Mathematische Begabungen im Grundschulalter

Ein Überblick zu aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsarbeiten

von

Torsten Fritzlar, Halle an der Saale

Kurzfassung: Im deutschsprachigen Raum gab es in den vergangenen Jahren zahlreiche mathematikdidaktische Untersuchungen zu mathematischen Begabungen insbesondere im Grundschulalter. Darunter lassen sich Arbeiten zu Begabungsmodellen und Möglichkeiten der Identifizierung und Förderung mathematisch begabter junger Schülerinnen und Schüler finden, Arbeiten zu mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen für eine genauere Kennzeichnung dieses Konstrukts, zu Vorgehensweisen beim Problemlösen oder auch zu geschlechtsspezifischen Aspekten. Im Beitrag werden ausgewählte Forschungsarbeiten vorgestellt und eingeordnet sowie offene Fragen umrissen. Dabei erfolgt auch eine Einordnung der weiteren Beiträge in diesem Heft.

Abstract: During the last few years in Germany there have been conducted numerous studies concerning mathematical giftedness especially in primary school age. Research projects in the field of mathematics didactics include for instance studies on models of giftedness, possibilities of identification and fostering of gifted students, their problem solving processes and competencies, studies on special characteristics of mathematical giftedness, or on gender-specific aspects in this area. I want to describe some important didactic research projects and interrelations between them. Thereby I will also introduce the other contributions in this issue.

Einleitung

Psychometrische Ansätze zur Kennzeichnung (spezifischer) intellektueller Begabungen haben eine lange Tradition und sind auch heute noch weit verbreitet (z. B. Rost, 2000). Schließlich belegen zahlreiche Studien statistische Zusammenhänge zwischen dem durch entsprechende Testungen gemessenen Intelligenzquotienten und Leistungen in Schule, Studium und Beruf. Allerdings gibt es in derartigen Studien in der Regel eine relativ große Zahl von „Ausnahmen", das Bedingungs-Wirkungs-Verhältnis kann nicht immer zuverlässig aufgeklärt werden (Waldmann & Weinert, 1990) und die korrelativen Beziehungen zwischen Intelligenz und (Schul-) Leistung sind methoden-, populations- und situationsspezifisch (Weinert & Petermann, 1980). Zu recht weisen Waldmann und Weinert (1990) deshalb dar-auf hin, dass „der Zusammenhang zwischen psychometrisch definierten Fähigkeitskonzepten auf der einen und dem jeweils erreichten oder erreichbaren Leistungsniveau in Schule, Universität und Beruf auf der anderen Seite empirisch unklar und theoretisch schwer zu interpretieren ist" (S. 20). Nicht nur für die Mathematik kann meines Erachtens bezweifelt werden, dass sich erfolgreiche Bearbeitungsprozesse bei fachlich reichhaltigen Problemstellungen vollständig in Fähigkeiten zergliedern lassen, die mit Intelligenztests überprüfbar sind.[1] Potenziale zur Beschreibung bzw. Kennzeichnung (spezifischer) Begabungen sehen Waldmann und Weinert daher vor allem in Antworten auf die Frage, „durch welche *Denkprozesse* diese hohen Leistungen zustandekommen und in welchen *kognitiven Prozessen und Strukturen* sich Individuen mit hohen und geringen Leistungen voneinander unterscheiden" (S. 22, Hervorhebungen T. F.).

Ausgehend von den grundlegenden Untersuchungen Krutetskiis sollen in diesem Beitrag ausgewählte Ergebnisse aktuellerer deutschsprachiger Arbeiten zusammengetragen werden, die sich aus mathematikdidaktischer Perspektive dem Phänomen Begabung nähern und versuchen, die eben formulierten Fragen zu beantworten. Dabei möchte ich mich auch aus Gründen des Umfangs auf das junge Schulalter konzentrieren.

1 Krutetskiis Kennzeichnung mathematischer Begabungen

Einen ersten kognitionspsychologisch orientierten, auch für heutige Forschungsarbeiten noch grundlegenden Versuch der Beschreibung mathematischer Begabungen im Schulalter unternahm in den 1950er und 1960er Jahren eine Arbeitsgruppe um den sowjetischen Psychologen *Vadim Krutetskii*. Dazu wurden umfangreiche empirische Untersuchungen mit mehr als 200 Schülerinnen und Schülern der zweiten bis zehnten Klassenstufe durchgeführt, die aufgrund ihrer Noten, vor allem aber auch auf der Basis von Lehrerurteilen als mathematisch leistungsstark („capable"), durchschnittlich oder relativ leistungsschwach („relatively incapable") eingeschätzt wurden. Trotz der relativ hohen Zahl an Probanden wurden die Schülerergebnisse bei der Bearbeitung zahlreicher, speziell konstruierter Aufgabenserien sowohl quantitativ als auch qualitativ ausgewertet, darüber hinaus wurden diese Analysen durch mehrjährige Beobachtungen, Befragungen von Eltern und Lehrern, von Mathematikdidaktikern und Mathematikern ergänzt sowie durch biografische Forschungen weiter angereichert (Krutetskii, 1976). Ziel der Studie war die Gewinnung möglichst genauer psychologischer Indikatoren für mathematische Begabungen bzw. die Herausarbeitung von spezifischen Fähigkeiten und Merkmalen, in

[1] Man vergleiche beispielsweise auch Arbeiten zum Handeln und Entscheiden in komplexen Konstellationen, unter anderem von Dörner (z. B. Dörner, Kreuzig, Reither, & Stäudel, 1983) und Funke (z. B. Funke, 2006).

denen sich mathematisch erfolgreiche von weniger erfolgreichen Schülerinnen und Schülern unterscheiden. Sehr knapp lassen sich diese etwa auf folgende Weise zusammenfassen (S. 350 f.):[2]

- Gewinnen mathematischer Informationen: Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischen Materials, zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems
- Verarbeiten mathematischer Informationen: Fähigkeit zum bereichsspezifischen logischen Denken; Fähigkeit zum Denken in mathematischen Symbolen; Fähigkeit zur schnellen und breiten Generalisierung mathematischer Objekte, Beziehungen und Operationen; Fähigkeit zur Verkürzung von Prozessen mathematischen Schlussfolgerns; Fähigkeit zum Denken in verkürzten Strukturen; Beweglichkeit des Denkens im mathematischen Bereich; Streben nach Klarheit, Einfachheit, Ökonomie und Rationalität von Lösungsprozessen; Umkehrbarkeit mentaler Prozesse beim mathematischen Schlussfolgern
- Speichern mathematischer Informationen: mathematisches Gedächtnis (verallgemeinertes Wissen über mathematische Beziehungen, Typen von Aufgaben und Problemen, Argumentations- und Beweisschemata, Problemlösemethoden, grundsätzliche Zugangsweisen)
- allgemeine synthetische Komponente: mathematische Gerichtetheit

Die beschriebenen Komponenten sind nach Krutetskii eng miteinander verknüpft und beeinflussen sich gegenseitig. Deren Verbindung zu einer Struktur mathematischen Denkens kann individuell unterschiedlich sein, wobei Komponenten auch durch andere kompensiert werden können. Hohe mathematische Leistungen lassen sich demnach durch verschiedene Komplexe von Fähigkeiten bzw. „psychischen Besonderheiten“ erreichen (Krutezki, 1968). Es gibt daher verschiedene Ausprägungen mathematischer Begabungen, zumal nach Krutetskii zusätzlich weitere nützliche, allerdings nicht notwendige Merkmale wie die Geschwindigkeit von Denkprozessen, Rechenfertigkeiten, ein ausgeprägtes Gedächtnis für Symbole, Zahlen und Formeln, Raumvorstellungsvermögen sowie die Fähigkeit zum anschaulichen Vorstellen abstrakter mathematischer Beziehungen und Abhängigkeiten existieren (Krutetskii, 1976).

