Datenanalyse und Geometrie

Vom Zusammenspiel theoriegeleiteter und datenbezogener Modellierungen

von

Joachim Engel, Ludwigsburg

Kurzfassung: Geometrische Problemstellungen erlauben in der Regel sowohl eine auf Messungen basierende datenorientierte Modellierung als auch eine theoriegeleitete Modellierung. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, beide Ansätze zu betrachten, sie gegenüber zu stellen und aus didaktischer Perspektive zu analysieren.

Abstract: Geometric modeling usually allows for two quite different approaches: data-oriented modeling starts with concrete measurements and moves bottom-up towards a general model while the top-down theory-driven approach is guided by established theorems in deriving a suitable model. Contrasting the two perspectives provides the opportunity to compare and juxtapose both approaches and to analyze them from a learners' perspective.

1 Geometrie und Daten

Mathematik ist eine höchst kumulative Wissenschaft, deren Erkenntnisse stark aufeinander aufbauen und aufeinander bezogen sind. Die engen Verknüpfungen zwischen Geometrie und Algebra durchziehen die Geschichte der Mathematik. Eine gute Lehrperson ist sich dieser Tatsache bewusst und wird an vielen Stellen auf den vernetzten Charakter mathematischen Wissens hinweisen. Weniger präsent sind Verknüpfungen zwischen Datenanalyse und Geometrie. Dabei legt der Ursprung des Wortes „Geo-metrie" als Vermessung der Erde eine Verbindung mit Messwerten und deren Analyse nahe.

Bei Einführung der Winkelsumme im Dreieck kann man zunächst durch Messen der Innenwinkel und Addieren zur bekannten Winkelsummen-Formel gelangen. Wenn jeder Schüler diese Aktivität mit seinem individuell gezeichneten Dreieck durchführt, liegen Messdaten im Umfang der Klassenstärke vor, die sich – aufgrund von Ungenauigkeiten – wohl nicht in jedem Fall exakt zu einem gestreckten Winkel addieren aber dennoch den Winkelsummensatz für beliebige Dreiecke vermuten lassen. Wenn bei den Schülern keine groben begrifflichen Fehlvorstellungen („Was ist ein Innenwinkel?", „Wie werden Winkel gemessen?") vorhanden sind, wird sich die Summe der jeweils erhaltenen drei Winkel nur wenig von einem gestreckten Winkel unterscheiden, was sich in den allermeisten Unterrichtssituationen vom arithmetischen Mittel oder auch vom Median der von den Schülern erhaltenen Messwerte bestätigen lässt. Diese Beobachtung stellt für die Lehrkraft den Anlass da, die Schülerinnen und Schüler zur Theoriebildung zu motivieren: „Warum ist das so?“

Ein anderes verbreitetes Beispiel ist die empirische Feststellung der Konstanz des Verhältnisses von Umfang zu Radius von Kreisen. Viele Schulbücher führen in dieses Thema ein, indem Schüler zunächst aufgefordert sind, bei kreisrunden Objekten von der Konservendose bis zum Fahrradreifen z.B. mit einem Bindfaden den Umfang und Radius bzw. Durchmesser zu messen (Tabelle 1).

Gegenstand	Radius (cm)	Umfang (cm)
Zwei-Euro-Münze	1,2	7,5
Kaffeetasse	3,6	22,7
Dose	4,7	31,3
Kochtopf	9,3	59,5
Frisbee-Scheibe	12,1	74,3
Mülltonne	16,5	107,5
Fahrradreifen	26,0	159,3

Tab. 1: Diverse kreisförmige Gegenstände mit Messungen ihres Radius und Umfangs

Gewiss werden bei diesem Messvorgang einige Ungenauigkeiten entstehen, die dennoch der Entdeckung der Proportionalität des Zusammenhangs zwischen Radius und Kreisumfang nicht im Wege stehen. So kann man zur Begründung der zunächst aus den Daten vermuteten Proportionalität z.B. den Kreis als Grenzfall eingeschriebener regelmäßiger Vielecke auffassen, bei denen die gewünschte Proportionalität direkt aus dem zweiten Strahlensatz folgt (Abbildung 1). Die Bestimmung der Proportionalitätskonstante beim Kreis kann dann als Herausforderung der Datenanalyse angesehen werden: entweder über die Bestimmung von arithmetischem Mittel oder Median der Verhältnisse aus Umfang und Durchmesser oder durch Einpassung einer Ursprungsgerade in ein Streudiagramm bestehend aus gemessenen Durchmessern und Umfängen. Die Schlussfolgerungen hieraus werden in den seltensten Fällen exakt übereinstimmen. Im vorliegenden Fall der Daten aus Tabelle 1 ergibt sich durch Mittelwertbildung der Quotienten aus Umfang und Durchmesser ein Wert von 3,167.

