# ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern

von

**Daniela Aßmus, Halle an der Saale & Frank Förster, Braunschweig**

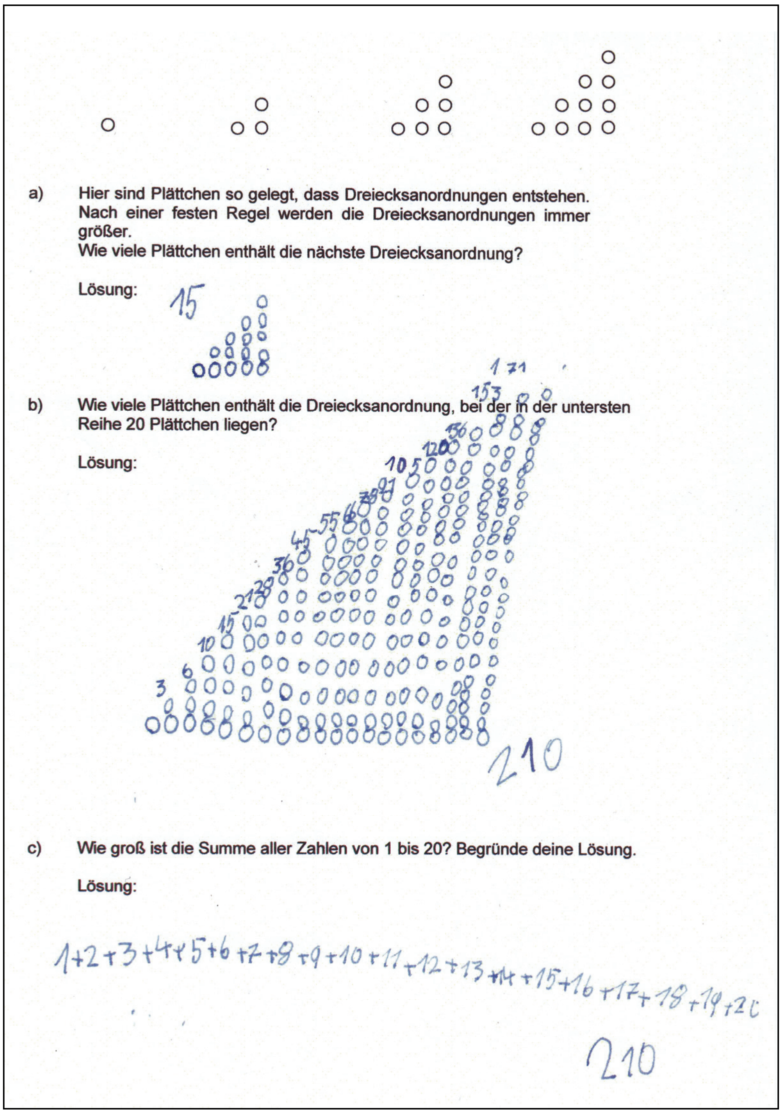
**Kurzfassung:** Der Artikel stellt erste Ergebnisse einer qualitativen Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern (ViStAD) vor. Anhand ausgewählter Problemlöseaufgaben fokussieren wir dabei auf die Fragestellungen, inwieweit die Fähigkeiten der Analogieerkennung und der Analogienutzung Merkmale mathematischer Begabungen sind und wie sich die von den Kindern gewählten Vorgehensweisen auf die Analogieerkennung auswirken.

**Abstract:** This article presents first results of the research project ViStAD which is a qualitative video survey about the analog thinking of mathematical gifted children of the third and fourth grade. With the help of selected tasks in problem solving the focus is on the questions in which extent the abilities in recognizing analogies and the using of analogies attributes of mathematical gift are and how the approaches used by the children have an impact on the recognizing of analogies.

## 1 Einleitung

### 1.1 Verortung

Die aktuelle Forschung lässt vermuten (vgl. Aßmus 2013, in diesem Heft), dass es mathematisch begabten Kindern leichter als „normal“ begabten Kindern gelingt, analoge Situationen bei vorgegebenem Zielbereich zu konstruieren und entsprechende Aufgaben des analogen Zuordnens zu lösen. Darüber hinaus erkennen sie leichter Analogien zwischen vorgegebenen mathematischen Situationen und nutzen diese z.B. zur Bearbeitung von leicht veränderten Aufgaben oder bei Aufgaben, in denen analoge Strukturen in anderen Repräsentationen zu erkennen sind. Andererseits zeigen auch in der Gruppe der potentiell mathematisch begabten Grundschulkinder nur relativ wenige diese Fähigkeiten (vgl. Käpnick 1998). Dies und die Tatsache, dass es bislang nur wenige empirische Untersuchungen zur Thematik gibt und diesen zudem meist quantitative Auswertungen von schriftlichen Produkten der Kinder zu Grunde liegen, wäre allein schon Grund, sich weiter mit der Thematik zu befassen. Es war aber auch ein ganz konkretes Diagnoseproblem, das uns zu unserer Untersuchung veranlasste und das wir mit dem folgenden Beispiel „Dreiecksaufgabe“ verdeutlichen möchten (s. Abb. 1).


a) Hier sind Plättchen so gelegt, dass Dreiecksanordnungen entstehen. Nach einer festen Regel werden die Dreiecksanordnungen immer größer.
Wie viele Plättchen enthält die nächste Dreiecksanordnung?

Lösung: 15

b) Wie viele Plättchen enthält die Dreiecksanordnung, bei der in der untersten Reihe 20 Plättchen liegen?

Lösung:

210

c) Wie groß ist die Summe aller Zahlen von 1 bis 20? Begründe deine Lösung.

Lösung:

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20

210

Abb. 1 Arbeitsblatt A.: Analogie erkannt? – Transfer vollzogen?

Aufgabenteil a) dient der Einführung in die Aufgabenstellung und der Überprüfung, ob die Schülerinnen und Schüler die Struktur der Figurenfolge erkannt haben und auf die unmittelbar anschließende Figur anwenden können. Die zueinander analogen Aufgabenteile b) und c) besitzen eine isomorphe Struktur und stellen analoge Repräsentationen der gleichen Aufgabe dar. Prinzipiell sind diese Teilaufgaben unabhängig voneinander lösbar, jedoch besteht bei Erkennen der Analogie die Möglichkeit, das Ergebnis aus b) ohne weitere Rechnung auf c) zu transferieren. Geht das Kind so vor, kann die Dreiecksaufgabe diagnostisch als Indikator für analoges Problemlösen genutzt werden und wird in diesem Sinne auch in Tests eingesetzt.

Betrachtet man das Arbeitsblatt der Schülerin A., so könnte man das große Dreieck in Aufgabenteil b) zunächst so deuten, dass die Schülerin hier gezeichnet und die Anzahl der Plättchen gezählt hat. Es zeigt sich aber, dass zum einen die Zwischensummen oberhalb der Spalten notiert sind (beginnend mit 3 und endend mit der Summe der ersten 18 natürlichen Zahlen 171) und zum anderen, dass die Anzahlen der gezeichneten Punkte in den Spalten zum Teil nicht mit den entsprechenden Punktanzahlen übereinstimmen, so dass ein Zählen der Punkte wohl nicht zu dem korrekten Ergebnis 210 geführt hätte. Bei Aufgabenteil c) steht wiederum nur die (vermutlich aus der Aufgabenstellung heraus extrahierte) Rechnung

„1 + 2 + … + 19 + 20“

und das Ergebnis „210“. Man könnte also davon ausgehen, dass hier nicht erneut gerechnet wurde.

Wenn nur dieses schriftliche Produkt vorläge, wäre man also geneigt, der Schülerin das Erkennen einer Analogie und einen Transfer der Aufgabenlösung zu attestieren.