Die von Krutetskii beschriebenen Fähigkeiten lassen sich dabei auffassen als relativ verfestigte und verallgemeinerte, individuell spezifische Bestandteile und Besonderheiten des Verlaufs psychischer Prozesse, die in der Qualität der Aneignung und Ausführung einer Tätigkeit, im Grad ihrer Produktivität, in der Weite ihrer Übertragbarkeit auf neue Anforderungen oder auch in der Originalität von Tätig-

[2] Eine Übersetzung ins Deutsche findet sich beispielsweise auch bei Käpnick (1998, S. 79); vgl. auch Fritzlar (2010a).

keit bzw. Tätigkeitsprodukt zum Ausdruck kommen. Sie entwickeln und spezifizieren sich auf der Grundlage geburtlich bestimmter Anlagen im Prozess der Tätigkeit (Kossakowski & Lompscher, 1977). Eine wesentliche Rolle spielt dabei auch die Akkumulation von Kenntnissen, die einerseits durch Fähigkeiten des Individuums gewonnen werden und andererseits eine wesentliche Grundlage der Entwicklung und Realisation von geistigen Fähigkeiten sind. Fähigkeiten, Wissen und tätige Auseinandersetzung entstehen und entwickeln sich demnach in engen Wechselwirkungen aneinander fort.

Daraus ergibt sich zum einen, dass Fähigkeiten nicht an sich existieren, sondern immer nur an bestimmten Inhalten, mit denen sie eine untrennbare Einheit bilden (Lompscher & Gullasch, 1977). In diesem Sinne lässt sich auch von spezifischen mathematischen Fähigkeiten sprechen (vgl. auch Krutetskii, 1976, S. 360).

Zum anderen scheint es naheliegend, dass die von Krutetskii beschriebenen Komponenten im Verlauf der Schulzeit unterschiedliche Ausprägungen besitzen. Tatsächlich zeigten die Untersuchungen seiner Doktorandin *Irina Dubrovina,* dass sowohl das Streben nach ökonomischem Denken als auch ein mathematisches Gedächtnis im Grundschulalter noch nicht zum Ausdruck kommen, darüber hinaus sind Flexibilität und Reversibilität des Denkens allenfalls in „Keimform" zu beobachten, wobei die Umkehrbarkeit von Gedankengängen als besonders anspruchsvoll gilt (Lompscher & Gullasch, 1977). Auch die Verkürzung von Denk- und Verarbeitungsprozessen kommt erst gegen Ende der klassischen Grundschulzeit über elementare Formen hinaus, dagegen ist das zügige Erfassen der formalen Struktur einer mathematischen Situation für begabte Kinder bereits früher möglich; gegen Ende der Grundschulzeit können sie auch mit komplexeren Strukturen umgehen. Von allen Komponenten tritt im Grundschulalter nach Dubrovina „am klarsten die Fähigkeit zur Verallgemeinerung des Mathematikstoffes hervor, verständlicherweise in relativ einfacher Form als Fähigkeit, das Gemeinsame in verschiedenen Aufgaben und Beispielen zu erfassen und entsprechend auch das Unterschiedliche im Gemeinsamen zu sehen" (Krutezki, 1968, S. 52).

Zum dritten ergibt sich aus der gemeinsamen Entwicklung von Fähigkeiten, Wissen und Tätigsein die auch von Krutetskii (1968) bereits bedachte große Bedeutung von Persönlichkeitsmerkmalen (z. B. Anstrengungsbereitschaft), von Interessen, Motiven, Einstellungen etc. für die Entwicklung besonderer, also besonders stark oder individuell spezifisch ausgeprägter Fähigkeiten.

2 Denk- und Handlungsmuster nach Kießwetter

Charakteristisch für das forschende Arbeiten von Mathematikern sind nach *Karl Kießwetter* Theoriebildungsprozesse (Kießwetter, 2006), in denen die Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen eine zentrale Rolle spielt, die jedoch zugleich darüber hinaus gehen: Sie beginnen in der Regel mit der Erkundung einer mathematisch reichhaltigen Situation, aus der eine Anfangsfragestellung gewonnen wird; gelegentlich ist eine solche auch schon vorgegeben. Durch deren Bearbeitung, durch Variationen und Ausweitungen können sich weitere Arbeitsanlässe ergeben – ein Kreislauf aus Problembearbeitungen und dem Entwickeln weiter(führend)er Problemstellungen wird in Gang gesetzt. Aus den dabei entstehenden Ergebnissen und Methoden, aus entwickelten Strategien und Hilfsmitteln, aus den gebildeten Begriffen und den gefundenen logischen Zusammenhängen erwächst ein „Theoriegewebe", das schließlich noch zu optimieren ist (beispielsweise in Bezug auf Eleganz, Passung an bereits Vorhandenes, Verallgemeinerungsfähigkeit), das konserviert und in bereits vorhandene Wissensbestände integriert werden muss, wobei sich weitere Arbeitsanlässe ergeben können (Fritzlar, 2012).

Ausgehend von diesen Spezifika mathematischen Tätigseins und unter Einbezug der Ergebnisse Krutetskiis[3] konstruierte Kießwetter zu Beginn der 1980er Jahre einen „Katalog von Kategorien mathematischer Denkleistungen", in denen sich mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe insbesondere bei der Auseinandersetzung mit mathematisch reichhaltigen Situationen abheben sollen und die deshalb zur Konstruktion des „Hamburger Tests für mathematische Begabung" (HTMB) benutzt wurden: Organisieren von Material; Sehen von Mustern und Gesetzen; Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen; Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster bzw. Gesetze in „neuen" Bereichen erkennen und verwenden); Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten; Prozesse umkehren. Dieser Katalog sollte allerdings ausdrücklich keine umfassende Beschreibung einer solchen Begabung sein (z.B. Kießwetter, 1985). Wichtig scheint mir, dass er bereits relativ komplexe Muster mathematischen Operierens umfasst, die noch stärker als Krutetskiis Fähigkeitskatalog durch spezifische Erfahrungen geprägt sind und sich mit diesen verfestigen und erweitern (vgl. Fritzlar, 2010a).

Naheliegend erscheint dann die Frage, welche Erwartungen man diesbezüglich für das Grundschulalter haben kann. Kießwetters Antwort besteht aus einem wieder notwendigerweise unvollständigen Katalog von Kategorien mathematischer „Skizzen", in denen erfolgreich mathematisch agiert wird:

- *„Zusammenhänge an Spezialfällen verifizieren.* – Das Kind hat sich Material organisiert oder auf anderer Grundlage Zusammenhänge bzw. Gesetze erkannt und diese schließlich sinnvoll, also insbesondere auch hinreichend umfassend,

3 Mir scheint diese Verbindung sehr fruchtbar, da zum einen Krutetskii in seinen Aufgabenserien teilweise Aufgaben mit Schulbuchcharakter verwendete, während zum anderen Kießwetter auf langjährige Erfahrungen mit mathematisch sehr reichhaltigen Situationen zurückgreifen kann.

an dafür besonders ausgewählten weiteren und nach Möglichkeit verschiedenartigen Spezialfällen verifiziert.

- *Begründen mit paradigmatischen Beispielen.* – Das Kind hat sich Material organisiert oder auf anderer Grundlage Zusammenhänge bzw. Gesetze erkannt und diese dann begründet. Dabei muss es sich um keinen Beweis im engeren Sinne handeln. … Es genügt u. a. ein „paradigmatisches Beispiel", an dem das Kind sichtbar macht, dass man auch in *allen* anderen Fällen so vorgehen kann.
- *Nutzen von Superzeichen.* – Das Kind findet Strukturen bzw. Superzeichen, welche helfen Komplexität zu reduzieren und zu beherrschen, und es arbeitet mit diesen sinnvoll und zielorientiert weiter." (Kießwetter, 2006, S. 136 f.)

