Schön irrational! – Irrational schön?

Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive

von

Susanne Spies, Siegen

Kurzfassung: In der mathematischen Wissenschaftspraxis nehmen ästhetische Kategorien wie Schönheit, Eleganz oder Hässlichkeit eine zentrale Stellung ein. Als Paradebeispiel schöner Mathematik gilt der Beweis für die Irrationalität von √2 (bzw. geometrisch gedeutet für die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat). Der Artikel präsentiert zunächst eine arithmetische und ein geometrisch Version dieses klassischen Unterrichtsgegenstandes der Mittelstufe. Auf der Grundlage mathematikphilosophischer Forschungen zur Ästhetik wird außerdem der Schönheitsbegriff der Mathematik allgemein näher beleuchtet und vier charakteristische Eigenschaftskomplexe identifiziert, die mit Blick auf die unterrichtliche Umsetzung am Beispiel konkretisiert werden können. Die daraus resultierende allgemeine Skizze didaktischer Perspektiven zeigt etwa mit Blick auf das Problemlösen oder die Wissenschaftsorientierung aber auch auf die subjektive Haltung zur Mathematik und die Auswahl konkreter Inhalte und Methoden, dass die Integration der Mathematikästhetik eine Horizonterweiterung auf den verschiedensten Ebenen mathematikdidaktischer Forschung bedeutet.

Abstract: Aesthetical categories like beauty, elegance or ugliness are of special interest in mathematical practice. By presenting a geometrical and an arithmetical version of the proof of the irrationality of √2 a classical subject is shown as prime example of mathematical beauty. Based on general research in the philosophy of mathematics four sets of characteristics of mathematical beauty can be identified and further substantiated by the presented example. The resulting sketch of general didactical perspectives of mathematical aesthetics offers consequences concerning problem solving and the personal attitude towards mathematics as a science as well as the selection of special contents and methods in school.

1 „Sie sollen die Schönheit der Mathematik erfahren“

> „Es muss unter allen Umständen vermieden werden, dass Menschen das Gymnasium verlassen, ohne auch nur einen Zipfel der ergreifenden Schönheit der Mathematik gesehen und miterlebt zu haben.“ (Barth 2005, S. 76)

Die Integration des Ästhetischen in den Mathematikunterricht muss Armin P. Barth folgend „eine der ersten Forderungen an guten Unterricht“ (Barth 2005, S. 76) sein. Setzungen wie diese werden insbesondere durch die Hoffnung auf Stärkung von Motivation und positiver Haltung gegenüber der Mathematik sowie die

Bedeutung der Schönheit für die mathematische Wissenschaftspraxis getragen. So weisen Äußerungen praktizierender Mathematiker eindrücklich auf die zentrale Rolle ästhetischer Werturteile hin: Godfrey Harold Hardy etwa verspricht hässlicher Mathematik keinen dauerhaften Platz auf der Welt (vgl. Hardy 1940, S. 85), und für Philip Davis und Reuben Hersh scheint es selbstverständlich, dass sich ein Mathematiker unter zwei logisch gleichwertigen Lösungen für die „schönere" entscheidet (vgl. Davis und Hersh 1994, S. 314). Solche Aussagen aufgreifend, identifiziert und charakterisiert Nathalie Sinclair neben einer motivationalen Rolle weitere Funktionen der Ästhetik: Sie sieht in der ästhetischen Bewertung insbesondere den Motor für neue Entwicklungen und den Fortschritt der Wissenschaft Mathematik, erkennt aber auch den evaluativen Charakter der Schönheit (vgl. Sinclair 2006a).

Obgleich die Forderung, Schülerinnen und Schüler für mathematische Schönheit zu sensibilisieren, auch Eingang in die Richtlinien und Lehrpläne gefunden hat, – der Lehrplan Mathematik für die Sekundarstufe II in Nordrhein-Westfalen fordert unter der Überschrift „Förderung langfristiger Einstellungen" z. B., dass die Schülerinnen und Schüler „die Leistungsfähigkeit und Schönheit der Mathematik erfahren" (Lehrplan Mathematik Sek. II NRW, 1999, S. 38) sollen – bleiben viele Fragen insbesondere die konkrete Umsetzung betreffend offen: So sind einerseits verschiedene Träger mathematischer Schönheit vorstellbar. Zu klären ist, welche Objekte dabei besonders geeignet sind, die Schönheit der Mathematik für Schülerinnen und Schüler erfahrbar zu machen. Damit einher geht die Frage nach den die mathematische Schönheit ausmachenden Eigenschaften. Daraus ergeben sich andererseits wiederum Fragen bezüglich der unterrichtlichen Umsetzung, etwa nach praktischen Hindernissen oder notwendigen Voraussetzungen von Lernenden und Lehrenden. Dies eröffnet auch allgemeiner die Frage nach den didaktischen Perspektiven der Mathematikästhetik, also danach, ob bzw. wie sie an zentrale mathematikdidaktische Fragestellungen angebunden werden kann.

Im Folgenden soll zunächst allgemein den Fragen nach Trägern und Eigenschaften mathematischer Schönheit nachgegangen werden. Anhand der Besprechung von zwei unterrichtlich relevanten Beispielen werden aber auch immer wieder Bezüge zum Lehren und Lernen von Mathematik aus mathematikästhetischer Sicht hergestellt. Diese exemplarische Analyse mündet abschließend in einigen allgemeinen Anmerkungen zu den didaktischen Perspektiven der Mathematikästhetik.

2 Schön irrational – Zwei Beispiele

Visuelle Erfahrungen mit regelmäßigen geometrischen Formen, Spiralen oder bestimmten Proportionen sind häufig genannte und ausgearbeitete Beispiele, wenn Schönheit und Mathematisches zusammengebracht und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden sollen. Aus der Relevanz des Schönen für die mathematische

Wissenschaftspraxis entstandene Forderungen, wie sie etwa Seymour Papert (1988) oder Jerry P. King (1992) erheben, werden indes in der mathematikdidaktischen Literatur eher selten diskutiert[1]: Die Forderung, *das Erleben der Schönheit innermathematischer Strukturen und Argumentationsgänge* wie etwa der Schönheit von Beweisen oder Theoremen in den Vordergrund zu stellen. Diesem Gegenstandsbereich sollte aber m.E. gerade im Bezug auf den Mathematikunterricht besonderes Augenmerk geschenkt werden, markiert er doch nicht nur einen Zusammenhang von Mathematik und Schönheit, sondern stellt die Schönheit der Mathematik selbst ins Zentrum!

Die folgenden Ausführungen werden daher nicht weitere Beispiele für Mathematisches in den bildenden Künsten aufzeigen und didaktisch diskutieren, sondern vielmehr die Möglichkeit ästhetischer Erlebnisse innerhalb der Mathematik in den Blick nehmen.

Hinweise darauf, welche dieser innermathematischen Strukturen sich durch einen besonderen ästhetischen Reiz auszeichnen, sind in der Literatur häufig zu finden. Dabei wählen auch praktizierende Mathematiker selten Beispiele aus dem Bereich der Hochschulmathematik[2] oder gar ihrer aktuellen Forschung. In der Regel sind die vorgeführten Stücke besonderer Schönheit elementar zugänglich und häufig bereits seit der griechischen Antike bekannt.

