Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Kindern

Begriffsklärung und Überblick zu empirischen Studien

von

Daniela Aßmus, Halle an der Saale

Kurzfassung: Zur Begriffsklärung werden hier drei Kategorien analogen Denkens, nämlich analoges Zuordnen, analoges Verstehen und analoges Problemlösen unterschieden. Weiterhin erfolgt eine Abgrenzung der Begriffe „Analoges Denken“ und „Transfer“, wobei Transfer als Analogienutzung verstanden wird, die im Rahmen des analogen Verstehens oder analogen Problemlösens auftreten kann. Abschließend erfolgt bezugnehmend auf die drei genannten Kategorien eine Darstellung verschiedener Studien. Die jeweiligen Studienergebnisse legen die Vermutung nahe, dass potentiell mathematisch begabte Grundschulkinder sich durch besondere Fähigkeiten im analogen Zuordnen und im analogen Problemlösen auszeichnen.

Abstract: For disambiguation three categories of analogical thinking will be distinguished, viz. analogical assigning, analogical comprehension and analogical problem solving. Furthermore a differentiation of the terms “analogical thinking” and “transfer” will take place, whereupon the transfer is understood as a use of analogy, which can occur in the context of analogical assigning or analogical problem solving. Subsequently a presentation of various studies referring to the three named categories was carried out. The respective results of the studies suggests the assumption that primary school pupils who are potentially mathematically gifted stand out due to particular skills at analogical assigning and analogical problem solving.

Fähigkeiten im analogen Denken werden als wesentliches Merkmal von Intelligenz angesehen. Analoges Denken ermöglicht neue Anwendungsbereiche für bestehendes Wissen zu erkennen und dabei neue Wissensbereiche zu erschließen. Es hilft Wissen zu organisieren, indem mithilfe von Analogien Kategorien vergleichbarer Strukturen und Relationen gebildet werden. Außerdem gestatten Analogien „den Aufwand zur Repräsentation von Problemen und die Komplexität des Lösungsprozesses beträchtlich zu reduzieren“ (van der Meer 1995, 357).

Insbesondere beim mathematischen Tätigsein kommt dem Umgang mit Analogien eine wesentliche Bedeutung zu. Für die Mathematik als Wissenschaft von den Mustern ist Analogiebildung als Nutzung struktureller Ähnlichkeiten in neuen Situationen ein zentraler Inhalt. Das Nutzen von Analogien stellt ein wichtiges

Hilfsmittel beim Lösen mathematischer Problemstellungen (Bruder und Collet 2011, Pólya 1995), bei der Hypothesenbildung und bei der Stärkung von Argumenten dar (Holyoak und Thagard 1989) und trägt so in der Mathematik maßgeblich zur Theorieerweiterung bei. Es ist daher anzunehmen, dass besondere Fähigkeiten im Konstruieren, Erkennen und Nutzen von Analogien erfolgreiches mathematisches Handeln begünstigen und damit Merkmale mathematischer Begabungen sein könnten.

1 Analoges Denken

„Analogie“ wird im Allgemeinen mit „Gleichartigkeit“, „Ähnlichkeit“ oder „Entsprechung“ übersetzt. Diese Entsprechung besteht zwischen zwei verschiedenen Systemen oder Gebilden, bzw. genauer zwischen einigen relationalen Eigenschaften, die die Objekte/Elemente des jeweiligen Systems miteinander verbinden. So schreibt z.B. Dörner allgemein: „‚Analog‘ sind zwei Gebilde, wenn sie strukturgleich oder strukturähnlich sind“ (Dörner 1995, 309). Für die Mathematik formuliert Pólya: „Zwei Systeme von mathematischen Dingen, sagen wir S und S', hängen so miteinander zusammen, daß gewisse Beziehungen zwischen den Dingen von S denselben Gesetzen unterliegen wie die zwischen den Dingen von S'“ (Pólya 1995, 60). Zur Unterscheidung der beiden „Systeme“ bzw. „Gebilde“ sind verschiedene Begriffe gebräuchlich. Meist (insbesondere im Kontext des analogen Problemlösens und auch des Transfers) wird zwischen „Quellbereich“ und „Zielbereich“ unterschieden, teilweise werden die beiden Bereiche mit „Urbildbereich“ und „Bildbereich“ benannt (z.B. van der Meer 1995).

Die formale Struktur einer Analogie kann für Vier-Term-Strukturen, wie sie z.B. bei klassischen Analogien der Form A : B :: C : D vorliegen, wie folgt dargestellt werden (s. Abb. 1):

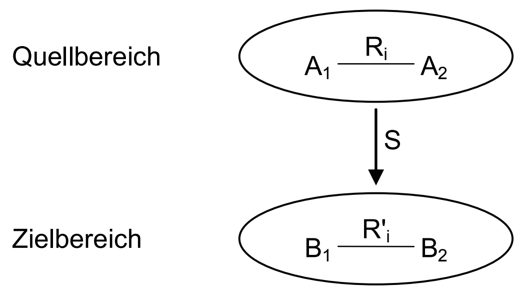


Abbildung 1: Formale Struktur einer Analogie (in Anlehnung an van der Meer 1995)

Der Quellbereich enthält die Elemente[1] A_1 und A_2, welche über die Relationen R_i zueinander in Beziehung stehen, die über R'_i verbundenen Strukturen B_1 und B_2 gehören dem Zielbereich an. Sind die Relationen R_i und R'_i mindestens partiell identisch, so liegt eine Analogie vor. Die im Quell- und Zielbereich isomorphen Relationen werden nachfolgend als analogieinduzierende Relationen bezeichnet. Die Elemente des Quellbereichs können mit der Abbildungsvorschrift s auf die Elemente des Zielbereichs abgebildet werden, also A_1 auf B_1 und A_2 auf B_2 (vgl. van der Meer 1995).[2]

Der Begriff „analoges Denken“ wird zwar häufig verwendet, jedoch i.d.R. nicht allgemein definiert. Stattdessen bemühen sich einige Autoren, verschiedene Phänomene analogen Denkens zu unterscheiden und daraus Kategoriensysteme zu entwickeln (vgl. z.B. English 2004; Hesse 1991). Kennzeichnend für analoges Denken ist dabei der Umgang mit Analogien und hier insbesondere das Bilden, Erkennen und Nutzen von Analogien. Als Basis für weitere Analysen wird hier der Vorschlag von Hesse (1991) verwendet, in dem die Kategorien „analoges Zuordnen“, „analoges Verstehen“, „analoges Problemlösen“ und „metaphorische Beschreibungen“ unterschieden werden (Hesse 1991). Ein ähnliches System findet sich bei English (2004), die die Kategorien „Reasoning with classical analogies“, „Reasoning with pedagogical analogies“ und „Reasoning with problem analogies“ benennt. Nachfolgend werden die Kategorien Hesses näher erläutert und bezugnehmend auf die Mathematik konkretisiert. Auf Ausführungen zur Kategorie „metaphorische Beschreibungen“ wird hier verzichtet, da diese Spezialform des analogen Denkens vorwiegend in der Linguistik Verwendung findet.

