsequenterweise auch eine Komplexität bei der Diagnostik begabter Kinder (vgl. auch Torrance 1982, S. 56). Um dieser Vielschichtigkeit genügen zu können und um nicht den Unzulänglichkeiten eines einzelnen Identifizierungsverfahrens ausgeliefert zu sein, erschien eine *Synthese mehrerer verschiedener formeller und informeller Verfahren* sinnvoll. Demgemäß erfolgte das Erfassen von Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen sowohl mit qualitativen als auch mit quantitativen Untersuchungsmethoden.[4]

Hiervon ausgehend war die Untersuchungsstrategie dadurch gekennzeichnet, dass auf der Basis einer Literaturanalyse zu Hauptauffassungen zum Begabungsbegriff, zur Begabungsentwicklung im Grundschulalter und zu theoretischen Ansätzen zum Problemlösen ein erstes *hypothetisches Modell zu spezifischen Vorgehensweisen von Dritt- und Viertklässlern mit einer mathematischen Begabung beim Problemlösen* konstruiert wurde. Dieses Modell sollte auch emotionale Aspekte und Persönlichkeitsqualitäten mit einbeziehen und damit über eine Klassifizierung nach heuristischen Strategien hinausgehen – gleichwohl diese aber mit einschließen.

---

[4] Da mit qualitativen Methoden eine Kategorienbildung erst anhand von komplexen Einzelfallstudien vorgenommen werden kann, gewährleisten sie eine grundsätzliche Offenheit für neue und nicht unbedingt erwartete Kategorien. Bei quantitativen Methoden hingegen wird mit einem vorgefertigten Kategoriensystem versucht, Realität zu beschreiben oder Hypothesen über die Realität zu belegen bzw. zu verwerfen. Dabei werden die zu untersuchenden Aspekte quantifiziert und es werden Koinzidenzen zwischen verschiedenen Merkmalsausprägungen gesucht.

Das theoretische Modell wurde anschließend durch *empirische Untersuchungsmethoden* verifiziert, ggf. korrigiert und ergänzt. Sie umfassten insgesamt:

- komplexe Einzelfallstudien (qualitative Untersuchungen) sowie
- den Einsatz von Indikatoraufgaben und die statistische Auswertung der Ergebnisse mithilfe eines entwickelten Analyserasters (quantitative Untersuchungen).

Mit zehn *Einzelfallstudien*[5] (von denen in der Dissertation fünf vorgestellt wurden; vgl. Fuchs 2006) sollten exemplarisch verschiedene Problemlösestile mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler analysiert und die jeweiligen Kinder einem bestimmten Problemlösetyp zugeordnet werden. Zugleich sollte an den Einzelfällen die Stabilität bzw. Instabilität von Vorgehensweisen im Verlaufe eines oder zweier Grundschuljahre untersucht werden. Die Einzelfallstudien umfassten

- videodokumentierte Interpretationen von Vorgehensweisen beim Problemlösen,
- weitere prozessorientierte Beobachtungen beim Problemlösen im Zusammenhang mit der Auswertung der Analyseraster und der Eigenproduktionen sowie
- halbstandardisierte Leitfadeninterviews mit den Probanden, mit ihren Eltern und mit ihren Mathematiklehrern bzw. Klassenlehrern.

Die *quantitativen empirischen Untersuchungen* zu insgesamt 62 Probanden dienten flankierend sowohl dem begründeten Bestimmen verschiedener Problemlösestile mathematisch potenziell begabter Grundschüler (einschließlich der Analyse von Einflussfaktoren zu Vorgehensweisen beim Problemlösen) als auch dem Feststellen ihrer Stabilität bzw. Instabilität im Verlaufe eines oder zweier Grundschuljahre. Darüber hinaus sollte mit dem hierzu zu entwickelnden Analyseprotokoll ein praktikabel einsetzbares Diagnoseinstrument geschaffen werden.

Für die qualitativen wie auch die quantitativen empirischen Untersuchungen wurden 15 *Indikatoraufgaben* zusammengestellt, die

- eine angemessene Problemhaltigkeit besitzen,
- eine relativ leichte Verständlichkeit aufweisen,

---

[5] Der Einsatz von Einzelfallstudien empfiehlt sich vor allem immer dann, wenn der zu untersuchende Gegenstand bisher kaum erforscht wurde, was für die vorliegende Untersuchung gilt. Somit kann der Gefahr begegnet werden, durch eine vorschnelle Abstraktion und Verallgemeinerung von statistisch erfassten Daten wesentliche Aspekte des Problemfeldes zu unterdrücken (vgl. Becker 1983, S. 7). Ein weiterer Vorzug komplexer Erkundungen bzw. Analysen innerhalb von Einzelfallstudien zu einem Probanden besteht darin, dass an einem konkreten Einzelfall umfassender und gründlicher als z. B. mit statistisch ausgewerteten Tests spezifische Merkmale, Merkmalsausprägungen oder Korrelationen zwischen Merkmalen erkannt und analysiert werden können.

- verschiedene Präsentationsformen und Inhaltsbereiche der Mathematik berücksichtigen,
- verschiedene Vorgehensweisen beim Bearbeiten ermöglichen,
- einen Zeitrahmen von 10 bis 30 Minuten für das Finden und Angeben der Lösung(en) umfassen sollten.

Die Indikatoraufgaben (vgl. Fuchs 2006, S. 121ff) wurden hinsichtlich der genannten Kriterien in verschiedenen Schülergruppen erprobt und innerhalb der Fallstudien sowie in einer Quer- und in einer Längsschnittstudie eingesetzt.

Die *Querschnittstudie* zielte auf das Erfassen der Entwicklungsniveaus mehrerer Probanden bzgl. bestimmter Merkmale zum gleichen Zeitpunkt. Hierzu wurden drei Indikatoraufgaben (Würfeltrick, Perlenschnuraufgabe, Teufelsaufgabe, s. unten) bei 62 mathematisch potenziell begabten Dritt- und Viertklässlern des Braunschweiger Projektes „Mathematische Lernwerkstatt für Kinder“ eingesetzt. Diese Kinder wurden durch ihre Lehrer auf der Grundlage des spezifischen Merkmalssystems für die Erfassung von Dritt- und Viertklässlern mit einer potenziellen mathematischen Begabung (vgl. Käpnick 1998, S. 119) nominiert. Innerhalb des Projektes wurden zudem ein spezieller Eignungstest sowie Indikatoraufgaben zum Erfassen von Dritt- und Viertklässlern mit einer potenziellen mathematischen Begabung (ebenda, S.144 ff.) und ein Intelligenztest[6] angewendet, um das Vorhandensein einer potenziellen mathematischen Begabung nachzuweisen.

Wie in der aktuellen entwicklungs- und lernpsychologischen Forschung weit verbreitet, wurden in dieser Untersuchung längs- und querschnittliche Betrachtungsweisen kombiniert. Demgemäß wurden innerhalb der *Längsschnittstudie* alle 15 Indikatoraufgaben in regelmäßigen Abständen über den Zeitraum von bis zu zwei Jahren hinweg eingesetzt und ausgewertet, um insbesondere die Stabilität der Vorgehensweisen beim Problemlösen zu erfassen. Die Basis hierfür bildeten sieben Kinder des Braunschweiger Projektes (vgl. hierzu Fuchs 2006, S. 108–119), die vom Beginn des dritten bis zum Ende der vierten Klassenstufe beobachtet wurden.

Die Entwicklung des statistisch auswertbaren *Analyseprotokolls* war durch nachfolgende Phasen gekennzeichnet.

---

6 Hierbei handelt es sich um den Intelligenztest CFT 20, einen Grundintelligenztest Skala 2, der von Cattel 1972 auf der Grundlage eines hierarchischen Faktorenmodells der Intelligenz entwickelt und von Käpnick im dritten bzw. vierten Schuljahr innerhalb des Förderprojektes in Form eines Gruppentests durchgeführt wurde.

1. Phase:

- Zusammenstellen theoretisch begründeter Merkmale zur Charakterisierung von Vorgehensweisen beim Problemlösen und ihre Operationalisierung als qualitative Merkmale,
- Anlegen einer Ordinalskala bzgl. aller Merkmale, wobei die Merkmale als diskret definiert wurden

2. Phase:

- Erprobung und Präzisierung bzw. Verifizierung des Analyserasters,
- Prüfen einer prinzipiellen Objektivität und Validität des Rasters als Diagnoseinstrument,
- Erarbeitung von konkreten Empfehlungen zum Einsatz des Analyseprotokolls

3. Phase:

Einsatz des erprobten Analyserasters innerhalb der empirischen Untersuchungen

4. Phase:

- statistische Auswertung des Datenmaterials,
- exemplarisches Bestimmen verschiedener Vorgehensweisen aufgrund der Analyse konkreter Häufigkeitsverteilungen und mithilfe der Erstellung von Kreuztabellen,[7]
- Endkorrektur des entwickelten Analyserasters.