Ein solches den Elementen des Euklid entlehntes Problem bildet etwa die Frage nach der Kommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat bzw. nach der Rationalität der Quadratwurzel aus 2.[3] Dabei sind es in diesem Fall mehrere unterschiedliche Beweise für die Irrationalität bzw. die Inkommensurabilität, die es in die Beispielsammlungen der Mathematikästhetik geschafft haben. Neben der behaupteten Schönheit ist ihnen gemeinsam, dass sie zumindest prinzipiell mit Mitteln der Mittelstufenmathematik zugänglich sind. Da verschiedene Beweise, wie sich später zeigen wird, auch je unterschiedliche Aspekte der mathematischen Schönheit deutlich werden lassen, sollen im Folgenden zunächst zwei dieser Möglichkeiten vorgestellt werden. Dabei wurden die Beispiele so gewählt, dass sie sich

---

1 Ausnahmen bilden Barth (2005), Brinkmann (2006), Dreyfus und Eisenberg (1986) sowie die Arbeiten von Sinclair (z.B. 2006b oder 2009).

2 Eine berühmte Ausnahme stellt die Euler-Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ dar, die in verschiedenen Rankings zur „schönsten Formel der Welt" gekürt wurde (vgl. z. B. Wells 1990).

3 Der Übergang von der geometrischen zur zahlentheoretischen Problemstellung ergibt sich dabei durch die Betrachtung der Situation am Einheitsquadrat mit Hilfe des pythagore-ischen Lehrsatzes und der euklidischen Erkenntnis, dass zwei Größen genau dann inkommensurabel (nicht mit gemeinsamem Maß messbar) sind, wenn sie zueinander kein Verhältnis wie eine Zahl zu einer anderen haben (Elemente, Buch X, §§ 7 und 8): Sind Diagonale ($\sqrt{2}$) und Seite (1) also inkommensurabel, so ist ihr Verhältnis nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar und damit irrational und umgekehrt.

sowohl im Ansatz als auch in der Wahl der Mittel möglichst stark unterscheiden: Ein zahlentheoretischer Beweis für die Irrationalität von √2 durch Widerspruch sowie die geometrische Argumentation über die Wechselwegnahme am Quadrat.

2.1 Beispiel 1 – Die Irrationalität von √2

In vielen Schulbüchern wird die Irrationalität von √2 im Zuge der Zahlbereichserweiterung von den rationalen zu den reellen Zahlen bewiesen. Häufig wird dabei auf die historische Argumentation verwiesen, wie sie in den Elementen des Euklid ausgeführt wird. Anders als bei Euklid kommt in Schulbüchern aber die geometrische Deutung von √2 als Diagonale im Einheitsquadrat nur vor, um etwa die Lage auf der Zahlengeraden zu konstruieren. Der eigentliche Beweis für die Irrationalität wird dann losgelöst von geometrischen Überlegungen auf rein algebraischer Ebene betrachtet, wie der folgende Schulbuchausschnitt aus Neue Wege 9 zeigt (vgl. Abb. 1). Diesem Beispiel geht neben der Problemstellung, dass es nichtrationale Zahlen gibt, auch eine kleinere Einheit zum direkten und indirekten Beweisen voran. Im Zuge dessen wird außerdem darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um „ein besonders schönes Beispiel für einen indirekten Beweis“ (Neue Wege 9 (2003), S. 26) handele.

Wie in vielen weiteren Schulbüchern oder auch in der Literatur für die Schulpraxis findet sich auch hier der Verweis auf Euklid (Buch X, §115a).[4] Neben der bereits angedeuteten Tatsache, dass es Euklid um die geometrische Frage der Inkommensurabilität und nicht um den Zahlbereich der rationalen Zahlen geht, ist dieser Verweis auch strukturell immer dann nicht vollständig haltbar, wenn aus der Rationalitätsannahme ein Widerspruch dazu abgeleitet wird, dass √2 bzw. das Verhältnis von Seite und Diagonale als Verhältnis zweier *teilerfremder* ganzer Zahlen darstellbar ist. Die Argumentation in § 115a verläuft zwar ebenfalls indirekt und überträgt das geometrische Problem mittels der vorweg in Buch X gemachten Erkenntnis, dass kommensurable Größen zueinander in einem Verhältnis stehen wie „eine Zahl zu einer Zahl“ (Euklid, Buch X, § 5). Durch die Wahl dieser Zahlen derart, dass sie die kleinsten sind, die in dem selben Verhältnis stehen wie Seite und Diagonale, wird dies aber zu dem Widerspruch geführt, dass eine der beiden Zahlen dann zugleich gerade und ungerade sein müsse.

---

4 Clemens Thaer, dessen Übersetzung der Elemente hier verwendet wird, weist darauf hin, dass § 115a vermutlich nachträglich aus einem älteren Werk dem Ursprungstext von Euklid zugefügt wurde (vgl. Euklid – Die Elemente, S. 462).

E Beweise, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Widerspruchsbeweis:
Annahme: Das Gegenteil ist wahr.

Folgerungen:	Erklärung:
(1) $\sqrt{2}$ ist rational.	
(2) $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$	Man kann $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen.
(3) $2=\frac{p^2}{q^2}$	Quadrieren der Gleichung (2)
(4) $p^2=2q^2$	Auflösen nach p^2
(5) p^2 ist gerade.	Eigenschaft gerader Zahlen
(6) p ist gerade.	Eigenschaft gerader Zahlen
(7) $\mathbf{p=2n}$	**p ist gerade, daher durch 2 teilbar.**
(8) $p^2=4n^2$	Quadrieren von (7)
(9) $4n^2=2q^2$	Einsetzen von (8) in Gleichung (4)
(10) $2n^2=q^2$	Dividieren der Gleichung (9) durch 2
(11) q^2 ist gerade	Eigenschaften gerader Zahlen
(12) q ist gerade	Eigenschaften gerader Zahlen
(13) $\mathbf{q=2m}$	**q ist gerade, daher durch 2 teilbar.**
(14) $\frac{p}{q}$ ist *kein* vollständig gekürzter Bruch.	p und q sind gerade, also sind beide durch 2 teilbar.

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\sqrt{2}$ durch einen vollständig gekürzten Bruch darstellbar ist. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Abbildung 1: Widerspruchsbeweis aus Neue Wege 9, S. 26

2.2 Beispiel 2 – Die Inkommensurabilität im Quadrat

Das geometrisch formulierte Problem der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Einheitsquadrat bedarf zum Beweis nicht unbedingt eines Übergangs zu Zahlentheorie und Algebra. Auch der rein geometrische Beweis ist bereits seit der griechischen Antike bekannt, fußt er doch auf dem Prinzip der Wechselwegnahme („Euklidischer Algorithmus“).[5]

---

[5] Obgleich sich der Beweis für die Inkommensurabilität in den Elementen Buch X wie oben beschrieben des Übergangs zu den Zahlenverhältnissen und deren Eigenschaften bedient, behaupten Rademacher und Toeplitz, der Beweis durch Wechselwegnahme sei „ganz im griechischen Geist abgefaßt und in der Gedankensphäre vom X. Buch des Euklid gelegen“ (Rademacher und Toeplitz 1933, S. 16). Dazu ist jedoch anzumerken, dass

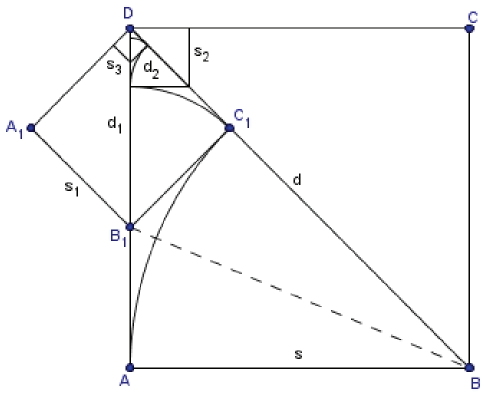

Abbildung 2: Wechselwegnahme am Quadrat

Zu einem Quadrat mit Seitenlänge s und Diagonale d wird ein weiteres Quadrat mit Seitenlänge s_1 und Diagonale d_1 so konstruiert, dass gilt $d = s + s_1$ (vgl. Abb.2). Durch Kongruenzbetrachtungen an den beiden rechtwinkligen Dreiecken B_1BA und B_1BC_1 erhält man für die Strecke AB_1 die Länge s_1 und damit für die Länge der Ursprungsseite s weiter $s = d_1 + s_1$. Auch am Quadrat mit der Seitenlänge s_1 kann auf gleiche Weise ein weiteres Quadrat mit der Seitenlänge s_2 und Diagonale d_2 konstruiert werden, so dass wiederum gilt: $d_1 = s_1 + s_2$ und $s_1 = d_2 + s_2$. Dieses Verfahren kann entsprechend fortgesetzt werden, *ohne jemals abzubrechen*.