1.1 Analoges Zuordnen

Hesse spricht dann von analogem Zuordnen, „wenn nur die in einem Sachverhalt enthaltenen Eigenschaften und Beziehungen auf einen neuen Sachverhalt übertragen werden“ (Hesse 1991, 13). Dazu müssen die Elemente des Quellbereichs bereits vorliegen. Im Hinblick auf die Vorgabe der Elemente im Zielbereich lassen sich beim analogen Zuordnen m.E. im Wesentlichen fünf Aufgabentypen unterscheiden (Tabelle 1).

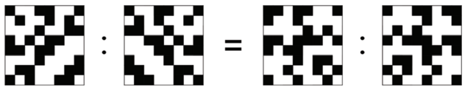
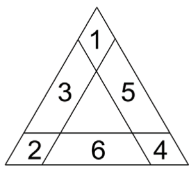
Typ a) unterscheidet sich insofern von den anderen, als dass bereits alle Elemente des Zielbereichs vorgegeben sind, sodass daran zu bewerten ist, ob eine Analogie vorliegt. Aufgaben dieser Art können somit auch Konstellationen enthalten, in de-

---

1 Klix bezeichnet diese als Strukturen. Dies können Begriffe, Aussagen oder z.B. figurale Strukturen sein (vgl. Klix 1992).

2 Andere Autoren unterscheiden hier nicht zwischen Relationen und Abbildungsvorschriften, sondern zwischen verschiedenartigen Relationen (z.B. Sternberg 1977; Gick und Holyoak 1983).

nen die Bedingungen einer Analogie nicht erfüllt sind. Erforderlich ist hier die *Analogieerkennung*, während bei den Typen c)–e) die *Analogiekonstruktion* im Mittelpunkt steht. Typ b) bildet eine Mischform, in der je nach Vorgehensweise Aspekte der Analogieerkennung oder der Analogiekonstruktion überwiegen.

<table>
<tr><th>Typ</th><th>Beschreibung und Beispiel</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Vorgabe aller relevanten Elemente, anhand derer zu überprüfen ist, ob eine Analogie vorliegt
Beispiel: Analogieprüfung mit erfüllter Analogiebedingung (Krause 2000, 144)
</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Vorgabe verschiedener Elemente, von denen eines auszuwählen ist.
Beispiel: ■ : ▫ :: ● : ? a) ▪ b) ○ c) ◦ d) □</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Fehlen einzelner Elemente im Zielbereich, die passend zu ergänzen sind.
Beispiel: ■ : ▫ :: ● : ?</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Fehlen aller Elemente in einem bekannten Zielbereich, die passend zu ergänzen sind.
Beispiel (nach Käpnick 1998, 152):
Welche Besonderheiten erkennst du in der Anordnung der Zahlen? […]


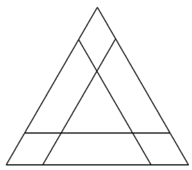
Versuche, ein zweites Dreieck mit denselben Besonderheiten zusammenzustellen! Verwende dabei andere Zahlen.
</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Fehlen aller Elemente in einem noch unbekannten Zielbereich, der passend zu konstruieren ist.
Beispiel: Veranschaulichung des Zahlenmusters 1, 2, 4, 8</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Aufgabentypen beim analogen Zuordnen

Nach Hesse (1991) gilt das analoge Zuordnen als recht gut untersucht.[3] Wegweisend waren die Arbeiten Sternbergs (1977), insbesondere seine „componential theory of analogical reasoning“. Als einen von fünf Teilprozessen benennt Sternberg das „Abbilden“ („mapping“), in dem Quell- und Zielbereich der Analogie zueinander in Beziehung gesetzt werden.

1.2 Analoges Verstehen

Werden die Kenntnisse über einen bekannten Sachverhalt gezielt eingesetzt, um einen neuen, dazu analogen Sachverhalt zu verstehen bzw. das Verständnis zu erleichtern, spricht Hesse von analogem Verstehen (Hesse 1991). Diese Form der *Analogienutzung* tritt vor allem in pädagogischen Situationen auf. So werden Analogien von Lehrpersonen bzw. in Lehrbüchern bewusst eingesetzt, um bei Lernenden Verständnis für einen neuen Inhaltsbereich anzubahnen. Voraussetzung für eine erfolgreiche Analogienutzung ist hierbei, dass dem Lernenden die gewählte analoge Situation vertraut ist und die relevanten Strukturen und Relationen der Situation bewusst sind, um diese dann im erhofften Sinne zum Verständnis der neuen Situation einsetzen zu können.

Ein in der Literatur häufig verwendetes Beispiel für analoges Verstehen ist das Heranziehen des Wasserkreislaufes zur Verdeutlichung der Wirkmechanismen eines Stromkreises (s. z.B. Klauer 2011). Im Mathematikunterricht lässt sich bspw. das Prinzip des Umformens von Gleichungen an einer Waage erläutern, die sich auch bei Veränderung der zu wiegenden Objektmengen im Gleichgewicht befinden soll. Neben solchen interdisziplinären Analogien liegt in der Mathematik auch die Verwendung innermathematischer Analogien nahe, wie z.B. die Rückführung von Rechengesetzen in zu erschließenden Zahlenräumen oder Zahlbereichen auf entsprechende Gesetze in vertrautem strukturgleichen oder -ähnlichen „Terrain“. Die Nutzung von Analogien zum Verständnis und zur Bewältigung[4] neuer Situationen erfolgt im Mathematikunterricht von Beginn an. „Im Erstrechnen kann sich das Kind bei der Aufgabe 13 + 5 auf die bekannte Aufgabe 3 + 5 = 8 stützen; 13 + 5 ist ‚ganz ähnlich‘, nur ‚um 10 verschoben‘“ (Winter 1989, 45). In den Ausführungen Winters wird deutlich, dass analoges Verstehen nicht immer von außen initiiert sein muss, sondern analoge Situationen bewusst oder unbewusst auch eigenständig in neuen Situationen herangezogen werden können. Es kann somit zwischen *pädagogisch initiiertem* und *eigeninitiiertem analogen Verstehen* unterschieden werden.