3 Merkmalsystem und Indikatoraufgabentest nach Käpnick

Für den Grundschulbereich wurde das Themenfeld Begabung wesentlich durch eine in den 1990er Jahren durchgeführte Studie von *Friedhelm Käpnick* erschlossen, deren Ziel es war, spezifische Merkmale für Dritt- und Viertklässler mit einer „potenziellen mathematischen Begabung" und davon ausgehend verschiedene Ausprägungstypen einer mathematischen Begabung im Grundschulalter zu kennzeichnen. Ausgehend von den Ergebnissen Krutetskiis und Kießwetters sowie einer breiten Analyse fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer, pädagogischer und psychologischer Literatur konstruierte der Autor ein Merkmalsystem, das neben mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen erstmals explizit auch begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften umfasste.[4] Zu ersteren entwickelte und erprobte Käpnick Indikatoraufgaben, der daraus schließlich konstruierte Test wurde in einer Vergleichsuntersuchung mit 70 als potenziell mathematisch begabt ausgewählten und 44 weiteren Dritt- und Viertklässlern eingesetzt. Die Identifikation der mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler erfolgte durch Lehrer- oder Selbstnomination ergänzt durch Beobachtungen während der ersten Treffen eines universitären Förderprojekts. Die Vergleichsgruppe setzte sich aus zwei kompletten Schulklassen zusammen, wobei auf ein zur Begabtengruppe nahezu gleiches Geschlechterverhältnis geachtet wurde. Die Ergebnisse des Indikatoraufgabentests bestätigten die zuvor theoretisch gewonnenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale, lediglich bezüglich des Raumvorstellungsvermögens ergaben sich keine

---

4 Beispielsweise Krutetskii sieht die Bedeutung allgemeiner Persönlichkeitseigenschaften für die Entwicklung spezifischer Fähigkeiten zwar ebenso (Krutezki, 1968), in seiner „Struktur mathematischer Fähigkeiten" spielen sie allerdings keine Rolle. Im Modell zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter, das aus dem Merkmalsystem von Käpnick weiterentwickelt wurde, werden begabungsstützende Persönlichkeitseigenschaften dagegen als wesentliche Elemente eines „Begabungspotenzials" benannt (vgl. den Beitrag von Mandy Fuchs in diesem Heft).

signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Teilgruppen des Samples. Zur empirischen Absicherung möglicher begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften wurden 38 Lehrerinnen gebeten, 91 potenziell mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler aus ihren Schulklassen anhand eines Fragebogens einzuschätzen, wobei inhaltliche Bedeutungen der abgefragten Merkmale und das Anliegen der Untersuchung zuvor geklärt worden waren (Käpnick, 1998).

Das auf diese Weise entwickelte und im Folgenden knapp zusammengefasste Merkmalsystem konnte darüber hinaus in Einzelfallstudien bestätigt werden; es wurde später von *Friedhelm Käpnick* und *Mandy Fuchs* zu einem „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ erweitert (vgl. den Beitrag von Mandy Fuchs in diesem Heft):

- *Mathematikspezifische Begabungsmerkmale:* mathematische Sensibilität; Originalität und Fantasie bei mathematischen Aktivitäten; Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte; Fähigkeit zum Strukturieren; Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen; Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer
- *Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften:* hohe geistige Aktivität; intellektuelle Neugier; Anstrengungsbereitschaft, Leistungsmotivation; Freude am Problemlösen; Konzentrationsfähigkeit; Beharrlichkeit; Selbstständigkeit; Kooperationsfähigkeit (vgl. Käpnick, 1998, S. 119).

Im Hinblick auf die mathematikspezifischen Begabungsmerkmale konnte Käpnick aus den Ergebnissen des Indikatoraufgabentests mittels Clusteranalyse außerdem vier Typen konstruieren, die verschiedene Profile mathematischer Begabung im Grundschulalter beschreiben. Unterschiede wurden beispielsweise hinsichtlich des Speicherns visueller Zahlenstrukturen, des Einprägens akustisch gegebener Zahlen, hinsichtlich des Raumvorstellungsvermögens und besonders komplexer Problemstellungen beobachtet. Auch bezüglich begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften deuteten sich verschiedene Ausprägungen an, inwieweit es sich dabei um Typen handelt, blieb allerdings zunächst offen. In den Einzelfallstudien wurden darüber hinaus „individuell verschiedene Vorgehensweisen beim Problemlösen“ deutlich. Käpnick unterschied zwischen den Typen „hartnäckiges Probieren“, „abwechselndes Überlegen und Probieren“, „intuitives Vortasten“, „systematisches Vorgehen“ sowie „Wechseln der Repräsentationsebenen, bevorzugtes Arbeiten auf der enaktiven oder der ikonischen Ebene“, von denen er annahm, dass sie bereits im Grundschulalter relativ stark verfestigt sind (Käpnick, 1998, S. 268 ff.).

4 Weitere Arbeiten zur Natur mathematischer Begabungen

Bereits in den einleitenden Bemerkungen dieses Beitrags wurde deutlich, dass die Aussagekraft des IQ für fachspezifische Anforderungen – beispielsweise Problemlösen im mathematischen Bereich – umstritten und beschränkt ist. *Marianne Nolte* ging unter anderem dieser Problematik im Rahmen ihres seit mehr als 12 Jahren bestehenden Forschungs- und Förderprojekts für Grundschulkinder an der Universität Hamburg nach.

Da in der Millionenstadt Hamburg unter den an einer Teilnahme am Förderprojekt interessierten Drittklässlern eine Auswahl erfolgen muss, werden die Kinder zunächst zu einer Probeveranstaltung – dem „Mathetreff für Mathefans" (Nolte, 2004) – eingeladen. Danach bearbeiten die Schülerinnen und Schüler einen eigens entwickelten Mathematiktest sowie einen Intelligenztest,[5] der besonders stark mit den Mathematiknoten korreliert. Wichtige Ergebnisse aus der Untersuchung von mittlerweile 1663 Kindern aus neun Jahrgängen, von denen vollständige Daten vorliegen, lassen sich wie folgt zusammenfassen (vgl. Nolte, 2011, 2013):

Da die jeweiligen Ergebnisse sowohl der Intelligenz- als auch der Mathematiktests[6] sich über alle Jahrgänge hinweg nicht signifikant voneinander unterschieden, konnte die Gesamtgruppe der getesteten Schülerinnen und Schüler betrachtet werden. Für diese korrelierten die Ergebnisse beider Tests mit −0,34. Allerdings wurde dieser Zusammenhang deutlich schwächer für solche Kinder, die besonders gute Ergebnisse im Mathematiktest erreichten, so sank beispielsweise der Korrelationskoeffizient für die Ränge 1 bis 15 auf −0,14.

Der nicht sehr starke statistische Zusammenhang und dessen weitere Reduktion sind aufgrund der (zunehmenden) Selektivität und der (abnehmenden) Stichprobengröße teilweise erwartbar, darin wird aber auch deutlich: Intelligenztestergebnisse und mathematische Leistungsfähigkeit hängen über die Gesamtpopulation betrachtet zwar zusammen, allerdings kann eine besondere mathematische Begabung – wie sie etwa von Krutetskii oder Käpnick beschrieben wird und die sich in der erfolgreichen Auseinandersetzung mit mathematisch *reichhaltigen* Problemstellungen zeigt – nicht aus dem IQ abgeleitet werden (Nolte, 2011, 2013). Die von Mathematikdidaktikern vielfach geäußerten Zweifel an einem simplen Zusammenhang zwischen IQ und Begabung (z. B. Bardy, 2007; Bauersfeld, 2003; Käpnick, 1998; Kießwetter, 1992; Zimmermann, 1986) werden damit weiter gestützt.[7]

Eine Studie zum Zusammenhang von allgemeiner intellektueller und mathematischer Begabung führten auch *Thomas Gawlick* und *Diemut Lange* in den Jahren 2008 und 2009 durch. Die Autoren ließen insgesamt 684 Fünftklässler in den ers-

---

5 CFT 20 bzw. CFT 20 R

6 Dazu wurden aus den Ergebnissen des Mathematiktests Ranglisten gebildet, weshalb der Korrelationskoeffizient negativ war.