Für die Differenz von Diagonalen und Seiten gilt dabei $d - s = s_1 > d_1 - s_1 = s_2 > d_2 - s_2 = s_3 > d_3 - s_3 = s_4 \ldots > s_k = s_{k+1} \ldots > 0$. Da das Verfahren nicht abbricht und die Quadratseiten beliebig klein werden, wird man zu jedem vorgegeben Maß e ein s_k finden, das kleiner ist als dieses Maß. Damit kann e kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonalen im Ausgangsquadrat sein.

Obgleich dieser Beweis – jedenfalls der gängigen Schulbuchliteratur nach zu urteilen – nicht der Standardbeweis für die Irrationalität im Mathematikunterricht ist, ist er dennoch elementar zugänglich und wäre aus dieser Perspektive für den Einsatz in Schule und Unterricht in gleicher Weise geeignet wie das erste Beispiel. So gehört er nach Rademacher und Toeplitz zu jenen „kleinen Liedern“, die ohne großes Vorwissen den „entscheidenden Gedanken“ erkennen lassen (Rademacher und Toeplitz 1933, S. VIII f.). In diesem Sinne wurde etwa von Daniel Frohn eine auf dem gleichen geometrischen Prinzip der Wechselwegnahme beruhende, ähnliche

das Prinzip der Wechselwegnahme allgemein zur Bestimmung der Inkommensurabilität in Buch X (§ 2) zwar angegeben wird, aber in diesem speziellen Fall jedenfalls in den Elementen nicht zur Anwendung kommt.

Beweismöglichkeit auch explizit für den Mathematikunterricht in Klasse 9 ausgearbeitet (Frohn 2009, Arbeitsblatt 2).

Beide vorgestellten Beweise zählen also nicht nur zu den Paradebeispielen schöner Mathematik, sondern sind auch prinzipiell bereits für den Einsatz im Mathematikunterricht der Mittelstufe geeignet. Sie unterscheiden sich jedoch in der zugrundeliegenden Beweisidee und der mathematischen Disziplin, derer sie sich bedienen. Insbesondere aber sprechen sie *unterschiedliche Facetten des mathematischen Schönheitsbegriffs* an, was die folgende Detailanalyse zeigen wird.

3 Irrational schön – Charakteristika mathematischer Schönheit

> „It may be very hard to define mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind […].“ (Hardy 1940, S. 85)

Die Einschätzung, der mathematische Schönheitsbegriff sei ebenso schwierig adäquat zu bestimmen wie der allgemeine, wird breit geteilt – sowohl innerhalb der Mathematikästhetik als auch unter Vertretern der allgemeinen philosophischen Ästhetik. Dennoch weist die Literatur eine Vielzahl von Versuchen aus, den Schönheitsbegriff durch weitere Begriffe zu ersetzen oder durch die Aufzählung verschiedener Kriterien anzunähern. Auch der Mathematiker G. H. Hardy greift zu diesem Mittel, um sein mathematikästhetisches Urteil über zwei Theoreme und deren Beweise – eines der genannten Beispiele ist der oben vorgestellte Widerspruchsbeweis zur Irrationalität – zu begründen:

> „In both theorems […] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy. The arguments take so odd and surprising a form; the weapons used seem so childishly simple when compared with the far-reaching results; but there is no escape from the conclusions. There are no complications of detail – one line of attack is enough in each case. […] A mathematical proof should resemble a simple and clear-cut constellation, not a scattered cluster in the Milky Way.“ (Hardy 1940, S. 113)

Bereits die bildhafte Sprache und die Länge der Ausführung zeigen, dass Hardy hier eine präzise Bestimmung nicht leicht fällt. Die angeführten Eigenschaften reichen von einer spielerischen *Einfachheit weitreichender Resultate* über *klare* Konstellationen, die ohne Umschweife und überflüssige Details zu einer *unerwarteten Erkenntnis* führen bis hin zu *Gefühlen* wie Überraschung und Unausweichlichkeit. Dem folgend sollen auch hier zunächst vier Eigenschaftskomplexe unterschieden und getrennt voneinander entfaltet werden: Die *Tragweite* oder Relevanz, die *Ökonomie*, die *epistemische Transparenz* sowie die *emotionale Wirksamkeit* schöner Mathematik (Abbildung 3).

Alle diese Bereiche hängen eng zusammen und gehen auch und gerade in ihren Wechselwirkungen in mathematikästhetische Urteile ein.[6]

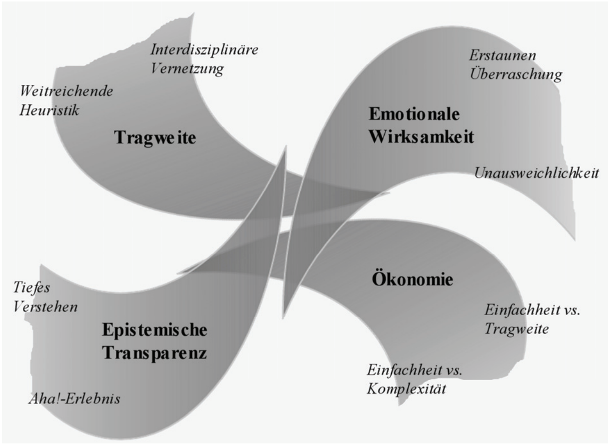

Abbildung 3: Aspekte mathematischer Schönheit

3.1 Tragweite

Im Zusammenhang mit der Schönheit von Theoremen oder mathematischen Argumentationen wird häufig auf deren außerordentliche Tragweite hingewiesen. Dabei spielt auch die Anwendbarkeit außerhalb der Mathematik eine Rolle. Viel häufiger aber wird deren Potential in Bezug auf einen größeren *innermathematischen* Zusammenhang betont. Diese innermathematische Tragweite wiederum wird auf unterschiedliche Arten verstanden. Einerseits kann die Relevanz eines Resultates selbst und seine *interdisziplinäre Vernetzung* eine Rolle bei der ästhetischen Bewertung spielen. Zum anderen aber wird ein Beweis dann als besonders schön

[6] Die folgende Ausarbeitung der Charakteristika entstand auf einer breiten, aber im Allgemeinen nicht sehr tief gehenden Literaturbasis. So flossen neben Hardys Ansatz auch die Aussagen weiterer Mathematiker ein, die sich zur Schönheit ihrer Wissenschaft äußern, wie etwa Borel (1981), von Neumann (1976) oder Poincaré (1973). Insbesondere aber wurden mathematikphilosophische Ansätze zum Schönheitsbegriff (vgl. z. B. McAllister (2005), Rota (1997), Tymoczko (1993) oder Weth (2007)) sowie die Ergebnisse unterschiedlich angelegter empirischer Studien (vgl. Burton (2004), Müller-Hill und Spies (2011) oder Wells (1990)) berücksichtigt. Die folgende zusammenfassende Analyse der zum mathematischen Schönheitsbegriff beitragenden Eigenschaftskomplexe ist Teil-ergebnis meines laufenden Dissertationsprojektes zum Thema *Ästhetische Erfahrung Mathematik – Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler*. Daher werden die zugrunde liegenden Einzelpositionen hier nicht mehr explizit ausgewiesen.

