Ständige Restrukturierung – ein Erfordernis des Lernens von Mathematik

von

Martin Brunner, Lienz

Kurzfassung: Im vorliegenden Artikel wird die Notwendigkeit ständiger Restrukturierung im Mathematikunterricht begründet. Es werden Anlässe für Restrukturierungsmaßnahmen exemplarisch angeführt und Beispiele für erforderliche Restrukturierungen gegeben. Der Erwerb von Kompetenzen im Umgang mit mathematischen Darstellungen wird dabei als zentraler Inhalt des Lehrens und Lernens von Mathematik betrachtet. Ständig werden neue Notationen eingeführt, Darstellungsgrundlagen verändert, Darstellungen in neue Kontexte gestellt, Darstellungen neue Sichtweisen unterlegt werden usw. All diese Veränderungen müssen von Restrukturierungsmaßnahmen begleitet sein. Restrukturierungsprozesse betreffen aber nicht nur das lernende Individuum, sondern die Entwicklung von Mathematik generell. Innerhalb mathematischer Darstellungssysteme und im Zusammenwirken derselben werden durch Restrukturierungsmaßnahmen bestehende Widersprüche beseitigt und die Anwendungsmöglichkeiten und Erklärungsleistungen erweitert. Manche der Restrukturierungsformen haben zudem epistemologische Bedeutung. Die Ausrichtung des Artikels ist eine didaktische. Sie ist es auch dort, wo strukturelle Aspekte der mathematischen Darstellungen im Vordergrund stehen. Die vorliegende Untersuchung verwendet Mittel der Semiotik von Ch. S. Peirce.

Abstract: Mathematical descriptions are central to teaching this discipline. Achieving competence in dealing with these descriptions is a dynamic process. New notation forms are continuously introduced, essentials of various descriptions are modified, descriptions are placed in new contexts, and new ways of seeing these descriptions are assumed. Processes of restructuring encompass all these changes. Restructuring processes concern not only the one learning but the development of mathematical knowledge in general. Applying these restructuring methods within particular representational systems as well as on the interaction between varying systems, apparent contradictions are removed, and their application and explanatory power are broadened. Some of the herein described restructuring processes have epistemic meaning. This exploration employs instruments of the semiotics of Charles S. Peirce.

1 Einleitung

Dem vorliegenden Aufsatz liegt die Ansicht zugrunde, dass es beim Lernen von Mathematik maßgeblich um Bedeutungskonstruktion im Zusammenhang mit mathematischen Darstellungen und deren Verwendung geht. Betrachtet man das Lernen von Mathematik aus Sicht des Individuums, so kann es im Zusammenhang mit den Darstellungen als Prozess ständiger Restrukturierung der Bedeutung sowie der etablierten Sicht- und Verwendungsweisen gesehen werden. Dazu einfache Beispiele: Ein Punkt ist nach Euklid das, was keine Teile hat. Im $\mathbb{R}^2$ ist er aber durch zwei, im $\mathbb{R}^3$ durch drei Koordinaten bestimmt. Kennt man das Objekt „Punkt“ nun etwa in der Definition von Euklid, so werden Restrukturierungsmaßnahmen zur Etablierung der Objekte „Punkt im $\mathbb{R}^2$“ oder „Punkt im $\mathbb{R}^3$“ erforderlich sein. Einem Punkt sind ja nun Bestandteile (Koordinaten) zugeordnet. Je nach Kontext kann ein Punkt ein Schnittpunkt von zwei Geraden, ein Schnittpunkt von drei Ebenen, ein Eckpunkt usw. sein. Kennt man das Objekt „Eckpunkt eines Dreiecks“ in den Kontexten $\mathbb{R}^n, n > 1, n \in \mathbb{N}$, so erfordert der Kontext „Dreieck auf der Kugel“ die Restrukturierung der etablierten Sicht- und Verwendungsweisen. In diesem Sinne müssen mathematische Lernprozesse in einer langfristigen Perspektive auch als Prozesse des ständigen Umlernens gesehen werden, sofern nicht nur ein fragmentarisches instrumentelles Wissen über Mathematik erworben werden soll.

Aber auch die Darstellungen selbst sind Restrukturierungen unterworfen. Innerhalb mathematischer Darstellungssysteme und im Zusammenwirken derselben werden durch Restrukturierungsmaßnahmen bestehende Widersprüche beseitigt und die Anwendungsmöglichkeiten und Erklärungsleistungen erweitert. Restrukturierung wird so zu einem festen Bestandteil mathematischer Wissensentwicklung und Verallgemeinerung. Restrukturierung hat in der Mathematik allgemein und im Mathematikunterricht speziell große epistemologische Bedeutung. Daneben sind auch die mathematischen Begriffe im Individuum und in der Mathematik generell Restrukturierungen unterworfen. Ebenso bedingen die Rahmenbedingungen des Unterrichts Restrukturierungsmaßnahmen.

Darstellungen stehen im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts. Ohne ausgeprägtes Verständnis für sie ist meines Erachtens sinnvolles Lehren von Mathematik kaum möglich. Die Abhandlung nimmt daher eine semiotische Perspektive ein. Sie fußt auf Arbeiten etwa von Hoffmann (2005), Dörfler (2006) oder Brunner (2009a) und damit letztlich zumindest partiell auf einem Teil der Philosophie von Ch. S. Peirce.

Hoffmann (2005, 220) führt den Begriff „Restrukturierung“ im Zusammenhang mit Verallgemeinerung ein. Mormann (zitiert bei Hoffmann, 2005, 219) verwendet im gleichen Zusammenhang den Begriff „Reorganisation“. In der vorliegenden Arbeit werden nun beide Begriffe im Begriff „Restrukturierung“ zusammengefasst. Die Bedeutung des Begriffes ist zusätzlich gegenüber der Hoffmannschen Verwendungsweise erweitert. Restrukturierung wird im Folgenden sehr allgemein im Sinne der Neuordnung von Strukturen verwendet.

2 Einige Grundbegriffe

Die vorliegende Arbeit verwendet einige Begriffe der Semiotik von Ch. S. Peirce. Sie werden im Verlauf des Textes kurz erläutert. Obwohl die Verstehbarkeit unter dieser Kürze leidet, dürfte die vermittelte heuristische Sicht auf diese Hilfsmittel für das Verständnis der nachfolgenden Überlegungen ausreichend sein.

Die Hauptaufgabe eines *Ikons* ist die Darstellung eines repräsentierten Objektes in Ähnlichkeit. „Es ist ein Zeichen[1], das sich nur kraft der ihm eigenen Merkmale auf das Objekt bezieht“ (Peirce, CP 2.247, zitiert bei Nagl 1992, 44). In der Mathematik ist das Ikon „verkörperte“ Relationalität. Eine Darstellung wie etwa eine Dreieckszeichnung ist für jene, die in der Lage sind Relationen zu erkennen, ein Ikon. Das Objekt des Ikons kann rein fiktiv sein.

> Das Ikon steht nicht eindeutig für dieses oder jenes existierende Ding…Sein Objekt kann, was seine Existenz angeht, eine reine Fiktion sein. Noch viel weniger ist sein Objekt notwendig ein Ding von einer Art, der wir gewohnheitsmäßig begegnen. Aber es gibt eine Sicherheit, die das Ikon im höchsten Grade gewährt. Nämlich dass dasjenige, was sich dem Blick des Geistes darbietet – die Form des Ikons, die auch sein Objekt ist –, *logisch möglich* sein muss. (Peirce, 1906d, SEM III 136 f., zitiert bei Hoffmann, 2005, 56)

Das *Diagramm* ist eine Spezialform des Ikons. Es entsteht durch die symbolische[2] Verwendung des Ikons. In diesem Sinne bedarf es, um als Zeichen verständlich zu sein, symbolischer Erläuterungen. Ein gezeichnetes Dreieck wird beispielsweise erst durch die spezielle Verwendung nach den Konventionen der Mathematik zu einem mathematischen Diagramm. Gleiche Ikone können daher je nach Kontext und je nach symbolischer Verwendungsform zu unterschiedlichen Diagrammen führen. Ein gezeichnetes Dreieck kann etwa als Dreieck im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ betrachtet und verwendet werden. Ebenso erhält „6/8“ als Taktbezeichnung im Kontext der Notenschrift nach völlig anderen Konventionen Bedeutung als in der Mathematik (vgl. S. 11). Die symbolische Verwendungsform äußert sich in Regeln (z.B.: Leseregeln, Verwendungsregeln). In einem Dreieck sind zum Beispiel Konstruktions- oder Leseregeln wie: „Eine Dreiecksseite hat keine physikalisch mess-

---

1 Ein *Zeichen* steht zum einen – wie im gewöhnlichen Sprachgebrauch – für etwas, ein Objekt. Zeichen haben also Repräsentationsfunktion. Wir teilen uns immer über Zeichen mit (Wörter, Bilder, Gesten usw.). Zeichen haben nach Peirce aber auch Erkenntnisfunktion (vgl. Hoffmann, 2001, 1).