Tatsächlich stammt diese Aufzeichnung nicht aus einem Diagnosetest zur Identifikation potentiell mathematisch begabter Kinder, sondern aus der hier vorgestellten Videostudie – genauer: A. ist eine „normalbegabte“ Schülerin aus der Vergleichsgruppe. So konnten wir analysieren, in welcher Zeit und Reihenfolge die Aufgaben bearbeitet wurden und hatten über die Methode des lauten Denkens während der Aufgabenbearbeitung eine zusätzliche Möglichkeit die Lösungsprozesse nachzuvollziehen. Es zeigte sich, dass A., obwohl sie tatsächlich in Aufgabenteil b) die Summe berechnet und nicht gezählt hat, trotzdem bei Aufgabenteil c) nochmals, und zwar diesmal im Kopf und ohne Notieren von Zwischenergebnissen, die gesamte Summe erneut berechnet hat.

Das schriftliche Produkt sagt offensichtlich zu wenig über die zugrundeliegenden kognitiven Prozesse aus. Andere, ähnliche schriftliche Aufzeichnungen und entsprechende Beobachtungen beim Problemlösen bestätigen, dass dies zumindest keinen Einzelfall darstellt.

Aus den hier dargestellten Gründen haben wir uns zur Durchführung einer qualitativen Untersuchung in Form einer Videostudie entschlossen.

### 1.2 Zielsetzungen der Untersuchung

Mit der hier referierten Videostudie versuchen wir insbesondere Antworten auf die folgenden beiden *Forschungsfragen* zu erhalten:

1. Inwieweit sind die Fähigkeiten der Analogieerkennung und der Analogienutzung bei Grundschulkindern Merkmale mathematischer Begabungen? Mit unserer Studie wollen wir hierbei zum einen die Bedingungen für Analogieerkennung und Transfer bei potentiell mathematisch begabten Kindern weiter herausarbeiten. Mit Käpnick (1998) gehen wir davon aus, dass „sich mathematisch potentiell begabte Dritt- und Viertkläßler deutlich von weniger begabten gleichaltrigen Kindern hinsichtlich des Erkennens struktureller Zusammenhänge, des Transfers erkannter Strukturen[1] und des Wechselns der Repräsentationsebenen unterscheiden, was sie schließlich vielfach befähigt, selbständig effektive Lösungsstrategien für komplexere mathematische Aufgaben zu entwickeln“ (Käpnick 1998, 193, s.a. 266). Ergänzend nehmen wir zum anderen Vergleichsuntersuchungen bei „normalbegabten“ Grundschulkindern vor. Wir konzentrieren uns hierbei auf die Felder analoges Problemlösen und analoges Verstehen (vgl. Aßmus 2013, in diesem Heft), wobei wir uns in diesem Artikel auf die Darstellung der Ergebnisse zum analogen Problemlösen beschränken.
2. Wie wirken sich die gewählten Vorgehensweisen auf die Analogieerkennung aus? Inwieweit bestimmt die von den Kindern in der Quellaufgabe gewählte Vorgehensweise die Analogieerkennung und auch somit einen möglichen Transfer auf die Zielaufgabe? Wir vermuten, dass solche Zusammenhänge existieren und wollen diese qualitativ beschreiben und wenn möglich auch quantitativ erfassen. Hierbei unternehmen wir auch den Versuch, die Stelle im Problemlöseprozess zu ermitteln, an der eine Analogieerkennung auftritt.

### 1.3 Methodisches Vorgehen

Abgeleitet von den Forschungsfragen haben wir uns für *Videoaufnahmen* eines strukturierten *Leitfadeninterviews* mit der Aufforderung zu *lautem Denken* (vgl. z.B. Ericsson/Simon 1993) entschieden. Die Interviews dokumentieren dabei Einzelarbeiten in Laborsituationen, um sicherzustellen, dass die Analogieerkennung nicht kooperativ mit anderen Kindern erfolgt.

---

[1] „Mathematische Strukturen“ umfassen nach Käpnick in diesem Kontext auch „Lösungsmuster für bestimmte Aufgabentypen und Strategien für gleichartige Problemfelder“ (Käpnick 1998, 113).

Die *Testgruppe* besteht aus Teilnehmern der Dritt- und Viertklässlergruppen der Mathematischen Lernwerkstatt Braunschweig (s. Hinweis im Literaturverzeichnis), die auf Grundlage eines diagnostischen Auswahltests und prozessbegleitender Diagnose während der Förderung in der Lernwerkstatt als potentiell mathematisch begabt eingestuft werden können. In der *Vergleichsgruppe* haben wir „gute" Dritt- und Viertklässler aus Wolfsburg beobachtet. Die Auswahl dieser Kinder stützte sich auf Lehrerbeurteilungen.

Es zeigte sich auf Grundlage der Interviews, dass drei Kinder der Vergleichsgruppe evtl. auch potentiell mathematisch begabt sein könnten. Wir haben mit diesen Kindern dann ebenfalls den Diagnosetest durchgeführt und konnten bestätigen, dass diese Kinder mit diesem Testergebnis ebenfalls für die Mathematische Lernwerkstatt ausgewählt worden wären. Hierdurch hatten wir eine Subgruppe von mathematisch begabten Kindern, bei denen keine Trainingseffekte durch die Lernwerkstatt zu erwarten sind.

Die *Aufgabenstellungen* für die Untersuchungen zum analogen Problemlösen sind so konzipiert, dass Quellaufgabe und Zielaufgabe zwar unabhängig lösbar sind, aber das Ergebnis der Quellaufgabe auf die Zielaufgabe übertragbar ist.

Hierbei ist berücksichtigt, dass sich analoges Problemlösen ohne Vorgabe eines geeigneten Quellproblems in Laborsituationen nicht gezielt erfassen lässt, sondern bestenfalls zufällig beobachtet werden kann. Weiterhin ist zu beachten, dass gerade mathematisch begabten Kindern Verfahren zur Bearbeitung der Zielaufgabe zur Verfügung stehen können, die eine Suche nach einem geeigneten Quellproblem obsolet werden lassen, da die Zielaufgabe von den Probanden subjektiv nicht als Problem eingeschätzt wird. Demzufolge müsste die Schwierigkeit des Zielproblems eigentlich so gewählt sein, dass nahezu kein Proband eigenständig über ein Bearbeitungsverfahren verfügt. In der Regel sind Grundschulkindern dann aber auch keine Verfahren zur Lösung eines analogen Quellproblems bekannt, sodass dessen vorherige Bearbeitung soweit unterweisend begleitet werden müsste, bis der Proband den Lösungsweg verstanden hätte. Am Zielproblem könnte dann überprüft werden, ob der Proband die Analogie der Aufgabenstellungen erkannt hat und das vorab erworbene Wissen auf die neue Aufgabenstellung anwenden kann. In dieser Art wurden – meist mit verschiedenen Experimentalgruppen, bei denen die Vorgaben zum Quellproblem zur Kontrolle von Einflussfaktoren systematisch variiert wurden – etliche Studien in der Transferforschung durchgeführt (eine Übersicht gibt z.B. Klauer 2011). Da es uns in der Videostudie jedoch nicht um die Erhebung von Lerneffekten ging, haben wir uns zu dem hier beschriebenen Vorgehen entschlossen.

Um Vergleichbarkeit zu ermöglichen, haben wir mit der in der Einleitung vorgestellten Dreiecksaufgabe zu figurierten Zahlen eine sehr ähnliche Aufgabenstellung wie Käpnick (1998) verwendet. Diese Aufgabe wurde zusätzlich von den Kindern der Vergleichsgruppe bearbeitet. Weiterhin wurden eine komplexere Aufgabe zu figurierten Zahlen („Rechtecksaufgabe“) und eine kombinatorische Fragestellung eingesetzt, die in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden. Noch in Auswertung begriffen ist eine weitere Aufgabenstellung zu analogem Verstehen.

Der *Interviewleitfaden* sah dabei das folgende Vorgehen vor, welches berücksichtigt, dass unsere Studie insbesondere der Analogieerkennung und nicht, wie die meisten anderen Untersuchungen, nur der Analogienutzung dient.