empfunden, wenn die zugrunde liegende *Heuristik* über den aktuellen Fall hinaus Anwendungen findet. Dabei werden unterschiedliche zeitliche Dimensionen dieser Wirksamkeit gesehen. So gehört der Beitrag eines Resultates zur Lösung eines bereits in der Vergangenheit relevanten Problems ebenso zur Tragweite wie die theoriebildende Wirkung eines Beweises bzw. die verschiedene Theorien verbindende Wahl der Beweismittel. Schließlich sind die Eröffnung eines für zukünftige Forschung relevanten Problempanoramas und die Aussicht auf die weitere Bedeutsamkeit der verwendeten Beweisidee Facetten des Tragweiteaspektes. In diesem Sinne kann auch eine nachträglich offenbar werdende Vernetzung oder Anwendbarkeit den subjektiven Schönheitseindruck verändern.

Obgleich oder gerade weil die Tragweite ein in den unterschiedlichsten Kontexten sehr häufig genanntes Schönheitskriterium darstellt, sind Ansätze ernst zu nehmen, die in diesem Bereich keine genuin ästhetische Eigenschaft, sondern allenfalls eine das Schönheitsempfinden unterstützende Kraft oder ein dieser vorausgehendes Merkmal sehen. Sicher ist aber, dass die Tragweite vielseitige Anknüpfungspunkte zu anderen Facetten mathematischer Schönheit deutlich werden lässt. So fungiert sie beispielsweise als eine Bezugsgröße im Eigenschaftskomplex der Ökonomie.

Der Eigenschaftskomplex der Tragweite geht also facettenreich in mathematische Schönheitsurteile ein. Dies äußert sich wiederum in der Anwendung auf die oben vorgestellten Beispiele: Zum einen sorgte die Erkenntnis der Inkommensurabilität bzw. der nicht im Zahlenverhältnis stehenden Größen für fruchtbare innermathematische Irritationen, die etwa umfangreiche Forschungen zur Zahlbereichserweiterung anstießen (vgl. zusammenfassend Schmidt-Thieme und Weigand 2003, S. 43). Auf der Hoffnung, eine ähnlich inspirierte Einsicht in die Notwendigkeit des Beweises der Irrationalität und seine Folgen auch bei Schülerinnen und Schülern zu erzeugen, beruht z. B. auch der von Martin Wagenschein dazu beschriebene Unterrichtsvorschlag (vgl. Wagenschein 1970).

Über die Wechselbeziehungen beider Beweise zeigt sich weiter ein Paradebeispiel für die nützliche Verbindung von zunächst disparaten Disziplinen. Bereits Euklid erkennt in Buch X (§§ 5 bis 7) den Zusammenhang des geometrischen Problems der (In)Kommensurabilität mit der Darstellbarkeit der beteiligten Größen als Zahlverhältnis. Für den Beweis in § 115a werden sich dann die Erkenntnisse der Arithmetik aus den vorhergehenden Büchern im Kontext der Geometrie zu Nutze gemacht. Ähnliches ist auch umgekehrt denkbar, kann doch die Frage der Rationalität von $\sqrt{2}$ erst durch die geometrische Argumentation über die Wechselwegnahme visuell fassbar werden. Diese Facette der Tragweite als interdisziplinäre Vernetzung wird allerdings in einem Mathematikunterricht, der nur eines der Beispiele behandelt bzw. Inkommensurabilität und Irrationalität unverbunden nebeneinander stehen lässt, verborgen bleiben. Ohne die geometrische Deutung ist auch die Erweiterung des subjektiven Zahlkonzepts bezüglich der „Lückenhaftigkeit“ der rationalen Zahlengeraden schwer zu vermitteln, womit auch eine Möglichkeit verschlossen bleibt, im rein zahlentheoretisch angelegten Beweis einen für das ästhetische Empfinden zentralen subjektiven Mehrwert zu erleben.

Bezogen auf die Tragweite im Sinne einer weitreichenden Heuristik werden weniger die möglichen Wechselwirkungen als vielmehr Unterschiede der beiden Beispiele deutlich. So ist das erste Beispiel eines der elementar zugänglichen für einen Beweis durch Widerspruch und damit für eine zentrale Beweismethode der gesamten Mathematik. Des Weiteren kann der Argumentationsgang, in der Art wie er oben zitiert wird, leicht zum Nachweis der Irrationalität von Quadratwurzeln aus weiteren Nichtquadratzahlen übertragen werden.[7] Auch die Methode der Wechselwegnahme ist eine in weiteren Kontexten verwendbare Strategie. Mit ihrer Hilfe können beispielsweise inkommensurable Strecken im regelmäßigen Fünfeck nachgewiesen werden[8], und bezogen auf die natürlichen Zahlen entspricht sie dem euklidischen Algorithmus. Ihre Anwendung muss jedoch „für jede Größenart gesondert definiert werden“ (Thiele 1999, S. 18).

Hinweise auf die Tragweite der vorgestellten Resultate bzw. der zugrunde liegenden Beweisideen lassen in der Hauptsache die innermathematische Bedeutung klar werden, können aber sicher nicht allein dazu beitragen, den ästhetischen Wert der Beispiele erfahrbar zu machen.

3.2 Ökonomie

Ein sehr häufig genannter Aspekt mathematischer Schönheit ist die *Einfachheit* oder *Kürze* eines Gedankengangs. Gemeint ist dabei aber in den seltensten Fällen, dass die Schönheit von der für einen Beweis benötigten Schrittanzahl oder einer ähnlichen messbaren Größe abhängt. Vielmehr geht diese Eigenschaft in der Regel relativ zu weiteren, den Gegenstand auszeichnenden Charakteristika in die ästhetische Bewertung ein. Um dem relativen Charakter der Kürze oder Einfachheit gerecht zu werden, wird daher häufig korrekter der Begriff der *Ökonomie* verwendet.

Festgehalten werden kann, dass die Einschätzung, dass ein mathematischer Gegenstand besonders einfach ist, mit seiner Zugänglichkeit für das wertende Subjekt

---

7 Eine noch stärkere Verallgemeinerungsfähigkeit bergen Irrationalitätsbeweise, die über die Primfaktorzerlegung argumentieren. Diese sind sogar leicht auf n-te Wurzeln übertragbar.

8 Die Wechselwegnahme am regelmäßigen Fünfeck ist intuitiver als am Quadrat, da die fortgesetzten Strukturähnlichkeiten deutlicher hervortreten. Daher wurde die „Entdeckung“ der Inkommensurabilität durch die Pythagoreer vermutlich an dieser Figur gemacht. Zur unterrichtlichen Umsetzung der Wechselwegnahme am Pentagon siehe z. B. Hirscher (2000). Materialien zur Behandlung der Inkommensurabilität im Rahmen von hochschulmathematischen Veranstaltungen zur Lehrerbildung finden sich in Beutelspacher u.a. (2011, S. 62ff.).

einher geht. Insofern ist die Kürze oder Einfachheit zunächst eine strukturelle Bedingung für eine ganzheitliche Art subjektiver epistemischer Wahrnehmung, für das Fassen der Strukturen als Ganzes, und sie wird in diesem Sinne häufig auch negativ durch das Nichtvorhandensein möglicher Hindernisse der Wahrnehmung bestimmt. So gelten beispielsweise solche Beweise als eher hässlich oder nicht schön, die durch das Abarbeiten vieler verschiedener Fälle eine Aussage bestätigen. Dies wird nicht selten in Kontrast zu dem „schöneren" Vorgehen über eine indirekte Argumentation gesetzt.