2 *Symbole* denotieren Objekte in Folge einer Gewohnheit oder Gesetzmäßigkeit. „Wenn ein Zeichen mit größerer oder geringerer annähernder Gewissheit so interpretiert wird, dass es das Objekt in Folge einer Gewohnheit (diesen Terminus verwende ich so, dass er natürliche Dispositionen mit einschließt) denotiert, dann nenne ich das Zeichen ein *Symbol*“ (Peirce SEM III 135, 1906, zitiert bei Hoffmann 2001, 9). Eine Beziehung zwischen denotiertem Objekt und Zeichen kann für den „Benutzer des Zeichens“ nur bestehen, wenn er zur Herstellung dieser Beziehung in der Lage ist.

bare Breite“ wirksam. Diese Regeln sind Ausdruck von unterlegten Konzepten (vgl. S.10).

Die Bedeutung, die einem Diagramm zukommt, wird ihm immer von demjenigen zugesprochen, der die Konventionen des jeweiligen Darstellungssystems[3] kennt (Hoffmann, 2005, 128). Für Hoffmann (2005, 136) hat jedes Darstellungssystem eine eigene Rationalität. Die Rationalität eines Darstellungssystems ist durch die verwendeten Darstellungen und die Konventionen, nach denen diese alleine und in ihrem Zusammenwirken Relationen formulieren, bestimmt. Beispiel: Im Diagrammtyp „$a+b$i“ sind Schreib- und Leseregeln wirksam (Konventionen der Algebra). Beispielsweise entspräche die Schreibweise „+, b, a“ nicht den Konventionen dieses Darstellungssystems.

In der Mathematik zeichnen sich Diagramme durch eine operationale Struktur aus, welche es erlaubt, sie selbst als Objekt zu studieren. Die geltenden Relationen können mit Hilfe von Operationen und der Beobachtung der Resultate deduktiv abgeleitet werden. Nach Peirce ist nicht nur jede geometrische Figur, sondern auch jeder Satz oder jedes Urteil ein Diagramm. Ebenso ist jeder logische Schluss ein Diagramm, da es in Ihm um die Relation von Sätzen geht (Hoffmann, 2005, 55). Beispiele für Diagramme sind Zahlenlinien, Venn–Diagramme, Kartesische Graphen, Pfeildiagramme, Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene, algebraische Gleichungen, Zahlendarstellungen, Formeln usw.

Der Begriff *Darstellung* wird im Folgenden im herkömmlichen Sinne von „geschriebener Mathematik“ verwendet.

---

[3] Dörfler (2006, 210) gibt folgende kurze Einführung zum Begriff „Darstellungssystem“: „Diagramme sind nicht isolierte, einzelne Inskriptionen, sondern gehören immer zu einem Darstellungssystem. Dieses liefert Mittel zur Erstellung der Inskriptionen (Symbole, Zeichen) nach gewissen Regeln und gibt auch Regeln für das Lesen und Verwenden der Diagramme vor. Ein Beispiel wäre das Darstellungssystem „Stellenwertprinzip“. Dadurch sind auch die einzelnen Diagramme untereinander verbunden, vernetzt, transformierbar (z.B.: Zahlenbeziehungen jeder Art). In diesem System kann man auch vom Typ eines Diagramms sprechen (etwa: Dezimalzahl, Matrix, Polynom). …“ Die Darstellung von Objekten mit Punkten und Geraden („Euklidisches Darstellungssystem“) oder das Zeichensystem der Mengenlehre dürften ebenfalls eigene Darstellungssysteme sein. Der Begriff „Darstellungssystem“ bedarf nach Hoffmann noch einer eingehenden Klärung. Die Abgrenzung verschiedener Darstellungssysteme zueinander stellt nach wie vor ein Problem dar. (Inskriptionen = Darstellungsmittel)

3 Restrukturierung von Bedeutung

3.1 Peircescher Zeichenprozess und Restrukturierung

Das Peircesche Modell unterstreicht den restrukturierenden Charakter des Lernprozesses. Nach Peirce sind Zeichen in eine triadische Struktur bestehend aus *Objekt, Zeichen* und *Interpretant* eingebunden. Unter dem „Interpretanten“ versteht man die eigentlich bedeutungstragende Wirkung eines Zeichens. Der Interpretant kann selbst wieder zum Zeichen werden und determiniert als solches wieder einen neuen Interpretanten. Zeichenrelationen sind bei Peirce also ein fortdauernder Prozess.

> Ein Zeichen, oder Repräsentamen, ist etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht oder Fähigkeit für etwas steht. Es richtet sich an jemanden, d.h., es erzeugt im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder vielleicht ein weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den Interpretanten des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein Objekt. Es steht für das Objekt nicht in jeder Hinsicht, sondern in Bezug auf eine Art von Idee, welche ich manchmal das Fundament („ground“) des Repräsentamens genannt habe (Peirce CP 2.228, 1897, zitiert bei Hoffmann 2001, 2).

Zeichen sind nach Peirce nicht nur Mittel der Repräsentation, sie sind auch Mittel der Erkenntnis. Sie sind nach Christoph Hubig zunächst „äußere Mittel“, die konkret und verwirklicht vor uns liegen und als solche begrifflich bestimmbar sind; gleichzeitig sind sie „innere Mittel“, gleichsam Werkzeuge des Geistes, die es uns beispielsweise erlauben, die Welt um uns zu konzeptualisieren oder zu organisieren (vgl. Hoffmann 2005, 35).

Zeichen wie etwa ein gezeichnetes Dreieck haben zunächst für Unwissende überhaupt keine Bedeutung. Erst durch die Beschäftigung mit diesen Zeichen erhält das Objekt Bedeutung für das lernende Individuum. Das Tun steht dabei im Vordergrund. Durch das Zeichnen von Dreiecken etwa als Imitation von Handlungen einer Lehrerin entsteht so etwas wie innermathematische „Spiel“-Bedeutung. Lernen kann also als Teilnahme am Zeichenprozess gesehen werden. In der tätigen Auseinandersetzung mit dem durch Zeichen vermittelten Objekt kreieren die Lernenden nun Bedeutung durch Interpretanten. Nach Hoffmann (2005, 47) können dies Gefühle, Handlungen, Vorstellungen und Erfahrungen einer allgemeinen Form, Gewohnheiten usw. sein. Ein möglicher Interpretant kann also etwa eine Vorstellung der Dreiecksform sein. Diese Vorstellung ist selbst wieder zeichenhaft. Es wird ein komplexes Diagramm auf seine Form reduziert. Vielleicht wurden bisher vorerst auch nur spitzwinklige Dreiecke gezeichnet. Die genannte Vorstellung der Dreiecksform wird also beim Bekanntwerden von stumpfwinkligen Dreiecken zu restrukturieren sein. Ein anderer Interpretant könnte ein Gefühl sein. Vielleicht empfinden Lernende den Umgang mit den Dreiecken als angenehm, weil sie die verlangten Anforderungen leicht zu erfüllen imstande sind. Es wird das Thema Dreieck also vorerst positiv besetzt sein. Auch hier könnte dieses Gefühl aber im Zuge einer weiteren Beschäftigung mit dem Dreieck restrukturiert, also partiell geändert werden. Natürlich spielen auch die Handlungsweisen einer Lehrperson beim Zeichnen des Dreiecks eine große Rolle. Genau genommen laufen also immer mehrere Zeichenprozesse simultan ab (Stimmungen, Lernumgebung, verbale und nonverbale Botschaften usw.). Die Handlungsweisen der Lehrperson werden zu Interpretanten in Form von Handlungsweisen auf Seiten der Lernenden führen. Beispielsweise lernen Schülerinnen die Seiten des Dreiecks in gewünschten Längen und die Winkel in bestimmten Größen zu konstruieren. Auch hier kann es wieder Zeichenprozesse in Form von Reflexionsprozessen über diese Handlungsweisen und die zu verwendenden Hilfsmittel (Geodreieck, Zirkel usw.) geben, die wiederum zu restrukturierten Handlungsweisen führen. Interpretanten werden also selbst wieder zu Zeichen, die in irgendeiner Hinsicht für das Objekt „Dreieck" stehen. Auf Seiten der Lernenden wird es ein „Wahrnehmungskreisen" zwischen den eigenen Dreiecken und den Dreiecken der Lehrperson, jenen des Buches usw. geben. Es wird auch Fragen, Korrekturen usw. geben. Indizes[4] spielen dabei eine große Rolle. Lernende werden etwa auf Diagrammbestandteile zeigen und Fragen stellen. Restrukturierungen betreffen aber auch das bereits vorhandene Wissen und die Darstellungsmittel. Angenommen die Lernenden können bereits mit geometrischen Darstellungen des Objekts „Winkel" umgehen, so werden sie das bereits erworbene Wissen restrukturieren müssen. Die Winkel eines Dreiecks können etwa in der Zusammenschau eines Dreiecks nicht mehr beliebig sein. Sie sind nun einem relationalen Gesamtkonzept unterworfen. Genauso sind die allgemein gültigen Bezeichnungsregeln etwa bei der Einführung des rechtwinkligen Dreiecks anzupassen. Jede Beschäftigung mit dem Objekt „Dreieck" wird also das vorhandene Wissen und die erworbenen Fähigkeiten der Lernenden partiell verändern.