7 Auch die großen SCHOLASTIK- und LOGIK-Studien sowie deren Folgestudie zeigen, dass der Einfluss der Intelligenz auf die Leistungen im Schulfach Mathematik weithin überschätzt wird (z. B. Stern, 2003).

ten Schulwochen sowohl einen Intelligenztest (CFT 20 R in der längeren Version) als auch eine gekürzte Version des Indikatoraufgabentests von Käpnick bearbeiten, für die sie nach eigenen Angaben die aussagekräftigsten Aufgaben auswählten.[8] Die Ergebnisse beider Tests korrelierten schwach positiv (r = 0,374, Gawlick & Lange, 2010, S. 330); mit statistischen Mitteln gingen die Autoren unter anderem der Frage nach, durch welches Wirkmodell zwischen latenten Begabungs- und manifesten Testvariablen sich dieser empirische Zusammenhang am besten erklären lässt. Die Analyseergebnisse deuteten auf ein Modell hin, bei dem neben der allgemeinen Intelligenz ein zweiter unabhängiger Faktor existiert, der für mathematische Begabung steht, wobei der Käpnick-Test auf beide Faktoren lädt (Gawlick & Lange, 2010).

Beide Untersuchungen stützen die Existenz mathematikspezifischer Fähigkeiten, wobei offen bleibt, ob es sich um geburtlich bestimmte fachspezifische Begabungskomponenten oder doch um Resultate einer zunehmenden Spezifizierung ursprünglich allgemeiner Fähigkeiten im Sinne Lompschers handelt.

Torsten Fritzlar beschrieb 2010 in einem Beitrag dieser Zeitschrift das Konzept einer sich entwickelnden mathematischen Expertise, das sich an Überlegungen Sternbergs (2000) anschließt und Elemente der Begabungs- und Expertiseforschung miteinander verbindet (Fritzlar, 2010a). Mit diesem Ansatz könnte dem Charakter der Merkmalsysteme zur Kennzeichnung mathematischer Begabungen, der Dynamik des beschriebenen Konstrukts und damit zusammenhängend der Bedeutung von Lern- und Übungsprozessen sowie der damit einhergehenden Akkumulation fachspezifischen Wissens in besonderer Weise Rechnung getragen werden.

5 Weitere Arbeiten zur Charakterisierung mathematischer Begabungen

Hauptziel der Untersuchungen von Krutetskii und später von Käpnick war eine Charakterisierung mathematischer Begabungen in verschiedenen Schulaltern. Im Anschluss fanden und finden weitere einschlägige Studien zu Erst- und Zweitklässlern sowie zu Vorschulkindern statt.

In ihrer im Jahr 2008 abgeschlossenen Dissertation untersuchte *Claudia Lack,* inwieweit ein Aufdecken mathematischer Begabungen bereits bei Schülerinnen und Schülern der ersten und zweiten Jahrgangsstufe möglich ist. Dabei ging es der Au-

---

8 Dabei handelte es sich um die Aufgaben 1a, 1c, 1d, 6d, 6e, 4, und 8 (persönliche Mitteilung von Diemut Lange). Obwohl der Indikatoraufgabentest für Dritt- und Viertklässler entwickelt wurde, waren Deckeneffekte nach den Autoren der Studie nicht zu beobachten.

torin allerdings nicht um die Konstruktion oder Überprüfung eines Merkmalsystems. Vielmehr ging sie der Frage nach, welche heuristischen (z. B. Ziel-Mittel-Analyse) und aufgabenspezifischen (z. B. Gegenpaarbildung bei kombinatorischen Aufgaben) Strategien und Strategiekeime[9] mathematisch interessierte Kinder dieser Altersstufe bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemstellungen bereits nutzen. Die Problembearbeitungen wurden darüber hinaus in Anlehnung an die Modelle von Pólya bzw. Mason et al. (Mason, Burton, & Stacey, 1982) und unter Einbezug der Ausprägungstypen von Vorgehensweisen beim Problemlösen nach Käpnick bzw. Fuchs analysiert. Zusätzlich wurden die Bearbeitungsprozesse mit dem Merkmalsystem nach Käpnick verglichen und mit Ergebnissen eines mathematikspezifischen Wissens- und eines Intelligenztests in Beziehung gesetzt (Lack, 2009b). Für die Konstruktion geeigneter Problemstellungen arbeitete Lack folgende „inhaltsunabhängige mathematische Fähigkeiten von Kindern im 1. und 2. Schuljahr“ heraus, die zum einen mathematisches Tätigsein in dieser Altersstufe umreißen sollen und die zum anderen Parallelen zu den Begabungsmerkmalen nach Käpnick besitzen, sodass sich aus den jeweiligen Ausprägungsgraden Hinweise auf das Vorhandensein einer mathematischen Begabung ergeben könnten: „mathematische Objekte, Relationen und Operationen erkennen; mathematische Verfahren einsetzen; mathematische Strukturen erkennen; in mathematischen Strukturen arbeiten; Strategien anwenden; über mathematisches Gedächtnis verfügen“ (Lack, 2009b, S. 93).

An der Untersuchung nahmen 23 Erst- und Zweitklässler aus zwei hessischen Schulen teil, die nach mathematischem Interesse[10] sowie nach Lehrer- und Elternempfehlung aus einer Gesamtgruppe von 260 Schülern ausgewählt wurden. Alle Kinder bearbeiteten vier Problemstellungen in halbstandardisierten Einzel-Videointerviews sowie einen Basiswissen- und einen Intelligenztest (CFT 1).

Ausgehend von sehr ausführlichen Analysen der Problembearbeitungsprozesse konstruierte Lack jeweils aufgabenspezifische Bearbeitungstypen, denen die Kinder zugeordnet wurden. So gehörten zum jeweils anspruchsvollsten Typ Bearbeitungen, die durch schnelles Erfassen des Kontextes sowie durch das Erkennen und Nutzen der zugrunde liegenden mathematischen Struktur gekennzeichnet waren und bei denen sowohl heuristische als auch passende aufgabenspezifische Strategiekeime deutlich wurden. Häufig gingen die Kinder dabei motiviert, konzentriert und zielstrebig vor. Über alle Aufgaben hinweg konnten zwei Jungen und ein

---

9 Aufscheinende Muster in Problembearbeitungsprozessen, bei denen eine strategische Absicht noch nicht unterstellt werden kann, diese aber in der Zone der nächsten Entwicklung liegt, lassen sich nach Stein (1996) als Strategiekeime bezeichnen.

10 Die Schülerinnen und Schüler folgten einer persönlichen Einladung in eine Mathematik-AG über einen längeren Zeitraum.

Mädchen den höchsten Bearbeitungstypen zugeordnet werden,[11] bei vier weiteren wurde ein ähnliches Bearbeitungsverhalten allerdings in weniger ausgeprägter Form deutlich (Lack, 2009a, 2009b).

Das Vorwärtsarbeiten, bei dem die Schülerinnen und Schüler vorrangig planvoll von den gegebenen Daten ausgingen, zeigte sich über alle Aufgaben hinweg als häufigste Herangehensweise. Bei steigendem Schwierigkeitsgrad gingen die Kinder allerdings zunehmend probierend vor, nur bei wenigen Kindern waren auch weitere Strategiekeime erkennbar. Von den beteiligten Schülerinnen und Schülern verfügten alle über einen mindestens durchschnittlichen und nahezu drei Viertel über einen hohen bis sehr hohen Intelligenzquotienten. Allerdings gab es auch hochintelligente Kinder, die hinsichtlich der Strategienutzung und des Bearbeitungsverhaltens lediglich einem mittleren Bearbeitungstyp zugeordnet werden konnten. Da in der Auseinandersetzung mit den in der Untersuchung verwendeten Problemstellungen mathematikspezifische Begabungsmerkmale nach Käpnick deutlich geworden sind, schätzt die Autorin hinsichtlich der Identifikationsmöglichkeiten zusammenfassend ein, dass sich mathematische Begabungen bereits im ersten und zweiten Schuljahr in vergleichbarer Weise wie bei älteren Grundschülern äußern könnten, wobei das Umkehren von Gedankengängen als sehr anspruchsvolle Fähigkeit eine Ausnahme bildet (Lack, 2009b, S. 367).

Während sich Lack eher explorativ möglichen besonderen Fähigkeiten und Handlungsmustern mathematisch interessierter Erst- und Zweitklässler nähert, ist die Entwicklung eines empirisch abgesicherten Merkmalsystems für mathematisch begabte Zweitklässler Hauptziel des aktuellen Dissertationsprojekts von *Daniela Aßmus*.