Die umfassende subjektive Zugänglichkeit geht dann wiederum häufig in Relation zu anderen Eigenschaften in das mathematische Schönheitsurteil ein. Dabei können diese auf den Inhalt des jeweiligen Sachverhaltes bezogen sein, aber auch zu dessen strukturellen Eigenschaften in Beziehung stehen. Bezogen auf die Tragweite wird die Einfachheit etwa in einem inhaltlichen Zusammenhang gemessen. In diesem Sinne kann hier von *inhaltlicher Ökonomie* als Eigenschaft des Gegenstandes gesprochen werden. Geht dabei die Ökonomie z. B. in der Relation von Mittel und Resultat in das ästhetische Urteil ein, so muss voraus gesetzt werden, dass Satz und Beweis bzw. allgemeine Problemstellung und Argumentationsgang, jeweils inklusive des gewählten theoretischen Rahmens und der zugrunde liegenden Beweisidee, gemeinsam als Träger der so ausgezeichneten mathematischen Schönheit gesehen werden. Von *struktureller Ökonomie* kann andererseits die Rede sein, wenn eine ästhetisch wirksame Spannung durch die Relation von Einfachheit und einer (vorhergehenden) Komplexität im Sinne einer strukturellen Undurchdringlichkeit erzeugt wird.

An beiden vorgestellten Beispielen ist zu erkennen, dass gerade die Bestimmung der Einfachheit als Fehlen epistemischer Hürden von den jeweiligen subjektiven Voraussetzungen abhängig ist. So wird ein Rezipient, der mit der Übertragbarkeit von Teilereigenschaften einer Zahl auf ihr Quadrat (und umgekehrt) vertraut ist, im ersten Beispiel keine Hindernisse wahrnehmen, die für die geometrische Argumentation notwendigen Kongruenzbetrachtungen möglicherweise jedoch als „unnötigen technischen Überbau" empfinden. In den gängigen Schulbüchern wird häufig bereits versucht, etwa durch die Wiederholung der notwendigen Voraussetzungen, Verständnisproblemen in der eigentlichen Argumentation vorzubeugen. Dies geschieht aber allenfalls implizit unter der Zielsetzung, den ästhetischen Reiz der Beispiele zu erhöhen.

Die subjektive Zugänglichkeit der Ansätze hängt jedoch nicht nur vom Vorwissen, sondern auch von der Repräsentationsform ab. So kann die Visualisierung im geometrischen Beweis dem einen die Strukturähnlichkeit der Quadrate und den weiteren Verlauf der Wegnahme sofort offenbaren, während ein anderer mit der Fortführbarkeit ins Unendliche hadert. Für Letzteren könnte dann aber wiederum durch den evtl. einfacher handhabbaren Übergang auf ein Problem der Darstellbarkeit als

Zahlverhältnis die Spannung von der Komplexität des Unendlichen und der Schlichtheit des Widerspruchsbeweises erlebbar werden.

In diesem Sinne ist die Entscheidung, welcher der beiden Beweise die einfacheren Mittel verwendet, um ein Resultat von solcher Tragweite zu zeigen, welcher also im klassischen Sinne der ökonomischere ist, auch vom wertenden Subjekt abhängig. Grundsätzlich ist ein solches Urteil jedoch in jedem Fall nur dann möglich, wenn Tragweite und Einfachheit bzw. Komplexität der Argumentation angemessen thematisiert, erkenn- und erlebbar werden.

3.3 Epistemische Transparenz

Wenn G. H. Hardy wie oben zitiert fordert, ein schöner Beweis müsse sich durch „a simple and clear-cut constellation" auszeichnen, dann betont er damit den Zusammenhang von Einfachheit und einer weiteren sehr häufig angeführten Qualität schöner Beweise: Sie überzeugen in ihrem strukturellen Aufbau durch eine besondere *Klarheit*. Gemeint sind damit eine deutlich nachvollziehbare Dramaturgie und für den Leser leicht durchschaubare Schlüsse. Durch die Verwendung von Begriffen aus dem Bereich des Visuellen wird dabei im Allgemeinen nicht nur eine strukturelle Eigenschaft der Gegenstände beschrieben, sondern insbesondere ein Zusammenhang zum subjektiven Verstehen herausgestellt: Das „innere Auge" hat eine unverstellte Sicht auf die zugrunde liegenden Strukturen.[9]

Die Spezifizierungen von Charakteristika wie Klarheit und Reinheit legen nahe, dass ein schöner Beweis nicht allein dazu führt, die Wahrheit der bewiesenen Aussage anzuerkennen, sondern vielmehr die Aussage und ihre Zusammenhänge *tiefer zu verstehen*. Im Zusammenhang mit mathematischer Schönheit wird jedoch häufig nicht nur gefordert, dass mit der Rezeption dieses tiefe Verstehen einhergehe. Vielmehr steht eine bestimmte Art des Verstehens im Zentrum des Interesses, die häufig mit dem Terminus *„Aha!-Erlebnis"* umschrieben wird. Dabei stellt sich das Wissen um das „Warum" eines mathematischen Sachverhaltes und um seine grundlegenden Strukturen, einer Enthüllung gleich, scheinbar plötzlich ein. Das (vollständige) unmittelbare Verstehen – quasi „von einem Moment zum nächsten" – wird als tiefgreifendes emotional berührendes Erlebnis beschrieben.

Insgesamt zeigt sich, dass die epistemische Transparenz einen zentralen Aspekt des ästhetischen Urteils in der Mathematik darstellt, obgleich eine Substitution der mathematischen Schönheit durch diesen Eigenschaftskomplex, wie sie etwa Gian-Carlo Rota (1997) vorschlägt, nicht geboten erscheint. Den unterschiedlichen Ausprägungen des hier Beschriebenen könnten aber verschiedene Funktionen zukom-

9 Der von Johannes Lenhard (2006) eingeführte Begriff der „epistemischen Transparenz" bleibt dabei in dieser Metaphorik und fasst außerdem den diesen Eigenschaftskomplex auszeichnenden Zusammenhang von struktureller Beschaffenheit und Verstehen.

men. So scheint ein grundsätzliches Erfassen des Argumentationsgangs gepaart mit der oben beschriebenen subjektiven Zugänglichkeit als Voraussetzung zur Wahrnehmung der epistemischen Transparenz im Sinne eines darüber hinausgehenden ganzheitlichen Verstehens oder eines Aha!-Erlebnisses zu fungieren. Damit kommt der Schönheit ein das schlichte Verstehen übersteigender, spezifisch epistemischer Wert zu.

Die beiden oben angeführten Beispiele unterscheiden sich in der Art ihrer epistemischen Transparenz. Beispiel 1 ermöglicht von seiner Anlage her einen Einblick in die grundlegende Struktur der rationalen Zahlen als generell durch Brüche darstellbare Objekte. Darüber hinaus führt der erzeugte Widerspruch zunächst aber nur zu der Erkenntnis, *dass* $\sqrt{2}$ diese Eigenschaft nicht hat. Eine Begründung dafür oder Weiteres über die Beschaffenheit des Objektes $\sqrt{2}$ legt er jedoch nicht offen. Es sind verschiedene Möglichkeiten denkbar, diesem Mangel an tiefem Verstehen und damit an epistemischer Transparenz, wie sie oben beschrieben wird, zu begegnen. Martin Wagenschein setzt etwa bei der „Bereitstellung der Beweismittel" auf möglichst anschauliche Begründungen der Voraussetzungen etwa über die figurierte Darstellung von Quadratzahlen (vgl. Wagenschein 1970, S. 140 ff.).