Darstellungen beziehen sich in der Mathematik auf so genannte „abstrakte Objekte". Beispiele für abstrakte Objekte sind: Natürliche Zahlen, Grenzwert, Dreieck, Differentialquotient, Banachraum, $\mathbb{R}^n$ usw. Ein abstraktes Objekt ist ein rein gedankliches, nicht gegenständliches Konstrukt. Nach Dörfler (2006) handelt es sich bei den abstrakten Objekten in erster Linie um Sprechweisen über Darstellungen. Dörfler (2010, 36) zeigt an Sätzen der Reellen Analysis, dass die abstrakten Objekte keine „andere Existenzform als als Referenten von Indizes in Diagrammen" haben. Nach Dörfler (2010, 36) beobachtet man die zugehörigen Diagramme und nicht die abstrakten Objekte selbst. In diesem Sinne sind Beweise auch Beweise über Diagramme. Die Eigenschaften der abstrakten Objekte resultieren ebenfalls

4 Indizes haben nach Peirce die Funktion, die Aufmerksamkeit auf etwas zu lenken. Sie „zeigen". Sie „behaupten", dass das existiert, was sie indizieren. „Der Index … zwingt die Aufmerksamkeit auf das intendierte partikulare Objekt, ohne es zu beschreiben" (Peirce CP 1.369, zitiert bei Hoffmann 2001, 9). Die Bezeichnungen etwa in einem Dreieck haben unter anderem indexikale Funktion.

aus den Diagrammen. Diagramme werden etwa als Eigenschaften von Funktionen gelesen (Dörfler, 2010, 34). Prinzipiell können wir Erkenntnisse über abstrakte Objekte also nur über die ihnen zugeordneten Darstellungen gewinnen. Der Begriff „abstraktes Objekt“ hat daher keinen ontologischen Charakter. Er ermöglicht aber eine Art des Sprechens über Darstellungen.

Das relationale Zusammenspiel von repräsentierten abstrakten Objekten wird übrigens mit Hilfe der „Ikonizität“ des Diagramms dargestellt. Beispiel: „$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$“. Diese Formel regelt das relationale Zusammenwirken der abstrakten Objekte „Volumen“, „Radius“ und „Höhe“. Auf diesem Diagramm ist eine operationale Struktur wirksam. Eine Transformation wie „$r^2 = V / \pi \cdot h$“ kann beispielsweise das abstrakte Objekt „Flächeninhalt des Quadrates des Radius“ relational veranschaulichen. Obige algebraische Gleichung ist „innermathematisch“ mit „Diagrammen der Geometrie“ verknüpft. Aus der Sicht der Mathematik sind die angeführten abstrakten Objekte in „metaphorischer Umdeutung“, aber auch mit „außermathematischen“ Objekten verbunden. Beispiel: Röhre statt Zylinder, Rohrlänge statt Höhe usw. Die „reinen“ Diagramme der Mathematik sind eben, da sie Relationen ikonisch abbilden, in vielfältiger Weise für die Belegung mit Symbolzusammenhängen offen.

In der Praxis verfügen Mathematik-Betreibende über ein abstraktes Objekt in einer aktuellen Ausformung. Peirce nennt diese Ausformung *unmittelbares Objekt.* Sie entspricht dem momentanen Erkenntnisstand. Betrachtet man abstrakte Objekte als Sprechweisen über Darstellungen, so sind diese unmittelbaren Objekte maßgeblich durch die, den Objekten zugeordneten Darstellungen und den Grad an Vertrautheit, mit welchem man über sie verfügt, bestimmt. Nimmt man etwa das abstrakte Objekt „komplexe Zahl“, so bezieht sich dieses auf Darstellungen wie: „$a + b\mathrm{i}$“; „(a, b)“; geometrische, vektorielle und trigonometrische Darstellung, Darstellung in Polarkoordinaten, Matrizendarstellung oder die Darstellung mit Hilfe der Riemann`schen Zahlenkugel. Jede neue Darstellung eröffnet neue Möglichkeiten. Das Prinzip der Repräsentation der abstrakten Objekte durch unterschiedliche Darstellungen wird *multiple Repräsentation* genannt. All das, was unter einem abstrakten Objekt subsumiert wird, ist nicht nur im Individuum, sondern in der Mathematik generell Restrukturierungen unterworfen. Beispiel: Durch die fraktale Geometrie hat der Begriff der Dimension eine erweiterte Deutung erfahren. Mandelbrot benutzte den Begriff der verallgemeinerten Dimension nach Hausdorff und sah, dass fraktale Gebilde eine nichtganzzahlige Dimension haben. Dimensionen können daher nun auch gebrochen (fraktal) sein.

Lernprozesse sind – so wie alle mathematischen Erkenntnisprozesse im Peirceschen Sinne – iterativ. Durch den Umgang mit mathematischen Darstellungen sind gewisse Aspekte dieser Darstellungen und der möglichen Verwendungsweisen als Erfahrungen im Lernenden etabliert. Es kann sich dabei nie um eine umfassende

Repräsentation aller denkbaren Aspekte eines abstrakten Objektes handeln. Jede neuerliche Beschäftigung mit den, einem abstrakten Objekt zugeordneten Darstellungen, ist von den etablierten Erfahrungen (Interpretanten) geprägt. Wie bereits erwähnt können diese Interpretanten dabei selbst wieder zu Zeichen werden und neue restrukturierte Interpretanten ausformen. Lernprozesse können also nie abgeschlossen sein. Jede neue Ausformung des unmittelbaren Objekts kann als Restrukturierung des vorhergehenden unmittelbaren Objekts gesehen werden. Im Normalfall wird das unmittelbare Objekt „Dreieck“ einer Lehrperson natürlich wesentlich entwickelter als das unmittelbare Objekt „Dreieck“ der Lernenden sein. Aber auch die Lehrperson wird bei jeder Beschäftigung mit dem Dreieck dieses unmittelbare Objekt verändern. Sei es, dass sie Neues hinzulernt oder Erworbenes in neuen Kontexten partiell neu bewertet oder zumindest mehr Bewusstheit im Zusammenhang mit Vertrautem erwirbt.

Ein maßgeblicher Restrukturierungsprozess wird der vom gezeichneten Dreieck als empirischem Objekt, bei dem die Zeichnung also noch mit dem Dreieck gleichgesetzt wird, hin zu einer Sichtweise, bei der die Zeichnung zu einem Modell für ein abstraktes Dreieck wird, sein. Längerfristig werden Restrukturierungsmaßnahmen die Einführung von neuen Sichtweisen oder Kontexten wie Rand des Dreiecks, Fläche des Dreiecks, Dreieck im Raum, Dreieck im $\mathbb{R}^n, n > 3, n \in \mathbb{N}$, Dreieck auf der Kugel usw. begleiten müssen.

3.2 Zum Begriff der Sichtweise

Der Begriff „Sichtweise“ ist in seiner Komplexität schwer zu fassen. Er ist beispielsweise von der Fähigkeit zur bewussten Wahl von Standpunkten und damit auch vom Entwicklungsstand einer Person abhängig. Er muss daher nach meiner Ansicht dynamisch gesehen werden. Der Begriff inkludiert offensichtlich auch Restrukturierungsmaßnahmen. Es werden daher im Folgenden einige Aspekte des Begriffes „Sichtweise“ beleuchtet.

Für den Mathematik-Betreibenden ist jede mathematische Darstellung eine eigene Welt von Symbolen. Die etablierten Interpretanten stellen dabei die auf Gewohnheit beruhende Beziehung zwischen den Darstellungen und ihrer Bedeutung her. Die Sicht auf mathematische Darstellungen ist zunächst einmal von Gewohnheiten allgemeiner Art geprägt. Man muss beispielsweise in der Lage sein, mit den Regeln der Darstellungssysteme umzugehen. Nach Peirce sind Diagramme „gemäß allgemeiner Vorschriften“ (zitiert bei Hoffmann, 2005, 129) konstruiert. Hoffmann schreibt dazu (2005, 129):

> In den Zeichen und Darstellungssystemen, die wir bei jeder Konstruktion verwenden, haben wir es mit dem *Wissen von Kulturen* zu tun. Da wir bei *jeder* Konstruktion immer schon auf außerhalb unserer selbst gegebene Konstruktions- und Darstellungsmittel zurückgreifen, ist Konstruktion immer auch ein *objektives* Geschehen. Es ist in dem Maße „objektiv“, wie wir allgemeine Mittel und Werkzeuge verwenden.