Grundlage vieler weiterer theoretischer Überlegungen zu Komponenten analogen Verstehens ist die Structure-Mapping-Theory nach Gentner (vgl. Gentner 1983).

---

3 Dies beschränkt sich jedoch auf den Umgang mit klassischen Analogien. Aufgaben der Typen d) und e) sind in den Untersuchungen i.d.R. nicht enthalten.

4 Hier ergeben sich Überschneidungen zum analogen Problemlösen.

1.3 Analoges Problemlösen

Während beim analogen Verstehen Zusammenhänge, Wirkmechanismen u.ä. bekannter Bereiche genutzt werden, um neue Inhalte zu erschließen, geht es beim *analogen Problemlösen* um das *Lösen* neuer Problemstellungen durch Rückgriff auf eine oder mehrere bekannte ähnliche Problemstellungen (Hesse 1991). Dies geschieht nicht so sehr durch das Übertragen von Zusammenhängen, sondern vor allem durch Nutzung von bekannten (Teil-)Lösungen und Lösungsverfahren.

Beim analogen Problemlösen zum Einsatz kommende Teilprozesse werden teilweise explizit genannt und erläutert (z.B. Novick 1988; Novick und Holyoak 1991; Holyoak et al. 2001), häufig jedoch ohne nähere Spezifizierungen in den Ausführungen zum analogen Problemlösen erwähnt. Eine mögliche, von vielen Autoren anerkannte Klassifizierung ist die Unterscheidung von Such-, Nutzungs- und Lernprozessen (Thußbas 2001). *Suchprozesse* („retrieval“) nach einem geeigneten Quellproblem („source“) können dann ausgelöst werden, wenn dem Problemlöser eine spontane Bearbeitung bzw. Lösung des Zielproblems („target“) nicht möglich ist. Ein geeignetes Quellproblem zeichnet sich dadurch aus, dass es im strukturellen Aufbau dem Zielproblem annähernd entspricht und die Lösung bzw. der Lösungsweg bekannt ist. Die Suche endet ggf. mit dem Erkennen eines analogen Quellproblems. Im Erkennen erfolgt analoges Zuordnen und dabei insbesondere das *Abbilden* („mapping“) des Quellproblems auf das Zielproblem, bei dem über eine Eins-zu-eins-Zuordnung Entsprechungen zwischen den Elementen und Relationen des Quell- und des Zielproblems identifiziert werden (Novick 1988). Dieses Abbilden, das als wesentlicher Prozess des analogen Denkens angesehen wird (Holyoak und Thagard 1989), ermöglicht *Nutzungsprozesse* und zwar insbesondere den *Transfer* (s.u.) von Lösungsprinzipien oder Lösungen des Quellproblems auf das Zielproblem (Novick und Holyoak 1991). Mitunter eignet sich das Übertragene allerdings nicht vollständig zur Bearbeitung des Zielproblems. In diesem Fall ist seine *Anpassung* („adaption“) an die Bedingungen des Zielproblems notwendig. Bei erfolgreicher Anwendung des Quellproblems werden schließlich *Lernprozesse* ausgelöst, wobei das so erweiterte Wissen in die vorhandene Wissensstruktur integriert wird (vgl. Thußbas 2001).

1.4 Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Kategorien

Gemeinsamkeiten der drei Kategorien bestehen nach English (2004) im Erkennen und Verstehen der relationalen und strukturellen Entsprechungen von Quell- und Zielsituation sowie in der Durchführung der Abbildung zwischen den analogen Situationen. Diese Aspekte analogen Zuordnens sind somit Bestandteil aller Kategorien, sodass analoges Zuordnen als Teilprozess analogen Verstehens und analogen Problemlösens angesehen werden kann. Analoges Zuordnen stellt dabei die Voraussetzung für die Nutzung von Analogien dar, wie sie beim analogen Verstehen und analogen Problemlösen zum Einsatz kommen kann.

Daraus resultieren verschiedene Zielsetzungen der Analogieverwendung. Während der Analogieeinsatz beim analogen Verstehen und analogen Problemlösen mit der Bewältigung neuer Situationen übergeordneten Zwecken dient, ist das analoge Zuordnen für sich genommen Selbstzweck, bei dem keine weitere Analogienutzung stattfindet. Analoges Zuordnen, das nicht in analogem Verstehen oder Problemlösen mündet, findet daher vorwiegend bei speziell konstruierten Anforderungen statt, die dazu dienen, zur Bearbeitung notwendige Fähigkeiten zu erfassen oder zu fördern.

Möglicherweise lassen sich die Unterschiede zwischen analogem Zuordnen einerseits und den beiden übrigen Kategorien andererseits auch mit verschiedenen kognitiven Anforderungen erklären. Das Erkennen von (analogieinduzierenden) Relationen und die darauf folgende Abbildung geeigneter Objekte oder Relationen erfordert vornehmlich allgemeine kognitive Fähigkeiten und ist nicht so sehr wissens- und erfahrungsabhängig wie die Nutzung von Analogien beim eigeninitiierten analogen Verstehen oder beim analogen Problemlösen. Die Analogienutzung ist demgegenüber eine Strategie zur Bewältigung neuer Anforderungen, deren Einsatz geeignetes Vorwissen und Erfahrungen voraussetzt. Man kann also unterscheiden zwischen dem *analogen Zuordnen als kognitiver Fähigkeit und dem eigeninitiierten analogen Verstehen und analogen Problemlösen als erfahrungsabhängigen Strategien*. Ähnliche Abgrenzungen lassen sich auch für andere Begabungsmerkmale vornehmen, wie z.B. dem Umkehren von Gedankengängen: Das Umkehren von Gedankengängen beschreibt die kognitive Fähigkeit, Anwendung finden kann diese in der erfahrungsabhängigen Strategie des Rückwärtsarbeitens (Aßmus 2010).