Damit ist allerdings das generelle Problem nicht behoben: Im vorgestellten Widerspruchsbeweis bleibt die Frage nach dem Warum der Irrationalität ungeklärt. Dies ist in der geometrischen Argumentation zumindest potenziell anders. Durch die fortgesetzte Wechselwegnahme entstehen sichtbar immer kleinere Quadrate, deren Struktur jeweils mit der des Ausgangsquadrats übereinstimmt. Über diese Erkenntnis ist nun der Weg geebnet zu verstehen, dass der Prozess niemals abbrechen und somit – weil die Quadratseiten beliebig klein werden – kein gemeinsames Maß von Seite und Diagonale gefunden werden kann. Der epistemische Mehrwert der geometrischen Argumentation liegt dabei wie oben bereits angedeutet nicht darin, dass sie voraussetzungsärmer wäre oder in einer besseren Zugänglichkeit durch die Visualisierung, sondern vielmehr in ihrer eher suchend, *konstruktiv* angelegten Grundstruktur. Dabei ist m. E. auch die oben vorgestellte klassische Konstruktion von immer kleineren Quadraten der von Daniel Frohn (2009) vorgeschlagenen Vorgehensweise über das Falten eines quadratischen Papiers vorzuziehen. Frohns Ansatz des „Quadrats im Quadrat" unterstützt zwar den Gedanken der Handlungsorientierung im Unterricht, erhöht aber die Schwierigkeit, den „abschließenden Gedanken des unendlichen Abstiegs" (Frohn 2009, S. 45) zu erkennen, wie Frohn es selbst befürchtet, und steht damit der epistemischen Transparenz eher entgegen.

Ob sich im Fall der Beispiele ein tieferes Verstehen in Form eines Aha!-Erlebnisses im Unterricht einstellt oder das Verstehen gar ganz ausbleibt, kann durch die Wahl der Beweisart beeinflusst werden, bleibt letztlich aber vom rezipierenden Subjekt und der im Unterricht gelebten Methodenkultur abhängig. Frohn vermutet gar, dass die epistemischen Schwierigkeiten mit Beweisen der Art von

Beispiel 1 gerade darin liegen, dass sie sich weniger gut für einen schüleraktiven Unterricht eignen (vgl. Frohn 2009, S. 23).[10]

3.4 Emotionale Wirksamkeit

Schöne Stücke der Mathematik lösen bei den produzierenden wie auch bei den rezipierenden Personen eine Fülle von Emotionen aus. Dies kommt insbesondere durch eine emotional gefärbte Sprache im Zusammenhang mit ästhetischen Werturteilen zum Ausdruck. Neben den allgemein zu beobachtenden Zeugnissen emotionaler Betroffenheit im Umgang mit (besonders schöner) Mathematik werden auch bestimmte Gefühle ausdifferenziert und immer wieder genannt. Diese stehen selten isoliert, sondern qualifizieren vielmehr häufig die bisher beschriebenen Eigenschaftskomplexe. So werden beispielsweise häufig *Überraschung* und *Erstaunen* über die vorgefundene innermathematische Tragweite oder Ökonomie zum Ausdruck gebracht, und es werden zunächst überraschend erscheinende Wendungen oder unerwartete Ideen herausgestellt. Auch vermittelt eine schöne mathematische Argumentation den Eindruck, dass das gewünschte Ziel nun unausweichlich erreicht werden muss. Diese *Unausweichlichkeit* ist eine häufig mit der epistemischen Transparenz einher gehende emotionale Wirkung schöner Mathematik. Im tiefen Verstehen oder einem Aha!-Erlebnis stellt sich gleichzeitig zum rationalen Erfassen das Gefühl ein, dass ein Resultat oder ein bestimmter Schluss nun unumgänglich ist. Hinzu kommt die Freude über das eigene Erkenntnisvermögen und die eigenen Fähigkeiten.

Die von Thomas Weth (2007) genutzte Möglichkeit, durch ein Gefühl bezogen auf verschiedene Eigenschaften als Träger bzw. durch unterschiedliche Gefühle den Begriff der mathematischen Schönheit auszudifferenzieren, weist darauf hin, dass die emotionale Komponente von besonderer Relevanz für den ästhetischen Charakter dieser Eigenschaftskomplexe ist. So liegt die Vermutung nahe, dass erst durch die emotionale Wirksamkeit aus einer etwa epistemischen Eigenschaft (wie einfache Zugänglichkeit oder Transparenz) eine im eigentlichen Sinne ästhetische wird.

Als besonders schöne Stücke der Mathematik werden auch die beiden hier besprochenen Beispiele immer wieder mit den beschriebenen Emotionen in Verbindung gebracht (vgl. etwa die oben zitierte Beschreibung Hardys). Dabei kann die geometrische Argumentation etwa durch das Erstaunen über die Strukturähnlichkeiten im unendlich Kleinen begleitet werden. Aber auch die Erkenntnis, dass das gesuchte gemeinsame Maß nun sicher nicht gefunden werden kann, kann je nach Vorwissen und Erwartungen ein großes Maß an Überraschung bereit halten. Der Wider-

[10] Wie eine stark auf Eigenaktivität setzende Sequenz aber auch diesen Beweis behandeln kann, beschreibt Wagenschein (1970). Er versucht dabei, das tiefere Verstehen des eigentlichen Beweises insbesondere durch die Schärfung des Problembewusstseins bei den Schülerinnen und Schülern anzubahnen.

spruchsbeweis provoziert dagegen eher das Gefühl der Unausweichlichkeit. So scheint nach der formulierten Annahme jeder Schritt den nächsten nahe zu legen, und der Beweisgang läuft unausweichlich auf den Widerspruch zu. Auch die generelle Tragweite des Resultates kann zu mehr oder weniger stark ausgeprägten emotionalen Reaktionen führen – wird doch das gesamte bisherige Zahlkonzept in Frage gestellt.

Die hier vorgeschlagene Ausdifferenzierung der mathematischen Schönheit kann sicher den Begriff nicht vollständig erfassen. Dies zeigen bereits die vielen nicht ausgeführten Querverbindungen zwischen den beschriebenen Eigenschaftskomplexen, die mögliche Widersprüchlichkeit der Aspekte untereinander an einigen Stellen, aber auch das Moment des Subjektiven, das immer wieder einfließt. Auch mathematische Schönheit ist nicht rein rational fassbar, sie ist und bleibt ein *schillernder Begriff*.

Dieser Facettenreichtum schlägt sich insbesondere in der konkreten Anwendung der Charakteristika auf die beiden Beispiele positiv nieder: Durch die jeweils sehr unterschiedlichen Bereiche, die die verschiedenen Eigenschaftskomplexe berühren, werden ganz verschiedene Perspektiven auf den Gegenstand eingenommen. Dennoch wird durch die übergreifende Fragestellung nach dem ästhetischen Wert der Beispiele ein Zerfallen der Beschreibung in disparate Teilaussagen vermieden. Im Folgenden sollen nun die daraus resultierenden Chancen, aber auch die Schwierigkeiten, die mit einer mathematikästhetischen Perspektive für den Mathematikunterricht und für die Mathematikdidaktik verbunden sind, näher beleuchtet werden.

4 Didaktische Perspektiven der Mathematikästhetik

Insbesondere bezogen auf die eingangs zitierte Forderung nach Schönheitserfahrungen im Mathematikunterricht, ergeben sich aus der Analyse des aus der mathematischen Wissenschaftspraxis resultierenden Schönheitsbegriffs auch mögliche Antworten auf die oben offenbleibenden Fragen nach der unterrichtlichen Umsetzung und nach möglichen Anknüpfungspunkten an weitere Fragen der Mathematikdidaktik.