Ähnlich der Arbeit von Käpnick erfolgte die Konzeption eines vorläufigen Merkmalsystems auf der Grundlage sehr umfang- und detailreicher theoretischer Analysen (vgl. auch Abschnitt 6), zu dem die Autorin spezielle Indikatoraufgaben entwickelte, die in einer empirischen Untersuchung mit 182 ausgewählten Zweitklässlern und einer Vergleichsgruppe aus 69 Schülerinnen und Schülern eingesetzt wurden. Die Auswahl der Probanden der Testgruppe erfolgte durch ihre Lehrerinnen, die die Kinder für ein universitäres Förderprojekt nominierten.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Indikatoraufgaben schriftlich, im Anschluss fanden zusätzlich Einzelinterviews aller Teilnehmer zu ihren Vorgehensweisen und Lösungen statt, sodass auch qualitative Analysen möglich wurden. Ergänzt wurden diese Erhebungen durch zahlreiche Einzelfallstudien, vertiefende Nachuntersuchungen zu ausgewählten potenziellen Begabungsmerkmalen sowie durch zum Teil vergleichende Langzeitbeobachtungen. Bereits 2007 konnte Aßmus eine vorläufige Fassung des Merkmalsystems zur Charakterisierung mathema-

[11] Zwei dieser drei Kinder gehörten zu den ältesten der Untersuchungsgruppe.

tischer Begabungen bei Zweitklässlern vorlegen, wobei die darin aufgeführten Merkmale selbstverständlich nicht bei allen potenziell mathematisch begabten Zweitklässlern in gleichem Maße ausgeprägt sind: Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen; Fähigkeit zum Erkennen / Konstruieren und Nutzen von mathematischen Strukturen; Fähigkeiten zu flexiblen Denkprozessen, wie die Fähigkeit zum Aufbau verschiedener interner Repräsentationen und zum Umgehen mit unterschiedlichen Repräsentationsformen, die Fähigkeit zum gleichzeitigen Berücksichtigen aller notwendigen mathematischen Details (angemessenes Umgehen mit Komplexität), die Fähigkeit zum selbstständigen Transfer mathematischer Sachverhalte und die Fähigkeit zum Umkehren von Gedankengängen; mathematische Fantasie; mathematische Sensibilität; Raumvorstellungsvermögen (vgl. Aßmus, 2007, S. 249).

Stärker als in Käpnicks Untersuchung älterer Schüler deuteten sich zwischen den begabten und den nicht ausgewählten Zweitklässlern Unterschiede bezüglich des Raumvorstellungsvermögens an, allerdings in einer spezifischen Nachuntersuchung mit kleinerer Probandenzahl. Darüber hinaus scheinen die Komplexität einer mathematischen Situation bzw. Fähigkeiten im Umgang mit dieser Komplexität besonders bedeutsam zu sein, was sich auch in Erfahrungen von Kießwetter und detaillierten Fallstudien von *Siegbert Schmidt* (2010) widerspiegelt.

Die Entwicklung einer umfassenden ganzheitlichen Kennzeichnung mathematischer Begabungen im Vorschulalter ist Ziel des aktuellen Dissertationsprojekts von *Kathrin Talhoff* (Talhoff, 2012).

6 Weitere Arbeiten zu mathematikspezifischen Fähigkeiten

Prüft man genauer, was in der vielfältigen Literatur zu mathematischen Begabungen unter solchen Merkmalen wie „(selbstständiges) Umkehren von Gedankengängen" oder „(selbstständiger) Transfer" verstanden wird und wie die Autorinnen und Autoren deren Ausprägung zu erfassen suchen, werden teilweise durchaus unterschiedliche Akzentuierungen deutlich. Daher gibt es derzeit im deutschsprachigen Raum verstärkte Bemühungen um eine detailliertere Ausarbeitung solcher Merkmale und möglicher Beziehungen zwischen ihnen (Ehrlich, 2011). Auch wenn *Heinrich Bauersfeld* (2013) zu Recht an die „prinzipielle Unschärfe unserer Begriffe" erinnert, könnten entsprechende Arbeiten als Angebote für eine „sensiblere Kommunikation" gerade auch für ein so interdisziplinäres Wissenschaftsgebiet wie die Mathematikdidaktik fruchtbar sein.

Daniela Aßmus (2010a, 2010b) und *Torsten Fritzlar* (2010b) setzten sich mit dem Umkehren von Gedankengängen näher auseinander. Beide Autoren griffen dabei zwei bereits von Krutetskii unterschiedene Aspekte auf: die Ausbildung bidirektionaler mentaler Verknüpfungen bzw. Bindungen zwischen Elementen der betrachteten mathematischen Konstellation und das Umkehren mehrschrittiger Gedankengänge, für das in der Regel mentale Bindungen umgekehrt zur ursprünglichen Richtung und in umgekehrter Reihenfolge genutzt werden müssen.[12] Ein weiterer, insbesondere für das Grundschulalter wichtiger Aspekt ist das Erkennen einer Fragestellung als Umkehrung zuvor bearbeiteter Sachverhalte. Für mich scheint es darüber hinaus wichtig, zwischen der Fähigkeit zum Umkehren mentaler Prozesse und der heuristischen Strategie des Rückwärtsarbeitens zu unterscheiden, deren Verfügbarkeit wohl stärker von spezifischen Problemlöseerfahrungen abhängig ist (Fritzlar, 2010b; vgl. auch Bruggen & Freudenthal, 1977).

Fähigkeiten im Umkehren mentaler Prozesse haben sich in den Untersuchungen von Aßmus als Begabungsmerkmal im Grundschulalter prinzipiell bestätigt, wobei sie in besonderem Maße Indikator für den Ausprägungsgrad einer Begabung sein könnten (2010a, 2010b).

Auch im Hinblick auf das (selbstständige) Wechseln der Repräsentationsebene kann meines Erachtens zwischen der beobachtbaren, potenziell bewussten Strategie und der Qualität von Denkprozessen im Sinne Klix‘ unterschieden werden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit formulierte und begründete dieser vier „Basiskomponenten“ des Denkens, deren Ausprägung die kognitive Leistungsfähigkeit eines Individuums maßgeblich determinieren: Analogiebildung, Komplexitätsreduktion, multiple Klassifikation und Multimodalität bzw. Doppelrepräsentation. Dabei wird unter Multimodalität die gleichzeitige Nutzung mehrerer modalitätsspezifischer bzw. unter Doppelrepräsentation die gleichzeitige Nutzung bildhaft-anschaulicher und symbolischer Repräsentationen beim Bewältigen kognitiver Anforderungen verstanden (Klix, 1992, 1993). Einen Überblick zur Bedeutung des Repräsentationswechsels für mathematisches Tätigsein und zu kognitionspsychologischen Ergebnissen im Kontext mathematischer Begabungen (vor allem Seidel, 2004) sowie Erfahrungen aus einschlägigen Fallstudien mit Grundschulkindern geben *Torsten Fritzlar* und *Frank Heinrich* (2010).

Analogiebildung und Transfer, wiederum als kognitive Fähigkeit und als Strategie, werden in den beiden miteinander verknüpften Beiträgen dieses Heftes von *Daniela Aßmus* und *Frank Förster* ausführlich thematisiert (vgl. auch Aßmus & Förster, 2012). Im ersten, theoretischen Beitrag beschreibt die Autorin verschiedene Kategorien analogen Denkens im mathematischen Bereich, sie setzt sich mit Beziehungen zum Konstrukt „Transfer“ auseinander und untersucht analoges Denken als Komponente mathematischer Begabungen. Im zweiten Beitrag berichten beide Autoren von einer Videostudie, in der unter Verwendung dreier Problempaare unter-

[12] Für Letzteres sind jedoch oftmals auch weitere Überlegungen notwendig, beispielsweise wenn zugrunde liegende mathematische Relationen nicht bijektiv sind.

sucht wurde, ob und gegebenenfalls anhand welcher Merkmale Dritt- und Viertklässler Analogien erkennen und nutzen. Dabei ergaben sich zum Teil deutliche Unterschiede zwischen mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern und solchen, bei denen diese Einschätzung nicht vorlag.