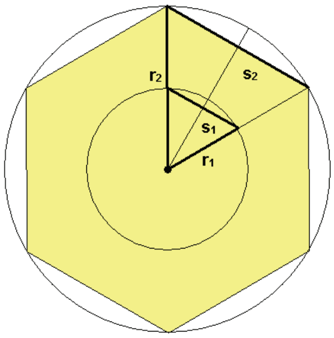


Abb. 1: Proportionalität zwischen Radius und Umfang:
Vom regelmäßigen Vieleck zum Kreis

Eine alternative Methode besteht in der Bestimmung der Steigung einer in das Streudiagramm entweder per Augenmaß oder per Kleinste-Quadrate-Kriterium eingepassten Ursprungsgeraden. Bei den vorliegenden Daten weist die Kleinste-Quadrate-Gerade eine Steigung von 6,24 auf, was zu einer Annäherung an π als 3,12 führt (Abbildung 2).

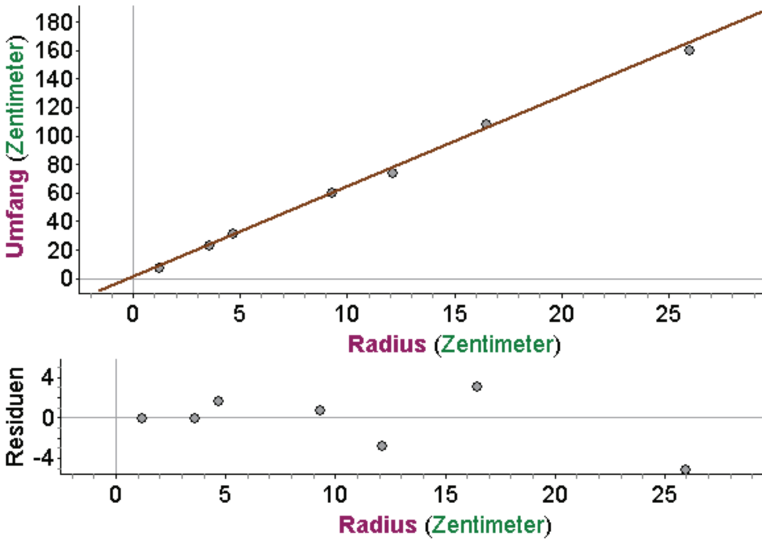


Abb. 2: Umfang versus Radius von sieben runden Objekten mitsamt eingepasster Ursprungsgeraden $y = 6,24x$ sowie Residuendiagramm

Die Tatsache, dass durch diese Vorgehensweise wohl keine für alle gemessenen Objekte identischen Quotienten aus Umfang und Radius erhalten werden, sondern die Daten zu zumindest leicht variierenden Quotienten führen, sollte nicht als Manko dieses Vorgehens angesehen werden. Vielmehr bieten die Abweichungen vom exakten Wert für π die Chance zur Einführung in Denkweisen und Methoden der explorativen Datenanalyse, einschließlich einer Betrachtung der Residuen, d.h. der Abweichungen zwischen eingepasster Geraden und Daten.

Ansätze zu Datenorientierung sind im Geometrieunterricht nicht unbekannt. Sie werden allerdings selten so konsequent wie hier dargestellt ausgeführt und als datengestütztes Arbeiten explizit thematisiert. Es steht auch außer Frage, dass ein guter Mathematikunterricht nicht auf der Ebene von empirischen Entdeckungen stehen bleiben kann, sondern die aufgrund von Messungen gewonnene Hypothese wird durch strukturorientierte theoriegeleitete Überlegungen zu einer festen Erkenntnis werden. Der empirische Einstieg ermöglicht jedoch auf handlungsorientierte Weise eine Hypothese herzuleiten, die im weiteren Verlauf des Unterrichts theoretisch zu begründen ist.

Ein etwas anspruchsvolleres Beispiel, mit einem vielleicht auch überraschenden Resultat, bezieht sich auf das Falten eines Dreiecks aus einem rechteckigem Blatt Papier. Die Aufgabe besteht darin, einen Zusammenhang zwischen Grundseite und Flächeninhalt des resultierenden Rechtecks zu modellieren (Abbildung 3).

Nimm ein A4-Blatt quer. Falte die linke obere Ecke auf eine beliebige Stelle der unteren Kante des Blattes. Durch die Faltung entsteht unten links ein rechtwinkliges Dreieck. Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Grundseite und dem Flächeninhalt durch eine Funktion. Wann hat das entstehende Dreieck die größtmögliche Fläche?