Die Aufgabe wird gemeinsam mit dem Kind gelesen und ggf. werden Verständnisschwierigkeiten bei relevanten Begriffen wie z.B. „Dreiecksanordnung“ oder „Summe“ geklärt. In der eigentlichen Bearbeitungsphase findet, ggf. abgesehen von weiteren Aufforderungen zu lautem Denken, keine Intervention seitens des Interviewers statt. Erst wenn das Kind die Bearbeitung abgeschlossen hat, wobei es keine zeitliche Begrenzung gibt, wird es zu den Aufgaben befragt: „Vergleiche die Aufgaben. Welche fandest du schwieriger? Warum? Wie bist du vorgegangen? …“ Für den Fall, dass keine selbstständige Analogieerkennung stattgefunden hat oder diese bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht verbalisiert wurde (s.u.), wurden gestufte „Hilfsfragen“ vereinbart („Schau dir die Ergebnisse der Aufgaben noch mal an. Wieso kommt das Gleiche heraus? …“), um zu erkunden, ob zumindest eine Analogieerkennung unter Anleitung erfolgt. Die Länge der Interviews lag zwischen 10 und 30 Minuten bei den arithmetischen und bis zu 45 Minuten bei den kombinatorischen Fragestellungen.

Während der Durchführung stellte sich heraus, dass es bei der Vergleichsgruppe teilweise notwendig war, bei der Quellaufgabe Hilfestellungen zu geben. Weiterhin wurde nach den ersten Erfahrungen mit der Kombinatorikaufgabe (nur von der Testgruppe bearbeitet) vereinbart, dass bei der Quellaufgabe solange Kontrollaufforderungen erfolgen sollten, bis das richtige Ergebnis vorlag.

Die *Auswertung der Interviews* erfolgte auf Grundlage von Verlaufsprotokollen mit ausführlichen Transkriptauszügen, die ausgehend von den Videos und den schriftlichen Aufgabenbearbeitungen erstellt wurden, als Turn-by-Turn-Analyse (vgl. z.B. Krummheuer/Naujok 1999, 70). Neben den in Aßmus (2013, in diesem Heft) aufgeführten Theorien zu Analogieerkennung und Transfer gehen wir methodologisch davon aus, dass die Ursachen und Gründe des Schülerhandelns nicht beobachtbar sind, sondern interpretativ rekonstruiert werden müssen (Interpretatives Paradigma, Wilson 1973). Direkt beobachtbar ist (unter gewissen Umständen) der Transfer des Aufgabenergebnisses, aber in der Regel nicht die vorhergehende Analogieerkennung während der Bearbeitungsphase, wenn die Kinder diese nicht von sich aus verbalisieren. Die Rekonstruktion der Stelle im Problemlöseprozess, an der die Analogieerkennung erfolgte, ist ein *Ziel der Interpretation*. Wenn kein beobachtbarer Transfer vollzogen wurde, stellt sich zusätzlich die Frage, ob überhaupt eine selbstständige Analogieerkennung vorliegt.

Eine Verbalisierung wurde dann als Analogieerkennung eingeschätzt, wenn die Kinder die für die Analogie kennzeichnenden Ähnlichkeiten der Aufgaben benannten und eine Zuordnung der einander zugehörigen Einzelelemente vornehmen konnten. Möglicherweise findet die eigentliche Analogieerkennung jedoch von außen nicht sichtbar zu einem früheren Zeitpunkt statt. Auch ist nicht auszuschließen, dass einzelne Kinder, in deren Äußerungen auch auf Nachfragen keine Ansätze zur Analogieerkennung deutlich wurden, während des Lösungsprozesses dennoch Ähnlichkeiten der Aufgaben bemerkten. Überwiegend basieren unsere Ergebnisse also auf Interpretation von mündlichen und schriftlichen Äußerungen, ergänzt durch die Interpretation von Handlungen, sofern diese klar erkennbar waren.

Auf Grundlage dieser qualitativen Rekonstruktionen haben wir an einigen Stellen auch zusammenfassende quantitative Zuordnungen erstellt, weswegen wir zur Einordnung dieser quantitativen Befunde in Tabelle 1die Teilnehmerzahlen angeben.

| **Bereits ausgewertete Aufgaben** | **N** | **Klasse 3** | **Klasse 4** | **m** | **w** |
|---|---|---|---|---|---|
| Dreieckszahlen (Testgruppe) | 15* | 8 | 7* | 10 | 5 |
| Rechteckszahlen | 9 | 2 | 7 | 7 | 2 |
| Kombinatorikaufgabe | 11 | 2 | 9 | 8 | 3 |
| Dreieckszahlen (Vergleichsgruppe) | 6 | 4 | 2 | 4 | 2 |

(* „Subgruppe“: 3 Teilnehmer aus Wolfsburger GS-Klasse, s.o.)

Tabelle 1: Teilnehmerzahlen

## 2 Zu den Aufgabenstellungen

### 2.1 Dreiecksaufgabe

Die Dreiecksaufgabe ist bereits in Kap. 1.1 vorgestellt worden (s. Abb. 1) und lässt sich, mit den in Kap. 1.3 erwähnten Einschränkungen, dem *analogen Problemlösen* zuordnen.

#### 2.1.1 Beobachtungen

In der Gruppe der potentiell mathematisch begabten Kinder war bei der Mehrheit (12 von 15 Kindern) eine eigenständige Analogierkennung zu beobachten. Diese Kinder nutzten die erkannte Analogie darüber hinaus in Abhängigkeit von dem Zeitpunkt der Analogieerkennung zur Generierung des Ergebnisses der Zielaufgabe oder zur Validierung der ermittelten Ergebnisse. 9 Kinder (darunter die 3 Kinder der „Subgruppe“) verbalisierten die Ähnlichkeiten der Aufgaben vor oder bei Bearbeitung der Zielaufgabe und lösten diese anschließend durch einen Transfer des Ergebnisses aus der Quellaufgabe. Die anderen 3 Kinder erkannten die Analogie nach der Bearbeitung beider Aufgaben, sodass ein Transfer nicht mehr möglich war. Möglicherweise nutzten sie die Analogie jedoch zur Absicherung der Ergebnisse.

Als analogieinduzierende Relation könnte dabei zum einen die Summandengleichheit in der Rechnung der Quell- bzw. Zielaufgabe, zum anderen die Beziehung zwischen den Anzahlen der angrenzenden Punktereihen (immer ein Punkt mehr bzw. weniger) und entsprechend die Beziehungen zwischen den Summanden der Zielaufgabe (die Zahlen vergrößern bzw. verkleinern sich um 1) ausschlaggebend gewesen sein.

Belege für die Summandengleichheit als analogieinduzierende Relation lassen sich in einigen Äußerungen der Kinder finden. So begründeten Kinder die Analogie der Aufgabe damit, dass beide Aufgaben die gleichen Zahlen enthalten. Die eher relationale Sichtweise auf die (An-)Zahlen bildet sich ebenfalls in einigen Aussagen der Kinder ab, zum Beispiel:

> *Also, weil man hier ja immer einen weniger dazu tut* (Dreieck) *und hier auch* (Summe).

Zudem waren auch Mischformen beider Sichtweisen erkennbar. So wechselte beispielsweise ein Kind während der Begründung von einer relationalen Begründung zur Summandengleichheit:

> *Weil hier ja auch immer einer weniger wird* (Dreieck) *und weil ich ja hier auch* (zeigt auf ihre notierte Rechnung zu b), *da sind ja die gleichen Zahlen, die auch hier* (zeigt auf c) *gefragt sind.*

Für diejenigen Kinder, die das Ergebnis aus der Quellaufgabe auf die Zielaufgabe transferierten, lassen sich verschiedene Stellen der Analogieerkennung im Lösungsprozess ausmachen. Diese reichen vom anfänglichen Durchlesen des Aufgabentextes bis hin zur Analogieerkennung während der Bearbeitung der Zielaufgabe.