Das Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen ist ein wesentlicher Aspekt menschlicher Wahrnehmung und Informationsverarbeitung, es wird als mathematische Kompetenz der Bildungsstandards von allen Schülerinnen und Schülern erwartet und es gilt als vielleicht wichtigstes Merkmal einer mathematischen Begabung im Grundschulalter. Mit diesem Spannungsfeld setzte sich *Marianne Nolte* (2010) auseinander und arbeitete dabei unter anderem die Kontextgebundenheit von Beschreibungsversuchen mathematischer Begabung heraus.

In ihrer kürzlich fertig gestellten Dissertation erarbeitete *Nadine Ehrlich* (2012) eine theoretische Modellierung des Konstrukts „Strukturierungskompetenz" und erkundete diese bei mathematisch begabten Sechst- und Siebtklässlern mit quantitativen und qualitativen Instrumenten. Auf der Grundlage sehr umfangreicher Literaturstudien entwickelte die Autorin Definitionen für die Begriffe „Muster" und „Struktur" im Kontext der Mathematik und kennzeichnete mit diesen Kompetenzniveaus und Herangehensweisen eines Bearbeiters an entsprechende Aufgaben. Sowohl in den theoretischen Überlegungen als auch in der empirischen Erhebung entstehen vielfältige Bezüge zum „Verallgemeinern" (z.B. Amit & Neria, 2008; Dörfler, 1991; Radford, 2006).

Im Anschluss an diese Untersuchung könnte es besonders lohnenswert sein, Krutetskiis Fähigkeit zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems näher zu untersuchen und einzuordnen (vgl. auch Käpnick, 1998, S. 107 f.), wodurch sich auch eine Verbindung zu den Untersuchungen von Aßmus und Förster zum analogen Denken ergeben könnte.

Fallstudien zur Nutzung algebraischer Elemente durch leistungsstarke Grundschulkinder liegen beispielsweise von *Joachim Hrzán* (Hrzán, 2010), *Emad Sefien* (Hrzán & Sefien, 2009a, 2009b) und *Siegbert Schmidt* (Schmidt, 2008) und *Werner Weiser* (Schmidt & Weiser, 2008) vor. Ausgehend von diesen Erfahrungen und von algebraischen Bezügen, die einige der zur Charakterisierung mathematischer Begabungen genutzten Merkmale aufweisen, scheint es sinnvoll, nach besonderen algebraischen Fähigkeiten mathematisch begabter Grundschüler zu fragen. Eine Antwort sucht *Nadja Karpinski-Siebold* in ihrem aktuellen Dissertationsprojekt (Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2011, 2012).

Der Zusammenhang zwischen mathematischer Begabung und Raumvorstellungsvermögen ist bislang noch nicht abschließend geklärt. Während es bei Kießwetters Denk- und Handlungsmustern keine Entsprechung gibt, Krutetskii entsprechende Fähigkeiten als günstig und gegebenenfalls begabungstypbestimmend, jedoch nicht als notwendig ansieht, bezeichnet *Peter Bardy* in seinem umfassenden Lehrbuch zu mathematisch begabten Grundschulkindern das Raumvorstellungsvermögen als eine der „wichtigsten geistigen Fähigkeiten, die es uns gestatten, Mathematik zu betreiben“ (Bardy, 2007, S. 31). Aßmus führt es (mit Einschränkungen) als Merkmal zur Charakterisierung mathematischer Begabungen bei Zweitklässlern auf (s. Abschnitt 5), während in der Untersuchung von Käpnick bei Dritt- und Viertklässlern Unterschiede zwischen den untersuchten Teilgruppen nicht signifikant waren. In einer ganz spezifisch ausgerichteten Untersuchung geht daher *Nina Berlinger* derzeit der Frage nach, „welche Bedeutung das räumliches Vorstellungsvermögen für die Kennzeichnung einer mathematischen Begabung bei Dritt-/Viertklässlern hat“ (Berlinger, 2011, S. 95). Erste Ergebnisse deuten an, dass es bezüglich mehrerer Komponenten des Raumvorstellungsvermögens (Maier, 1999) doch signifikante Unterschiede zwischen mathematisch begabten und nicht ausgewählten Schülerinnen und Schülern geben könnte.

Eine Verbindung von mathematischer Sensibilität als Begabungsmerkmal und spezifischen Vorgehensweisen bei der Bearbeitung mathematischer Probleme, die vor allem im folgenden Abschnitt dieses Beitrags angesprochen werden, stellen Intuitionen dar, mit deren Bedeutung und Erscheinungsformen sich *Friedhelm Käpnick* (2008, 2010) ausführlich auseinandersetzt.

7 Weitere Arbeiten zu Vorgehensweisen beim Problemlösen

Mit Kießwetter lässt sich produktives Tätigsein eines forschenden Mathematikers vor allem als Theoriebilden auffassen. Für das Grundschulalter sind allerdings eher das darin eingebettete Problemlösen und, bereits etwas weiter gefasst, die Auseinandersetzung mit mathematischen Erkundungsproblemen oder -situationen bedeutsam (Cockcroft, 1986; Fritzlar, 2010c).

Wie gehen nun mathematisch leistungsstarke Kinder bei der Bearbeitung mathematischer Problemstellungen vor? Erste Antworten auf diese Frage suchte *Emad Sefien* in einer Untersuchung, die er 2003 und 2004 in Halle an der Saale durchführte (Sefien, 2007). Unter den Teilnehmern eines universitären Förderprojekts und eines Korrespondenzzirkels fand er fünf besonders leistungsstarke Dritt- und Viertklässler, die zu einer Teilnahme an der Studie bereit waren. Ergänzt wurde diese Gruppe durch vier Schüler, die durch Lehrernomination und die Beobachtung in mehreren Auswahltreffen identifiziert wurden. Auf der Grundlage eines Modells, mit dem der Autor mathematisches Denken durch geistige Operationen, spezifische mathematische Anforderungen und Denktypen zu beschreiben versucht (ebd., S. 123), wurden für die Untersuchung aus verschiedenen Quellen 19 Problemstellungen ausgewählt, die meines Erachtens allerdings teilweise den Charakter von Knobelaufgaben hatten. Jede Aufgabe wurde von einem Schülerpaar bearbeitet, bei der Zuordnung wurde versucht, Vorlieben und Stärken zu berücksichtigen. Bei der Analyse der videografierten Bearbeitungen deuteten sich immer wieder

Begabungsmerkmale nach Käpnick an, darüber hinaus war die Nutzung heuristischer Hilfsmittel (etwa einer Tabelle) erkennbar und einige Kinder waren zu Begründungen fähig. Da jede Aufgabe allerdings nur von einem Schülerpaar bearbeitet wurde und die Schüler sich mitunter lediglich mit zwei Aufgaben auseinandersetzten, sind allgemeinere Aussagen auf der Grundlage dieser Untersuchung wohl nicht möglich.

Eine Analyse von Bearbeitungsprozessen beim Problemlösen war auch ein wesentliches Ziel des Dissertationsprojekts von *Astrid Heinze*; insbesondere ging es ihr darum, diesbezügliche Unterschiede zwischen mathematisch begabten und „normal begabten" Grundschulkindern aufzuzeigen. Dafür sollten auch Problemstellungen gefunden werden, bei deren Bearbeitung mögliche Unterschiede besonders deutlich werden können (Heinze, 2005).

Die Erhebungen fanden von Frühjahr 2001 bis Herbst 2003 statt, es wurden 16 Dritt- und Viertklässler sowie ein Zweitklässler einbezogen, die über Lehrer- oder Elternnomination, Beobachtungen in einem universitären Förderprojekt sowie über Ergebnisse des Indikatoraufgabentests nach Käpnick und eines Intelligenztests identifiziert worden waren. Für die Untersuchung nutzte Heinze eine klassische Kombinatorikaufgabe, teilweise unlösbare geometrische Puzzle-Probleme sowie zwei Fragestellungen zu „Reihenfolgezahlen" (Schwätzer & Selter, 1998). Bei der Analyse der Problembearbeitungen durch die als mathematisch begabt identifizierten Schülerinnen und Schüler interessierte sich Heinze insbesondere für die Nutzung einschlägiger Strategien sowie für Vollständigkeits- und Unlösbarkeitsbegründungen. Ein Vergleich mit Bearbeitungen durch nicht ausgewählte Schülerinnen und Schüler erfolgte allerdings nicht direkt, vielmehr wurden Resultate aus anderen Untersuchungen (Burchartz, 2003; Hoffmann, 2003; Schwätzer & Selter, 1998) herangezogen.