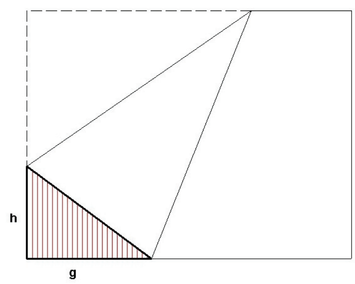


Abb. 3: Aufgabenstellung für gefaltetes A4-Papier

Biehler, Prömmel & Hofmann (2007) diskutieren diese Aufgabe detailliert und stellen einer empirischen, d.h. datenbezogenen Modellierung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Fläche F und Grundseite g eine theoriegeleitete Modellierung gegenüber. Abbildung 4 zeigt ein Streudiagramm von Grundseite versus Fläche basierend auf 11 Messungen nachdem das Blatt jedes Mal anders gefaltet wurde. Eine rein empirische Vorgehensweise, die zunächst Messungen von Grundseite g und Höhe h des Dreiecks vornimmt, mag zunächst dazu verleiten, den funktionalen Zusammenhangs mittels einer Parabel zu modellieren. Der empirische Zugang begründet sich in einer induktiven Herangehensweise: Ausgehend von Beobachtungen und erhaltenen Messwerten wird nach einem passenden Modell gesucht. Eine sorgfältige explorative Datenanalyse, die neben dem Streudiagramm und einer eingepassten Funktion auch die Abweichungen zwischen Daten und Modell im Residuendiagramm untersucht, wird im vorliegenden Fall einen zunächst vermuteten quadratischen Zusammenhang skeptisch beurteilen und nach weiteren, besser geeigneten Modellen suchen. Eine theoretische Analyse führt auf ein kubisches Polynom als geeignete Modellierung. Das normative Modell weicht also vom empirisch hergeleiteten Modell ab. Weitere interessante Beispiele und Anregungen, geometrische Modellierungen in einem ersten Schritt auf der Grundlage von Messdaten zu basieren, finden sich bei Erickson (2007).

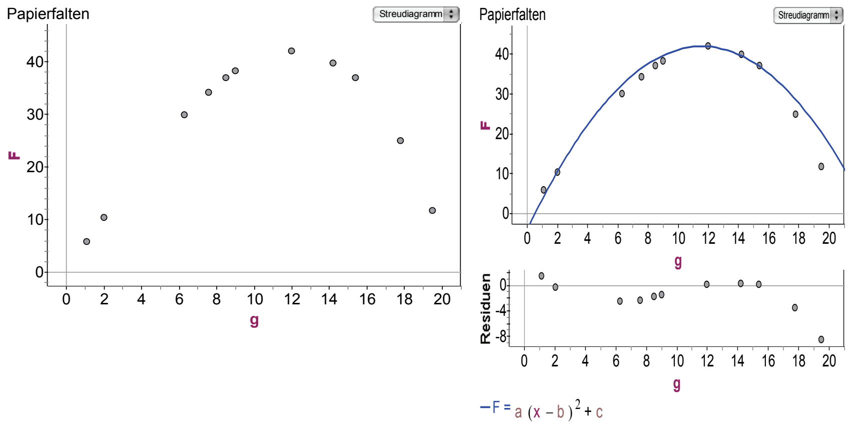


Abb 4: Streudiagramm von Grundseite und Fläche von 11 durch Faltung erhaltenen Dreiecken (links) mit eingepasster Parabel (rechts oben) und Residuendiagramm (rechts unten)

2 Theoriegeleitete und datenorientierte Modellierung

Während das dialektische Verhältnis zwischen Kontext und mathematischem Modell charakteristisch für jegliche Anwendung von Mathematik ist, gibt es unterschiedliche Ansätze dafür, wie man Mathematik zu Fragestellungen außerhalb der Mathematik in Beziehung setzen kann. Viele Anwendungen von Mathematik sind durch einen theoriegeleiteten Ansatz bestimmt, bei dem prinzipielle Überlegungen, eine Strukturanalyse oder eine umfassende Theorie schon vorhanden sind, die die Wahl des mathematischen Modells weitgehend festlegen. Fragt man, wie hoch eine 4,50 m lange Leiter reicht, wenn sie mindestens 1,50 m von der Wand aufgestellt werden muss, so liefert der Satz des Pythagoras direkt die Antwort und eine empirisch erhobene Messreihe mag sich erübrigen. Allerdings nehmen empirische Messungen und Daten auch in theoriegeleiteten Modellen eine wichtige Rolle ein. Zur Beurteilung, ob ein auf theoretischen Überlegungen abgeleitetes Modell überhaupt für den „Rest der Welt" tauglich ist, muss geprüft werden ob es der Realität standhält. Dieser Falsifizierungstest bedarf dann Beobachtungen und Messungen und die Validierung des Modells hängt entscheidend davon ab, ob die ex post erhobenen Daten mit dem Modell kompatibel sind oder ob sie ihm widersprechen. An diesen Beobachtungen entscheidet sich, ob sich das Modell bewährt oder ob es abzulehnen ist.