Der Schüler J. notierte z.B. unmittelbar nach Bearbeitung der Quellaufgabe die Lösung der Zielaufgabe und gab an, er habe bereits beim Durchlesen bemerkt, dass bei beiden Aufgaben das gleiche Ergebnis herauskäme. Ein Kind bearbeitete zunächst die Einstiegsaufgabe a) und sagte vor der Bearbeitung der Quellaufgabe:

> *Also, das* (zeigt auf die Zielaufgabe) *ist die gleiche Lösung.*

Zwei Kinder stellten während der Bearbeitung der Quellaufgabe Bezüge zur Zielaufgabe her, so die Schülerin A.:

> *Wenn ich das alles zusammenrechne, habe ich auch gleich die dritte Aufgabe.*

Drei Kinder äußerten unmittelbar vor Bearbeitung der Zielaufgabe nach abgeschlossener Ergebnisfindung bei der Quellaufgabe, dass die Ergebnisse gleich sein müssen, wie z.B. der Schüler K.:

> *Das müsste jetzt eigentlich das Gleiche ergeben, weil es das Gleiche wie da* (zeigt auf b) *ist.*

Ein Kind verbalisierte die Analogieerkennung während der Bearbeitung der Zielaufgabe: Es begann zunächst mit der Bearbeitung, indem es die Zahlen von 1 bis 5 summierte, brach die Summenbildung ab und erklärte:

> *Das würde dann auch so'n Dreieck sein. Das würde sozusagen dieses Dreieck sein* (zeigt auf Zeichnung in b), *weil hier oben es ja mit 1 anfängt, dann 2 und so weiter wieder. Dann muss es 200 sein, auch genau.*

Ein weiteres Kind bearbeitete zunächst die Zielaufgabe und erkannte die Analogie, nachdem es für die ersten Figuren überprüft hatte, dass die Anzahl der Punkte mit der jeweilig korrespondierenden Summe übereinstimmte.

Bei den drei übrigen Kindern waren gezielte Nachfragen notwendig, um Aussagen zur Analogie der beiden Aufgaben zu provozieren. Während ein Kind bereits auf die Frage „Haben die Aufgaben denn etwas gemeinsam?" analoge Strukturen der Aufgabenstellungen erläuterte, benötigten die anderen beiden Kinder wiederholte Hilfsfragen, bevor sie Vermutungen zur Analogie anstellten. Es ist daher anzunehmen, dass diese beiden Kinder ohne entsprechende Hilfestellungen keine Analogieerkennung gezeigt hätten.

Im Gegensatz zu den potentiell mathematisch begabten Kindern war bei den 7 Vergleichsgruppenkindern keine eigenständige Analogieerkennung zu beobachten, obwohl immerhin 5 Kinder geeignete Strukturen der Aufgabe erkennen und für die Bearbeitung nutzen konnten. So waren bei allen Kindern gezielte Nachfragen notwendig, um Aussagen zu Ähnlichkeiten der Aufgaben zu erhalten. Bei 3 Kindern fanden entsprechende Äußerungen nach einmaliger Nachfrage, bei zwei weiteren nach wiederholter Nachfrage bzw. teils erheblichen Hilfestellungen statt. Die übrigen beiden zeigten gar keine Analogieerkennung.

Beide hatten jedoch bereits bei der Quellaufgabe große Probleme, einen eigenständigen Lösungsansatz zu finden und dann bei Wahl eines zeichnerischen Verfahrens die Zeichnung des 20. Dreiecks so zu strukturieren, dass die Lösungsfigur hinsichtlich Anzahl und Lage der Punkte innerhalb der einzelnen Reihen mit der Zielfigur übereinstimmte. Sie benötigten zahlreiche Hilfestellungen, um zu einem Ergebnis zu gelangen. Es ist anzunehmen, dass die Schwierigkeiten auf eine nicht ausreichende Strukturerkennung des Aufbaus einer Dreiecksfigur bzw. der Figurenfolge zurückzuführen sind.

Insgesamt zeigen sich für die hier betrachtete Stichprobe große Unterschiede zwischen den beiden Versuchsgruppen. Während fast alle potentiell begabten Kinder die Analogie der Aufgaben eigenständig erkannten, wurde dies bei keinem der Kinder der Vergleichsgruppe deutlich. Die Ergebnisse der Videostudie stärken und erweitern damit die Untersuchungsergebnisse von Käpnick (1998): Der große Leistungsunterschied zwischen potentiell begabten Kindern und Vergleichsgruppenkindern bildet sich nicht nur im schriftlichen Produkt, wie es bei Käpnick als Auswertungsgrundlage verwendet wurde, sondern auch im Arbeitsprozess selbst ab. Da die Interviewsituation die Klärung von Verständnisfragen zuließ, sind zudem die Unterschiede zwischen den beiden Gruppen vermutlich nicht auf fehlerhafte Verständnisse der Aufgabenstellung in der Vergleichsgruppe, sondern auf die mathematikspezifischen Kompetenzen der Probanden zurückführen.

Bei Analyse der *Vorgehensweisen* zeigten sich in der Gruppe der mathematisch begabten Kinder Auffälligkeiten, die auf einen Zusammenhang zwischen Vorgehensweise und Analogieerkennung hindeuten.

13 der 15 Kinder wählten Vorgehensweisen, die auf Summenbildung aufeinander folgender Zahlen basierten, d.h. sie summierten schrittweise die Zahlen von 1 bis 20 beginnend bei 1 oder umgekehrt beginnend bei 20 bzw. fassten die Summanden durch Komplementärsummenbildung im Sinne Gauss‘ teilweise oder vollständig zusammen. Zwei dieser Kinder fertigten zusätzlich vor der Berechnung zunächst eine Zeichnung an, weitere fünf begannen zu zeichnen, brachen dies jedoch zugunsten einer rechnerischen Lösungsfindung ab.

Lediglich die beiden Kinder, die die Analogie erst nach wiederholten Hilfsfragen erkannten, hatten die Quellaufgabe jeweils mit Hilfe eines anderen Verfahrens bearbeitet. Beide (recht kreative) Verfahren beinhalten eine deutliche Strukturierung der Aufgabe, die bei korrekter Anwendung eine zeitsparende Lösungsfindung ermöglicht hätte. Die Strukturierungen ließen jedoch die analogieinduzierenden Strukturen in den Hintergrund treten, sodass das Erkennen gemeinsamer Strukturen beider Aufgaben erschwert wurde. Fehlerhafte Übergeneralisierungen und kleine Fehler in der Umsetzung schafften weitere Probleme:

So versuchte ein Kind die Anzahl der Punkte der 20. Dreieckszahl zu bestimmen, indem es diese zunächst zeichnete und danach die Dreiecksfläche gedanklich mit den kleineren Dreiecken der 5. Dreieckszahl auslegte, um ausgehend von der Anzahl der Punkte der 5. Figur (15) durch Hochrechnung die gewünschte Zahl zu ermitteln (s. Abb. 2 links). Grundlegend hierfür war die Idee, die 20. Figur als Vielfaches der 5. Figur darzustellen, wobei das Kind jedoch nicht – wie bei ähnlichen Aufgaben häufig beobachtbar – fehlerhafterweise ein proportionales Wachstum der Figuren voraussetzte. Dieses bei Flächenberechnungen sinnvoll anwendbare Vorgehen führt bei den hier betrachteten diskreten Mengen zu keinem korrekten Ergebnis.

Das andere Kind trennte gedanklich zunächst die untere und die rechts liegende äußere Reihe des Dreiecks ab und ergänzte die übrige Dreiecksfigur zu einem Rechteck, berechnete die Anzahl der Punkte durch Multiplikation der Zahlen 19 und 18, halbierte das Produkt und rechnete anschließend die äußere, zuvor abgetrennte Punktereihe des Dreiecks hinzu, wobei allerdings ein Punkt doppelt gezählt wurde (s. Abb. 2 rechts), sodass das Ergebnis um 1 von der korrekten Lösung abwich. Beide Kinder strukturierten die 20. Dreieckszahl also zumindest teilweise geometrisch bzw. wählten geometrisch-bildliche Repräsentationen.