Die mathematisch begabten Kinder erreichten eindrucksvolle Ergebnisse. So gelang beispielsweise 75% der Schüler sowohl eine vollständige Lösung der klassischen Kombinatorikaufgabe unter Nutzung einer Makrostrategie[13] als auch die Formulierung von Begründungsaspekten zu dieser Vollständigkeit. Auch bei der Bearbeitung der anderen Problemstellungen wurde bei den meisten Kindern eine strategische Absicht deutlich, eine bewusste Strategiewahl und eine bewusste Planung des Lösungsprozesses konnte Heinze an verschiedenen Stellen nachweisen. Darüber hinaus identifizierte sie ein hohes Begründungsbedürfnis und qualitativ hochwertige Begründungen in dem Sinne, dass Äußerungen der Kinder „von einer hohen Fähigkeit zur Abstraktion und zu allgemeingültigen Argumentationen zeugen" (Heinze, 2005, S. 285).

---

[13] Hoffmann (2003) versteht darunter eine übergeordnete Strategie, mit der sich alle Lösungen einer Kombinatorikaufgabe finden lassen.

Zusammenfassend scheinen mir die Vorgehensweisen und Argumentationen der an der Untersuchung beteiligten mathematisch begabten Kinder im Vergleich zu den Erfahrungen aus den Untersuchungen von Hoffmann, Burchartz sowie Schwätzer und Selter tatsächlich sehr bemerkenswert. Kritisch muss allerdings meines Erachtens angemerkt werden, dass ein detaillierter Vergleich der Untersuchungsergebnisse aufgrund der unterschiedlichen Versuchspersonengruppen, unterschiedlicher Untersuchungsziele und entsprechend verschiedener Analysefoki und -instrumente problematisch erscheint. Inwieweit die in der Untersuchung genutzten Problemstellungen, die ursprünglich für andere Forschungsziele konstruiert wurden und sämtlich kombinatorische Züge besitzen, tatsächlich geeignet sind, mögliche Besonderheiten mathematisch begabter Grundschüler in ihrer vollen Breite aufzuzeigen, erscheint mir ebenfalls fraglich.[14]

Die detaillierte Erkundung allgemeiner, über heuristische Strategien hinausgehender Problemlösestile von potenziell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern war Ziel der Untersuchung von *Mandy Fuchs*. In zehn Einzelfallstudien und einer unter quantitativen Aspekten analysierten Erhebung mit mehr als 60 Schülerinnen und Schülern setzte die Autorin 15 Problemstellungen aus verschiedenen mathematischen Teilgebieten ein, um problemübergreifende Vorgehensweisen zu identifizieren, deren Stabilität über zwei Schuljahre hinweg zu überprüfen und ein entsprechendes Analyseinstrumentarium zu entwickeln. Eine Zusammenfassung dieser Untersuchung findet der Leser im Beitrag von Mandy Fuchs in diesem Heft.

8 Weitere Arbeiten zu geschlechtsspezifischen Besonderheiten

In seiner 2011 vorgelegten Dissertation untersuchte *Ralf Benölken* mögliche geschlechtsspezifische Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen aus der dritten und vierten Jahrgangsstufe. Auf der Grundlage einer umfassenden Analyse einschlägiger biologischer, neurowissenschaftlicher, sozialisationstheoretischer, pädagogisch-psychologischer sowie sozialpsychologischer und mathematikdidaktischer Literatur leitete er hypothetische Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen im Grundschulalter ab. Für die empirische Überprüfung nutzte der Autor zum einen Daten aus den Indikatoraufgabenstudien von Käpnick (1998) und Fuchs (2006), zum anderen setzte er verschiedene Fragebögen für Kinder und Eltern ein und führte 16 Einzelfallstudien durch, die jeweils neben Ergebnissen von Indikatoraufgaben- und Intelligenztests vor allem Videodokumente und Beobachtungen von Problembearbeitungsprozessen sowie Interviews der Probanden, Eltern und Lehrer umfassten. Hauptergebnisse der Untersuchung sind ein komplexes Gefüge empirisch gestützter Besonderheiten sowie die Herausarbeitung dreier (vorläufiger)

---

[14] Zum Begründungsverhalten vergleiche beispielsweise eine Fallstudie von Fritzlar (2011).

Typen mathematisch begabter Mädchen im Grundschulalter. Einen Überblick über diese Untersuchung und zu praxisbezogenen Konsequenzen gibt der Beitrag von Ralf Benölken in diesem Heft.

Fazit

Meine Ausführungen konnten hoffentlich deutlich machen, dass „Begabung" als mathematikdidaktisches Forschungsfeld sehr vielfältig und dynamisch ist, gleichzeitig sind vielleicht auch Herausforderungen und Anregungen für weitere Forschungsarbeiten deutlich geworden. Beispielsweise sind meines Erachtens mathematikdidaktische Arbeiten zu Begabungen einerseits auf psychologische Begrifflichkeiten, Theorien und Untersuchungsergebnisse angewiesen, andererseits werden in psychologischen Studien nur selten hinreichend reichhaltige und einschlägige Anforderungssituationen genutzt, sodass Modellierungen und Erfahrungen kaum ohne Weiteres übertragen werden können. Damit ist zugleich das Problem der Kontextgebundenheit bzw. der Operationalisierung von Begabungsmerkmalen angesprochen. Eine weitere Herausforderung sehe ich in der Veränderlichkeit von Begabungsmerkmalen zugrunde liegenden kognitiven Fähigkeiten. Diese ist entwicklungsbedingt, sie beruht aber auch auf individuell unterschiedlichen Möglichkeiten, einschlägige Erfahrungen zu sammeln. Für komplexe Denk- und Handlungsmuster sensu Kießwetter gilt diese Erfahrungsabhängigkeit wohl in noch stärkerem Maße. Interessante Ergebnisse in diesem Zusammenhang könnten sich u. a. aus bisher kaum realisierten Langzeitstudien ergeben, für die beispielsweise durch den Ausbau und die Vernetzung von Förderangeboten an den Universitäten in Münster und Hamburg günstige Voraussetzungen geschaffen wurden. Schließlich könnte es interessant sein, Beziehungen zwischen einzelnen Begabungsmerkmalen weiter theoretisch auszuarbeiten und empirisch zu erkunden.

Literatur

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 111–129.

Aßmus, D. (2007). Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Grundschüler – aktuelle Forschungsergebnisse. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2007 (S. 246–249). Hildesheim: Franzbecker.

Aßmus, D. (2010a). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2010 (S. 137–140). Münster: WTM.

Aßmus, D. (2010b). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.), Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (S. 45–61). Offenburg: Mildenberger.

Aßmus, D., & Förster, F. (2012). Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 (S. 89–92). Münster: WTM.

Bardy, P. (2007). Mathematisch begabte Grundschulkinder: Diagnostik und Förderung. München: Elsevier.

Bauersfeld, H. (2003). Hochbegabungen: Bemerkungen zu Diagnose und Förderung in der Grundschule. In M. Baum & H. Wielpütz (Hg.), Gut unterrichten. Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch (S. 67–90). Seelze: Kallmeyer.

Bauersfeld, H. (2013). Die prinzipielle Unschärfe unserer Begriffe. In F. Käpnick & T. Fritzlar (Hg.), Mathematische Begabungen – Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM.

Benölken, R. (2011). Mathematisch begabte Mädchen: Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter. Münster: WTM.

Berlinger, N. (2011). Untersuchungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (S. 95–98). Münster: WTM.

Bruggen, J. C. van, & Freudenthal, H. (1977). Review of "The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren" by V. A. Krutetskii. Proceedings of the National Academy of Education, 4, 235–277.

Burchartz, B. (2003). Problemlöseverhalten von Schülern beim Bearbeiten unlösbarer Probleme. Hildesheim: Franzbecker.