Als besondere Stärken der ausgewählten Erhebungsmethoden lassen sich nennen:

- das Vermeiden künstlicher Laborsituationen,
- ein komplexes Erfassen von Beziehungen zwischen Proband und Umwelt,
- ein vertieftes Erfassen von Spezifika eines Individuums sowie
- die Wahrung der ganzheitlichen Sichtweise und der Komplexität des Begabungsthemas.

Das Schema in Abbildung 1 verdeutlicht das beschriebene Untersuchungsdesign und kennzeichnet grob die verschiedenen Untersuchungsetappen.

---

[7] Die statistische Auswertung erfolgte mit SPSS.

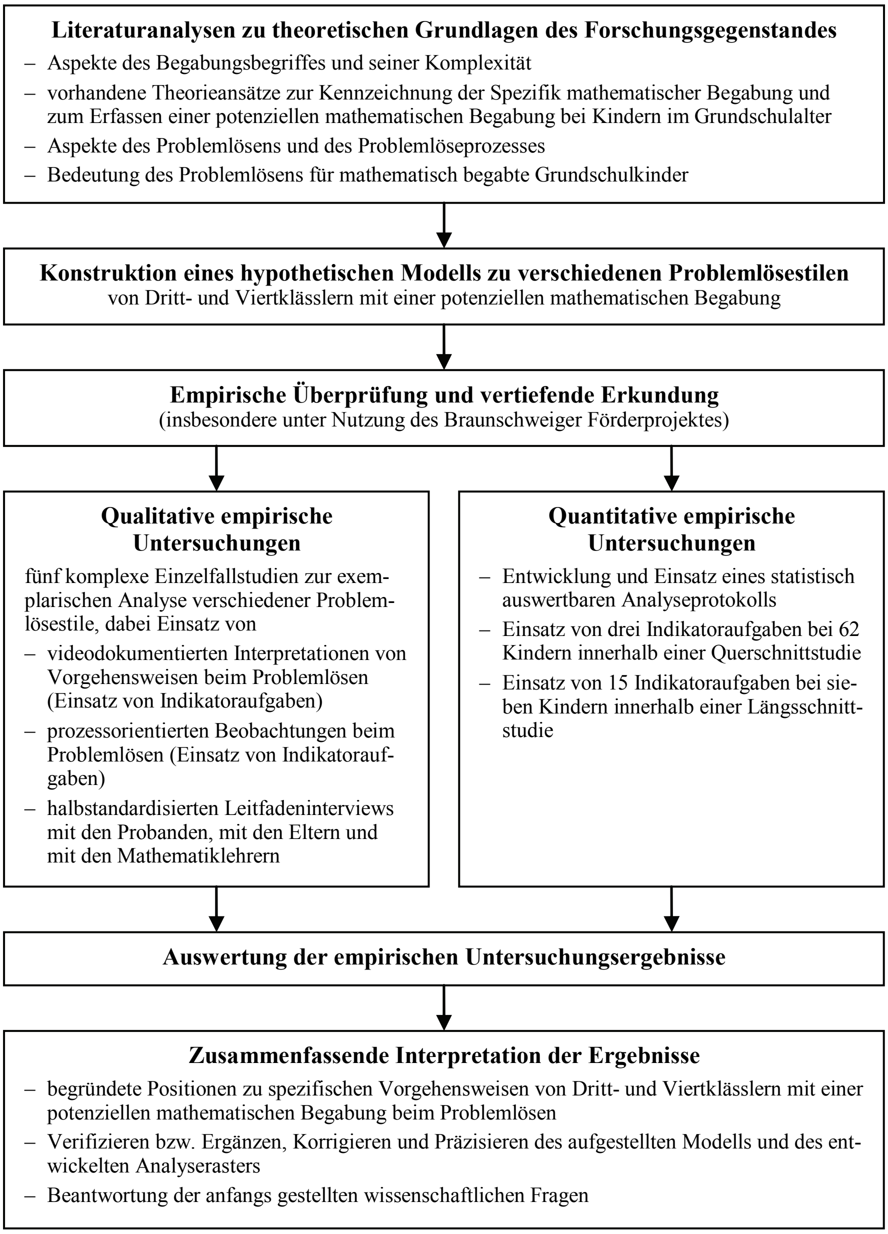


Abbildung 1: Überblick über das forschungsmethodische Vorgehen

3 Theoretische Positionierung

3.1 Zum Begabungsbegriff

„Die größten Talente liegen oft im Verborgenen." (Plautus, 250–184 v. Ch.)

Derzeit gibt es eine kaum zu überschauende Fülle verschiedener Theorieansätze zum Begabungsbegriff, von denen sich bisher aber keine als eindeutig überlegen erwies. Der sehr komplexe interdisziplinäre Charakter von Begabungen wird zudem durch neuere wissenschaftliche Forschungsansätze zur Einbeziehung co-kognitiver Fähigkeiten, durch die an Bedeutung gewinnenden emotionalen Aspekte der Intelligenzforschung sowie durch neuere kognitionspsychologische Ansätze und biologische Erklärungsversuche zu Begabungsphänomenen immer vielschichtiger. Die Erweiterung des Begabungsbegriffes erforderte somit, sich zunächst einen Überblick über bisher bekannte Forschungsergebnisse aus verschiedenen Disziplinen zu verschaffen und eigene theoretische Positionen zu bestimmen.

In traditionellen Theorieansätzen wird Begabung als eine hohe bereichsunspezifische allgemeine Intelligenz aufgefasst (vgl. hierzu z. B. Spearman 1904, Guilford 1965, Rost 2000). Intelligenzforscher entwickelten hierarchisch aufgebaute Faktorentheorien, in denen die Struktur der menschlichen Intelligenz als ein zusammenhängendes System von einem oder mehreren Generalfaktoren sowie einer bestimmten Anzahl spezieller Faktoren auffasst wird. Dies führt zu einem Vermischen mathematischer Fähigkeiten mit anderen allgemeinen intellektuellen Fähigkeiten.

Gardners multiples Intelligenzmodell (1994) stellt eine Alternative zu Auffassungen von einer bereichsunspezifischen Begabung dar. Er unterscheidet sieben bzw. neun bereichsspezifische Intelligenzen, wovon eine spezielle die „logisch-mathematische Intelligenz" ist, die er allerdings nur sehr grob charakterisiert und die nur z. T. den Besonderheiten mathematischen Tätigseins (vgl. u.a. Käpnick 1998, S.53–65) entspricht.

Eine Erweiterung der traditionellen bereichsunspezifischen Theorieansätze und somit eine weitere Alternative dazu sind Auffassungen von Begabungen als Interaktionsprodukt verschiedener Komponenten. Danach wird Begabung zumeist als ein Potenzial für eine mit großer Wahrscheinlichkeit zu einem späteren Zeitpunkt erreichte allgemein-geistige oder auf einem bestimmten Tätigkeitsbereich bezogene überdurchschnittliche Leistungsfähigkeit verstanden. Für die Entfaltung einer solchen Begabung sind z. B. nach dem Mehrfaktorenmodell von Mönks (1992) neben einer hohen Intelligenz ebenso Kreativität und Aufgabenzuwendung erforderlich, welche in einer wechselseitigen Interaktion zueinander stehen und von einem günstigen Zusammenspiel von Anlagefaktoren und Umwelteinflüssen determiniert werden. Produktives mathematisches Tätigsein wird durch Fantasie, Einfallsreichtum und Originalität bestimmt, deshalb erscheint die Erweiterung des Begabungsbegriffes um den Aspekt der Kreativität bedeutungsvoll für die Kennzeichnung von Besonderheiten mathematischer Begabung. Auch die Erweiterung des Begabungsbegriffs um die Persönlichkeitsmerkmale „Aufgabenzuwendung, Motivation“ bzw. um allgemeine begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften erscheint sinnvoll, weil vielfach Zusammenhänge zwischen der Entwicklung bzw. der individuellen Ausprägung mathematischer Fähigkeiten und bestimmten allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften nachgewiesen wurden (u. a. Betts 1999, Renzulli 2003). Im differenzierten Begabungs- und Talentmodell von Gagné (2000) wird zudem der dynamische Entwicklungsprozess von einer z. T. angeborenen weit überdurchschnittlichen Kompetenz (Begabung) hin zu einer, durch intrapersonale und umweltbedingte Katalysatoren beeinflussten, weit überdurchschnittlichen Performanz (Talent), besonders deutlich.