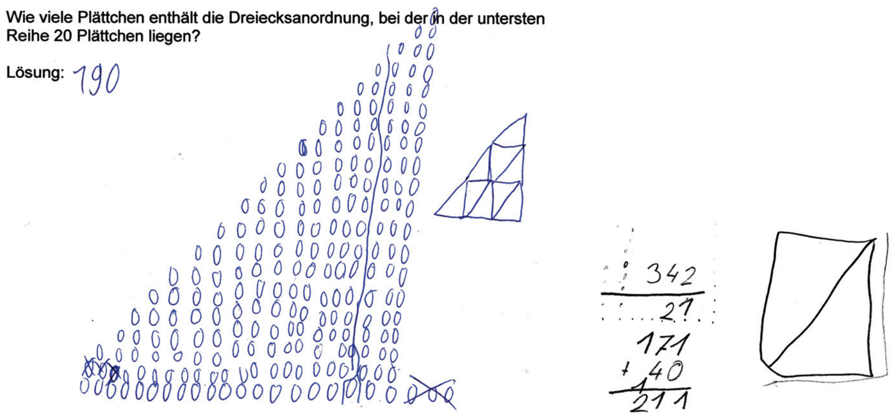



Abb. 2: Nicht auf Summenbildung basierende Schülerlösungen zur Quellaufgabe

Diese Beobachtungen stützen die Annahme, dass die Analogieerkennung zwischen b) und c) begünstigt wird, wenn bereits Aufgabe b) über ein Verfahren bearbeitet wird, das auf der Summenbildung aufeinander folgender Zahlen fußt.

Die Analysen der Interviews der Vergleichsgruppe ergaben jedoch, dass zusätzlich zur Strukturierung über die Summenbildung deren variable Nutzung für eine Analogieerkennung notwendig war, da auch diese Kinder mehrheitlich auf die Summenbildung zurückgriffen, ohne dass daraus eine eigenständige Analogieerkennung resultierte. Bspw. wurde die Summengleichheit zwischen Rechnungen, die in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt wurden, trotz Verwendung identischer Zahlen nicht erkannt.

Die hier angeführten Erklärungsansätze für die Unterschiede zwischen den beiden Gruppen stehen im Einklang mit den Überlegungen Bauersfelds zur Besonderheit der Subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB) Hochbegabter, nach denen Hochbegabte durch eine besondere Sensibilität mehr und reichhaltigere SEB ausbilden, diese leichter aktivieren und schneller zwischen verschiedenen SEB wechseln können (Bauersfeld 2001). So verbalisierten die Kinder beider Versuchsgruppen zwar teilweise identische Strukturen, möglicherweise waren diese jedoch in unterschiedlich reichhaltige SEB eingebettet, so dass den mathematisch begabten Kindern eine variable Nutzung und damit eine Analogieerkennung möglich war, den „normal“ begabten Kindern jedoch nicht.

Für die potentiell mathematisch begabten Kinder der Versuchsgruppe lässt sich also ein *Zusammenhang zwischen Vorgehensweise und Analogieerkennung* nachweisen. Für die Vergleichsgruppe sind keine diesbezüglichen Aussagen möglich, da eine eigenständige Analogieerkennung nicht beobachtet werden konnte. Allgemein lässt sich festhalten, dass die Analogieerkennung begünstigt wird, wenn Strukturen erkannt werden, die auf analogieinduzierenden Relationen basieren. Wird keine Analogie erkannt, bedeutet das jedoch umgekehrt nicht, dass auch keine Strukturerkennung stattgefunden hat.

## 2.2 Rechtecksaufgabe

Da sich bereits zu Beginn der Studie bei den Dreieckszahlen ein sehr hoher Anteil von Analogieerkennungen in der Gruppe der potentiell begabten Kinder abzeichnete, wurde die Rechtecksaufgabe als strukturell ähnliche, aber etwas komplexere Aufgabenstellung eingesetzt.

### 2.2.1 Aufgabenstellung

a) Hier [Abb. 3 links] wurden aus Plättchen Figuren gelegt, die wie Rechtecke aussehen. Nach einer festen Regel werden die Rechtecke immer größer. Wie viele Plättchen enthält das nächste Rechteck?

b) Wie viele Plättchen enthält das Rechteck, bei dem in der untersten Reihe 20 Plättchen liegen?

c) Welche Zahl erhält man, wenn man die 20 ersten geraden Zahlen (2 + 4 + 6 + … + 38 + 40) zusammenrechnet? Begründe deine Lösung.

Analogieinduzierende Relation ist hier die Summation der Plättchenanzahlen „2 + 4 + 6 + 8 + …“, wie sie in Abb. 3 (rechts) als „Hakenstruktur“ dargestellt ist.

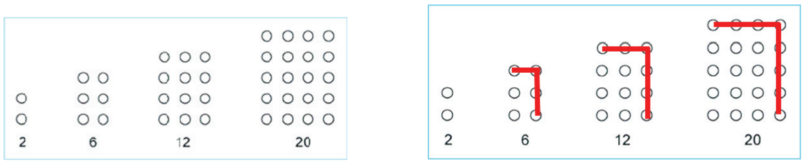



Abb. 3: Rechtecksaufgabe: Figuren und analogieinduzierende Relation („Hakenstruktur“)

### 2.2.2 Beobachtungen

Da die Aufgabenstellung der Dreiecksaufgabe sehr ähnlich war, haben keine Kinder an den Interviews teilgenommen, die vorab bereits die Dreiecksaufgabe bearbeitet hatten. Hinsichtlich des Leistungsvermögens (bezogen auf die Ergebnisse im Diagnosetest und Beobachtungen in den Fördersitzungen) sind beide Testgruppen jedoch vergleichbar. War aufgrund der Aufgabenstellung ein geringeres Maß an

Analogieerkennung zu erwarten, so waren wir aber doch überrascht, dass *keinerlei selbstständige Analogieerkennung während der Aufgabenbearbeitung* auftrat.

Bei allen 9 Kindern der Testgruppe gab es keine selbstständige Analogienutzung und nur bei 4 Kindern haben wir überhaupt eine als Analogieerkennung interpretierbare Äußerung oder Handlung beobachtet. Diese trat auch stets erst nach einer Intervention der Interviewerin auf, teilweise sogar erst nach mehrfachem Nachfragen.

Wir hatten bei der Interpretation, zum Teil sogar schon während des Interviews, allerdings mehrfach den Eindruck, dass die Kinder Analogien selbstständig erkannt haben. In der Folge stellte sich diese „anscheinende“ Analogieerkennung aber meist als „scheinbare“ und äußerst „brüchige“ heraus, wie das folgende Beispiel zeigt.

Bei der Einstiegsaufgabe kommentiert der Schüler L. sein korrektes Ergebnis „30“ wie folgt:

> *Ich hab erstmal hier* (zeigt auf die 1. Figur). *Da kommen erstmal vier dazu. Hier kommen dann sechs dazu, und hier acht, und dann zehn.* (Zeigt jeweils eine Hakenstruktur auf den Figuren) *Und dann hab ich gezählt, eins zwei drei vier, fünf, sechs sieben, acht neun, zehn* (Zeigt eine Reihe jeweils über und rechts von Figur 4).

Zu den 20 Plättchen der 4. Figur hat er also die 10 hinzukommenden dazu gezählt. Bei der Quellaufgabe fragt L. zunächst, ob er auch „malen“ dürfe und zeichnet dann eine Zeile mit 20 Kreisen. Direkt im Anschluss deutet er aber mit dem Stift links oberhalb dieser Zeile eine Spalte mit mehreren Punkten an ohne diese zu zeichnen und notiert dann innerhalb weniger Sekunden „$20 \cdot 21$“. Er deutet die Aufgabenstellung hier also als multiplikative Struktur. Die Zielaufgabe löst L. schließlich, indem er Komplementärsummen bildet über „$10 \cdot 40 + 20$“.