Ein anderer Modellierungsansatz schließt Daten schon von Anfang an mit ein. Daten werden ex ante erhoben, bevor ein präzises Modell formuliert wird. Diese Idee folgt eng dem genetischen Prinzip der Didaktik, in dem zu Beginn der Problemlösung das interessierende Phänomen näher betrachtet wird, ohne dass der Blick durch die Brille bestimmter Erwartungen in eine bestimmte Richtung gelenkt wird. Es werden zunächst zielgenaue Fragen formuliert, dann werden Beobachtungen gemacht, die in Form von Messungen quantifiziert werden. Erst graduell wird ein mathematisches Modell entwickelt, das die beobachteten Phänomene beschreibt und darstellt. Spätestens bei der Validierung des Modells kommen bei einem datenorientierten Ansatz auch theoriegeleitete Überlegungen ins Spiel: Ist das aufgestellte Modell überhaupt sinnvoll? Ist es kompatibel mit dem, was eine theoretische Analyse erwarten lässt? Oft gibt das empirisch hergeleitete Modell einen wichtigen Impuls zur Theorieentwicklung.

Egal, nach welchem Ansatz modelliert wird, oft führt erst das überlegte Zusammenspiel von Empirie (Datenerhebung und Datenanalyse) und Theorie (Deduktion aus passenden mathematischen Theoremen) zu einem überzeugenden Modell. Beim datenorientierten Ansatz steht die Empirie am Anfang und die datengestützten geometrischen Befunde geben Anlass für theoretische Überlegungen, was dann nicht selten Anlass zu einer Revision des Modells gibt. Hingegen verzichtet eine theoriegeleitete Modellierung im Mathematisierungsschritt auf empirische Befunde. Allerdings sollte ein theoriegeleitetes Modell an Beobachtungen überprüft werden und sich somit dem von der Wissenschaftstheorie geforderten Falsifizierungstest unterziehen, was dann ebenfalls zum Überdenken und zur Revision der Theorie führen kann.

Beim Modellieren funktionaler Zusammenhänge führt der daten-orientierte Ansatz dazu, verschiedene mathematische Teilgebiete wie z.B. Funktionenlehre, Algebra, Analysis und Stochastik mit Ideen des Modellbildens zu verbinden. Geometrische Fragestellungen sind besonders dadurch interessant, dass sie oft beide Formen der Modellierung, theoriegeleitet und datenorientiert, erlauben: Zunächst können geometrische Fragestellungen auf der Basis von Messungen erkundet werden (im wahrsten Sinne des Wortes von Geo-metrie als Erdvermessung), die dann die empirische Herleitung eines Modells ermöglichen. Andererseits gibt es – zumindest im Kontext der Schulmathematik – für geometrische Fragestellungen eine etablierte Theorie, auf deren Grundlage ein Modell deduziert werden kann. Das populäre Zitat „All models are wrong, but some are useful“ (Box, 1987, S. 424) mag im geometrischen Kontext gar nicht zutreffen, da die Theorie ein bestimmtes Modell als das „richtige Modell“ deduzieren lässt. Allerdings sollte man nicht vergessen, dass auch die theoriegeleiteten Modelle der Geometrie nur unter bestimmten Annahmen wie z.B. der Gültigkeit der Axiome der Euklidischen Geometrie Bestand haben.

Ein zentraler Punkt beim Modellieren ist: Ein Modell ist nicht identisch mit dem situationsbezogenen Kontextproblem aus der „realen Welt“. Zwischen Modell und Realität klafft immer eine Diskrepanz, weil Modelle eine Vereinfachung auf das Wesentliche sind, während jede beobachtete Situation mit einzigartigen Besonderheiten versehen ist. Die mathematische Beschreibung zielt hingegen auf eine allgemeinere Gültigkeit ab. Diskrepanzen zwischen Modell und Wirklichkeit sind daher nicht unbedingt ein Indiz dafür, dass das Modell „falsch“ ist, wie Schüler dann vermuten wenn sie nach dem „richtigen“ Modell fragen. Modelle vergleichen die Realität mit unseren eigenen Vorstellungen darüber, wie Dinge in der Realität ablaufen und sie erlauben uns, über die verwirrende Streuung der Daten hinwegzusehen und zu lernen, Muster zu erkennen. Modelle glätten über die natürliche Variabilität, die aus allen möglichen Gründen auftritt, um die zugrundeliegenden Muster offen zu legen. Daher erlauben uns Modelle zu verallgemeinern, unser Modell kann weitere Anwendung finden und bezieht sich nicht nur auf die gerade beobachtete Realität sondern auch auf gleich-strukturierte Realitäten. Dies dient einer Reihe von Zwecken: Ein Modell beschreibt für uns die wesentlichen Dinge über den beobachteten Vorgang. Es hilft uns, Einsicht in die zugrundeliegende Dynamik zu sehen. Mit guten Modellen lassen sich Vorhersagen für künftige Ereignisse treffen. Schließlich helfen uns Modelle, in Prozessabläufe so einzugreifen, dass die Abläufe in die gewünschte Richtung laufen.