Eine dritte Alternative zu traditionellen Theorieansätzen einer Begabung stellen kognitionspsychologische Ansätze dar. Verschiedenen Kognitionspsychologen gelang es mittels Prozessanalysen spezielle Merkmalssysteme für mathematische Begabungen zu entwickeln, von denen Krutetzkis Modell zur Struktur mathematischer Fähigkeiten (vgl. Krutetzki 1976) hervorzuheben ist. Dieses Modell basiert auf der bisher gründlichsten Untersuchung zu mathematischen Fähigkeiten und Krutetzkis Ergebnisse konnten in einer Reihe nachfolgender Untersuchungen (wie z. B. von Kießwetter 1984) prinzipiell bestätigt werden. Außerdem sind kognitionspsychologische Untersuchungen zu individuellen Strategien beim Problemlösen für die Kennzeichnung mathematischer Begabung bedeutungsvoll. Kognitionspsychologen sind sich prinzipiell darüber einig, dass es große individuelle Unterschiede im Anwenden solcher Strategien gibt. Wie sich solche Strategien individuell herausbilden und entwickeln und welche „Typen“ von Strategien in verschiedenen Tätigkeitsbereichen klassifiziert werden können, ist noch relativ unklar.

Um diverse Begabungsphänomene erfassen und individuelle Besonderheiten mathematisch begabter Schüler besser verstehen zu können, sind darüber hinaus soziologische Aspekte, wie die soziale Reife, spezielle Tätigkeitsprofile und Selbstkonzepte von Kindern, sowie Erklärungsansätze zu besonderen Funktionszuweisungen im menschlichen Gehirn und zu geschlechtsspezifischen Unterschieden zu beachten. Diesbezüglich kann man speziell von der Hirnforschung in den nächsten Jahren einen erheblichen Erkenntniszuwachs erwarten, der auch unser Wissen über mathematische Begabung bereichern sollte (vgl. Käpnick 1998, S. 95).

Die hier skizzenhaft dargestellte Analyse bestehender Theorieansätze zum Begabungsbegriff bekräftigte meine diesbezüglichen theoretischen Ausgangspositionen. Infolge der Weiterentwicklung verschiedener Theorieansätze zu Begabungsmodellen und einer hiermit eingehenden stetigen Auseinandersetzung mit eigenen Positionen wurde in einer gemeinsamen Diskussion mit Käpnick auch sein bisheriges Merkmalssystem (vgl. Käpnick 1998) überarbeitet. Forschungsmethodologische

Basis hierfür war die klassische Variante der Modellbildung aus den quantifizierenden Sozialwissenschaften, wonach Modellbildung als Ausgangspunkt bekannte theoretische Wissensbestände und empirische Ergebnisse berücksichtigt, hiervon ausgehend Hypothesen ableitet und diese in operationalisierter Form an empirischen Zusammenhängen überprüft (vgl. Flick u. a. 1995, S. 150f.).

Inhaltliche Hauptaspekte der gemeinsamen Weiterentwicklung waren:

- eine stärkere Berücksichtigung des Ansatzes von Gagné (2000), der in Übereinstimmung mit unseren Überzeugungen in seinem Modell den generellen Prozesscharakter von Begabungsentwicklung betont,
- eine Einrahmung unseres Modells durch fördernde und typprägende intrapersonale und interpersonale Katalysatoren, die in Modellen von Renzulli (1993, 2003), Mönks (1992) oder in Untersuchungen von Betts & Kercher (1999), Winner (1998) u. a. deutlich herausgestellt wurden,
- eine größere Beachtung der individuellen Entwicklung eines mathematisch begabten Kindes, die sich als eine Konsequenz aus unseren empirischen Studien, aus Fallstudien von Nolte (2004), Bardy, Hrzan, Mede (1999), Peter-Koop & Sorger (2002), Ertel & Fritzlar (2004) und aus Studien von Winner (1998), Gardner (1994) u. a. ergab,
- neuere Erkenntnisse der Hirnforschung (vgl. z. B. Roth 2001, Winner 1998) und der Neuropsychologie (vgl. z. B. Dehaene 1999) zu vorgeburtlichen bzw. zu angeborenen physischen, psychischen und kognitiven Potenzialen und deren Bedeutung für die gesamte individuelle Entwicklung eines Menschen,
- jüngere mathematikdidaktische Untersuchungsergebnisse zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Kindergartenalter (vgl. z.B. Hasemann 2004, Caluori 2003) sowie
- Erkenntnisse der emotionalen Intelligenzforschung (vgl. z. B. Goleman 1999, 2000) und der Hirnforschung (vgl. z. B. Roth 2001) zur Bedeutung von Intuition, von Unbewusstem sowie von Emotionen beim Problemlösen.

Entsprechend dem Modell verstehen wir unter einer *mathematischen Begabung im Grundschulalter* im Kern *ein sich dynamisch entwickelndes und individuell geprägtes Potenzial. Dieses Potenzial weist bzgl. der von uns für wesentlich erachteten mathematikspezifischen Begabungsmerkmale und der sich hiermit in wechselseitigen Zusammenhängen entwickelnden begabungsstützenden bereichsspezifischen Persönlichkeitseigenschaften ein weit über dem Durchschnitt liegendes Niveau auf.* Das Begabungspotenzial ist einerseits z. T. angeboren bzw. erblich bedingt und andererseits das Ergebnis von günstigen intrapersonalen und interpersonalen Katalysatoren. Durch ein günstiges „Zusammenspiel" aller fördernden Katalysatoren *kann* sich eine sehr hohe mathematische Kompetenz zu einer weit überdurchschnittlichen mathematischen Performanz (Leistungsfähigkeit) weiterentwickeln.

Einige wesentliche Erläuterungen des Modells:

- Die im Kern aufgelisteten *mathematikspezifischen Begabungsmerkmale* hat Käpnick im Ergebnis seiner Habilitationsarbeit (vgl. Käpnick 1998) zusammengestellt. Nachfolgende Untersuchungen von Peter-Koop (2002), Fuchs (2006) u. a. bestätigen bisher prinzipiell diese Merkmalsmodellierung.
- Analoges gilt für die *begabungsstützenden Persönlichkeitseigenschaften*. Hierbei ist herauszustellen, dass diese individuell unterschiedlich ausgeprägten Eigenschaften ebenfalls bereichsspezifisch sind, d. h. sich vor allem auf mathematische Aktivitäten beziehen.
- Neuere Ergebnisse der Neuropsychologie und der Kognitionspsychologie bestätigen nachhaltig – in Übereinstimmung mit unseren bisherigen Fallstudien – die Hervorhebung mathematischer Sensibilität und mathematischer Fantasie als wesentliche bereichsspezifische Merkmale mathematisch begabter Grundschulkinder. Eine ausgeprägte *mathematische Sensibilität* zeigt sich bei begabten Grundschulkindern (im Unterschied zu weniger begabten Kindern) vor allem
  - in ihrer großen Faszination und in ihrem ausgeprägten Gefühl für Zahlen, Zahl- und Rechenbeziehungen sowie für geometrische Muster,
  - in intuitiven Phasen beim Problemlösen, die dem spontanen, offenen, teils sprunghaften, an intensiven Empfindungen und vielfältigen Bildwelten gebundenen Denken dieser Kinder entspricht.
- *Mathematische Fantasie* als den für uns wichtigsten Hauptaspekt kindlicher Kreativität entwickeln begabte Grundschulkinder immer wieder eindrucksvoll, wenn sie spielerisch, offen und ungehemmt mit mathematischen Inhalten umgehen.
- Die hier vorgenommene *Unterscheidung von Kompetenz und Performanz* entspricht dem von Stern entwickelten Kompetenzbegriff (vgl. Stern, 1998). Hiermit wird der in der Praxis immer wieder auftretenden Diskrepanz zwischen hoher Leistungspotenz und vergleichsweise geringerer „abrufbarer“ Leistungsfähigkeit bei Tests u. Ä. Rechnung getragen.
- Eine mathematische Begabung im Grundschulalter kann u. E. nur angenähert als besondere mathematische Leistungsfähigkeit durch spezielle Indikatoraufgaben oder/und durch komplexe prozessbegleitende Fallstudien diagnostiziert werden.