Sichtweise hat einmal mit zielorientierter Selektion, die als Form von Restrukturierung gesehen werden kann, zu tun. Je nach Betrachtung und Zielsetzung treten unterschiedliche Teilstrukturen der Diagramme in den Vordergrund. Beispiel: Betrachten Lernende ein Dreieck, so steht ihnen eine Vielzahl von Teilstrukturen, die wiederum für abstrakte Objekte stehen, zur Verfügung. Betrachten wir etwa ein gleichschenkliges Dreieck unter dem abstrakten Objekt „Winkel", so werden andere Teilstrukturen als beim Aspekt „Höhe" in den Vordergrund treten. Man schaut eben einmal speziell die Winkel das andere Mal speziell die Höhen an. Dabei wird unterschiedliches Wissen fokal[5] gemacht. Es rückt beispielsweise Wissen wie „spitzer Winkel", „rechter Winkel", „stumpfer Winkel" usw. in den Fokus des Interesses. Wiederum werden bestimmte Diagrammkonstellationen als Eigenschaften des abstrakten Objekts Winkel interpretiert.

Abstrakte Objekte können im Sinne der multiplen Repräsentation mit Diagrammen verschiedener Darstellungssysteme verbunden sein. Die Wahl des Darstellungssystems kann dabei als Ausdruck einer bestimmten Sichtweise gesehen werden. Verwendet man beim abstrakten Objekt Winkel etwa das Diagramm „$2\alpha + \gamma = 180°$" oder im Fall des Aspekts „Höhe" das Diagramm „$h_c^2 = a^2 - (c/2)^2$", so werden algebraische Diagramme zur Darstellung geometrischer Sachverhalte herangezogen. Der entsprechende Mathematik-Betreibende bevorzugt also eine algebraische Sichtweise gegenüber einer rein geometrischen.

Manchmal können in der Mathematik gleiche Darstellungen unterschiedliche abstrakte Objekte indizieren. Die in Abbildung 1 angeführte Darstellung kann man sich sowohl im $\mathbb{R}^2$ als auch im $\mathbb{R}^3$ vorstellen.

---

5 Nach Hoffmann (2005, 38 ff.) muss bei der Repräsentation von Wissen in Sätzen oder Diagrammen zwischen „fokalem" und „kollateralem" Wissen unterschieden werden. „Fokales" Wissen steht im Zentrum der Aufmerksamkeit, „kollaterales" Wissen steht hingegen nicht im Mittelpunkt, es wird vorausgesetzt. Für die Deutung mathematischer Darstellungsmittel benötigt man kollaterales Wissen in vielfältiger Weise. Beispiel: Für die Durchführung einer Kurvendiskussion benötigen wir zahlreiche Begriffe und Sätze der Analysis. Wir verwenden Begriffe wie die Ableitung einer Funktion kollateral. Indizierungen wie „f'" oder „$(\sin)' = \cos$" weisen kollateral auf Diagramme hin, sie indizieren Diagramme. Wir verwenden dieses Wissen, sehen aber, um Hoffmanns Ausdrucksweise zu verwenden, durch die Zeichen „f'", „$(\sin)'$" oder „$\cos$" hindurch. Aus verschiedenen Gründen können wir diese Zeichen aber in den Mittelpunkt unserer Aufmerksamkeit stellen. Sie werden dadurch zu fokalem Wissen. Wir können dieses Wissen explizit machen, die Diagramme anschreiben und uns mit den Eigenschaften der Diagramme beschäftigen.

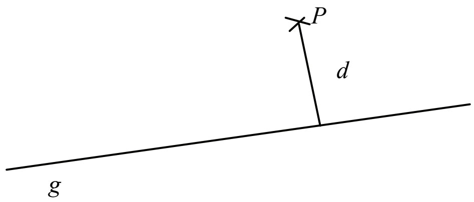

Abbildung 1

Die Sichtweise auf die Darstellung bestimmt die Auswahl der relevanten Interpretanten, der geltenden Konventionen, der Lese- und Schreibregeln, der Verwendungsweisen usw. Je nach Sichtweise ($\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) müssen etwa zur Berechnung des Normalabstandes *d* in Abbildung 1 unterschiedliche Diagramme und Verwendungsweisen herangezogen werden. Die zu unterlegende Sichtweise wird zwar häufig durch verbale Ergänzungen oder durch Bestandteile der Darstellungen gekennzeichnet, Mathematik-Betreibende müssen aber zur Restrukturierung (Rekonstruktion) von unterschiedlichen Sicht- und Verwendungsweisen bei gleichen Darstellungen in der Lage sein.

Für die Betrachtung des Verhältnisses von Sichtweise, Verwendungsweise und Bedeutung kann ein anderes Modell hilfreich verwendet werden. Für Fischbein (1993) sind die Bestandteile „Concept“ (Konzept) und „Image“ (Vorstellung) zwei unterschiedliche elementare Bestandteile aller aktuellen kognitiven Theorien der Psychologie. Fischbein (1993, 139) charakterisiert „Konzept” folgendermaßen:

> What then characterizes a concept is the fact that it expresses an idea, a general, ideal representation of a class of objects, based on their common features.

Im Kontrast dazu ist eine Vorstellung eine sensorische Repräsentation eines Objekts oder Phänomens. Fischbein (1993, 139) gibt hier das folgende Beispiel:

> The concept of metal is the general idea of a class of substances having in common a number of properties: electrically conductive, etc. The image of a metallic object is the sensorial representation of the respective object (including colour, magnitude, etc.).

In den mathematischen Darstellungen sind also Konzepte und Vorstellungen wirksam. Beispiel: Unterlegen wir zwei zu zeichnenden Linien die Konzepte „Gerade“ und „parallel“, so diktieren diese Konzepte nach Fischbein (1993, 149) die Eigenschaften der betreffenden Figur. Gleichzeitig bestimmen unsere Erfahrungen im Zusammenhang mit parallelen Geraden unsere Vorstellung. Es geht dabei um konkrete sensorische Erfahrungen im Zusammenhang mit Tätigkeiten etwa mit Bleistift und Lineal. Ein Problem im Zusammenhang mit der Sicht auf mathematische Darstellungen ist sicher, dass manche der Konzepte nicht vorstellbar sind. Beispiele: „Eine Gerade hat keine physikalisch messbare Breite“, „eine Gerade ist ein unendliches Gebilde“, „eine unendliche Menge hat abzählbar oder überabzählbar unendlich viele Elemente“ usw. Man kann sich zwar mit Vorstellungen, die iterativ eine Tendenz verfolgen, behelfen: „eine feine Linie kann noch feiner werden“, „eine lange Linie kann immer noch verlängert werden“„eine große Anzahl kann noch größer werden“ usw., letztendlich bleiben diese Eigenschaften aber nicht vorstellbar. Durch die neuen Medien (Taschenrechner, Computer) gibt es auch neue Formen der Kognition. Diese Medien bieten neue Methoden zur Etablierung von Vorstellungen. Beispielsweise können stochastische Prozesse nun gut simuliert werden. Die Lernenden in gelenkter Selbsttätigkeit verwendbare Vorstellungen entwickeln zu lassen, welche als Vorstellungen im Zusammenhang mit den mathematischen Objekten genutzt werden können, ist eine didaktische Herausforderung. Die rein verbale Vermittlung von Wissen und das verbale Erklären im Falle von Verständnisproblemen stoßen im Mathematikunterricht bald an Grenzen.

Die Sichtweise auf mathematische Darstellungen ist vor allem durch die wirksamen Konzepte geprägt. Wie bereits erwähnt bestimmen diese die in den Diagrammen wirksamen Regeln. Eine Darstellung wird also erst durch die gewohnheitsmäßige Verankerung von konzeptuellem Wissen zu einem Diagramm. Man muss die Konventionen des jeweiligen Darstellungssystems kennen, also über entsprechendes kollaterales Wissen verfügen (s. Fußnote 5). Darstellungen können demnach je nach Sichtweise ganz unterschiedliche Bedeutung haben. Beispiel: In der Taktbezeichnung „6/8“ der Musiknotation sind andere Konventionen als in der gleich dargestellten rationalen Zahl wirksam. In einer Taktbezeichnung wie „6/8“ gibt der Nenner die Metrumseinheit an. Der Zähler ist ein Symbol für ein oder mehrere mögliche Betonungsschemata. Er gibt auch die Anzahl der Metrumseinheiten je Takt an. Transformationen wie sie bei rationalen Zahlen erlaubt sind, geben bei Takteinheiten keinen Sinn. Beispielsweise darf „6/8“ nicht zu „3/4“ gekürzt werden. Erst durch eine bestimmte Sichtweise wird also aus einer Inskription ein mathematisches Diagramm.