3 Beispiel: Der beste Winkel zum Tor

Das folgende Beispiel wurde von Studierenden für das Lehramt an Realschulen im 3. Semester der PH Ludwigsburg im Rahmen eines Projektes bearbeitet.

Aufgabe

Ein Fußballspieler läuft parallel zur Außenlinie entlang einer Geraden von der Mittellinie auf das gegnerische Tor (Breite 7,32 m) zu. Der Abstand zum nächstgelegenen Torpfosten an der Torauslinie betrage 11 m (Abbildung 5). Wie hängt der Winkel α zum Tor (der Winkel zu den beiden Torpfosten) von der Entfernung des Spielers von der Torauslinie ab?

1. Gehen Sie zunächst datenorientiert vor, d.h. machen Sie eine maßstabsgetreue Skizze und messen Sie zu ca. 10 Positionen des Spielers auf der Lauflinie den jeweiligen Winkel zum Tor. Stellen Sie die Daten in einem Streudiagramm dar, und leiten Sie ein funktionales Modell ab, das den Zusammenhang zwischen der Position des Spielers auf der Lauflinie und den Winkel zum Tor darstellt. In welcher Position ist der Winkel maximal?

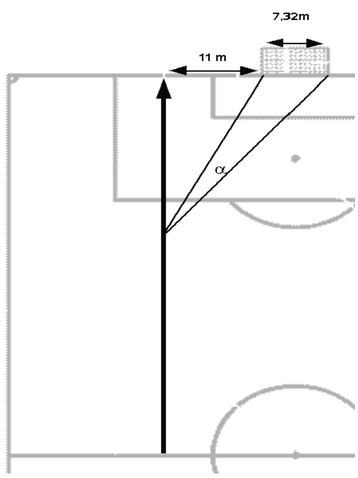


Abb. 5: Skizze zur Aufgabe: Der beste Winkel zum Tor

2. Bearbeiten Sie jetzt das Problem analytisch. Argumentieren Sie mit geeigneten trigonometrischen Überlegungen. Welcher Funktionstyp ist geeignet, um den gesuchten Zusammenhang zu modellieren? Passen Sie eine entsprechende Funktion an die Daten an, und bestimmen Sie (per Augenmaß), an welcher Position der Winkel zum Tor maximal ist.

Empirische Lösung

Beim empirischen Teil arbeiteten die Studierenden mit der Software FATHOM, (Biehler et al., 2006), um die Daten darzustellen, Funktionen anzupassen sowie mit Hilfe von Residuendiagrammen die Anpassungen kritisch zu evaluieren. Bei der Bearbeitung dieses Teils der Aufgabe überraschte die Vielfalt der Antworten. Ein Streudiagramm typischer empirisch gewonnener Messwerte ist in Abbildung 6 dargestellt.

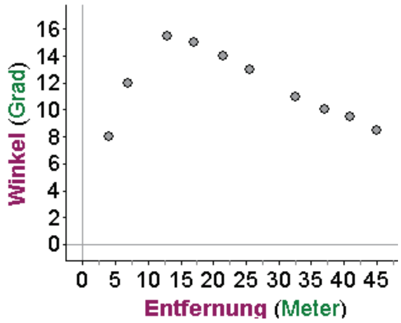


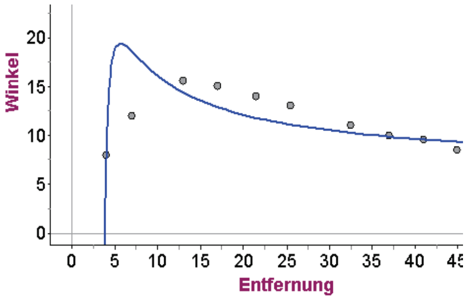
Abb. 6: Streudiagramm erhobener Messwerte zu: Der beste Winkel zum Tor