Bei Betrachtung der Kategorien „analoges Verstehen“ und „analoges Problemlösen“ lassen sich ebenfalls Gemeinsamkeiten und Unterschiede ausmachen. Gemeinsamkeiten deuten sich dadurch an, dass die Kategorien nicht überschneidungsfrei sind. So lässt sich nicht jeder Umgang mit Analogien eindeutig einer Kategorie zuordnen. Dies trifft m.E. insbesondere auf *Analogieschlüsse als Hilfsmittel zur Argumentation* (Holyoak und Thagard 1989) sowie auf *Analogiebildung als Bestandteil schöpferischen Denkens* (Klix 1992) zu, die je nach Zielsetzung beiden Kategorien angehören können.

Unterschiede zwischen pädagogisch initiiertem analogen Verstehen und analogem Problemlösen bestehen u.a. in dem Zeitpunkt der Analogieerkennung. Während die Quellsituation beim analogen Verstehen in einer pädagogischen Situation vorgegeben und die *Analogie* vom Lernenden *im Anschluss* gesteuert konstruiert wird, muss die Quellsituation im Rahmen des analogen Problemlösens eigenständig gefunden werden. Da sich eine bekannte Situation dann als geeignet erweist, wenn sie hinsichtlich relevanter Aspekte analog zur Zielsituation ist, findet die Analogieerkennung beim analogen Problemlösen in der Regel *gleichzeitig* mit dem Auffinden eines geeigneten Quellproblems statt.

2 Analoges Denken und Transfer

Bezüge zwischen analogem Denken und Transfer wurden bereits in den Ausführungen zum analogen Problemlösen angedeutet. Bevor diese vertieft werden, soll zunächst eine Klärung des Begriffs „Transfer“ vorgenommen werden.

2.1 Transfer

Der Begriff *Transfer* lässt sich auf das lateinische Verb „transferre“ zurückführen, welches mit „hinübertragen“, „übertragen“, „überbringen“ übersetzt werden kann. Die vielschichtige Verwendung des Begriffs, die zum einen verschiedene Disziplinen betrifft (z.B. Finanzwesen, Sport, Kognitionspsychologie), zum anderen innerhalb eines Fachgebietes wie der Psychologie in unterschiedlichsten Zusammenhängen – häufig undefiniert – stattfindet, deutet bereits an, dass es eine allgemein akzeptierte Definition nicht geben kann. Zur Eingrenzung der Darstellung erfolgt in diesem Zusammenhang eine Beschränkung auf die hier relevanten Verwendungsgebiete, in denen der Begriff im Kontext kognitiver Prozesse Anwendung findet. Auch wenn hier verschiedene Begriffsvorstellungen vorherrschen, so besteht doch weitgehende Einigkeit darüber, dass beim Transfer zwei Bereiche (z.B. die einer Analogie) miteinander in Verbindung gebracht werden und Aspekte des einen Bereichs in irgendeiner Form Einfluss auf Aspekte des anderen Bereichs ausüben bzw. in diesen überführt werden. Uneinig ist man sich jedoch darüber, was genau beeinflussend wirkt, was beeinflusst wird und worin dabei der Transfer besteht. So gibt es Definitionen, in denen Transfer als der „Einfluss“ (z.B. von Lernen in Situation A auf Lernen in Situation B) selbst (z.B. Seel 2003), als „nichttrivialer Lerneffekt“ (Klauer 2011), oder aber als „Prozess der Übertragung früheren Lernens auf neue Situationen“ (Haskell, 2001 in Klauer 2011) bzw. als „Nutzung früher erworbenen Wissens“ (Steiner 2006) verstanden wird. Gegenwärtig häufig anzutreffen ist das letztgenannte Verständnis von Transfer als Anwendung/ Nutzung, das auch in der Definition von Mähler und Stern zum Ausdruck kommt, in der Transfer als „*die erfolgreiche Anwendung angeeigneten Wissens bzw. erworbener Fertigkeiten im Rahmen einer neuen, in der Situation der Wissenschaft bzw. Fertigkeitsaneignung noch nicht vorgekommenen Anforderung*“ bezeichnet wird (Mähler und Stern 2006, 182f). Für die weiteren Ausführungen wird diese Definition als grundlegend angesehen.

2.2 Zusammenhänge zwischen analogem Denken und Transfer

In dem hier vertretenen Begriffsverständnis schließt die Nutzung von Analogien, wie sie beim analogen Verstehen und analogen Problemlösen auftritt, Transferprozesse ein. Voraussetzung für erfolgreichen Transfer ist das Auffinden eines geeigneten Quellproblems bzw. das Erkennen der Analogie der beiden Situationen/Probleme, welches seinerseits wiederum Abstraktionsprozesse erfordert. Wird die Analogie der Situationen erkannt und findet eine Zuordnung der sich entsprechenden Elemente im Quell- und Zielbereich statt, kann ein Transfer verschiedener Aspekte der Quellsituation erfolgen. Je nach Zielsetzung bezieht sich dieser auf weitere, von den analogieinduzierenden Relationen unterschiedlichen Relationen/Strukturen des Quellbereichs, auf bekannte Konzepte und Begriffe innerhalb des Quellbereichs, auf Strategien bzw. Vorgehensweisen, die zur Lösung des Quellproblems eingesetzt wurden, auf (Teil-)Ergebnisse des Quellproblems, auf Folgerungen über z.B. weitere Eigenschaften oder auf andere im Zusammenhang mit dem Quellbereich erworbene Wissensbausteine (s. Abb. 2).