So werden die Unterrichtsinhalte in ihrer Breite über die ästhetischen Kategorien systematisch beschreibbar und auf einen möglichen ästhetischen Gehalt prüfbar. Außerdem berührt der oben ausdifferenzierte Begriff mathematischer Schönheit verschiedenste über die Frage nach dem ästhetischen Wert hinausgehende übergreifende Anforderungsbereiche und Funktionen des Mathematikunterrichts. Zieht man die oben explizierten Eigenschaftskomplexe zunächst noch getrennt voneinander heran, so kann sich etwa das folgende Bild ergeben:

Informationen über die Tragweite lassen zunächst die (innermathematischen) Beziehungen deutlich werden, in denen ein Stück Mathematik steht. Seine Rolle innerhalb der Mathematikgeschichte kommt dabei ebenso zum Tragen wie seine Relevanz für das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler. Dies geht einher mit dem Wissen, dass die ästhetische Komponente generell entwicklungsgeschichtlich gesehen Teil der Mathematik ist, wie auch die Mathematik Teil der allgemeinen Ästhetik war und ist. So ist das Mathematische in den Schriften Platons und Aristoteles' das Paradebeispiel für besondere Schönheit (vgl. z. B. Aristoteles, Metaphysik, 1078a) und nimmt etwa in der rationalistischen Ästhetik der Aufklärung eine prominente Stellung innerhalb der allgemeinen Kunsttheorie ein (vgl. z. B. Hutcheson 1973). In diesem Sinne kann die Erfahrung des Schönen im Mathematikunterricht auch dazu beitragen, „exemplarische Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Zivilisation" (Lehrplan Mathematik Sek. II NRW 1999, S. 6) zu erhalten und somit eine weitere Forderung des Lehrplans zu erfüllen. Andererseits wird durch die Identifikation einer mathematischen Herangehensweise als „weitreichende Heuristik" mit dem ästhetischen Wert der betrachteten Methode auch die Bedeutung ihrer Beherrschung im Rahmen der allgemeinen Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern markiert.

Die ästhetisch wirksame Verbindung von Einfachheit mit anderen Kriterien im Eigenschaftskomplex der Ökonomie macht die beteiligten Eigenschaften relativ bestimmbar: So kann auch das subjektive Erschließen eines nicht ohne Mühe zugänglichen Argumentationsgangs als individuell lohnenswerte Anstrengung empfunden werden, wenn dies in Relation zur Tragweite des bewiesenen Resultates „gemessen" und im Unterricht transparent wird. Diese Perspektive geht über Einfachheit im Sinne von kalkülorientierter Beherrschbarkeit hinaus, die lediglich einen gewissen (Noten-)Erfolg verspricht und daher für die Schülerinnen und Schüler positiv konnotiert ist und so in der Unterrichtspraxis manchmal gar mit dem Begriff der Schönheit in Verbindung gebracht wird (vgl. Brinkmann 2006, S. 210 f.). Das zeigt, dass auch innerhalb der Mathematik nicht jede Annehmlichkeit eine mathematisch-ästhetische Kategorie ist, und betont damit die Notwendigkeit expliziter Thematisierung möglicher Schönheitskriterien für einen Unterricht, in dem die Schönheit der Mathematik erfahren werden soll.

Mit der Eigenschaft der epistemischen Transparenz geht die Forderung einher, ein guter Mathematikunterricht müsse über bloß syntaktisches Wissen und Können hinausgehen. Auch das tiefe Verstehen im Umgang mit schöner Mathematik integriert die Durchdringung auf semantischer Ebene, bereichert diesen Aspekt aber noch durch das Moment des Aha!-Erlebnisses. Außerdem ist dem in das ästhetische Urteil eingehenden Verstehen keine außerhalb dessen liegende Zielsetzung notwendig vorangestellt. Aus Sicht der (Mathematik-)Ästhetik ist vielmehr der Luxus des Verstehens um seiner selbst willen erlaubt und förderlich.

Die emotionale Wirksamkeit ist sicher die zentrale Eigenschaft schöner Mathematik, sowohl bezogen auf die aktuelle Motivation wie auch auf den Aufbau einer langfristigwirksamen positiven affektiven Beziehung zur Mathematik. Die Aussicht auf ein positives ästhetisches Erlebnis bietet ein Motiv zur Beschäftigung mit Mathematischem abseits von Überlegungen zur späteren Brauchbarkeit oder dem kurzfristigen Erfolg durch Kalkülbeherrschung. So findet Nathalie Sinclair den motivationalen Charakter des Ästhetischen, den sie im Bereich der Forschungsmathematik identifiziert hat, auch bei Schülerbeobachtungen bestätigt (vgl. Sinclair 2006b, S. 69 ff.). Zugleich ist die emotionale Wirksamkeit aber auch besonders stark von der subjektiven Verfassung abhängig und kann somit weder durch die Wahl der Beispiele noch durch geplante Unterrichtsarrangements erzwungen, sondern höchstens angebahnt und unterstützt werden. Die Tatsache, dass im mathematikästhetischen Werturteil Gefühle häufig genutzt werden, um andere Charakteristika zu qualifizieren, sowie die oben besprochenen Beispiele zeigen aber dennoch, dass die beteiligten Emotionen nicht unabhängig vom betrachteten Gegenstand zu sehen sind. Das bedeutet zunächst, dass das Emotionale als wichtige Komponente ästhetischer Erfahrung durch die Wahl passender Beispiele unterstützt werden kann. Dabei können etwa authentische Hinweise auf eine *erstaunliche* Tragweite o. Ä. durch die Lehrerinnen und Lehrer dazu beitragen, die emotionale Seite bewusst zu machen. Ein exemplarisches Benennen der beteiligten Emotionen gehört außerdem zur (nachträglichen) Bewertung eines gewählten Lösungsweges, beispielsweise im Rahmen der Pólyaschen „Rückschau“ (vgl. Pólya 1995). Gemeinsam mit einer Reflexion der anderen Eigenschaftskomplexe kann so dem Ästhetischen auch im schulischen Problemlöseprozess der Platz zukommen, den Nathalie Sinclair (2006a) für die mathematische Wissenschaftspraxis feststellt. Als evaluatives Moment gehören ästhetische Kategorien ebenso zum Repertoire wie etwa die Überprüfung von Folgerichtigkeit oder Allgemeinheit.

Einige insbesondere auf die Unterrichtspraxis bezogene Folgerungen ergeben sich erst, wenn man die mathematische Schönheit als Ganze in den Blick nimmt:

Wie bei allem Kunstschönen bedarf auch das Erkennen der mathematischen Schönheit der Übung, Anleitung und Gewöhnung. Im Fall von Kriterien wie Ökonomie und Tragweite sind ein instruktives Aufzeigen an Beispielen und zusätzliche Informationen über das konkrete Problem hinaus notwendig. Eigenschaften wie epistemische Transparenz oder emotionale Wirksamkeit dagegen können sicher nicht im klassischen Sinne gelehrt werden, sondern bedürfen insbesondere des eigenständigen erforschenden Umgangs mit den Gegenständen. Es müssen demnach Lerngelegenheiten geschaffen werden, in denen die Schönheitscharakteristika erlernt *und* erfahren werden können.

Gegenstand von Demonstration und Erfahrung können dabei nicht nur Beweise im engeren Sinne, sondern allgemeiner auch mathematisches Argumentieren und Begründen – einschließlich präformal-inhaltlicher Beweise – sowie das Lösen von Problemen und die Reflexion dieser Prozesse sein (vgl. Dreyfus und Eisenberg 1986, S. 4 f.). Die beschriebenen didaktischen Implikationen der einzelnen Eigenschaftskomplexe zeigen, dass ein *Sprechen über das Ästhetische* dieser Gegenstände dabei eine entscheidende Rolle spielt.