Hat man in diesem Sinne gelernt, mit den Konventionen der Darstellungen in großer Vertrautheit umzugehen, so gibt es für das diagrammatische Denken übrigens keine irgendwie relevante Trennung zwischen externer und innerer Repräsentation (Hoffmann, 2005, 128). Begreift man abstrakte Objekte als Redeweise über Darstellungen, also über materiell wahrnehmbare Dinge in Form von Inskriptionen (Darstellungsmittel), so wird das Lernen von Mathematik in erster Linie die Teilnahme an einer Praxis diagrammatischer Tätigkeit. Die Verwendungsweisen der Inskriptionen treten bei dieser Sichtweise in den Vordergrund. Dörfler (2006, 200 ff) hat daher generell Zweifel an der Abstraktheit der Mathematik. Mathematik-Betreibende haben ein bestimmtes Repertoire an Verwendungsweisen, welches die Bedeutung einer Darstellung für sie maßgeblich bestimmt. Diese Verwendungsweisen erlauben die Nutzung von Darstellungen als Erkenntnismittel. Die Mathematik-Betreibenden werden so in die Lage versetzt, benennbare Tätigkeiten an

Diagrammen auszuführen, deren Ergebnisse zu beobachten und weitere Tätigkeiten aus diesen Ergebnissen abzuleiten. Die verfügbaren Verwendungsweisen bestimmen also maßgeblich die individuelle diagrammatische Realität. Für den Begriff der „Sichtweise" im Zusammenhang mit mathematischen Darstellungen haben also auch die Verwendungsweisen der Darstellungen große Bedeutung. Neue Verwendungsweisen erfordern übrigens auch immer die Restrukturierung der Bedeutung von Darstellungen. Beispiel: Wird die Möglichkeit der Verwendung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ etwa um die Verwendungsweise „Vektorprodukt" erweitert, so müssen bestimmte abstrakte Objekte (z.B. die Fläche des Parallelogramms, welche von den betreffenden Vektoren aufgespannt wird oder ein Vektor, der auf beide Vektoren normal steht) als Bedeutung bestimmter spezieller Ausformungen dieser Verwendungsweise restrukturiert werden.

Im Verlauf des Lernens von Mathematik werden immer wieder Sichtweisen etabliert, deren Gültigkeit in der Folge durch neue Diagramme oder Diagrammerweiterungen zu relativieren ist. Es ist also häufig die Restrukturierung der erworbenen Sichtweisen erforderlich. Beispiel: Im Bereich der natürlichen Zahlen gilt anfangs folgende Sichtweise, die dort auch ständig durch Erfahrungen bestätigt wird: „Multiplizieren vergrößert". Nach der Einführung der Dezimal- und Bruchzahlen ist diese Sichtweise zu restrukturieren.

3.3 Restrukturierung der „Realität"

Viele mathematische Modelle haben ihren Ausgangspunkt in dem Anliegen, Lösungen für „reale" Probleme zu finden. Für Probleme der Architektur, der Landvermessung, der Vorsorge generell, der Geldwirtschaft, des Glücksspiels usw. wurden Modelle zu deren Bearbeitung entwickelt. Aus semiotischer Sicht geht es bei der Entwicklung dieser Modelle in erster Linie darum, geeignete diagrammatische Darstellungen zu finden, welche Probleme bearbeitbar machen. Der Darstellbarkeit geht aber ein wichtiger Schritt, nämlich die Schaffung geeigneter Darstellungsgrundlagen, etwa durch Idealisierung voraus. Beispiele: Die Schaffung unserer geometrischen Formen beruht partiell auf der Reduktion der Dimension (ebene Gebilde) und der Idealisierung der Formen. In Bereichen wie etwa der Stochastik bezieht sich die Restrukturierung der Realität auf die Einführung abstrakter Objekte wie idealer Würfel oder idealer Roulette-Tische. Auch Modellierungen wie die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen (bei finanzmathematischen Instrumenten wird dabei etwa die Erfahrung der Börsenhändler ignoriert) oder die Einführung von Stetigkeit im Zusammenhang mit diskreten Ereignissen, etwa bei Funktionen im Zusammenhang mit Börsenkursen, bewirken eine idealisierte Sicht auf „reale" Phänomene. Dabei ist die so genannte Realität natürlich bereits selbst eine Sichtweise, die von vielen allgemeinen und subjektiven Faktoren bestimmt wird (Sinne und Selektion, Reizverarbeitung im Gehirn, Weltanschauung usw.).

Die Modelle der Mathematik beruhen zudem auf der Verwendung von Darstellungssystemen (vgl. Abschnitt 4). In ihnen sind allgemeine kulturelle Einflüsse (z.B. grundlegende Ideen wie jene des „Kontinuums“), spezielle Darstellungseigenheiten (z.B. spezielle Inskriptionen, Schreib- und Leseregeln) und eine eigene immanente Logik (vgl. Abschnitt 4.1) wirksam. Aus dem Vorhandensein von Darstellungsideen darf aber nicht geschlossen werden, dass die Mathematik aus Ideen besteht, die durch Darstellungen lediglich „abgebildet“ werden. Eine derartige statische Sichtweise würde die Festigung vermeintlicher „Grundvorstellungen“ rechtfertigen und dadurch nötige Restrukturierungen erschweren. Auch in den Diagrammen selbst kommen Sichtweisen, die den „realen“ Informationen unterlegt sind, zum Ausdruck. Beispiel: Unterlegt man gegebenen Punkten der Ebene einen „quadratischen“ Zusammenhang so wird das entsprechende Regressionsmodell zu anderen Diagrammen als bei einem vermuteten linearen Zusammenhang führen. All diese verschiedenen Darstellungsebenen (Ebene der Darstellungsgrundlagen, Darstellungssysteme, Diagramme) sind Ausdruck von Sichtweisen.

Aufgrund der beschriebenen Restrukturierungen approximieren mathematische Modelle die zu bearbeitenden Phänomene häufig aber nicht gut genug. Als Konsequenz müssen die Methoden durch weitere Restrukturierungen weiterentwickelt werden. Beispiel: Das Riemann-Integral kann als Restrukturierung der Approximation von Flächen und Volumina durch Rechtecke und Kreisscheiben gesehen werden.

4 Darstellungen und Restrukturierung

Die Entwicklung der Darstellungsmittel geht mit einem Prozess ständiger Restrukturierung einher. Neue Darstellungen eröffnen neue Möglichkeiten. Durch Restrukturierungsmaßnahmen werden die Darstellungssysteme in gewisser Weise vereinheitlicht und Anwendungsmöglichkeiten und Erklärungsleistungen erweitert.

4.1 Restrukturierung innerhalb eines Darstellungssystems

Von Anfang an ist Lernen von Mathematik ein Prozess des Kennenlernens neuer und des Kombinierens vertrauter Diagramme, der ständige Restrukturierung erfordert. Dies soll nun an Beispielen erläutert werden. Dieser Prozess der Erweiterung der Darstellungsmöglichkeiten kann beim Lernen von Mathematik in vielen Bereichen durch das Modell: *Relationsausdehnung bzw. Relationsumkehrung – neue Darstellung – Restrukturierung* beschrieben werden. Hier ein einfaches Beispiel dazu: Betrachtet man die natürlichen Zahlen im Zusammenhang mit der Nachfolgerelation, so ist von Anfang an das obige Modell wirksam. Ist man etwa mit den Zahlen „1, 2, 3“ vertraut, so ist in Ausdehnung der geltenden Relationalität auch für die Zahl „3“ ein Nachfolger vorstellbar *(Relationsausdehnung)*. Führt man nun die Zahl „4“ als *neue Darstellung* ein, so erfordert diese Zahl die *Restrukturierung* der Relationalität des vertrauten Zahlenbereichs. Die Relationalität hat sich im Hinblick auf Vorgänger und Nachfolger für jede Zahl verändert. Zum Beispiel hat die Zahl „2" zwar weiterhin nur einen Vorgänger, sie hat nun aber zwei, davon einen unmittelbaren Nachfolger. Die gesamte Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen und die Einführung der Grundrechnungsarten kann mit diesem Modell beschrieben werden. Beispiel: Die Relationalität der Addition beruht auf der einfachen Tatsache, dass jede Zahl wiederum als erste Zahl betrachtet werden kann. Es ergeben sich so für jede Zahl neue Darstellungen (multiple Repräsentation) und neue operative Möglichkeiten. Die Bedeutung der Zahlen muss daher im Zusammenhang mit der Addition restrukturiert werden. Bei der Einführung der Subtraktion ist aus Sicht der Addition *Relationsumkehrung* erforderlich. Die Relationsumkehrung ist hier die gleiche Relation in umgekehrter Leserichtung:

Addition: $4+3=7$	Subtraktion: $7-4=3$
0 1 2 3 4 5 6 7	7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3	0 1 2 3 4

Für Relationsumkehrungen ähnlicher Form finden sich zahlreiche weitere Beispiele: Division – Multiplikation, Wurzelziehen – Potenzieren, Integralrechnung – Differentialrechnung usw.