Kurz nach Beendigung der Bearbeitung der Zielaufgabe bemerkt L.:

> *Vierhundertzwanzig, hier kam ja auch vierhundertzwanzig raus.* […] *Hier kommen ja auch immer gerade Zahlen dazu* (Zeigt auf die Figurenfolge). *Hier kommen vier, dann sechs, dann acht, dann zehn* (..) *und zwölf. Und vierzehn dazu und- Also es kommen immer die geraden Zahlen im Zweierabstand dazu.*

Die Interviewerin war sich zu diesem Zeitpunkt während des Interviews ebenso sicher wie später die Interpreten, dass L. eine Analogie zwischen den Aufgaben erkannt hat, benennt er doch, abgesehen von der Zahl 2 als Startzahl, die Summe der geraden Zahlen. Auf die anschließende Frage, ob er die Quellaufgabe dann „auch noch anders ausrechnen“ könne, antwortet L.:

> *Ich denke schon.* (75 [!] Sekunden Pause) *Ich krieg keine Lösung.*

Die Interviewerin fragt L., wie er bei der Einführungsaufgabe die Anzahl bestimmt habe, da er dort offensichtlich „keine Malaufgabe gerechnet“ habe.

L: *Hier sind vier dazu gekommen, da sechs, dann acht und dann hab ich gemeint dass als nächstes zehn dazukommen sollten und dann hab ich das dann abgezählt und getestet.*

I.: *Und warum hast du* [bei der Quellaufgabe] *nicht so weitergemacht?*

L: *Weil das'n bisschen umständlich wäre.*

I.: *Könnte man das so weiter machen?*

L: *Ja.*

I.: *Und was käme dann raus?*

L: *Vierhundertzwanzig.* (.) *Oder.* (..) *Ja.*

I.: *Hast du ja hier schon ausprobiert.*

L: *Ach stimmt, ist ja hier nur eine andere-* (.) *Das ist eigentlich die gleiche Aufgabenstellung. Nein, nicht, das ist eigentlich ein anderer Weg, wie man darauf kommen kann."*

Letztlich erst auf Grund mehrfacher Nachfragen der Interviewerin schafft es L. doch noch die Analogie zwischen den Aufgaben zu erkennen. Die Sequenz zeigt aber deutlich, dass ein selbstständiger Transfer hier weit außerhalb der Möglichkeiten liegt und dass die Analogie wohl bestenfalls als intuitive Ahnung vorliegt.

Diese „Jetzt haben sie's-Situationen", also Situationen im Interview, an denen man vermutlich fälschlich denkt, dass die Analogie erkannt wird, zeigten sich in den Interviews mehrfach. Dies wirft auch Fragen bzgl. der Interpretation von Analogieerkennungen auf. Zum einen ist es durchaus möglich, dass ein Kind auch ohne diese zu nutzen eine Analogie erkennt, diese aber nicht verbalisierbaren kann, oder dass die Erkenntnis eher intuitiv und so „brüchig" ist, dass die bloße Nachfrage sie wieder in Frage stellt. Zum anderen ist es aber auch möglich, dass nur Interpret und Interviewer glauben, das Kind habe eine Analogieerkennung geäußert. Durch die Nachfrage wird das Kind dann möglicherweise zu einer Rationalisierung seiner evtl. anders gemeinten Äußerung gebracht.

In jedem Fall stellt sich aber die Frage, warum diese Situationen bei der Rechtecksaufgabe häufig, bei der formal ähnlichen Dreiecksaufgabe dagegen nicht auftraten. Die Komplexität der Aufgabenstellung kann hier nicht der (alleinige) Grund sein, da es praktisch allen Kindern gelang, Quell- und Zielaufgabe zu lösen – nur auf unterschiedlichen Wegen und ohne ein Erkennen von Analogien.

### 3.2.3 Was macht die Analogieerkennung bei der Rechtecksaufgabe so schwierig im Vergleich zur ähnlich konstruierten Dreiecksaufgabe?

Betrachtet man die Oberflächenstrukturen der beiden Aufgaben, so sind diese sehr ähnlich: In den Quellaufgaben liegen jeweils Punktmuster mit dem Ziel der materialgebundenen Bestimmung von Anzahlen vor. In den Zielaufgaben geht es um die Bestimmung einer Zahlensumme. Betrachtet man jedoch die Tiefenstrukturen, so zeigen sich große Unterschiede, da es zwar bei der Rechtecksaufgabe in Quell- und

Zielaufgabe Strukturen gibt, die auf die analogieinduzierende Relation rekurrieren, diese sind aber, wie die Analyse zeigt, im Gegensatz zur Dreiecksaufgabe nicht die für die Kinder *naheliegenden Strukturen*.

Bei der Dreiecksaufgabe führen Quell- und Zielaufgabe mit den jeweils für die mathematisch begabten Kinder naheliegenden Strukturierungen „1 + 2 + … + 20“ zu der analogieinduzierenden Relation, die hiermit auch erkannt wird und genutzt werden kann. Die Frage, ob diese Summe direkt oder mit Komplementärsummenbildung abkürzend berechnet wird, spielt für die Analogieerkennung keine größere Rolle.

Bei der Rechtecksaufgabe zeigt sich eine völlig andere Situation. Obwohl knapp die Hälfte der Kinder bei der Einstiegsaufgabe den Zuwachs der Plättchen mit einem „Haken“ und der Berechnung „+4, +6, +8, …“ strukturiert, berechnet der überwiegende Teil die Quellaufgabe multiplikativ: „20 · 21 = 420“. Die Zielaufgabe wird zwar mit „10 · 42 = 420“ ebenfalls meist multiplikativ berechnet, die zugrundeliegende Struktur ist hier aber die Summe „2 + 4 + 6 + 8 + … + 40“, die von den Kindern nur über die Komplementärsummenbildung vereinfacht berechnet wird.

Dies erklärt, warum während der Aufgabenbearbeitung keine Analogie*nutzung* erfolgt. Es liefert jedoch keine Hinweise, warum überwiegend auch dann keine Analogie*erkennung* stattfindet, wenn die Ergebnisgleichheit „10 · 42 = 420 = 20 · 21“ festgestellt oder sogar diesbezüglich nachgefragt wird.

Eine Analyse aktueller Schulbücher[2] zeigt, dass die *Interpretation des Rechteckmusters als Multiplikation* bei Einführung der Multiplikation in Klasse 2 und in auch in vielen nachfolgenden Übungen und in späteren Schuljahren häufig und wiederholt vorkommt. Dieser Subjektive Erfahrungsbereich (vgl. Bauersfeld 2001) liefert somit eine für die Kinder naheliegende Strukturierung der Quellaufgabe. Umgekehrt kommt aber die *Interpretation einer Multiplikationsaufgabe als Rechteckmuster* nach der Einführung in Schulbüchern praktisch nicht mehr vor. „Es ist stets der aktivierte SEB, der darüber entscheidet, was gesehen wird, wie ‚es‘ beschrieben werden kann und welche Handlungsoptionen in der wahrgenommenen Situation zuhanden sind.“ (Bauersfeld 2001, 11). D.h. die Summe der Zielaufgabe wird zwar als Produkt gerechnet, es erfolgt aber keine Repräsentation als Rechteck und der Zusammenhang mit den Rechtecken der Quellaufgabe wird nicht gesehen. Erschwerend für eine Analogienutzung kommt noch hinzu, dass das „Rechteck 10 · 42“ noch umstrukturiert werden müsste.

2 Mathehaus, Mathematikus, Super M, Welt der Zahl, Zahlenbuch (jeweils 2. Sj., Ausgaben für Niedersachsen)

Aber was ist mit den (wenigen) Kindern, die bei der Quellaufgabe additiv vorgehen? Müsste nicht zumindest hier eine eigenständige Analogieerkennung erfolgen? Es zeigt sich, dass eine Analogieerkennung erleichtert wird, wenn die Kinder die Veränderung der Figur als hinzukommenden „Haken" interpretieren. In mehreren Fällen tritt aber selbst dann keine Analogieerkennung auf, wenn zudem gleiche Rechnungen in Quell- bzw. Zielaufgabe durchgeführt werden.