Cockcroft, W. H. (1986). Mathematics counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. London: Her Majesty's Stationary Office.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop & S. Mellin-Olsen (Hg.), Mathematical knowledge: its growth through teaching (S. 63–85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dörner, D., Kreuzig, H. W., Reither, F., & Stäudel, T. (Hg.) (1983). Lohhausen. Vom Umgang mit Unbestimmtheit und Komplexität. Bern: Huber.

Ehrlich, N. (2011). Untersuchungen zu „Strukturierungskompetenzen" mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (S. 223–226). Münster: WTM.

Ehrlich, N. (2012). Strukturierungskompetenzen mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Niveaus und Herangehensweisen. Dissertation, Universität Münster.

Fritzlar, T. (2010a). Begabung und Expertise. Eine mathematikdidaktische Perspektive. mathematica didactica, 33, 113–140.

Fritzlar, T. (2010b). Gedankensplitter zum „Umkehren mentaler Prozesse" – gedacht zur Anregung weiterer Diskussionen. In M. Nolte (Hg.), Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler (S. 27–39). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2010c). „Investigations" und Explorationen in der Elementarmathematik. Der Mathematikunterricht, 56(3), 3–13.

Fritzlar, T. (2011). Zum Beweisbedürfnis im jungen Schulalter. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (S. 279–282). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2012). Konzeptionelle Überlegungen zu einer langfristigen Förderung mathematisch begabter Kinder und Jugendlicher. In C. Fischer, C. Fischer-Ontrup, F. Käpnick, F. J. Mönks, H. Scheerer, & C. Solzbacher (Hg.), Individuelle Förderung multipler Begabungen. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte (S. 121–133). Münster: LIT.

Fritzlar, T., & Heinrich, F. (2010). Doppelrepräsentation und mathematische Begabung im Grundschulalter – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.), Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (S. 25–44). Offenburg: Mildenberger.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Hg.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Band 2, S. 345–352). Ankara: PME.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking – an interview study with primary students. In ICME 12 Pre-proceedings (S. 2022–2031). Seoul.

Funke, J. (2006). Komplexes Problemlösen. In J. Funke (Hg.), Denken und Problemlösen (= Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich C: Theorie und Forschung, Serie II: Kognition, Band 8) (S. 375–446). Göttingen: Hogrefe.

Gawlick, T., & Lange, D. (2010). Allgemeine vs. mathematische Begabung bei Fünftklässlern. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2010 (S. 329–332). Münster: WTM.

Heinze, A. (2005). Lösungsverhalten mathematisch begabter Kinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT.

Hoffmann, A. (2003). Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit. Hildesheim: Franzbecker.

Hrzán, J. (2010). Frühe algebraische Kompetenzen bei mathematisch begabten und leistungsstarken Grundschulkindern – fördern oder ignorieren? In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.), Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (S. 63–75). Offenburg: Mildenberger.

Hrzán, J., & Sefien, E. (2009a). Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Chancen und Möglichkeiten nicht nur für leistungsstarke Kinder (Teil I). MNU-PRIMAr, 1(1), 16–20.

Hrzán, J., & Sefien, E. (2009b). Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Chancen und Möglichkeiten nicht nur für leistungsstarke Kinder (Teil II). MNU-PRIMAr, 1(2), 60–63.

Käpnick, F. (1998). Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang Verlag.

Käpnick, F. (2008). Diagnose und Förderung mathematisch begabter Kinder im Spannungsfeld zwischen interdisziplinärer Komplexität und Bereichsspezifik. In C. Fischer, F. J. Mönks, & U. Westphal (Hg.), Individuelle Förderung: Begabungen entfalten – Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte (S. 3–23). Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2010). Intuitionen – ein häufiges Phänomen beim Problemlösen mathematisch begabter Grundschulkinder. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.), Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (S. 77–93). Offenburg: Mildenberger.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 38(5), 300–306.

Kießwetter, K. (1992). „Mathematische Begabung“ – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. Der Mathematikunterricht, 38(1), 5–18.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hg.), Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis (S. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Klix, F. (1992). Die Natur des Verstandes. Göttingen: Hogrefe.

Klix, F. (1993). Erwachendes Denken. Heidelberg: Spektrum.

Kossakowski, A., & Lompscher, J. (1977). Teilfunktionen und Komponenten der psychischen Regulation der Tätigkeit. In Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik (Hg.), Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess (S. 107–148). Berlin: Volk und Wissen.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Krutezki, W. A. (1968). Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. Mathematik in der Schule, 8(1), 44–58.

Lack, C. (2009a). Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr. In M. Neubrand (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 (S. 727–730). Hildesheim: Franzbecker.

Lack, C. (2009b). Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Lompscher, J., & Gullasch, R. (1977). Die Entwicklung von Fähigkeiten. In Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik (Hg.), Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess (S. 199–249). Berlin: Volk und Wissen.

Maier, P. H. (1999). Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Thinking mathematically. London: Addison-Wesley.

Nolte, M. (Ed.) (2004). Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. (2010). Zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen in Problemlöseprozessen. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hg.), Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (S. 11–24). Offenburg: Mildenberger.

Nolte, M. (2011). „Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das?“ – Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche im PriMa-Projekt Hamburg. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (S. 611–614). Münster: WTM.

Nolte, M. (2013). Fragen zur Diagnostik besonderer mathematischer Begabung. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hg.), Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Hg.), Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (S. 2–21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rost, D. H. (Hg.) (2000). Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Münster: Waxmann.

Schmidt, S. (2008). Warum soll man mathematisch besonders befähigte Schülerinnen und Schüler bereits von der Grundschule an auch besonders fördern? In M. Fuchs & F. Käpnick (Hg.), Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft (S. 7–21). Berlin: LIT.

Schmidt, S. (2010). Rechendreiecke und Rechenvierecke: Eine Fallstudie aus dem Grundschulbereich im Horizont von Reifung für das Umgehen mit Komplexität. In M. Nolte (Hg.), Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler (S. 93–107). Münster: WTM.

Schmidt, S., & Weiser, W. (2008). Wissen und Intelligenz beim Fördern mathematisch talentierter Grundschulkinder. In C. Fischer, F. J. Mönks, & U. Westphal (Hg.), Individuelle Förderung: Begabungen entfalten – Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte (S. 24–45). Berlin: LIT.

Schwätzer, U., & Selter, C. (1998). Summen von Reihenfolgezahlen – Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. Journal für Mathematikdidaktik, 19(2-3), 123–148.

Sefien, E. S. M. (2007). Denk- und Vorgehensweisen leistungsstarker Kinder im Alter von 8 bis 10 Jahren beim Lösen mathematischer Probleme. In E. S. M. Sefien & H. Knopf (Hg.), Leistungsexzellenz und ihre Determinanten (S. 37–323). Berlin: Rhombos-Verlag.

Seidel, G. (2004). Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter: sequentielle und topologische Eigenschaften kognitiver Mikrozustände. Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften. Berlin: Wissenschaftlicher Verlag Berlin.

Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. Journal für Mathematikdidaktik, 17(2), 123–146.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Hg.), Entwicklung, Lehren und Lernen. Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert (S. 207–217). Göttingen: Hogrefe.

Sternberg, R. J. (2000). Giftedness as Developing Expertise. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Hg.), International Handbook of Giftedness and Talent (2. Aufl., S. 55–66). Amsterdam: Elsevier.

Talhoff, K. (2012). Fallstudie zur Entwicklung einer mathematischen Begabung im Vorschulalter. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 (S. 869–872). Münster: WTM.

Waldmann, M., & Weinert, F. E. (1990). Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung. Göttingen: Hogrefe.

Weinert, F. E., & Petermann, F. (1980). Erwartungswidrige Schulleistung oder unterschiedlich determinierte Schulleistungen? In H. Heckhausen (Hg.), Fähigkeit und Motivation in erwartungswidriger Schulleistung (S. 19–52). Göttingen: Verlag für Psychologie Dr. C. J. Hogrefe.

Zimmermann, B. (1986). Mathematisch hochbegabte Schüler – das Hamburger Modell. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 18(3), 98–106.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Torsten Fritzlar
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik
06099 Halle an der Saale
torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de

Eingang Manuskript: 13.12.2012
Eingang überarbeitetes Manuskript: 12.02.2013
Online verfügbar: 04.03.2013