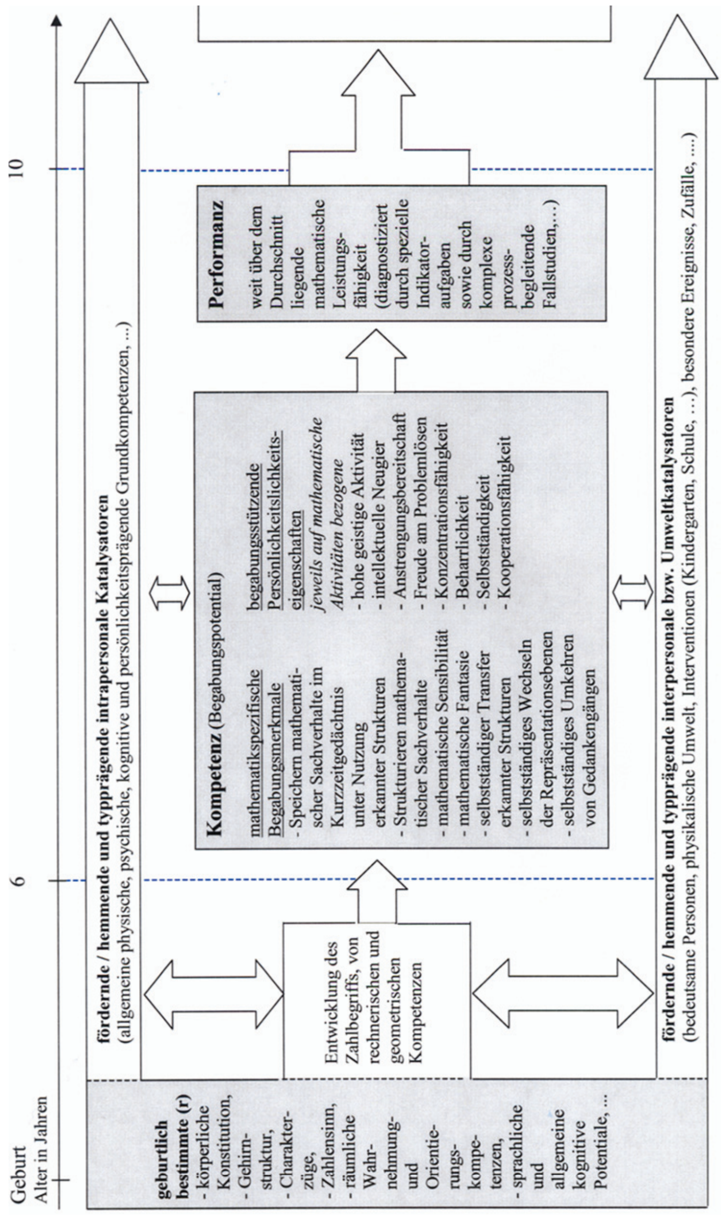


Abbildung 2: Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter nach Käpnick & Fuchs (aus: Fuchs 2006, S. 67)

- Die Berücksichtigung des *geburtlich bzw. genetisch bedingten Begabungspotenzials* als wesentliche Komponente unseres Begabungsmodells basiert auf jüngeren Ergebnissen der Hirnforschung bzw. der Neuropsychologie, nach denen vieles dafür spricht, dass Begabungen generell eine „starke genetische, hirnorganische Komponente“ haben (vgl. Winner 1998, S. 146). Roth stellt zudem heraus, dass bzgl. der für unsere ganzheitliche Sicht wichtigen Persönlichkeitsprägung „knapp die Hälfte“ der Charakterzüge eines Menschen „genetisch oder bereits vorgeburtlich bedingt“ sind (vgl. Roth 2001, S. 452). Er stellt außerdem die große Bedeutung der ersten Lebensjahre heraus, indem er einschätzt, dass „durch prägungsartige Vorgänge kurz nach der Geburt bzw. in den ersten 3 bis 5 Jahren“ wesentliche Persönlichkeitsmerkmale bestimmt werden (vgl. ebenda).
- Viele Fallstudien aus der Begabungsforschung belegen, dass sowohl *intrapersonale* als auch *interpersonale bzw. Umweltkatalysatoren* die Begabungsentwicklung eines Kindes maßgeblich beeinflussen (u.a. Renzulli 2003, Käpnick (1998). Einleuchtend und hinlänglich bekannt ist, dass allgemeine kognitive Fähigkeiten, wie Sprach- und Denkkompetenzen, und persönlichkeitsprägende Eigenschaften, wie Temperament oder das jeweilige Selbstkonzept eines Kindes, auch das mathematische Begabungsprofil mitbestimmen. In neueren Untersuchungen der Hirnforschung werden aber ebenso physische Besonderheiten im Zusammenhang mit Auffälligkeiten mathematischer Frühbegabung diskutiert. Wenn auch diesbezügliche Verallgemeinerungen (derzeit) wissenschaftlich nicht haltbar sind, können solche Zusammenhänge doch unbestritten wichtige Indizien beim Diagnostizieren einer speziellen Ausprägung mathematischer Frühbegabung sein.
- In Übereinstimmung mit Gagné (2000), Gardner (1994), Winner (1998) u. a. halten wir fördernde interpersonale bzw. Umweltkatalysatoren, wie z. B. eine anregende Erziehung im Elternhaus, das tägliche Erleben einer faszinierenden technischen Konstruktion oder die Möglichkeit der frühen Teilnahme an speziellen Förderprogrammen, für wichtige und notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Herausbildung einer mathematischen Begabung. Nicht selten sind es eher zufällige, aber für ein begabtes Kind faszinierende Erlebnisse, die seine Begabung sprunghaft fördern oder „*sie im Keim ersticken*“ (Winner 1998, S. 191) können.

Anzumerken ist schließlich, dass natürlich auch diese konstruktive Modellbildung nur eine (vorläufige) Vereinfachung der realen Komplexität darstellt und dass im theoretischen Konstrukt u. E. (nur) wesentliche Aspekte und Zusammenhänge mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter hervorgehoben werden. Das Modell hat somit eine Strukturierungs- und Orientierungsfunktion für die Einordnung von inhaltlichen Aspekten und Zusammenhängen zum Themenkomplex.

3.2 Zum Problemlösen

Problemlöseprozesse sind durch vielfältige Wechselbeziehungen zwischen Problemaufgabe und Problemlöser gekennzeichnet. Demgemäß gibt es verschiedenartige theoretische Modellierungen und Klassifizierungen, die sich auf die Art und die Qualität dieser Wechselbeziehungen beziehen. Auf der Basis gemeinsamer Diskussionen mit Käpnick zu diesem Themenkomplex können grob folgende Modellierungen von Problemlöseprozessen[8] unterschieden werden (Abb. 3):

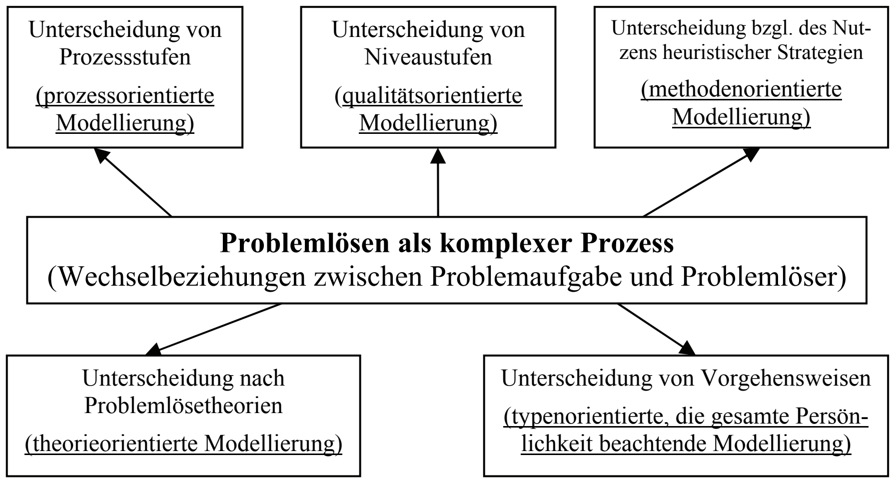


Abbildung 3: Modellierungen zum „Problemlösen als komplexer Prozess“
(nach Fuchs 2006, S. 73)

Prozessorientierte Modellierung: Unterscheidung von Prozessstufen

Produktive Problemlöseprozesse zu analysieren, zu beschreiben und zu erklären sowie Denkakte als Phasen verlaufsmäßig darzustellen, ist Anliegen verschiedener deskriptiver psychologischer Forschungsansätze. Das „Abbilden“ von Phasenverläufen ist je nach wissenschaftstheoretischem Standpunkt verschieden.

Als eine traditionelle „stoffdidaktisch“ orientierte Unterscheidung von Phasen beim Problemlösen kann z. B. das einschlägig bekannte Stufenmodell von Lompscher (1988) genannt werden:

---

8 Diese abstrakt-analytische Strukturierung von Ansätzen zum (mathematischen) Problemlösen aus interdisziplinärer komplexer Sichtweise stellt ebenso wie die zuvor weiter entwickelte Modellierung mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter einen eigenständigen theoretischen Erkenntnisgewinn der Arbeit dar.

- Bewusstwerden der Problemsituation,
- Problemanalyse und Bestimmung einer Problemfrage,
- Hypothesenbildung und Suche eines Lösungsweges,
- Finden einer oder mehrerer Lösungen,
- Kontrolle und Bewertung der Lösung(en) (vgl. Lompscher 1988, S.129).