Die Integration mathematikästhetischer Fragen in den Unterricht setzt somit auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer Erfahrungen verschiedener Art voraus: Ihnen muss zunächst grundsätzlich die Relevanz des Ästhetischen für die Mathematik bewusst sein. Auch müssen sie mindestens eine Ahnung von der Tragweite der unterrichteten Gegenstände haben. Dazu sind sowohl Einblicke in deren Anwendungen als auch in die Entwicklungsgeschichte notwendig. Mathematiklehrerinnen und -lehrer sollten aber auch in der Lage sein, authentisch die emotionale Wirksamkeit oder die erstaunliche Ökonomie eines Beispiels vermitteln zu können und das Moment des tiefen Verstehens oder des Aha!-Erlebnisses kennen. Die Umsetzung der eingangs zitierten Lehrplanforderung macht also auf Seiten der Lehrerinnen und Lehrer *Reflexion über Mathematik* sowie Einblicke in die und *eigene Erfahrungen* mit der mathematischen Praxis notwendig (vgl. dazu auch Beutelspacher u. a. 2011). In diesem Bereich ist die Lehrerbildung gefragt.

Die hier eingenommene mathematikästhetische Perspektive auf das Lehren und Lernen zeigt, dass die geforderte Integration der Mathematikästhetik eine Horizonterweiterung auf den verschiedensten Ebenen mathematikdidaktischer Forschung ermöglicht. Dies gilt sowohl für die konkrete Auswahl und Legitimation der Unterrichtsinhalte und -methoden als auch übergreifend für Bereiche wie das Problemlösen, das Argumentieren und Begründen oder die Wissenschaftsorientierung. Insbesondere der subjektive Charakter des mathematischen Schönheitsbegriffs lässt die für das Lehren und Lernen von Mathematik zentrale Beziehung von Mensch und Mathematik auf spezifische Art greifbar und wirksam werden.

Literatur

Barth, Armin P. (2005): Schönheit – Das Ceterum Censeo des Mathematikunterrichtes. In: *Die Wurzel* 3+4, S. 68–77.

Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor; Spies, Susanne; Wickel, Gabriele (2011): *Mathematik Neu Denken – Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden.

Borel, Armand (1981): *Mathematik: Kunst und Wissenschaft*. München.

Brinkmann, Astrid (2006): Erfahrung mathematischer Schönheit. In: Büchter, Andreas; Humenberger, Hans; Hußmann, Stephan; Prediger, Susanne (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag.* Hildesheim, S. 203–213.

Burton, Nathalie (2004): *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics.* Norwell.

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben (1994): *Erfahrung Mathematik.* Basel.

Dreyfus, Tommy; Eisenberg, Theodore (1986): On the Aesthetics of Mathematical Thought. In: *For the Learning of Mathematics* 6(1), S. 2–10.

Euklid: *Die Elemente*. Aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer (2003). Frankfurt a. M.

Frohn, Daniel (2009): Die Wurzel aus 2. Zugänge zur Irrationalität auf algebraischen und geometrischen Wegen. In: *Mathematik Lehren* 154, S. 20–45.

Hardy, Godfrey H. (1940): *A Mathematician's Apology*. Cambridge. – 13. Nachdruck mit einem Vorwort von C. P. Snow (2007).

Hirscher, Horst (2000): Klassische Probleme der Antike – Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, Jürgen; Spiegel, Wolfgang (Hrsg.): *Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik – Festschrift für Harald Scheid.* Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, S. 97–118.

Hutcheson, Francis (1973): *An Inquiry concerning Beauty, Order, Harmony, Design.* The Hague. – Edited, with an Introduction and Notes by Peter Kivy.

King, Jerry P. (1992): *The Art of Mathematics.* New York.

Ministerium für Schule und Weiterbildung N. (Hrsg.) (1999): *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II. Mathematik.* Frechen.

Lenhard, Johannes (2006): Computersimulation. Über einen Umbruch in der ästhetischen Konstitution der Mathematik. In: Krohn, Wolfgang (Hrsg.): *Ästhetik in der Wissenschaft. Interdisziplinärer Diskurs über das Gestalten und Darstellen von Wissen.* Bd. 7. Hamburg, S. 181–185.

McAllister, James W. (2009): Mathematical Beauty and the Evolution of Standards of Mathematical Proof. In: Emmer, Michele (Hrsg.): *The Visual Mind II.* Cambridge (u. a.), S. 15–34.

Müller-Hill, Eva; Spies, Susanne (2011): Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik. In: Helmerich, Markus; Lengnink, Katja; Nickel, Gregor; Rathgeb, Martin (Hrsg.): *Mathematik Verstehen.* Wiesbaden, S. 261–281.

Lergenmüller, Arno (Hrsg.) ; Schmidt, Günter (Hrsg.) (2003): *Mathematik – Neue Wege 9. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Hannover.

Neumann, John von (1976): The Mathematician. In: Taub, A. H. (Hrsg.): *Collected Work.* Bd. 1. Oxford (u. a.), S. 1–9.

Papert, Seymour (1988): The Mathematical Unconscious. In: Wechsler, Judith (Hrsg.): *On Aesthetics in Science*. Basel, S. 104–119.

Poincaré, Henri (1973): *Wissenschaft und Methode*. Darmstadt.

Pólya, George (1995): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Aufl. Tübingen, Basel.

Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): *Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik.* Berlin. – Reprint der 2. Auflage, Berlin 2000.

Rota, Gian-Carlo (1997): The Phenomenology of Mathematical Beauty. In: Palombi, Fabrizio (Hrsg.): *Indiscrete Thoughts*. Boston, S. 121–133.

Schmidt-Thieme, Barbara; Weigand, Hans-Georg (2003): Die Wurzel aus zwei. In: *Mathematik lehren* 121, S. 42–43.

Sinclair, Nathalie (2006a): The Aesthetic Sensibilities of Mathmaticians. In: Sinclair, Nathalie; Pimm, David; Higginson, William (Hrsg.): *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity.* New York, S. 87–104.

Sinclair, Nathalie (2006b): *Mathematics and Beauty. Aesthetic Approaches to teaching children.* New York.

Sinclair, Nathalie (2009): Aesthetics as a liberating force in mathematics education. In: *ZDM-The International Journal on Mathematics Education Mathematics education* 41, S. 45–60.

Thiele, Rüdiger (1999): Antike. In: Jahnke, Hans N. (Hrsg.): *Geschichte der Analysis.* Berlin, Heidelberg, Kap. 1, S. 5–42.

Tymoczko, Thomas (1993): Value Judgments in Mathematics: Can We treat Mathematics as an Art? In: White, Alvin (Hrsg.): *Essays in Humanistic Mathematics.* Washington, S. 67–77.

Wagenschein, Martin (1970): Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2. In: Ders. (Hrsg.): *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken.* Bd. 1. Stuttgart, S. 138–151.

Wells, David (1990): Are These the Most Beautiful? In: *The Mathematical Intelligencer* 12,3, S. 37–41.

Weth, Thomas (2007): Die Schönheit in der Mathematik. In: Lauter, Marlene; Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst.* Würzburg, S. 68–72.

Anschrift der Verfasserin

Susanne Spies
Universität Siegen
Fakultät IV – Department Mathematik
57068 Siegen
e-Mail: spies@mathematik.uni-siegen.de

Eingang Manuskript: 20.06.2011 (überarbeitetes Manuskript: 13.02.2012)