Anfängliche Versuche mit Wurzelfunktionen, Parabeln oder Polynomen dritten Grades zeigten bald, dass diese Funktionstypen nicht geeignet sind, die vorliegenden Daten zu modellieren. Residuendiagramme zeigten deutliche systematische Strukturen, egal wie sehr man sich auch bemühte, die Polynomkoeffizienten im Blick auf eine gute Kurvenanpassung zu wählen. Ernsthaft in Betracht gezogen wurden die in Abbildung 7 dargestellten Funktionen. Anpassungen erfolgten über Schieberegler, die nach Augenmaß eingestellt wurden. Die Modellierungsversuche waren gekennzeichnet durch geschicktes Ausprobieren einiger passend erscheinender Funktionstypen, Argumentieren mit bestimmten strukturellen Eigenschaften der gesuchten Modellfunktion wie z.B. Beginn im Ursprung, asymptotische Annäherung an die horizontale Achse. Wir diskutieren einige von den Lernenden ernsthaft betrachtete Funktionsmodelle etwas genauer. Dabei zeigt sich, dass auch eine datenbezogene Vorgehensweise theoretische Überlegungen bei der Modellentwicklung mit einbezieht und bestimmtes Vorwissen aus der Mathematik, hier vor allem Wissen über verschiedene Funktionstypen, die Rolle von Parametern und auch Kenntnisse aus dem Sachkontext, voraussetzt.

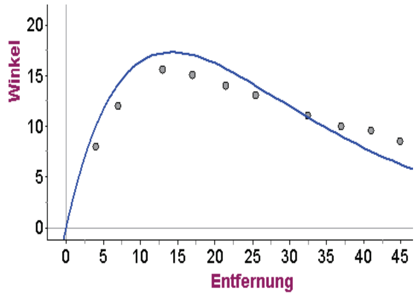
Die Funktion

$$f(x) = a\frac{\ln(x-b)}{x-b} + c$$

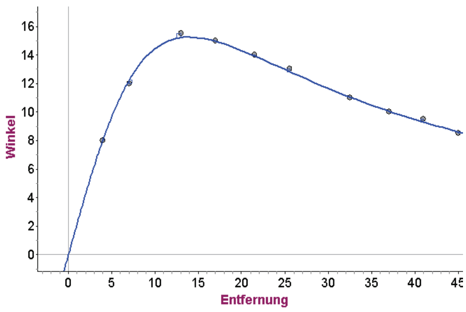
wurde bald wieder verworfen, nicht nur wegen einer wenig zufrieden stellenden Anpassung. Kontextüberlegungen ließen schnell die Anforderung formulieren, dass eine geeignete Modellfunktion durch den Ursprung gehen („auf der Torauslinie ist der Winkel zum Tor 0 Grad“) und mit wachsender Entfernung zum Tor gegen 0 streben solle.



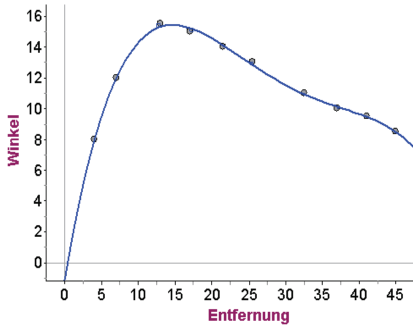
$$\text{Winkel} = a\frac{\ln(x-b)}{x-b}+c$$
mit $a = 35{,}8$ $b = 2{,}91$, $c = 6{,}17$



$$\text{Winkel} = ax\exp(-bx)$$
mit $a = 3{,}32$, $b = 0{,}071$



$$\text{Winkel} = a\frac{x}{x^2+b}$$
mit $a = 425{,}1$ und $b = 194{,}2$



$$\text{Winkel} = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
mit $a = -3{,}079\cdot 10^{-5}$, $b = 3{,}81\cdot 10^{-3}$, $c = 0{,}168$, $d = 2{,}86$, $e = -0{,}982$

Abb. 7: Verschiedene vorgeschlagene empirische Modelle für den Zusammenhang zwischen Entfernung und Winkel zum Tor

Diese beiden Voraussetzungen werden von der Funktion

$$f(x) = a\frac{x}{\exp(bx)}$$

erfüllt, allerdings ließ sich hier keine befriedigende Anpassung an die Daten erwirken, wie aus dem Residuendiagramm ersichtlich wurde. In der Diskussion und im Vergleich der verschiedenen Modelle besticht das gebrochen-rationale Modell

$$f(x) = a\frac{x}{x^2 + b}$$

durch die Güte der Anpassung wie auch durch einen insgesamt plausiblen Verlauf. Die Kurve geht durch den Ursprung und nähert sich mit wachsender Entfernung der Null an.

Das Polynom 4. Grades besitzt – im Sinne der Kleinste-Quadrate-Abweichungen – sogar eine noch bessere Anpassung. Die schlängelnde Kurve (in einer Torentfernung zwischen 14 bis 35 m) sowie die zweite Nullstelle bzw. fehlende Annäherung an die horizontale Achse weckten allerdings für einige Studierende berechtigte Zweifel an der Eignung des Polynoms 4. Grades als geeignetes Modell.