Ein „lineares Abarbeiten“ dieser Stufen beim Problemlösen berücksichtigt m. E. aber nicht die mehrfach angesprochene ganzheitliche Sicht auf das Konstrukt „Begabung“ und den im „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ betonten Einfluss intrapersonaler und interpersonaler Katalysatoren.

Alternativ zu Lompscher entwickelte Goleman auf der Basis von Ergebnissen der Erforschung der emotionalen Intelligenz folgendes Phasenmodell:

1. *Vorbereitung*: Hierzu gehört das Vertiefen in ein Problem, das Sammeln und Analysieren von Informationen, eine Offenheit im Denken, wie z. B. Sammeln möglichst unterschiedlicher Daten, das Einnehmen verschiedener Sichtweisen oder das Entwickeln ungewöhnlicher Verknüpfungen, weiterhin eine Selbstzensur („*Die anderen werden denken, dass du verrückt bist.*“, „*Das ist viel zu einfach.*“), aber ebenso Frustration, qualvolle Kleinarbeit, Verzweiflung.
2. *Inkubationsphase*: Die Phase umfasst das „Verdauen“ aller bisheriger Analysen und Lösungsansätze, wobei viele dieser Vorgänge unbewusst ablaufen und das Problem nur von Zeit zu Zeit aus der geistigen „Dämmerzone“ in das „helle Licht der Aufmerksamkeit“ gerät. Dennoch sucht der menschliche Geist fortwährend nach einer Lösung. Das Unbewusste bedient sich dabei vielfältiger Bildwelten, der Sprache und intensiver Empfindungen. Eine neue Erkenntnis des Unbewussten äußert sich dann als eine vage Empfindung (Intuition).
3. *Zufallsgelenkte Tagträume*: Bei Entspannungen oder nebensächlichen Aktivitäten, wie etwa Spaziergängen, erwächst plötzlich eine gute Idee zur Problemlösung.
4. *Eingebung*: Vertiefungen von Tagträumen können zur Eingebung führen, zu dem Augenblick, da sich die Antwort aus dem Nichts einzustellen scheint. Zum kreativen Akt gehört aber auch, die Erkenntnis ins Handeln zu überführen, die Idee in die Wirklichkeit zu transponieren. (vgl. Goleman 1999 b, S. 17 ff.)

Übereinstimmend wird in den prozessorientierten Modellierungen[9] Problemlösen als Prozess aufgefasst und dieser zugleich in zeitlich aufeinander folgende Phasen strukturiert (vgl. Fuchs 2006, S. 73–81). Menschliches Denken verläuft jedoch nicht hauptsächlich in linearer Sequenzierung, sondern die ausgeprägteste Eigen-

[9] Weitere Modelle findet man in Fuchs (2006).

schaft des Denkens beruht auf der Simultanerscheinung. Beim Einsatz solcher Phasen- bzw. Stufenmodelle besteht demzufolge generell die Gefahr, dass stärker das Nacheinander und zu wenig der Gesamtprozess gesehen wird (vgl. Rasch, 2001). Dieser Gefahr wird vor allem im Stufenmodell von Goleman durch eine sehr komplexe Sicht auf den Problemlöseprozess begegnet. In diesem Modell werden auch emotionale Aspekte und besondere Persönlichkeitsqualitäten, wie Kreativität oder besondere intuitive Fähigkeiten des Problembearbeiters einbezogen, was sowohl in Übereinstimmung mit neueren neuropsychologischen Erkenntnissen zur Bedeutung des Unbewussten für Problemlöseprozesse wie auch zur Wertschätzung dieser Kompetenzen im Begabungsmodell von Käpnick & Fuchs (s. oben) steht.

Methodenorientierte Modellierung: Unterscheidung bzgl. des Nutzens heuristischer Strategien

Problemlösestrategien werden auch als Heurismen bezeichnet. Diese Heurismen können als Programme für die geistigen Abläufe bezeichnet werden, durch welche Probleme bestimmter Form evtl. gelöst werden können (vgl. Dörner 1979). Eine Heuristik wird in kognitionspsychologischer Literatur als Faustregel beschrieben, die häufig (aber nicht immer) zu einer Lösung führt (vgl. Anderson 1989, S. 193). Heurismen können zu einer Problemlösung eingesetzt werden, ohne eine Lösung zu garantieren. Die Gesamtheit der Problemlöseverfahren, über die ein Mensch verfügt, macht die Problemlösestruktur (heuristische Struktur) aus. Ein heuristisches Vorgehen ist unsystematischer und erfahrungsabhängiger als das Lösungsvorgehen nach einem Algorithmus (vgl. Rasch, 2001, S. 50).

Obwohl unterschiedliche Einordnungen von Lösungsstrategien in der Literatur existieren (vgl. Fuchs 2006, S.82–84), begegnet man in der Regel immer wieder den gleichen Gruppen allgemeiner heuristischer Strategien, wie:

- Mittel-Ziel-Analyse,
- Suchstrategien,
- Strategie des Generierens und Testens von Lösungen,
- Strategien zur Begrenzung des Suchbereichs,
- Strategien der Repräsentativität und Verfügbarkeit,
- Strategien des Vorwärts- und Rückwärtsplanens (vgl. Rasch, 2001, S. 52).

Solche heuristischen Strategien können aus didaktischer und lernpsychologischer Sicht wichtige Orientierungshilfen beim Problemlösen sein. Sie könnten etwa zum metakognitiven Wissen von Schülern gehören, weil sie spezielle Strategien des Problemlösens in den Vordergrund rücken. Diese vor allem stoff- und methodenorientierten Sichtweisen vernachlässigen aber andererseits emotionale und motivationale Aspekte des Problembearbeiters, welche gerade beim Problemlösen von Kindern als wichtig erscheinen. In allen diesen Modellierungen verliert aus meiner

Sicht die ganzheitliche Sichtweise, die zum einen die jeweilige Individualität des Problemlösers berücksichtigen und zum anderen auch Ergebnisse der Kreativitätsforschung mit einbeziehen sollte, an Bedeutung.

Theorieorientierte Modellierung: Unterscheidung nach Problemlösetheorien

Exemplarisch wurde in der Arbeit (vgl. Fuchs 2006, S.85-87) die theorieorientierte Modellierung von Edelmann (1996) vorgestellt. Er orientiert sich an verschiedenen Problemlösetheorien und unterscheidet fünf Formen des problemlösenden Denkens:

- Problemlösen durch Versuch und Irrtum,
- Problemlösen durch Umstrukturieren,
- Problemlösen durch Anwenden von Strategien,
- Problemlösen durch Kreativität,
- Problemlösen durch Systemdenken (vgl. Edelmann 1996, S. 211).

Die Problemlösetheorien nach Edelmann zeigen verschiedene Zugänge zum Modellieren des Problemlösens aus verschiedenen Wissenschaftsrichtungen. Zum Beispiel steht der Theorieansatz „*Problemlösen durch Anwenden von Strategien*“ im Zusammenhang mit der methodenorientierten Modellierung. Damit besteht zugleich die Gefahr, teilweiser „Überlappungen“ von theoretischen Positionen und Strukturierungsebenen. M. E. versucht Edelmann aber eine ganzheitlichere und offenere Sichtweise in seiner Klassifikation umzusetzen. Jeder einzelne Ansatz genügt zwar nicht der Komplexität des Problemlösens, aber alle Ansätze als Ganzes modellieren diese recht gut.

Qualitätsorientierte Modellierung: Unterscheidung von Niveaustufen

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik haben sich in den letzten Jahren u. a. Rasch und Steinweg mit diesem Modellierungsaspekt beschäftigt. Rasch (2001) untersuchte spezifische Lösungsstrategien von Grundschulkindern beim Bearbeiten von anspruchsvollen Textaufgaben (Problemaufgaben). Dabei stellte sie fest, dass die an der Untersuchung beteiligten Kinder heuristische Strategien auf unterschiedlichen Niveaustufen nutzten. Rasch definierte diese als „Probierstrategien in Verbindung mit der Nutzung mathematischer Zusammenhänge“ und identifizierte am Ende der Klassenstufe 4 fünf Niveaustufen.

Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses untersuchte Steinweg (2001) psychologische Voraussetzungen von Kindern für eine aktive Auseinandersetzung mit Zahlenmustern, die in diesem Kontext als Problemaufgaben angesehen werden können. Sie ging davon aus, dass die Reaktionen eines Kindes bei verschiedenen Aufgaben auf unterschiedlichen Niveaustufen gegeben werden. Jede erreichte bzw. gezeigte Stufe wies nicht nur auf bestimmte Fähigkeiten hin, sondern deutete auf ein umfassendes kognitives Potenzial und kennzeichnete einen qualitativen Fortschritt in der kognitiven Entwicklung eines Kindes, d. h. das Verständnis konnte in gleichzeitig oder nachträglich vollzogener Reflexion der Handlungen zum Erreichen der nächsten Stufe dienen.