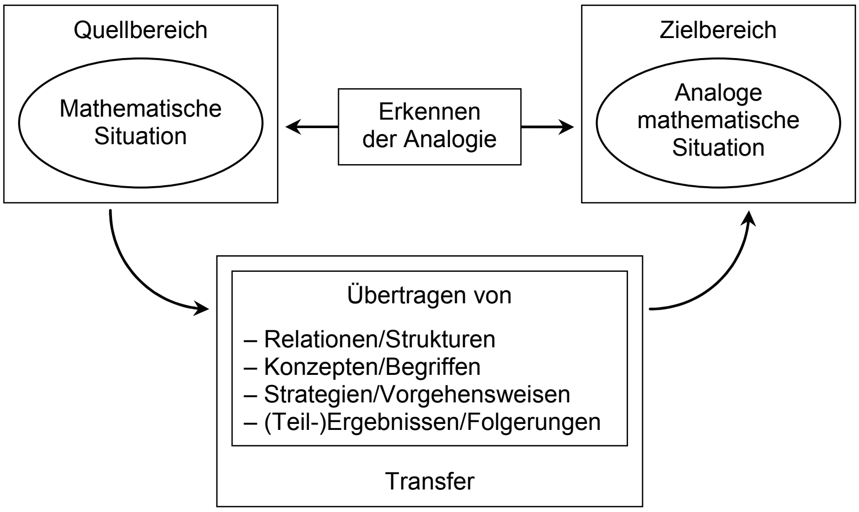


Abbildung 2: Transfer beim analogen Verstehen oder Problemlösen

Diese Sichtweise schließt nicht aus, dass Transfer auch außerhalb von Analogienutzung möglich ist. So werden Transferprozesse evtl. nicht immer durch Analogien von Situationen sondern auch durch andere situative Gegebenheiten ausgelöst. Für die Konkretisierung des hier betrachteten Begabungsmerkmals soll allerdings die Anwendung des Transferbegriffs auf den Kontext von Analogien begrenzt bleiben.

2.3 Analogieerkennung und Strukturerkennung

Das Erkennen von Analogien umfasst Muster- und Strukturerkennungsprozesse, geht jedoch über diese hinaus. So genügt es nicht, im Quell- und Zielproblem jeweils beliebige mathematische Strukturen zu erkennen, sondern es gilt den Fokus auf die mathematischen Strukturen zu richten, die kennzeichnend für die Analogie sind. Mitunter werden jedoch – z.B. durch Aufbau unterschiedlicher interner Repräsentationen – in den beiden mathematischen Situationen verschiedene sinnvolle Strukturen identifiziert. Daraus folgend können zwar ggf. beide Situationen unter Nutzung der erkannten Strukturen korrekt bearbeitet werden, ein für die Bearbeitung hilfreicher Transfer kann i.d.R. allerdings nicht erfolgen.

Umgekehrt kann Erkennen von Mustern und Strukturen im Sinne eines „Wiedererkennens" auf Analogiebildung basieren. Somit bedingen sich Analogieerkennung und Strukturerkennung teilweise gegenseitig. Synonym sind beide Begriffe dennoch nicht zu verwenden. *Wesentliche Unterschiede bestehen insbesondere darin, dass der Rückgriff auf vorhandenes Wissen bei der Strukturerkennung eher implizit erfolgt, während bei der Analogieerkennung ein expliziter Bezug zu einer Quellsituation hergestellt wird.*

3 Besondere Fähigkeiten im analogen Denken als Komponente mathematischer Begabungen

Hinweise für eine Zuordnung besonderer Fähigkeiten im analogen Denken zu Merkmalen oder Komponenten mathematischer Begabungen lassen sich verschiedenen Studien entnehmen. Dienlich sind hier insbesondere Studien, in denen die Probanden der Testgruppe aufgrund ihrer hohen mathematischen Leistungsfähigkeit ausgewählt und deren Leistungen im analogen Denken mit den Leistungen einer Vergleichsgruppe in Beziehung gesetzt werden. Leider gibt es nur wenige solcher Studien, im Bereich der hier betrachteten Altersgruppe liegen ausschließlich die Untersuchungsergebnisse Käpnicks (1998) vor. Aus diesem Grund werden hier als Belege auch Vergleichsstudien mit älteren Probanden sowie Untersuchungen herangezogen, in denen Zusammenhänge zwischen mathematischer Leistung und analogem Denken erhoben werden. Nachfolgend werden Studienergebnisse zum analogen Zuordnen, zum analogen Problemlösen sowie zu Zusammenhängen beider Kategorien vorgestellt. Geeignete Untersuchungen zum analogen Verstehen sind meines Wissens nicht verfügbar.

3.1 Studienergebnisse zum analogen Zuordnen

Zum analogen Zuordnen liegen vorwiegend Studien zu klassischen Analogien vor, wie sie üblicherweise in psychometrischen Tests zur Erfassung allgemeiner Intelligenz und dabei insbesondere zur Erhebung des analogen Denkens eingesetzt werden. Wenn besondere Fähigkeiten im analogen Denken allgemein mathematische Leistungen begünstigt, so müssten solche Intelligenztestaufgaben ein Prädiktor für mathematische Leistungsfähigkeit sein, auch wenn bei verbalen Analogien keine speziell mathematischen Inhalte abgeprüft werden. Verfügbare Studien liefern hier jedoch unterschiedliche Ergebnisse. Während Buehl und Alexander in einer dreijährigen Längsschnittstudie mit 61 Schulanfängern und auch White, Alexander und Daugherty in einer Untersuchung mit 26 Vorschulkindern Zusammenhänge zwischen analogem und frühem mathematischen Denken nachwiesen (Buehl und Alexander 2004; White et al. 1998), zeigten sich diese Zusammenhänge in anderen Studien mit älteren Probanden nur teilweise. So untersuchte Pollmer (1992) vergleichend Oberstufenschüler mit mathematischen Spezialbegabungen und leistungsstarke Schüler ohne Spezialbegabungen mit annähernd gleichem Intelligenzniveau hinsichtlich möglicher Unterschiede einzelner elementarer kognitiver Prozesse. Dazu wurde mit allen Schülern der IST (Intelligenz-Struktur-Test) durchgeführt. Es zeigten sich deutliche Unterschiede zwischen den beiden Gruppen in den Subtests „Rechenaufgaben", „Figurenauswahl" und etwas geringere in dem Subtest „Zahlenreihen", der Subtest „Analogien" leistete wider Erwarten jedoch den geringsten Beitrag zur Trennung. Pollmer folgert daraus: „Die Fähigkeit zur Analogiebildung, wie sie der Test mißt, ist danach für mathematische Begabungen nicht typisch, sondern wahrscheinlich nur für allgemeine Intelligenz" (Pollmer 1992, 277). In anderen Untersuchungen, in denen ebenfalls der IST zum Einsatz kam, waren demgegenüber Mathematikspezialschüler den Schülern der Vergleichsgruppe deutlich überlegen (van der Meer 1985).