Theoriegeleitete Lösung

Die orthodoxe, d.h. von der klassischen Theorie hergeleitete, Lösung stellt den gesuchten funktionalen Zusammenhang als Differenz von zwei Arcustangens-Termen dar. Aus Abbildung 8 lässt sich entnehmen:

$$\alpha = \gamma - \beta = \arctan\left(\frac{11 + 7{,}32}{x}\right) - \arctan\left(\frac{11}{x}\right)$$

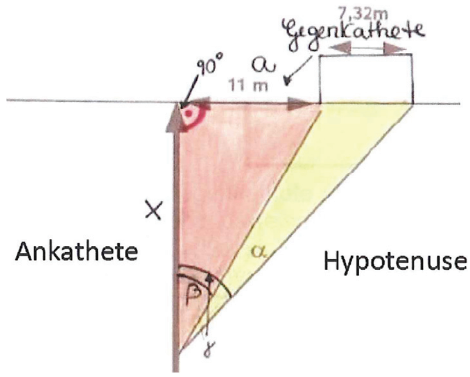
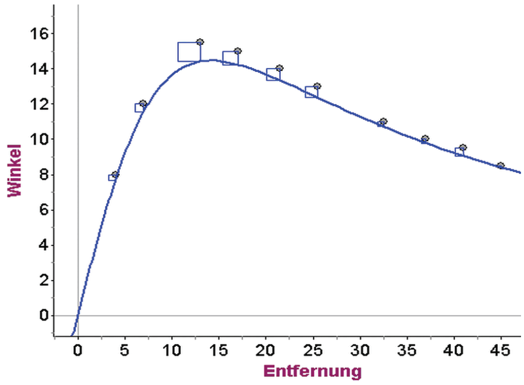


Abb. 8: Skizze zur Herleitung der theoriegeleiteten Lösung

In Abbildung 9 ist diese Funktion in das Streudiagramm eingezeichnet. Dabei mag überraschen, dass die normative Lösung zu einer im Sinne der Quadratsumme der Abweichungen deutlich schlechteren Anpassung führt (3,2771 verglichen mit 0,2425 beim gebrochen-rationalen und 0,1531 beim polynomialen Modell 4. Grades). Hier spielen gewiss auch Messfehler bei der Datenerhebung mit hinein. Passen wir als Modell eine Differenz von zwei arctan-Ausdrücken mit flexibel angepasster Wahl der Parameter an, d.h.

$$f(x) = \left(\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{b}{x}\right)\cdot c\ ,$$

so lässt sich die Summe der quadrierten Abstände zwischen Daten und Modell auf einen Wert von 0,3949 reduzieren.



$$\text{Winkel} = \left[\arctan\left(\frac{18{,}32}{\text{Entfernung}}\right) - \arctan\left(\frac{11}{\text{Entfernung}}\right)\right]\cdot\frac{180}{\pi}$$

$$\text{Summe der Abweichungsquadrate } = 3{,}271$$

Abb. 9: Eingepasstes theoriegeleitetes Modell in die Originaldaten (rechts)

Anmerkungen

1. Die Nähe der gebrochen-rationalen empirischen Lösung zur theoriegeleiteten Lösung ist nicht überraschend, da

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

und somit (nach Umrechnung in Gradmaß)

$$\arctan\left(\frac{18{,}32}{x}\right)-\arctan\left(\frac{11}{x}\right)\approx\frac{1}{1+\left(\frac{11}{x}\right)^2}\cdot\frac{7{,}32}{x}\cdot\frac{180}{\pi}\approx\frac{419{,}4x}{x^2+121},$$

was sich nur wenig von der per Augenmaß angepassten gebrochen-rationalen Funktion in Abbildung 3 unterscheidet.

Die orthodoxe Behandlung des Problems lässt sich auch geometrisch mittels des Umkreiswinkelsatzes bestimmen (Abbildung 10). Kreise durch *P* und *Q* bilden Niveaulinien für Orte, von denen aus die Strecke *PQ* unter gleichem Winkel erscheint. Je kleiner der Radius, desto größer der Winkel. In dieser Formulierung wurde obige Problemstellung schon in Mittelalter als das Problem des Regiomontanus (ca. 1470) bekannt.