Beispielsweise strukturiert J. den Figurenzuwachs als „Haken" und rechnet in der Einstiegsaufgabe additiv. Er schreibt: „Es wird erst 4 großer dann 6 dann 8 und immer so weiter." Später sagt er sogar „Das wird immer gerade Zahlen größer …". Auch in der Quellaufgabe rechnet J. additiv. Hierbei notiert er die Zwischenergebnisse als Zuordnung zu der Figurenzahl (s. Abb. 4 links):

> *So beim ersten sind es zwei-, dann sind es sechs dann sind es zwölf* (schreibt „2 6 12") […] *plus zwölf, dann sind es vierundzwanzig, plus vierzehn* (schreibt „42") […] *plus zwanzig das sind dann hundertzehn-* […] *Zehn- jetzt kommt dreißig das sind* (..) (leise) *zweihundertvierzig.* […] (schreibt „420") *So. vierhundertzwanzig.*

Die Zielaufgabe löst J. zunächst durch vollständige Bildung von Komplementärsummen mit Multiplikation. Er kontrolliert dies aber im Anschluss, indem er nacheinander alle geraden Zahlen von 2 bis 40 aufschreibt und diese fortlaufend im Kopf bzw. halbschriftlich mit Zwischenergebnissen 132 und 342 addiert.

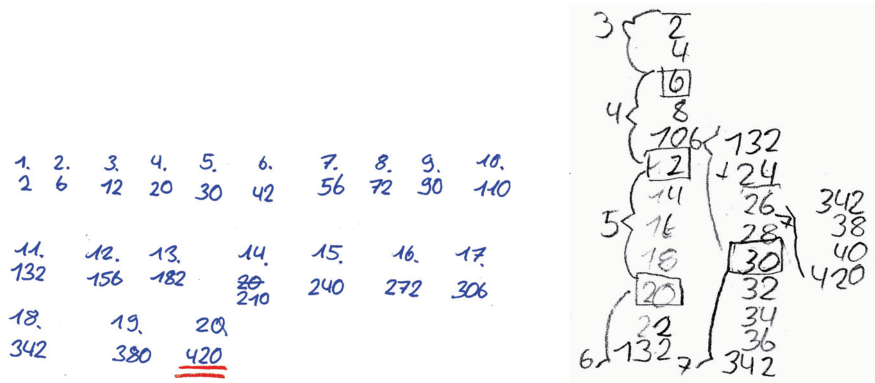



Abb. 4: Rechtecksaufgabe mit additiven Lösungen (Schrittweises Aufsummieren)

Der Schüler rechnet hier also dasselbe, notiert aber die Rechnungen verschieden. Bei der Quellaufgabe rechnet er: „2 + 4 = 6, 6 + 6= 12, 12 + 8 = 20, …", notiert aber nur die Zwischenergebnisse und die Figurennummern. Bei der Zielaufgabe notiert er dagegen die Summanden „2 4 6 … 40", die dann sukzessive im Kopf (mit Notation einiger Zwischenergebnisse) addiert werden.

Dass dies auch für mathematisch begabte Kinder nicht dasselbe ist, zeigte das anschließende Gespräch, in dem die Interviewerin fragt, ob das Vorgehen in der Zielaufgabe etwas mit dem der Quellaufgabe zu tun habe. L. antwortet:

> *Ne-* (.) (schüttelt den Kopf) (.) *Also das hier* (zeigt auf Kontrollrechnung in c) *oder das hier?* (zeigt auf Lösungstext in c).

Später erklärt J. noch mehrfach, wie er die Quellaufgabe gerechnet hat:

> *Immer plus vier, plus sechs, plus acht* […]

Und zur Kontrollrechnung der Zielaufgabe bemerkt er sogar:

> *Das ist auch vier sechs acht. Die Zahlen werden so viel größer wie das hier* **ist**. […] (schaut zwischen den Rechnungen hin und her).

Letztlich bemerkt er aber:

> *Scheint zusammen zu hängen, aber ich weiß nicht wie.*

Eine Analogieerkennung und ggf. auch Nutzung wird also für die Kinder dadurch erschwert, dass die Summe „2 + 4 + 6 + 8 + …“ nicht dasselbe ist wie das sukzessive Addieren der geraden Zahlen „+4, +6, +8 …“. Zudem wird oft die „2“, also die Anzahl der Plättchen der ersten Rechtecksfigur, nicht als Ausgangspunkt der Addition gesehen. Der folgende Interviewausschnitt der Schülerin F. zeigt, wie entscheidend selbst diese letzte Erkenntnis für das Gelingen der Analogieerkennung ist:

> *Hier. Also das hier, das sind vier* (zeigt in der 2. Figur mit dem Finger einen „Haken“ wie in Abb. 3) *das sich sechs* (dito in 3. Figur) *das sind acht* (4. Figur), *die mehr werden.* […] *Das ist genauso wie hier* (zeigt auf Zielaufgabe), *nur dass/* (unverständlich) (*Und*) *als erstes waren ja Null Plättchen. Und dann ist es hier so das Gleiche, weil sind immer so mehr.*

Als *Fazit* bestätigt sich somit auch bei der Analyse der Rechtecksaufgabe: Wenn keine Analogien erkannt wurden, heißt das nicht, dass keine Strukturen erkannt wurden. Werden aber ausschließlich unterschiedliche Strukturen in Quell- und Zielbereich erkannt, so ist keine Analogieerkennung möglich, da keine gemeinsame analogieinduzierende Relation vorliegt.

### 2.3 Kombinatorikaufgabe

Abschließend referieren wir kurz Beobachtungen zu einer kombinatorischen Aufgabenstellung, die einerseits bisher berichtete Ergebnisse bestätigen, andererseits weitere Fragen aufwerfen. Ein zusammenfassendes Fazit ziehen wir im anschließenden Kapitel.

#### 2.3.1 Aufgabenstellung

Quellaufgabe: Simon kommt täglich an einem Eisstand vorbei, bei dem es 5 verschiedene Eissorten gibt. Er darf jeden Tag eine Eistüte mit 3 Kugeln essen. Wie viele verschiedene Eistüten kann Simon kaufen, wenn er immer 3 verschiedene Sorten essen will und die Reihenfolge der Eissorten in der Tüte keine Rolle spielt?

Zielaufgabe: Hier sind 5 Punkte vorgegeben. Wählt man drei beliebige Punkte aus und verbindet sie mit geraden Linien, so entsteht ein Dreieck. Wie viele Dreiecke lassen sich auf diese Weise zeichnen?

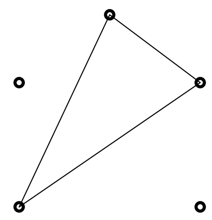


Abb. 5: Bild zur Kombinatorikaufgabe

Die Aufgabenstellungen wurden auf zwei verschiedenen Blättern dargeboten. Während der Bearbeitung der Zielaufgabe lag das erste Blatt am Tischrand, sodass die Kinder eigenständig darauf zurückgreifen konnten.

### 2.3.2 Beobachtungen

Die Analogieerkennung bei der Kombinatorikaufgabe wurde von uns bedingt durch die unterschiedlichen Kontexte der Aufgaben bereits im Vorfeld als sehr schwierig eingeschätzt. Die Schwierigkeiten bestätigten sich in der Untersuchung, allerdings erfolgte entgegen unseren Erwartungen eine Analogieerkennung häufiger als bei der Rechtecksaufgabe.

Eins der zwölf Kinder erkannte die Ergebnisgleichheit vor der Bearbeitung der zweiten Aufgabe und transferierte das Ergebnis aus der Quellaufgabe auf die Zielaufgabe. Zwei andere Kinder erkannten von sich aus die Analogie der Aufgaben über die Ergebnisgleichheit, obwohl sie bei der zweiten Aufgabe noch nicht sicher waren, alle Dreiecke gefunden zu haben. Sie nutzten die Analogie zur Validierung der Ergebnisse. Zwei weitere Kinder äußerten sich zur Analogie, als die beiden Aufgabenblätter unkommentiert vom Interviewer nebeneinander gelegt wurden. Alle anderen verbalisierten erst auf Nachfrage Ähnlichkeiten zwischen den beiden Aufgaben. Nicht immer ließ sich dabei beurteilen, ob die Analogie wirklich verstanden war, da mitunter nur die Zahlen im Text miteinander in Beziehung gesetzt wurden:

> *Hier sind mit 3 Kugeln und 5 verschieden* (zeigt auf Blatt 1) *und hier sind 5 Punkte und 3 beliebige Punkte.*

Fraglich ist daher, ob die Analogie auch unter Verwendung verschiedener Zahlen erkannt worden wäre.