Innerhalb eines Darstellungssystems wird in der Mathematik die ständige Restrukturierung der Diagramme betrieben. Die wiederholte Ausführung von gleichen Diagrammen wird etwa mit Hilfe von neuen Diagrammen oder Schreibweisen abgekürzt. Die Diagramme werden so quasi „relational zusammengefasst". Wir verwenden daher im Folgenden für diesen Sachverhalt den Begriff „Relationale Zusammenfassung". Für diese Art der Restrukturierung gibt es in der Mathematik unzählige Beispiele: Die verkürzte Ausführung gleicher Additionen ist die Multiplikation. Die Wiederholung von Multiplikationen der Form „$x \cdot x$" wird durch die Potenzschreibweise abgekürzt, Gleichungssysteme werden zu Matrizen zusammengefasst usw. All diese Restrukturierungen sind Ausdruck von Verallgemeinerungen. Sie ermöglichen Darstellungskürze und verbessern die operative Handhabbarkeit (vgl. Brunner 2009a).

Die Rationalität eines Darstellungssystems kommt auch in speziellen Darstellungsprinzipien der Diagramme zum Ausdruck. Ein solches Prinzip ist beispielsweise im Darstellungssystem „Stellenwertprinzip" das „Bündelungsprinzip" (beim Dezimalsystem sind dies eben „Zehnerbündel"). Als Folge dieses Prinzips ist das Darstellungssystem „Stellenwertprinzip" ein multiplikatives System mit speziellen Regeln der operativen Handhabung. Es hat in gewisser Weise eine eigene immanente Logik. Im Falle des Dezimalsystems gilt etwa die Regel der „Zehnerüberschreitung". Die Einarbeitung in die Verwendung des Systems erfolgt in der Schule in einem

Prozess wiederholter Restrukturierung. Die Zehnerüberschreitung wird als Hunderter-, diese wiederum als Tausenderüberschreitung usw. restrukturiert. Analog muss der Restrukturierungsprozess mittels Zehntel-, Hundertstel-, Tausendstelüberschreitung usw. fortgesetzt werden. Bei dieser Form der Restrukturierung muss das gleiche „Handhabungsprinzip“ in Analogie angewandt werden. Die Thematisierung der wirksamen Darstellungsprinzipien und der operativen Regeln des Zehnersystems ist spätestens nach der Erarbeitung der rationalen Zahlen eine Form der zusammenfassenden Restrukturierung. Dabei können auch geltende Konventionen explizit gemacht werden. Beispiel: Wann sind Nullen oder Einsen zu schreiben und wann nicht (etwa: $a = 1 \cdot a$). Die analoge Anwendung des Erlernten in anderen Systemen (2er-, 3er-, 4er-, …System) ist eine umfassende Form der Restrukturierung, die zur weiteren Beleuchtung der Darstellungsprinzipien des Stellenwertsystems genutzt werden kann.

4.2 Zusammenwirken mehrerer Darstellungssysteme

In der Mathematik kommt es immer wieder zur Schaffung eines gemeinsamen Darstellungssystems aus vorher getrennten Subsystemen. Derartige Kombinationen der Darstellungsmittel gehen meist mit einem Prozess der Restrukturierung einher, der zur Verallgemeinerung und Erweiterung des Wissens führt (vgl. unten Abschnitt 4.4).

Als Beispiel zur Zusammenarbeit von Darstellungssystemen kann hier die analytische Geometrie von Descartes-Fermat angeführt werden. Sie entstand aus der Kombination der Darstellungsmittel der euklidischen Geometrie mit jenen der Algebra. Die beiden mathematischen Teilbereiche unterscheiden sich in den Darstellungsmitteln derart, dass man guten Gewissens von verschiedenen Darstellungssystemen sprechen kann. Beim Lernen von Mathematik lernt man heute beide Systeme meist nicht mehr getrennt voneinander kennen. Der Zusammenarbeit beider Systeme begegnet man üblicherweise beim so genannten Zahlenstrahl das erste Mal. Das Stellenwertsystem als Teil der Algebra wird mit dem Darstellungsmittel Strahl verbunden. Beim Zahlenstrahl werden verschiedene Sichtweisen miteinander kombiniert. Der Maßzahlaspekt erfährt eine geometrische Deutung. Man kann nun geometrischen Gebilden Längen zuordnen. Für die geometrischen Gebilde gibt es nun algebraische Darstellungen. Man muss sich hier aber immer vor Augen halten, dass die beiden Darstellungssysteme ursprünglich kaum etwas miteinander zu tun hatten. Für Restrukturierungen ist oft das gleiche Darstellungssystem von großer Bedeutung. Beispiel: Sind Lernende mit dem $\mathbb{R}^2$ vertraut, so erscheint die Einführung der Gauß`schen Zahlenebene als Restrukturierung des $\mathbb{R}^2$ naheliegend. Bei der imaginären Achse wird gegenüber dem $\mathbb{R}^2$ ja nur eine neue Sichtweise unterlegt.

Manchmal geht es bei Restrukturierungen von Teilgebieten der Mathematik vorerst um die Präzisierung der Darstellungsgrundlagen. Als Auswirkung dieser Präzisierung und der Entwicklung oder Einbeziehung geeigneter Darstellungstechniken ergeben sich dann neue Entwicklungsmöglichkeiten für das entsprechende Teilgebiet. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann hier als interessanter Spezialfall angeführt werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung galt noch um 1900 als Teilgebiet der Physik. Erst durch ihre Einbettung in die Maß- und Integrationstheorie (Kolmogoroff, Lebesgue, Bernstein, Markow) wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Mathematikern wirklich ernst genommen und als Teilgebiet der Mathematik akzeptiert. Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogoroff lieferte dann eine wichtige Präzisierung. Kolmogoroff (1933) schreibt dazu in seinem Vorwort zur axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

> Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen. Vor der Entstehung der LEBESGUEschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den LEBESGUEschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand.

Eine eindeutige Restrukturierungsmaßnahme im Sinne einer Bedeutungsfestlegung ist bei Kolmogoroff die Definition von Mengen als zufällige Ereignisse. Kolmogoroff schreibt (1933, 5):

> Mehrere mengentheoretische Begriffe bezeichnet man aber in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit anderen Namen. Wir wollen ein kurzes Verzeichnis solcher Begriffe geben.

Mengentheoretisch.	Im Falle der zufälligen Ereignisse.
A und B sind disjunkt, d.h. $AB = 0$.	1. Die Ereignisse A und B sind unvereinbar.
$AB\ldots N = 0$.	2. Die Ereignisse A, B, …, N sind unvereinbar. Usw.

Es geht Kolmogoroff aber nicht nur um die „Einbettung“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Maß- und Integrationstheorie, es geht ihm auch um die Abgrenzung derselben zu den anderen mathematischen Gebieten. Er sieht im Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen das unterscheidende Merkmal.

> In der Tat haben wir schon gesehen, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung vom mathematischen Standpunkte aus als eine spezielle Anwendung der allgemeinen Theorie der additiven Mengenfunktionen betrachtet werden kann. Man kann sich natürlich fragen, wie ist es dann möglich, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung sich in eine große, ihre eigenen Methoden besitzende selbständige Wissenschaft entwickelt hat? … Man kommt also dazu, im Begriffe der Unabhängigkeit wenigstens den ersten Keim der eigenartigen Problematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erblicken. (Kolmogoroff 1933, 8).

4.3 Diagrammatisches Schließen und Restrukturierung

Zeichen haben nicht nur Repräsentationsfunktion, sie haben auch Erkenntnisfunktion. Erkenntnisentwicklung setzt nach Hoffmann/Peirce eine Fülle von kollateralem Wissen und konkretes Tun voraus. Hoffmann schreibt (2005, 123):

> Schon Aristoteles hatte festgehalten, dass die Geometer „durch Tun erkennen" (vgl. oben S. 104), und Kant hatte diesen Gedanken dann in dem für seine Philosophie der Mathematik zentralen Begriff der „Konstruktion" weiter ausgebaut (vgl. Kapitel 4.5). Die Bedeutung der Tätigkeit liegt auf der einen Seite darin, dass in diese immer schon ganz unterschiedliche Wissensbestände einfließen, so dass jede Konstruktion zu einem Teil „apriorististisch" durch vorab Gegebenes determiniert ist, dass aber auf der anderen Seite durch solche Konstruktion *Gegenstände* geschaffen werden, die Dinge sichtbar werden lassen, die man vorher nicht gesehen hat – zum Beispiel, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° ist -, obwohl diese neue Erkenntnis sich mit Notwendigkeit aus der Konstruktion im euklidischen Raum ergibt.