Die meisten der hier aufgeführten Studien lassen demnach einen Zusammenhang zwischen Fähigkeiten im analogen Zuordnen (Typ b und c) und mathematischer Leistung bzw. mathematischer Leistungsfähigkeit vermuten. Van der Meer begründet diese Zusammenhänge dadurch, dass auch bei semantischen Analogien, wie sie in den Untersuchungen häufig verwendet werden, kognitive Prozesse wie „Reduktion des Informationsangebotes auf das entscheidende Maß" und „effektive Kombination elementarer Operationen zur Anforderungsbewältigung" zum Einsatz kommen können, die von van der Meer als Prädiktoren mathematischer Begabungen angesehen werden (van der Meer 1985, 254).

Käpnick (1998) setzte in einer Versuchsgruppe mit potentiell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern sowie mit einer aus „normal" begabten Kindern zusammengesetzten Vergleichsgruppe zwei verschiedene Indikatoraufgaben ein, bei denen Fähigkeiten im analogen Zuordnen gezeigt werden können. Durch ein etwas abweichendes Begriffsverständnis werden von ihm die mit den Aufgaben zu erfassenden Komponenten mit „Fähigkeit im Transfer mathematischer Strukturen" bzw. „Fähigkeit im Transfer mathematischer Muster" benannt. Beide Aufgaben können jedoch dem Aufgabentyp d) (Freie Ergänzung aller Elemente in einem vorgegebenen Zielbereich) zugeordnet werden, wobei der Zielbereich der einen Aufgabe (Indikatoraufgabe 4) ein Zahlendreieck (s. Abb. 3), der der anderen Aufgabe (Indikatoraufgabe 8) ein dreieckig angeordnetes Punktmuster darstellt. Beide Aufgaben konnten von der Versuchsgruppe signifikant besser gelöst werden als von den Kindern der Vergleichsgruppe. Demzufolge könnten besondere Fähigkeiten im analogen Zuordnen bei Aufgaben, in denen die Elemente im vorgegebenen Zielbereich frei zu ergänzen sind, im Zusammenspiel mit weiteren Merkmalen bereits im Grundschulalter auf eine mathematische Begabung hindeuten.

3.2 Studienergebnisse zum analogen Problemlösen

Das analoge Problemlösen wurde unter verschiedenen Zielstellungen erforscht, jedoch liegen nur wenige Studien vor, die einen Vergleich der Leistung mathematisch begabter und „normal" begabter Probanden umfassen.

In einer Studie von Davidson (1986) wurden u.a. Unterschiede zwischen intellektuell begabten und durchschnittlich begabten Viert- bis Sechstklässlern im selektiven Vergleichen[5] („selective comparison") bei der Bearbeitung verschiedener, auch mathematischer Problemstellungen untersucht. Mit insgesamt 4 × 2 Versuchsgruppen wurden die Bedingungen hinsichtlich der Vorgabe vorab zur Verfügung gestellter Informationen systematisch variiert. Die Untersuchungen ergaben u.a., dass Schüler mit hoher Intelligenz auch dann bereits häufig Analogien zwischen Problemsituationen nutzten, wenn ihnen vorab beispielhaft Lösungswege vorgestellt wurden, sie jedoch noch nicht auf die Übertragbarkeit der Lösungswege hingewiesen wurden. Demgegenüber konnten normal begabte Schüler nur gering von der Vorgabe von Beispielaufgaben profitieren und erst konkrete Hinweise zur Anwendbarkeit der Lösungswege führten zur Verbesserung der Lösungsquote. Hieraus lässt sich folgern, dass es intellektuell begabten Schülern leichter als normal begabten Schülern fällt, eigenständig Analogien zwischen verschiedenen Problemsituationen zu erkennen und bereits bekannte Lösungswege auf die Bearbeitung einer analogen Situation zu übertragen. Die Aussagekraft dieser Untersuchung für die Konkretisierung des hier betrachteten Begabungsmerkmals ist allerdings insofern begrenzt, als dass lediglich die intellektuelle Begabung nicht aber die mathematische Begabung der Probanden erhoben wurde und so nicht eingeschätzt werden kann, inwiefern die Ergebnisse auf mathematisch begabte Probanden übertragbar sind.

McVey (1993) betrachtete Unterschiede im analogen Transfer zwischen mathematisch begabten und durchschnittlich begabten Jugendlichen. Sie bildete vier Grup-

5 Von „selektivem Vergleichen" wird dann gesprochen, wenn alte Informationen zum Verständnis neuer Informationen mit diesen in Beziehung gesetzt bzw. wenn Analogien, Metaphern oder Modelle zur Problemlösung genutzt werden (Davidson 1986). „Selektives Vergleichen" lässt sich damit sowohl dem analogen Verstehen als auch dem analogen Problemlösen zuordnen.

pen (Highly gifted, gifted, above average, average), jeweils geteilt in eine Experimental- und eine Kontrollgruppe, und verwendete Aufgaben aus dem Themenfeld der Algebra teils mit analoger Tiefen-, teils mit analoger Oberflächen-, aber unterschiedlicher Tiefenstruktur. Ziel war es zu untersuchen, ob die vier Gruppen sich hinsichtlich beobachtbarer Transfereffekte unterscheiden, und zwar insbesondere hinsichtlich eines positiven Transfers der analogen Tiefenstruktur sowie eines negativen Transfers der analogen Oberflächenstruktur. In der Gruppe der mathematisch begabten Schüler waren häufiger positive Transfereffekte zu beobachten als in der Gruppe der durchschnittlich begabten Schüler. Während diese Effekte in der „Gifted group“ deutlich erkennbar waren, ließen sich jedoch in der „Highly Gifted group“ keine Transfereffekte nachweisen. Die Teilnehmer der „Highly Gifted Group“ verwendeten in der Experimentalgruppe zwar zu fast identischen Anzahlen die gleichen Vorgehensweisen wie die der „Gifted group“, es bestanden jedoch geringere Differenzen zur Kontrollgruppe. Hinsichtlich negativer Transfereffekte unterschieden sich die vier Gruppen nicht, in allen Gruppen war bei drei Schülern ein negativer Effekt zu beobachten. McVey folgert aus ihren Analysen, dass die Fähigkeiten zum Transfer auch bei mathematisch begabten Schülern sehr unterschiedlich ausgeprägt sind und dass insbesondere einige mathematisch sehr begabte Schüler eher intuitiv als strukturorientiert an die Aufgaben herangehen und sich dabei zum Teil von Oberflächenmerkmalen leiten lassen.