Die Unterscheidung von Niveaustufen bei Problemlösungen ist hinsichtlich einer differenzierten Bewertung von Schülerleistungen generell sehr wichtig. Auf diese Weise könnten z. B. diverse Untersuchungsergebnisse von Vergleichsstudien u. U. relativiert werden, weil oft nicht gründlich erfasst wird, ob und in welcher Qualität Kinder die jeweilige mathematische Substanz wirklich „durchschaut“ haben. Es kann kritisch eingeschätzt werden, dass Rasch bzgl. der Qualität von Problemlösungen keine intuitiven Vorgehensweisen berücksichtigte, d. h. Unterbewusstsein, Gefühl für Zahlen und mathematische Sachverhalte sowie divergentes Denken spielten in ihren Untersuchungen keine Rolle. Der Einfluss von Persönlichkeitseigenschaften eines Kindes, von emotionalen und motivationalen Aspekten wurde von ihr ebenso nicht berücksichtigt, was m. E. keiner ganzheitlichen Sichtweise auf die Persönlichkeit des Kindes entspricht. Anders als bei Rasch beinhalten Steinwegs Stufen keine altersbezogene Qualitätsunterscheidung, sondern sie unterscheiden sich nach der Tiefe und der Bewusstheit des Verstehens einer Lösung. Diese Stufenfolge erscheint für die generelle Niveaueinschätzung von mathematischer Begabung als wichtig und bedeutungsvoll, gleichwohl als eine sehr anspruchsvolle forschungsmethodische Aufgabe und fraglich bleibt bei Steinwegs Modellierung die relative Geringschätzung intuitiver Problemlösungen.

Bisher gibt es zur qualitätsorientierten Modellierung noch keine weiteren grundlegenden mathematikdidaktischen Untersuchungen.[10] In Bezug auf die Entwicklung des mathematischen Verständnisses von Schulanfängern hat jedoch Hasemann anhand von Fallbeispielen überzeugend die Notwendigkeit einer differenzierteren Niveaueinschätzung mathematischer Leistungen aufgezeigt (vgl. Hasemann 2003, S. 31-40) und Bezold entwickelt ein Stufenmodell zu Argumentationskompetenzen für den Mathematikunterricht der Grundschule (Bezold 2009).

Typenorientierte, die gesamte Persönlichkeit beachtende Modellierung: Unterscheidung von Problemlösestilen

Hierzu zählt vor allem die noch gründlicher zu untersuchende, vorerst sehr grobe Kennzeichnung von *Ausprägungstypen für Vorgehensweisen mathematisch begabter Grundschulkinder* nach Käpnick (1998, S. 250–255). Dabei beschränkt er den Begriff „Vorgehensweise beim Problemlösen“ nicht auf kognitive Fähigkeiten,

[10] Die Festlegung der drei Anforderungsbereiche der Bildungsstandards können m. E. nicht als die hier gemeinten qualitätsorientierten Modellierungen angesehen werden, da sie sich nicht ausschließlich bzw. vordergründig auf das Problemlösen beschränken.

sondern berücksichtigt auch allgemeine Persönlichkeitseigenschaften.[11] Käpnick analysierte fünf Ausprägungstypen für *Vorgehensweisen* mathematisch begabter Grundschulkinder, die in der Arbeit (vgl. Fuchs 2006, S. 90–92) näher erläutert wurden:

- Vorgehensweise: „Hartnäckiges Probieren“,
- Vorgehensweise: „Abwechselndes Überlegen und Probieren“,
- Vorgehensweise: „Intuitives Vortasten“,
- Vorgehensweise: „Systematisches Vorgehen“,
- Vorgehensweise: „Wechseln der Repräsentationsebenen, bevorzugtes Arbeiten auf der enaktiven oder der ikonischen Ebene“ (vgl. ebenda).

Die Modellierung des Problemlöseprozesses nach vom Problemlöser abhängigen Vorgehensweisen entspricht einerseits meiner ganzheitlichen Sichtweise und spiegelt die Komplexität des Begabungsthemas wider, wie sie z. B. im „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ aufgezeigt wurde. Eine solche Darstellung der Wechselbeziehung zwischen Problemaufgabe und Problemlöser, die ebenso intuitive Aspekte (z. B. Zahlgefühl, mathematische Sensibilität u. a.) wie auch emotionale und motivationale Besonderheiten des jeweiligen Persönlichkeitstyps (Temperaments- und Persönlichkeitseigenschaften) sowie kognitive Fähigkeiten einschließt, kann m. E. deshalb als eine komplexe prozessorientierte, methodenorientierte und zugleich auch qualitätsorientierte Modellierung des Problemlöseprozesses bei Grundschulkindern angesehen werden. Eine komplexe Kennzeichnung von Vorgehensweisen beim Problemlösen lässt sich andererseits nicht einfach strukturieren und sie verlangt vom Beobachter eine sehr hohe Sach- und Methodenkompetenz sowie eine hohe Konzentration und Sensibilität. Diesbezüglich gibt es jedoch bisher noch ein großes Forschungsdefizit, so dass die vorliegenden Untersuchungen zu einer Erhellung beitragen können.

---

[11] Unter der *Vorgehensweise beim Problemlösen* verstehe ich in Anlehnung an Käpnick (1998, S. 250) hier die Art und Weise, wie ein Kind ein gegebenes Problem erfasst (Informationsaufnahme und Analyse des Problems), das Problem zu lösen versucht (Entwicklung von Lösungsansätzen und -strategien, bevorzugte Handlungsebenen beim Problemlösen, spezifischer Denk-, Lern- und Arbeitsstil beim Problembearbeiten), die Lösung der Problemaufgabe darstellt und wie es diese kontrolliert. Dabei beschränke ich die Vorgehensweise beim Problemlösen nicht auf kognitive Fähigkeiten, sondern berücksichtige auch allgemeine Persönlichkeitseigenschaften und emotionale Aspekte des Problemlösers.

4 Hauptergebnisse der empirischen Untersuchungen und vorläufiges Resümee

„Es ist schwieriger, ein Vorurteil zu zerstören, als ein Atom zu teilen.“ (A. Einstein)

Vorweg kann eingeschätzt werden, dass sich die eingesetzten quantitativen und qualitativen Untersuchungsmethoden für die Realisierung als gut geeignet herausstellten. Durch die Synthese der verschiedenen Methoden konnten – wie angenommen – einseitige Sichtweisen und Interpretationen sowie vorschnelle Verallgemeinerungen vermieden werden. Der Einsatz des statistisch auswertbaren Analyseprotokolls verlangte zwar vom jeweiligen Protokollanten eine äußerst gründliche Einweisung in die Begrifflichkeiten und qualitativen Einschätzungen des Analyserasters, er stützte jedoch wirksam die Ergebnisse der Einzelfallstudien und ermöglichte somit ein relativ komplexes „Bild“ vom Untersuchungsgegenstand. In diesem Zusammenhang erwies sich die organisatorische Rahmenstruktur des Braunschweiger Förderprojektes als sehr vorteilhaft. Gut bewährt hat sich auch der Einsatz von 15 Indikatoraufgaben, wobei lediglich zwei „Logikaufgaben“ sich aufgrund der inhaltlichen Struktur als eher weniger geeignet herausstellten.

Im Gesamtergebnis der angewendeten empirischen Untersuchungsmethoden kann entsprechend den Hauptzielen der Arbeit als *erstes* eingeschätzt werden, dass die durchgeführten Untersuchungen das konstruierte Modell spezifischer Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Grundschüler beim Problemlösen (vgl. Fuchs 2006, S. 105–107) prinzipiell stützen und zugleich eine Präzisierung der Kennzeichnung einzelner Merkmale eines jeden Typs ermöglichen.[12]

Zusammenfassend kann geschlussfolgert werden, dass

- der Problemlösetyp *Abwechselndes Überlegen und Probieren – Suchen nach Lösungsmustern* bei diesen Kindern am häufigsten auftritt,
- vergleichsweise eher seltener vermutlich die Typen *Systemhaftes Vorgehen* und *Hartnäckiges Probieren* vorkommen,
- das *Intuitive Vortasten* bei mathematisch begabten Grundschulkindern offenbar vielfach eine besondere Rolle spielt, wobei sich das Erfassen intuitiver Problemlösephasen als besonders schwierig heraus stellte,

[12] Die im Folgenden vorgenommene zusammenfassende Darstellung der empirischen Untersuchungsergebnisse umfasst tendenzielle Auffassungen zu spezifischen Problembearbeitungsstilen von mathematisch potenziell begabten Dritt- und Viertklässlern beim Problemlösen. Die getroffenen Einschätzungen haben primär explorativen und hypothesengenerierenden Charakter.