Da jedes neue Zeichen neue Erkenntnismöglichkeiten eröffnet, ist ebenfalls nach Hoffmann (2005, 140) der Prozess der Erkenntnisentwicklung als Prozess der Schaffung neuer Zeichen und Darstellungsmittel beschreibbar. Die maßgebliche Methode der Erweiterung des Wissens in der Mathematik ist das so genannte „diagrammatische Schließen". Peirce gibt für das diagrammatische Schließen folgende Definition:

> Mit diagrammatischem Schließen meine ich Schließen, welches gemäß einer in allgemeinen Begriffen formulierten Vorschrift ein Diagramm konstruiert, Experimente an diesem Diagramm durchführt, deren Resultate notiert, sich Gewissheit verschafft, dass ähnliche Experimente, die an irgendeinem gemäß der selben Vorschrift konstruierten Diagramm durchgeführt werden, die selben Resultate haben würden, und dieses in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringt." (Peirce, 1902a, NEM IV 47 f., zitiert bei Hoffmann, 2005, 129)

Wir greifen aus dieser Definition die drei wesentlichen Bestandteile heraus: die Konstruktion von Diagrammen, das Experimentieren mit diesen Diagrammen und die Beobachtung der Resultate bzw. die Ableitung von Erkenntnissen. Was haben diese Bestandteile nun mit Restrukturierung zu tun?

Die Konstruktion von Diagrammen orientiert sich in der Mathematik an den gegebenen Daten und Fakten eines gestellten Problems. Eine erste Ebene des Verstehens betritt man dann, wenn es gelingt, die gegebenen Informationen in „Vordiagrammen" (Tabellen, Skizzen usw.) zu restrukturieren. Ich nenne derartige Darstellungen „Vordiagramme", da sie nicht standardisiert in der Mathematik verwendet werden. Es kann sich dabei aber durchaus um Diagramme im Peirceschen Sinne handeln. Solche Vordiagramme machen bereits die gegebene Relationalität sichtbar. Sie ermöglichen Assoziationen. Aus didaktischer Sicht können einige wichtige Aspekte der Restrukturierung von Informationen in Vordiagrammen hervorgehoben werden. Ein erster Aspekt ist jener der Verschriftlichung. Aus meiner Beobachtung machen Lernende häufig den Fehler, sich speziell am Beginn des Lösungsprozesses bei mathematischen Aufgaben auf reines Denken zu beschränken. Dabei helfen Verschriftlichungen bereits beim Erfassen der gestellten Aufgabe. Die geltenden Relationen können sofort mit Hilfe einfacher Inskriptionen (Pfeile, Ringe usw.) sichtbar gemacht werden. Die Verarbeitung der Informationen mündet so in erste Vordiagramme. Bei „bloßem“ Denken stößt man meist alleine schon wegen der erforderlichen Gedächtnisleistung an Grenzen. Dem Umgang mit Vordiagrammen kommt also große Bedeutung zu. Forschungen im Zusammenhang mit der Repräsentationskompetenz „meta-representational competence (MRC)“, (diSessa/Sherin, 2000 oder Sherin, 2000) zeigen, dass es sinnvoll ist, Lernende nicht nur im Umgang mit Standard-Repräsentationen zu unterrichten, sondern sie auf breiter Basis ein allgemeines Verständnis für Repräsentation entwickeln zu lassen. Bereits kleine Kinder besitzen nach diSessa/Sherin (2000, 391) eine reiche Sammlung an Repräsentationsmitteln, auf die aufgebaut werden kann. Dabei geht es nicht nur um die Auswahl und produktive Verwendung von Repräsentationen, sondern auch um die Fähigkeit, Repräsentationen zu modifizieren, zu kritisieren oder neu zu entwickeln. Nach diSessa/Sherin (z.B. 2000, 398) spielt in diesem Zusammenhang Zeichnen eine große Rolle. Sherin (2000, 424) spricht überhaupt von einem möglichen Pfad vom Zeichnen hin zu standardisierten wissenschaftlichen Repräsentationen. Standardisierte mathematische Diagramme könnten so quasi in einem Prozess der Restrukturierung aus etablierten Repräsentationsmustern der Lernenden entwickelt werden. Interessant sind in diesem Zusammenhang häufig anzutreffende „Grundrepräsentationen“ („representational facts“). Beispielsweise verwenden Kinder häufig „oben“ um „mehr“ zu repräsentieren (diSessa/Sherin, 2000, 390). Sogar Studenten glauben oft, dass eine graphische Repräsentation, bei welcher „weniger“ oben repräsentiert wird, einfach falsch ist (diSessa/Sherin, 2000, 392).

Die standardmäßigen mathematischen Diagramme müssen bei der Anwendung häufig in entsprechend modifizierter Art und Weise verwendet werden. Sie müssen also dem jeweiligen Problem entsprechend restrukturiert werden. Die angesprochenen Vordiagramme helfen dabei, eine bestimmte Sichtweise auf ein Problem zu unterlegen und notwendige Modellierungen der „Realität“ vorzunehmen (Modellierungen, wie sie bereits besprochen wurden, Mittelungen, Regressionsmodelle usw.). Natürlich gehören zu diesen Restrukturierungen auch nötige Anpassungen der Bedeutung der verwendeten Inskriptionen. Wie bereits besprochen können ja Inskriptionen je nach Kontext unterschiedliche Symbole indizieren. Inskriptionen wie beispielsweise „A“ oder „a“ können in geometrischen Figuren für Seiten, Eckpunkte oder Flächen, in algebraischen Darstellungen für Variablen oder Koeffizienten in Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ereignisse usw. stehen.

Beim Experimentieren mit den Diagrammen treten die Verwendungsweisen in den Vordergrund. Ausgerichtet auf Ziele werden Diagramme nach Regeln restrukturiert (transformiert). Es wird dabei kollaterales Wissen explizit gemacht. Die Transformationen der Diagramme orientieren sich nicht nur an Zielen sondern auch an Gewohnheiten und ästhetischen Grundsätzen. Sind Lernende beispielsweise gewohnt, den Graphen einer Geraden mit Hilfe der Steigung k und dem Abschnitt d auf der y-Achse zu bestimmen, so werden sie eine gegebene Darstellung in die Form „$y = kx + d$“ transformieren, da sie so k und d leicht ablesen können. Die Regelgebundenheit schränkt im Zusammenhang mit der Transformation der Diagramme die erforderliche Kreativität kaum ein. Regeln bestimmen ja nur „wie man etwas zu tun hat“, sie bestimmen aber meist nicht „was man zu tun hat“.

Wie bereits erwähnt können Experimente Dinge sichtbar machen, die man vorher nicht gesehen hat. Interessant ist dabei das Zusammenspiel verschiedener Darstellungssysteme. Experimente in einem System können zu Erkenntnissen im anderen System führen.

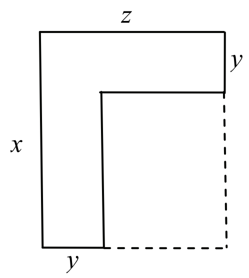

Abbildung 2

Ein einfaches geometrisches Experiment (restrukturiertes Rechteck mit strichlierten Linien in Abbildung 2) kann zu einer algebraischen Erkenntnis führen: „$u = 2x + 2z$“. Dies kann eine Erkenntnis sein. Es muss beispielsweise nicht von vornherein einsichtig sein, dass „y“ im Umfang nicht vorkommt. Umgekehrt kann eine algebraische Transformation (Restrukturierung)

$$„z + y + (z - y) + (x - y) + y + x = 2z + 2x“$$

zu einer geometrischen Erkenntnis führen. Die im Zusammenhang mit dem Umfang sinnvolle Sichtweise der Figur als Rechteck muss auch nicht von vornherein klar sein. In dieser Betrachtungsweise stehen übrigens die linke und die rechte Seite der algebraischen Gleichung für unterschiedliche geometrische Sichtweisen.