Hinsichtlich der Vorgehensweisen ist bei beiden Aufgaben ein großer Variantenreichtum zu beobachten, der sich sowohl auf die verwendeten Codierungsweisen als auch auf die Systematisierungsgrade und Kontrolltechniken erstreckt. Im Rahmen dieses Artikels ist eine detaillierte Darstellung und Analyse der verschiedenen Vorgehensweisen leider nicht möglich. Es sei jedoch angemerkt, dass Zusammenhänge zwischen Vorgehensweise und Analogieerkennung nicht erkennbar sind. Selbst ähnliche Systematisierungs- und Kontrolltechniken in Quell- und Zielaufgabe führen nicht zwangsläufig zur Analogieerkennung. Als wesentliche Ursache dafür sehen wir die Darstellung der Zielaufgabe an, die eine zeichnerische Bearbeitung nahe legt und so die kombinatorische Grundstruktur und damit die anlogieinduzierenden Relationen in den Hintergrund treten lässt. Die Erprobung, ob die Analogieerkennung durch Vertauschen von Quell- und Zielaufgabe begünstigt wird, steht noch aus.

## 3 Zusammenfassung und Ausblick

Bedingt durch die geringe Datenbasis sind auf Grundlage der hier referierten Untersuchungsergebnisse zwar keine verallgemeinernden Aussagen möglich, bezüglich der eingangs geschilderten Forschungsfragen lassen sich jedoch zusammenfassend folgende Ergebnisse festhalten:

Unsere Auswertungen deuten darauf hin, dass besondere Fähigkeiten zur Analogieerkennung und Analogienutzung in hinreichend komplexen Situationen Merkmale mathematischer Begabungen darstellen. Während die Analogieerkennung bei der Dreiecksaufgabe fast allen potentiell mathematisch begabten Kindern gelingt, war bei den Kindern der Vergleichsgruppe keine selbstständige Analogieerkennung zu beobachten. Weiterhin zeigte sich, dass die Analogieerkennung abhängig von der Fähigkeit der Kinder ist, Strukturen zu erkennen und flexibel zu nutzen und damit einhergehend auch von der individuellen Expertise und den jeweiligen Subjektiven Erfahrungsbereichen im Umgang mit mathematischen Problemlöseaufgaben. Eine weitere Bestätigung dieser Hypothese sehen wir darin begründet, dass bei denjenigen Kindern aus der Gruppe der Mathematischen Lernwerkstatt die überzeugendsten Beispiele für Analogieerkennung und insbesondere auch Analogienutzung zu beobachten waren, die auch in den Fördersitzungen oder den diagnostischen Tests besondere Leistungen innerhalb dieser Begabtengruppe zeigen.

Auch bei der Abhängigkeit der Analogieerkennung von der Vorgehensweise bestätigte die Analyse der Dreiecksaufgabe unsere Arbeitshypothese. Bei der Rechtecksaufgabe war zwar keine selbstständige Analogieerkennung zu beobachten, letztlich zeigte sich jedoch auch hier die Abhängigkeit einer möglichen Analogieerkennung von der Strukturierung von Quell- und Zielaufgabe. Die Analysen aller Aufgaben verdeutlichen darüber hinaus, dass Analogieerkennung an unterschiedlichen Stellen im Lösungsprozess stattfindet.

Weiterhin haben wir eine starke Abhängigkeit der Analogieerkennung von der jeweiligen Aufgabenstellung festgestellt. Auch mathematisch begabte Kinder haben bei komplexeren Aufgabenstellungen Schwierigkeiten, Analogien zu erkennen und zu nutzen, wenn die analogieinduzierende Relation nicht mit den naheliegenden Strukturierungen übereinstimmt.

Weitere Forschungsaktivitäten zu diesen Fragestellungen sind im Hinblick auf eine Vergrößerung der Datenbasis und eine weitere Differenzierung in den Aufgabenstellungen angezeigt. So ist u.E. nicht geklärt, ob man theoretisch erfassen kann, in welchen Situationen Kinder in der Lage sind, eine Analogie zu erkennen und einen Transfer leisten zu können. Ansätze aus der Psychologie, die auf Grundlage der Unterschiede in Quell- und Zielbereich der Analogie in Bezug auf das Fachgebiet, den situativen, zeitlichen, funktionalen und sozialen Kontext sowie die Modalität versuchen eine „Transferdistanz“ aufzuzeigen (vgl. Barnett/Ceci 2002, 621, s.a. Klauer 2011, 28ff.) reichen aber nach unseren Analysen nicht aus, um die Unterschiede zwischen unterschiedlichen mathematischen Problemstellungen zu klären.

Zur empirischen Untersuchung solcher „Distanzen“ wäre es ratsam, dass Probanden jeweils mehrere Aufgabenpaare mit unterschiedlicher (theoretischer) „Transfersdistanz“ bearbeiten.

Aus forschungspraktischen Gründen scheint es uns für Vergleichsuntersuchungen darüber hinaus wichtig, Quellprobleme einzusetzen, bei denen die für die Analogieerkennung relevanten Strukturen möglichst selten durch andere Zusammenhänge „überlagert“ werden; nur für diesen Fall sind Aussagen hinsichtlich der Fähigkeit des Probanden zur Analogieerkennung und -nutzung möglich. Damit zusammenhängend ist für weitere Vergleichsuntersuchungen wichtig, den Vergleich auf diejenigen Probanden zu beschränken, die in der Quellaufgabe für die Analogieerkennung geeignete Strukturen erkannt und genutzt haben. Erst darüber ließen sich Unterschiede in den Fähigkeiten zur Analogieerkennung und -nutzung sinnvoll erfassen.

**Literatur**

Aßmus, D. (2013): Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Kindern. Begriffsklärung und Überblick zu empirischen Studien. In: mathematica didactica 36, 28–44 (in diesem Heft).

Barnett, S.M./Ceci, S.J. (2002): When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. Psychological Bulletin, 128, 612–637.

Bauersfeld, H. (2001): Theorien zum Denken von Hochbegabten. Bemerkungen zu einigen neueren Ansätzen und Einsichten. In: mathematica didactica 24, 3–20.

Ericsson, K.A./Simon, H.A. (1993): Protocol analysis. Verbal reports as data. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang.

Klauer, K.J. (2011): Transfer des Lernens. Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird. Stuttgart: Kohlhammer.

Krummheuer, G./Naujok, N. (1999): Grundlagen und Beispiele interpretativer Unterrichtsforschung. Opladen: Leske + Budrich.

Mathematische Lernwerkstatt Braunschweig: Informationen und Materialien online verfügbar unter https://www.tu-braunschweig.de/idm/lernwerkstattstart [2012/11/01].

Wilson, T.P. (1973): Theorien der Interaktion und Modelle soziologischer Erklärung. In: Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.): Alltagswissen, Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit, Bd. 1. Reinbek: Rowohlt, 54–79, (häufig in 5. Aufl. zit. als Wilson 1980).

**Transkriptionsregeln** (Auszug)

| | |
|---|---|
| (.) (..) (…) (n sec.) | Pausen im Sprechakt (ungefähr 1, 2, 3, n Sekunden) |
| . bzw. ? | Senken der Stimme bzw. Heben der Stimme |
| , | kurzes Absetzen ohne Senken der Stimme |
| **nein** bzw. <u>nein</u> | Betonung durch lautes oder betontes Sprechen |
| ja- | Dehnung, Stimme bleibt in der Schwebe |
| viellei/ | Abbruch des Wortes |

**Anschrift der Verfasser**

Daniela Aßmus
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik
06099 Halle (Saale)
daniela.assmus@paedagogik.uni-halle.de

AOR Dipl.-Math. Frank Förster
Technische Universität Braunschweig
Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik
38106 Braunschweig
f.foerster@tu-braunschweig.de

Eingang Manuskript: 13.12.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.02.2013
Online veröffentlicht: 04.03.2013