Allgemeine Problembearbeitungsaspekte					
Informationsaufnahme und -verarbeitung	**Bevorzugte Handlungsebene**	**Mathematische Sensibilität**	**Art und Weise der Lösungsdarstellung und -kontrolle**	**Allgemeine Persönlichkeits-eigenschaften**	**Emotionale Selbstregulation**
• Typ A: Problemlöser, der überwiegend probiert und eher selten mathematische Zusammenhänge entdeckt • Typ B: Problemlöser, der bewusst von Anfang an konsequent nach Lösungsmustern und Strukturen sucht und diese in Probierphasen überprüft • beide Typen können zum Teil: - verschiedene Lösungsansätze entwickeln, - sich an ähnliche Aufgaben erinnern, - die Reversibilität anwenden	• formal-symbolische Ebene • flexibles und selbstständiges Wechseln der Repräsentationsebenen	• sowohl stark als auch eher weniger ausgeprägtes Gefühl für Zahlen und mathematische Strukturen • besonders zu Beginn des Lösungsprozesses Erahnen mathematischer Zusammenhänge	• übersichtliche Darstellung von Lösungswegen und Lösungen • oft ordentlich, genau, gewissenhaft und gut organisiert • entweder hohes Maß an Gründlichkeit und besonders ausgeprägtes teilweise anerzogenes Kontrollbedürfnis • oder selten bereit, Lösungswege und Ergebnisse zu überprüfen	• hohe Anstrengungsbereitschaft, Konzentration und Ausdauer • Freude am Problemlösen • hohe geistige Aktivität und intellektuelle Neugier • Begeisterungsfähigkeit für mathematische Sachverhalte • sehr selbstständig	• Typ A: positives Selbstkonzept, ausgeglichenes Verhalten • Typ B: temperamentvolles und in Einzelfällen unausgeglichenes Verhalten, z. T. hohes Geltungsbedürfnis und Mittelpunktstreben, setzt sich teilweise unter Leistungsdruck

Abbildung 4: Problembearbeitungsstil: *Abwechselndes Überlegen und Probieren – Suche nach Lösungsmustern* (aus: Fuchs, 2006, S. 280)

- nicht alle Kinder nur einem Problemlösetyp zugeordnet werden können, weil sie verschiedene Vorgehensweisen beim Lösen von Problemaufgaben nutzen, sie bilden somit die Gruppe der *Mischtypen*,
- der Typ *Wechseln der Repräsentationsebenen, bevorzugtes Arbeiten auf der enaktiven oder der ikonischen Ebene* nicht identifiziert werden konnte.

Exemplarisch wird in Abbildung 4 der weitaus häufigste Problemlösestil *Abwechselndes Überlegen und probieren – Suchen nach Lösungsmustern* differenziert charakterisiert. (Eine analoge Kennzeichnung der anderen Problemlösestile findet man in Fuchs 2006, S. 280–282.)

Zweitens unterstützen die empirischen Untersuchungen innerhalb der durchgeführten Längsschnittstudien die Annahme, dass die bevorzugten Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler schon relativ konstant sind und sich innerhalb der Grundschulzeit teilweise sogar tendenziell verfestigen. Um dies zu verdeutlichen, werden im Folgenden drei Indikatoraufgaben „Würfeltrick", „Perlenschnuraufgabe" und „Teufelsaufgabe" vorgestellt und exemplarisch Lösungsbeispiele erläutert. Bei einigen Kindern stellen sich vermutlich auch „Übungseffekte" ein, die im Zusammenhang mit den im Förderprojekt regelmäßig durchgeführten Lösungsdiskussionen zu angewendeten Strategien stehen.

Indikatoraufgabe „Würfeltrick"

Diese Aufgabe wird den Kindern als Trick präsentiert. Die Schüler werden aufgefordert, einen Turm aus drei Spielwürfeln zu bauen. Anschließend behauptet der Leiter, mit nur einem Blick auf den Turm sagen zu können, wie groß die Summe aller sichtbaren Augenzahlen bei diesem Turm ist. Der Trick wird anschließend vorgeführt. Die konkrete Aufgabe lautet nun:

Erkläre den Trick. (Warum weiß man die Gesamtzahl der sichtbaren Augenzahlen?)

Tims Problembearbeitungsstil ist generell durch ein systemhaftes Vorgehen gekennzeichnet (exemplarisch in Abb. 5). Er erkennt sehr schnell wichtige mathematische Strukturen und bildet Superzeichen, hat dabei eine ganzheitliche Sicht auf das Problemfeld und sucht sachbetont und systematisch nach Ordnungsprinzipien.

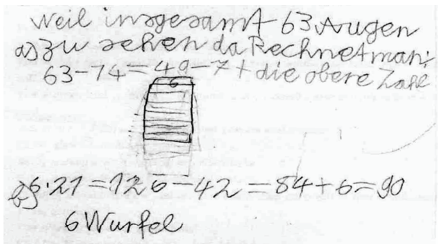


Abbildung 5: Tims Lösung des Würfeltricks

Indikatoraufgabe „Perlenschnurproblem“

Lisa fädelt eine Perlenschnur nach dem folgenden Muster auf:

Welche Farbe hat die 1000. Perle? Begründe.

Leon, der Problemaufgaben stets durch abwechselndes Überlegen und Probieren löst (vgl. Abb. 4 Typ B), konnte problemlos die Repräsentationsebenen wechseln und löste die Aufgabe auf der formal-symbolischen Ebene mithilfe einer erkannten Struktur (vgl. Abb. 6).

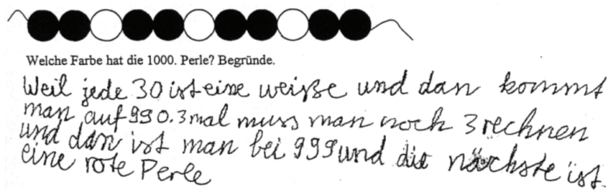


Abb. 6: Leons Lösung der Perlenschnuraufgabe

Vincent (vgl. Abb. 4 Typ A) orientiert sich beim Problemlösen häufig an der Art und Weise der Vorgabe des Ausgangsproblems und entdeckt eher zögernd mathematische Muster (vgl. Abb. 7).

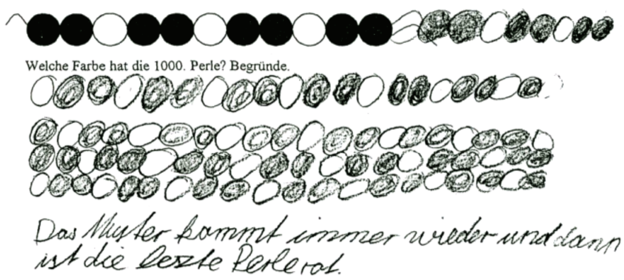
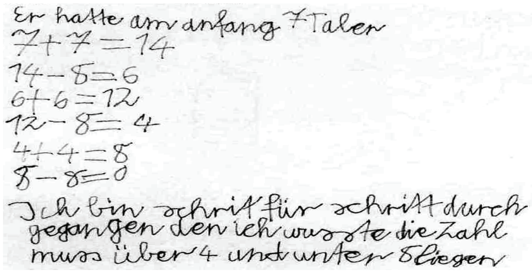


Abbildung 7: Vincents Lösung der Perlenschnuraufgabe

Indikatoraufgabe „Teufelsaufgabe“

Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln. Doch jedes Mal, wenn du zurückkommst, musst du für mich 8 Taler ins Wasser werfen.“ Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Taler mehr. Wie viele Taler hatte er am Anfang? Begründe.

Tim (Systemhaftes Vorgehen) zeigt bereits zu Beginn seiner Problembearbeitungen oft ein ausgeprägtes Gefühl für Zahlen und erahnt mathematische Sachverhalte. Er wusste bei dieser Aufgabe z.B. sofort, dass die Anzahl der Taler zwischen vier und acht liegen muss (vgl. Abb. 8). Danach überprüfte er dies systematisch.



Er hatte am anfang 7 Taler
7+7=14
14-8=6
6+6=12
12-8=4
4+4=8
8-8=0
Ich bin schritt für schritt durch gegangen den ich wusste die Zahl muss über 4 und unter 8 liegen

Abbildung 8: Tims Lösung der Teufelsaufgabe

Drittens konnten aufgabenbezogene Faktoren, die die Vorgehensweise beeinflussen bzw. die gelegentlich einen Wechsel bewirken, untersucht werden.

Beim Erforschen des Würfeltricks

- probierten mehr Kinder hartnäckig als bei den anderen Aufgaben,
- erinnerten sich vergleichsweise viele Kinder an ähnliche Aufgaben,
- wurde bevorzugt auf der enaktiven Ebene gearbeitet, da die angebotenen Spielwürfel genutzt wurden,
- waren die Kinder häufiger in der Lage Gedankengänge umzukehren,
- wurde(n) vergleichsweise mehr eigenes Zusatzwissen eingebracht und Anschlussprobleme gefunden.