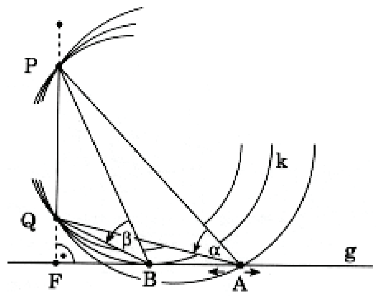


Abb. 10: Auf jedem Kreis durch *P* und *Q* ist der Winkel $\angle PAQ$ konstant; je kleiner der Radius, desto größer dieser Winkel

2. Die Quadratsumme der Abweichungen alleine bildet kein geeignetes Kriterium der Modellwahl, da sie durch Hinzunahme weiterer Modellparameter beliebig klein gemacht werden kann. So lassen sich die 10 vorliegenden Datenpunkte von einem Polynom 9. Grades perfekt interpolieren, d.h. ohne Abweichungen zwischen Daten und Modell. Ein solches Polynom wäre jedoch als Modell hier völlig ungeeignet (und wenig plausibel), z.B. Torwinkel vorherzusagen für Positionen, die zwischen den erhobenen Messwerten liegen. Eine Minimierung der Summe der Abweichungsquadrate darf nicht um den Preis einer sachgerechten funktionalen Modellierung und zunehmender Modellkomplexität geschehen (Vogel & Eichler, 2010). Dahinter steckt ein wissenschaftstheoretisches Prinzip, das nach dem englischen Philosophen und Logiker William von Ockham (auch: Occam; 1825–1349) benannt ist und das in seinen Ursprüngen schon auf Aristoteles zurückgeht (Ritter & Gründer, 1984). Man nennt dieses

Prinzip das „Ockhamsche Rasiermesser“, weil es dazu dient „Platons Bart“ abzuschneiden.

Wesenheiten soll man nicht über das Notwendige vermehren: denn es ist eitel, etwas mit mehr zu erreichen, was mit weniger zu erreichen möglich ist.

Übertragen auf unseren Kontext bedeutet dies:

a) Von mehreren Modellen, die den gleichen Sachverhalt erklären, ist das einfachste Modell allen anderen vorzuziehen.

b) Ein Modell ist im Aufbau der inneren Zusammenhänge möglichst einfach zu gestalten

4 Zusammenfassung

Im Gegensatz zu vielen deskriptiven Modellierungen wie z.B. der Entwicklung der Bevölkerung einer Stadt oder eines Landes im Laufe der Zeit hat man bei geometrischen Fragestellungen in der Regel ein rein theoriegeleitetes Modell verfügbar.

Zunächst scheint die empirische Modellierung geometrischer Fragestellungen vor allem aus datenanalytischer Perspektive interessant zu sein. Anders als bei den allermeisten Anwendungen der Datenanalyse lässt sich hier die empirisch gewonnene Lösung mit der theoriegeleiteten Lösung vergleichen: Wir haben also ein Gütekriterium für die empirische Lösung verfügbar. Ein datenbezogener Ansatz kann aber auch für die Geometriedidaktik sinnvoll sein: Die induktive Vorgehensweise des Betrachtens und Messens des zu Beobachtenden stellt didaktisch eine vernünftige Alternative zu einer deduktiven Herleitung dar. Vom Phänomen zur Theorie – und nicht der umgekehrte Weg – entspricht dem genetischen Prinzip der Didaktik.

Ein empirisches Modell auf der Basis von erhobenen Messwerten kann hier einen reizvollen und – im Sinne des induktiven Vorgehens – didaktisch begründeten ersten Schritt der Modellierung darstellen. Beide Modelle – sowohl das datenbezogene empirisch hergeleitete wie auch das theoriegeleitete Modell – bedürfen der Validierung. Ein theoriegeleitetes Modell, das bei der Erprobung zu nicht-akzeptablen Abweichungen zu erhobenen Daten führt, ist genauso wenig zu akzeptieren wie ein empirisch gewonnenes Modell, das nicht plausibel erscheint und überzeugenden Theorien widerspricht.

Literatur

Biehler, Rolf; Prömmel, Andreas; Hofmann, Tobias (2007): Optimales Papierfalten – Ein Beispiel zum Thema Funktionen und Daten. In: Der Mathematikunterricht 53(3), 23–32.

Biehler, Rolf; Hofmann, Tobias; Maxara, Carmen; Prömmel, Andreas (2006): FATHOM 2. Eine Einführung. Springer: Heidelberg.

Box, George E. P.; Norman R. Draper (1987): Empirical Model-Building and Response Surfaces, Wiley: New York.

Erickson, Tim (2007): EGADs: Enriching Geometry and Algebra through Data. Online veröffentlicht unter: http://www.eeps.com/resources [Zugriff: 30. August 2011].

Ritter, Joachim; Gründer, Karlfried (1984): Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 6. Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.

Vogel, Markus; Eichler, Andreas (2010): Residuen helfen gut zu modellieren. Stochastik in der Schule 30(2), 8–13.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Joachim Engel
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
71634 Ludwigsburg
e-Mail: engel@ph-ludwigsburg.de

Eingang Manuskript: 11.01.2011 (überarbeitetes Manuskript: 10.10.2011)