Käpnick (1998) setzte in seinen Untersuchungen eine Indikatoraufgabe zu figurierten Zahlen[6] ein, die sich mit Einschränkungen dem analogen Problemlösen zuordnen lässt. Sie enthält in den Teilaufgaben b) und c) zwei zueinander analoge mathematische Fragestellungen (b: Angabe der 30. Dreieckszahl, c: Summe der Zahlen von 1 bis 30), die sich hinsichtlich ihrer Repräsentation (ikonisch, symbolisch) unterscheiden. Die Aufgaben sind zwar unabhängig voneinander lösbar, bei Erkennen der Analogie der beiden Teilaufgaben besteht jedoch die Möglichkeit, das bereits ermittelte Ergebnis aus b) ohne weitere Rechnung auf c) zu transferieren. Die Ergebnisse zeigen, dass 4,5% der Vergleichsschüler und etwa ein Drittel der potentiell begabten Kinder die Transfermöglichkeit des Ergebnisses von der Aufgabe b) auf c) erkannten. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Experimentalgruppen bleibt auch dann erhalten, wenn man nur die Werte der Teilnehmer berücksichtigt, die in Teilaufgabe b) einen sinnvollen Lösungsansatz finden konnten.

Lack (2009) verwendete in ihrer Videostudie mit mathematisch interessierten Erst- und Zweitklässlern Aufgaben, in denen Analogien zwischen verschiedenen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe erkannt und bereits bekannte Ergebnisse für die

[6] In kleiner Modifikation wurde diese Aufgabe auch in der Studie von Aßmus und Förster (2013, in diesem Heft) verwendet.

weitere Bearbeitung genutzt werden können. Die von ihr eingesetzten Aufgaben können dem analogen Problemlösen zugeordnet werden, wobei allerdings Quell- und Zielaufgabe durch die Kontextgleichheit sehr ähnlich sind. Die Nutzung von Analogien zwischen verschiedenen Teilaufgaben beobachtete Lack in ihren qualitativen Studien relativ häufig, Bezüge zu anderen (Quell-) Aufgaben wurden von den Kindern nicht hergestellt.

Zusammenfassend liefern die hier dargestellten Studienergebnisse zum analogen Problemlösen Hinweise darauf, dass es mathematisch begabten Kindern und Jugendlichen besser als normal begabten gelingt, Analogien von Tiefenstrukturen bei mathematischen Aufgaben zu erkennen und diese Analogien für die Lösung der Zielaufgabe durch den Transfer von hilfreichen Aspekten der Quellaufgabe zu nutzen.

3.3 Studienergebnisse zu Zusammenhängen zwischen analogem Zuordnen und analogem Problemlösen

Novick und Holyoak (1991) untersuchten u.a. Zusammenhänge zwischen erfolgreichem Transfer bei mathematischen Problemstellungen und mathematischer Expertise einerseits sowie Fähigkeiten im analogen Zuordnen andererseits. Hierfür setzten sie mit 132 Studenten ein Quellproblem, dessen Lösung erklärt wurde, eine Problemstellung, die keinen Zusammenhang zu dem Quellproblem aufwies, sowie drei Zielprobleme ein, zu denen die Probanden in vier Gruppen unterschiedliche Hinweise bekamen. Darüber hinaus wurden die mathematische Expertise – gemessen mit dem mathematischen Teil des „Scholastic Aptitude Tests“ (SAT-M) – und die Fähigkeiten im analogen Zuordnen – gemessen mit dem Testteil zum verbalen analogen Denken des „Differential Aptitude Tests“ – erhoben. Bei den Auswertungen zeigten sich klare Ergebnisse: Das Ausmaß an mathematischer Expertise war ein reliabler Prädiktor von Transfer, Zusammenhänge des Transfers mit verbalen Fähigkeiten (ermittelt mit dem verbalen Teil des SAT) und mit Fähigkeiten im analogen Zuordnen konnten nicht nachgewiesen werden. Diese Studie bestätigt die auch von anderen Autoren (z.B. Mähler und Stern 2006) benannte Bedeutung des Vorwissens für erfolgreichen Transfer. Im Kontext des Verständnisses mathematischer Begabung als „sich entwickelnde Expertise“ (Fritzlar 2010) verstärken die Ergebnisse Novicks und Holyoaks die Vermutungen, dass viele mathematisch begabten Jugendlichen u.a. bedingt durch größeres Vorwissen und Problemlöseerfahrungen bessere Leistungen im analogen Problemlösen zeigen als „normal“ begabte Jugendliche. Darüber hinaus liefert die Studie Anhaltspunkte, dass die beiden Kategorien „analoges Zuordnen“ und „analoges Problemlösen“ möglicherweise weniger Gemeinsamkeiten aufweisen als auf Grundlage der theoretischen Überlegungen zu vermuten wäre. Einschränkend sei allerdings angemerkt, dass die Ergebnisse einer einzelnen Studie keine Verallgemeinerungen zulassen. Auch geht aus den

Ausführungen Novicks nicht hervor, ob Probanden mit besonderer mathematischer Expertise an der Untersuchung beteiligt waren.

3.4 Zusammenfassung

Aus den dargestellten Studien lassen sich folgende Vermutungen hinsichtlich der Fähigkeiten im analogen Denken bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern ableiten: Mathematisch begabten Kindern gelingt es leichter als „normal“ begabten Kindern, analoge Situationen bei vorgegebenem Zielbereich zu konstruieren und entsprechende Aufgaben des analogen Zuordnens zu lösen. Darüber hinaus erkennen sie leichter Analogien zwischen (vorgegebenen) mathematischen Situationen und nutzen diese häufiger z.B. zur Bearbeitung von leicht veränderten Aufgaben bzw. bei Aufgaben, in denen analoge Strukturen in anderen Repräsentationen zu erkennen sind. Zum analogen Problemlösen ohne Vorgabe eines Quellproblems sind keine Aussagen möglich, da entsprechende Studien fehlen. Da solche Situationen allerdings nur zufällig zu beobachten und daher nicht planbar sind, sind sie mit den üblichen Forschungsmethoden auch kaum kontrolliert zu erfassen. Es ist allerdings zu vermuten, dass analoges Problemlösen auch bei mathematisch begabten Grundschülern nur selten auftritt, da geeignete Quellprobleme und deren Lösungsmethoden als Vorwissen zur Verfügung stehen müssen und die mathematischen Erfahrungen der Kinder bedingt durch das Alter noch relativ gering sind.