Außerdem regte der Würfeltrick mehr als die anderen Aufgaben zur Zusammenarbeit zwischen den Kindern an.

Bei der Perlenschnuraufgabe

- suchten vergleichsweise viele Kinder von Anfang an nach einem bestimmten Lösungsmuster,
- gab es einen höheren Anteil der Kinder, die auf der ikonischen Ebene arbeiteten,
- waren die Kinder häufiger in der Lage Gedankengänge umzukehren.

Bei der Teufelsaufgabe

- lösten vergleichsweise mehr Kinder die Aufgabe durch abwechselndes Überlegen und Probieren als bei den anderen Aufgaben,

- arbeiteten die Kinder bevorzugt auf der formal-symbolischen Repräsentationsebene,
- wurde trotz der Möglichkeit die Reversibilität eher weniger angewendet, weil sie nicht ausdrücklich gefordert war,
- tasteten sich mehr Kinder gefühlsmäßig an eine Lösung heran als bei den anderen Aufgaben.

Daneben beeinflussen noch weitere Faktoren (z. B. die Tagesform des Probanden, Wettereinflüsse, der jeweilige Knobelpartner, andere Zufälligkeiten, ...) mitunter die Vorgehensweise eines Kindes beim Problemlösen. Diese konnten jedoch wegen zeitlicher, inhaltlicher und personeller Einschränkungen nicht detailliert innerhalb dieser Studie untersucht werden.

Viertens konnte das für die quantitativen Untersuchungen aufgestellte Analyseprotokoll (zum Erfassen von Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen) weiterentwickelt und präzisiert werden (vgl. Fuchs 2006, S. 285–289). Bei der Überarbeitung wurden

- häufig nicht einschätzbare Kriterien gestrichen,
- einzelne Kriterien präzisiert,
- vorhandene „Überlappungen" entfernt und
- die inhaltlich-logische Struktur des gesamten Protokolls überarbeitet.

Das auf diese Weise entwickelte Analyseprotokoll ist nach unseren Erfahrungen für weitere wissenschaftliche Forschungen ein praktikabel einsetzbares Diagnoseinstrument.

Aus den Untersuchungsergebnissen lassen sich zudem drei allgemeine Orientierungen für die Förderung dieser Kinder innerhalb des Schulunterrichts und in Förderprojekten begründen:

- ein prinzipielles Ermöglichen und Akzeptieren verschiedener Vorgehensweisen beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben als ein Aspekt der generellen individuellen Förderung von Kindern,
- ein konstruktives Nutzen der Verschiedenartigkeit von Problemlösestilen für ein wechselseitig bereicherndes Lernen aller Kinder (z.B. in Strategie- oder Auswertungsdiskussionen),
- ein notwendiges prozessorientiertes Diagnostizieren der subjektiv bevorzugten Problemlösestile, um Besonderheiten des Lernens jedes Kindes verstehen und dementsprechend individuell fördern zu können (vgl. Fuchs 2006, S.291-297).

Literatur

Anderson, J. R. (1989): Kognitive Psychologie: eine Einführung (2. Aufl.). – Heidelberg: Spektrum

Bardy, P.; Hrzan, J.; Mede, K. (1999): Mathematische Eigenproduktionen leistungsstarker Grundschulkinder. – In: Mathematische Unterrichtspraxis 20, H. 4. – S. 12–19

Becker, G. (1983): Fallstudien. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Heft 1. – S. 5–8

Betts, G. T.; Kercher, J. J. (1999): The autonomous learner model: Optimizing ability, Greely, CO: ALPS Publishing

Bezold, A. (2009): Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote – Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovac

Caluori, F. (2003): Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde. – Hamburg. Kovac

Cattel, R. B.; Weiss, R. (1972): Grundintelligenztest CFT 20. – Braunschweig: Westermann

Csikszentmihalyi, M. (1996): Creativity. – New York: Harper & Row

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. – Basel: Birkhäuser

Dörner, D. (1979): Problemlösen als Informationsverarbeitung. 2. Aufl. (1. Auflage 1976). – Stuttgart: W. Kohlhammer

Edelmann, W. (1996): Lernpsychologie. 5., vollst. überarb. Aufl. (1. Aufl. 1978) – Weinheim: Psychologie Verlags Union

Ertel, H.; Fritzlar, T. (2004): Überlegungen und erste Erfahrungen zur Förderung mathematisch interessierter Grundschüler – die „Matheasse“ in Jena. – In: Erziehung & Unterricht, 154, H. 3/4. S. 288–298

Flick, U.; von Kardorff, E.; Keupp, H.; von Rosenstiel, L.; Wolff, St. (1995): Handbuch Qualtitative Sozialforschung (2. Aufl.). – Weinheim: Beltz

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen – Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile; Reihe: Begabungsforschung – Schriftenreihe des ICBF Münster/Nijmegen; Bd. 4, Münster: LIT

Gagné, R. M. (2000): Understanding the Complex Choreogrphy of Talent Development Through DMGT-Based Analysis. In: Heller, K. A., Mönks, F. J., Sternberg, R.J., Subotnik, R.F.: International Handbook of Giftedness and Talent. 2nd Edition, Pergamon Press, S. 67–79

Gardner, H. (1994): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. – Stuttgart: Klett-Cotta

Goleman, D. (1999a): Emotionale Intelligenz. – München: dtv

Goleman, D.; Kaufman, P.; Ray, M. (1999b): Kreativität entdecken. – München: dtv

Goleman, D. (2000): EQ² - Der Erfolgsquotient. – München: dtv

Guilford, J. P. (1965): The structure of intellect. Psychological Bulletin, 53, S. 276–293

Hasemann, K. (2003): Anfangsunterricht Mathematik. – Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Spektrum Wissenschaftsverlag

Heller, K. A. (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. (2. überarbeitete und erweiterte Aufl.) – Göttingen: Hogrefe

Hüther, G.; Hauser, U. (2012): Jedes Kind ist hoch begabt – Die angeborenen Talente unserer Kinder und was wir aus ihnen machen. München: Knaus

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder: Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. – Frankfurt a. M., Berlin, Bern, New York, Paris, Wien : Lang

Kießwetter, K. (1984): Förderung mathematisch Hochbegabter. – In: Spektrum der Wissenschaft, S. 17–20

Krutetzki,W. A. (1976): The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. – Chicago: University of Chicago Press

Lompscher, J.(1988): Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit (3. Aufl.). – Berlin: Volk und Wissen

Mönks, F. J. (1992): Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. – in: Hany, E. A.; Nickel, H. (Hrsg.): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte, empirische Befunde, praktische Konsequenzen. – Bern u.a.: Hans Huber. – S. 17–22

Nolte, M. (Hrsg.) (2004): Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. – Berlin: Franzbecker

Peter-Koop, A.; Sorger, P. (Hrsg.) (2002): Mathematisch besonders begabte Grundschulkinder als schulische Herausforderung. – Offenburg: Mildenberger Verlag

Rasch, R. (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule – Eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert. – Hildesheim: Franzbecker

Renzulli, J. S. (1978): What makes giftedness? Reexamining a definition. – In: Phi Delta Kappan 60. – S. 180–184

Renzulli, J. S. (1993): Ein praktisches System zur Identifizierung hochbegabter und talentierter Schüler. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, Heft 40. – München: Reinhard, S. 217–224

Renzulli, J.S. (2003): Operation Houndstooth. Vortragsskript vom Kongress des ICBF „Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung- Begabungen fördern, Lernen individualisieren“ – Münster, 24.–27.09.2003

Roth, G. (2001): Fühlen, Denken, Handeln – Wie das Gehirn unser Verhalten steuert. – Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Rost, D. H. (2000): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. – Münster: Waxmann

Spearman, C. (1904): “General intelligence”, objectively determined and measured. American Journal of Psychology, 15, p. 201–293

Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung. – Münster: LIT

Stern, E. (1998): Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. - Berlin, Düsseldorf, Leipzig: Lengrich

Torrance, P. E. (1982): Hochbegabte Kinder identifizieren. – In: Hochbegabte Kinder (Hrsg. Von K. K. Urban). – Heidelberg: Schindele, S. 56–63

Winner, E. (1998): Hochbegabt – Mythen und Realitäten von außergewöhnlichen Kindern. – Stuttgart: Klett-Cotta

Anschrift der Verfasserin

Prof. Dr. Mandy Fuchs
Hochschule Neubrandenburg
Fachbereich Soziale Arbeit, Bildung und Erziehung
Brodaer Str. 2
17033 Neubrandenburg
fuchs@hs-nb.de

Eingang Manuskript: 13.12.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.02.2013
Online verfügbar: 04.03.2013