Zur Bestätigung der hier formulierten Vermutungen besteht weiterer Forschungsbedarf. Einen kleinen Beitrag dazu leistet die in diesem Heft im Anschluss dargestellte Studie von Aßmus und Förster (2013).

Literatur

Aßmus, Daniela (2010): Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern. In: Torsten Fritzlar und Frank Heinrich (Hg.): Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern. Offenburg: Mildenberger, S. 45–61.

Aßmus, Daniela; Förster, Frank (2013): ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern In: mathematica didactica 36, S. 45–65 (in diesem Heft).

Bruder, Regina; Collet, Christina (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Buehl, Michelle M.; Alexander, Patricia A. (2004): Longitudinal and cross-cultural trends in young children's analogical and mathematical reasoning abilities. In: Lyn D. English (Hg.): Mathematical and analogical reasoning of young learners. Mahwah, NJ: Erlbaum, S. 47–73.

Davidson, Janet E. (1986): The role of insight in giftedness. In: Robert J. Sternberg und Janet E. Davidson (Hg.): Conceptions of giftedness. Cambridge: University Press, S. 201–222.

Dörner, Dietrich (1995): Problemlösen und Gedächtnis. In: Dietrich Dörner und Elke van der Meer (Hg.): Das Gedächtnis. Probleme – Trends – Perspektiven. Göttingen: Hogrefe, S. 295–320.

English, Lyn D. (2004): Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In: Lyn D. English (Hg.): Mathematical and analogical reasoning of young learners. Mahwah, NJ: Erlbaum, S. 1–22.

Fritzlar, Torsten (2010): Begabung und Expertise. Eine mathematikdidaktische Perspektive. In: mathematica didactica 33, S. 113–140.

Gentner, Dedre (1983): Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. In: Cognitive Science 7, S. 155–170.

Gick, Mary L.; Holyoak, Keith J. (1983): Schema induction and analogical transfer. In: Cognitive Psychologie 15, S. 1–38.

Hesse, Friedrich W. (1991): Analoges Problemlösen. Eine Analyse kognitiver Prozesse beim analogen Problemlösen. Weinheim: Psychologische Verlags Union.

Holyoak, Keith J.; Gentner, Dedre; Kokinov, Boicho N. (2001): Introduction: The place of analogy in cognition. In: Dedre Gentner, Keith J. Holyoak und Boicho N. Kokinov (Hg.): The analogical mind. Perspectives from cognitive science. MIT Press: Cambridge, S. 1–19.

Holyoak, Keith J.; Thagard, Paul (1989): Analogical mapping by constraint satisfaction. In: Cognitive Science 13, S. 295–355.

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang.

Klauer, Karl Josef (2011): Transfer des Lernens. Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird. Stuttgart: Kohlhammer.

Klix, Friedhart (1992): Die Natur des Verstandes. Göttingen: Hogrefe.

Krause, Werner (2000): Denken und Gedächtnis aus naturwissenschaftlicher Sicht. Göttingen: Hogrefe.

Lack, Claudia (2009): Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Mähler, Claudia; Stern, Elsbeth (2006): Transfer. In: Detlef H. Rost (Hg.): Handwörterbuch pädagogische Psychologie. 3. überarbeitete und erweiterte Aufl. Weinheim: Beltz, S. 782–793.

McVey, Mary D. (1993): Analogical transfer: Are there performance differences among high-ability students? Paper presented at the annual meeting of the american educational research association. Atlanta. Online verfügbar unter http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/educacion/experiencias/ (02.02.2013).

Novick, Laura R. (1988): Analogical transfer, Problem similarity, and expertise. In: Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 14 (3), S. 510–520.

Novick, Laura R.; Holyoak, Keith J. (1991): Mathematical problem solving by analogy. In: Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition 17 (3), S. 398–415.

Pollmer, Käte (1992): Intellektuelle Hochbegabung und mathematische Spezialbegabung. Theoretische Auffassungen, empirische Befunde, Konsequenzen für die Förderung. In: Klaus K. Urban (Hg.): Begabungen entwickeln, erkennen und fördern. Hannover: Universität Hannover, S. 273–286.

Pólya, George (1995): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. 4. Aufl. Tübingen: Francke.

Seel, Norbert M. (2003): Psychologie des Lernens. 2., aktualisierte und erw. Aufl. München: Reinhardt.

Steiner, Gerhard (2006): Lernen und Wissenserwerb. In: Andreas Krapp und Bernd Weidenmann (Hg.): Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. 5. vollständig überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel: Beltz Psychologie-Verl.-Union, S. 137–202.

Sternberg, Robert J. (1977): Intelligence, information processing, and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thußbas, Claudia (2001): Wissenstransfer. Der Einfluss von Inhalt und Vorwissen auf analoges Problemlösen. Köln: Kölner Studien Verlag.

van der Meer, Elke (1985): Mathematisch-naturwissenschaftliche Hochbegabung. In: Zeitschrift für Psychologie 193 (3), S. 229–258.

van der Meer, Elke (1995): Gedächtnis und Inferenzen. In: Dietrich Dörner und Elke van der Meer (Hg.): Das Gedächtnis. Probleme – Trends – Perspektiven. Göttingen: Hogrefe, S. 341–380.

White, C. Stephen; Alexander, Patricia A.; Daugherty, Martha (1998): The relationship between young children's reasoning and mathematical learning. In: Mathematical cognition 4 (2), S. 103–123.

Winter, Heinrich (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Anschrift der Verfasserin

Daniela Aßmus
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik
06099 Halle an der Saale
e-Mail: daniela.assmus@paedagogik.uni-halle.de

Eingang Manuskript: 13.12.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.02.2013
Online verfügbar: 04.03.2013