Die bewusste Wahl bzw. der geschickte Wechsel der Sichtweise hat epistemologisches Potential. Für Hoffmann (2005, 177) ist der „Wechsel des Blickpunktes“ das entscheidende Merkmal für den Begriff der „theorischen Transformation“. Als Beispiel behandelt Hoffmann, so wie schon Peirce, den berühmten Beweis des Satzes von Desargues über zwei in einer Abbildung liegende Dreiecke (Abbildung 3). Die von Hoffmann angeführte Beweismethode von Staud beruht auf der Änderung der Sichtweise. Die beiden Dreiecke werden nicht in der Ebene sondern in räumlicher Perspektive, also dreidimensional wahrgenommen.

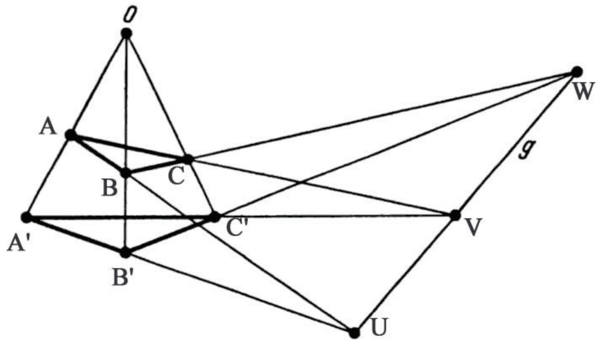

Abbildung 3 (Hilbert, Cohn-Vossen, 1932, 1996, S. 109, Abb. 135)

Die entscheidende Idee, nämlich die Einführung eines außerhalb der Ebene angenommenen Perspektivpunktes ist nach Hoffmann ein kreativer Akt „theorematischer Deduktion“. Der Rest ist nach Peirce korollares Schließen „mittels einiger weniger offensichtlicher, in der Theorie der Perspektive bekannter Definitionen“ (zitiert bei Hoffmann, 2005, 176). Theorische Transformation kann man in gewisser Weise auch als aktive Restrukturierung der Sichtweise und gelegentlich auch als Erweiterung der Bedeutung und Verwendungsweisen einer Darstellung im Hinblick auf eine neue Idee bezeichnen. Die kreative Restrukturierung der Sichtweise auf eine Darstellung erfordert öfters sogar den Bruch von Regeln. Beim oben angeführten Beweis des Satzes von Desargues über zwei in einer Perspektive liegende Dreiecke ist mit dem Wechsel der Sichtweise auch die „Verletzung“ der zuerst geltenden und der Ersatz durch andere Regeln verbunden. Der Umstand, dass in vielen Fällen Regeln genau zu befolgen sind, bei der Entwicklung von Neuem Regeln aber manchmal auch gebrochen werden müssen, stellt natürlich eine besondere didaktische Herausforderung dar. Bei der kreativen Verwendung von Diagrammen machen Lernende im Hinblick auf die geltenden Konventionen der Mathematik natürlich auch Fehler. Gerade solche Fehler ermöglichen aber oft erst die Entdeckung der geltenden Konventionen sowie die Einengung der Bedeutung und der erlaubten Verwendungsweisen der Inskriptionen. Der tolerante Umgang mit Fehlern ist also eine Voraussetzung für den eigentätigen und kreativen Umgang mit mathematischen Darstellungen durch Lernende.

Aus didaktischer Sicht stellt sich natürlich die Frage, ob man die angeführte Technik des Wechsels der Sichtweise so üben kann, dass sie für die Lernenden zu einem praktischen Mittel der Erkenntnisentwicklung wird. Aus den Überlegungen von Peirce im Zusammenhang mit der theorischen Transformation resultieren einige grundlegende Voraussetzungen. Es müssen einmal die Ideen, die es dann im eigentlich schöpferischen Akt zu assoziieren gilt, im Geist bereits angelegt sein (Hoffmann, 2005, 212). Nach Peirce ist es in theorischen Beweisen notwendig, Assoziationen einzuführen, auf welche die Prämissen nicht den leisesten Hinweis liefern. Peirce schreibt:

> Erstens müssen nämlich die zu assoziierenden Ideen in einem Geist zusammengebracht werden, entweder durch eine zufällige Erfahrung oder durch die Kraft eines natürlichen oder erworbenen Instinkts oder als Folge eines gründlichen Studiums der Formen solcher Assoziationen. … Zweitens muss eine Untersuchung aufgrund von Gedankenexperimenten ausreichend belegen, dass die theorische Assoziation keine Falschheit einschließt. (Peirce 1907a, SEM III 310 f., zitiert bei Hoffmann, 2005, 211)

Es gibt im Laufe des mathematischen Lernprozesses immer wieder Inhalte, an welchen der Wechsel der Sichtweise thematisiert und theorische Transformation geübt werden kann. Hier ein Beispiele aus der Integralrechnung: Hat man mit Hilfe des Grenzübergangs $\Delta x \to 0$ über die zugehörigen Unter- und Obersummen der Rechtecksflächen das Riemann-Integral des Flächeninhalts definiert, so kann man in Analogie unter Verwendung einer anderen Sichtweise das Rotationsvolumen herleiten. Wir haben dabei folgende Bestandteile: eine Idee (Rotation) und daraus resultierend eine neue Sichtweise, Restrukturierung (z.B.: Zylinderscheiben statt Rechtecksflächen), Analogie (Grenzwertbildung). Im reflektierenden Vergleich der beiden Definitionen lässt sich die Strategie der Änderung der Sichtweise thematisieren. Natürlich ist es vorteilhaft, die Lernenden etwa in Gruppenarbeit in Form von entdeckendem Lernen die Herleitung der Rotationsvolumina als Restrukturierung des Flächenintegrals selbst durchführen zu lassen. Dabei wird die geschickte Aufteilung der Herleitung in getrennte Aufgaben unerlässlich sein (etwa wie vorhin: Idee, Restrukturierung, Analogie). Die größte Herausforderung wird es sein, die Lernenden die Idee der Rotation entwickeln zu lassen. Eine derartige Entdeckung wird nur mit mehr oder weniger Hilfe möglich sein.

Die Beobachtung der Resultate ist meist Teil eines iterativen Restrukturierungsprozesses. Man probiert, beobachtet, probiert etwas anderes, beobachtet, verbessert das Probierte usw. Die Beobachtung der Ergebnisse kann im Falle von unerfüllten Erwartungen auch zu einer Restrukturierung der Hypothesen führen. Hoffmann (2005, 222) schreibt dazu:

> Dazu sei hier noch einmal von dem zentralen Gedanken der semiotisch-pragmatischen Theorie der Erkenntnisentwicklung ausgegangen, dass nämlich die eigentliche Kreativität an der Stelle zu verorten ist, wo in Experimenten mit Diagrammen, die in konkreter Tätigkeit im Rahmen der Rationalität gegebener Darstellungssysteme vollzogen werden,

plötzlich etwas beobachtet wird, das nur abduktiv mit der Entwicklung einer neuen Hypothese oder theorisch mit einem Wechsel des Blickpunktes erklärt werden kann.

4.4 Verallgemeinerung und Restrukturierung

Hoffmann (2005, 216) führt im Zusammenhang mit Peirces Überlegungen zur Verallgemeinerung in *The Essence of Mathematics* aus:

> Die mathematische Verallgemeinerung, so könnte man zunächst verkürzt und semiotisch gewendet sagen, zielt darauf, mit möglichst wenigen Darstellungsmitteln möglichst viel darzustellen.

Nach Mormann ist Verallgemeinerung ein Prozess der Reorganisation und Erweiterung des Wissens (zitiert bei Hoffmann, 2005, 219). Aufbauend auf die Überlegungen von Mormann, Molodsij und Bourbaki beschreibt Hoffmann (2005, 220) Verallgemeinerung so:

> Verallgemeinerung könnte man somit als eine Restrukturierung von Darstellungssystemen definieren, die an folgenden Zielen orientiert ist:
>
> – Vereinheitlichung der Darstellung von Sachverhalten, das heißt Schaffung eines gemeinsamen Darstellungssystems für bislang getrennte Subsysteme
>
> – Beseitigung bislang bestehender Widersprüche
>
> – Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten, des Gegenstandsbereichs oder der Erklärungsleistung durch das neue Darstellungssystem
>
> – Eröffnung neuer Forschungshorizonte und Problemfelder (z.B. indem neue Widersprüche oder Fragen sichtbar werden)

Wie bereits ausgeführt wird innerhalb eines Darstellungssystems die ständige Restrukturierung der Diagramme betrieben. Es wird dadurch Wissen zusammengefasst und verallgemeinert. Es entsteht, wie dies Hoffmann (2005, 218) formuliert „die Durchschaubarkeit der Mathematik bis in die Tiefe“. Wie bereits erwähnt hat diese Form der „relationalen Zusammenfassung“ (vgl. Abschnitt 4.1) aber auch andere Vorteile. Sie bewirkt Darstellungskürze, bessere operative Handhabbarkeit und wegen der besseren Überschaubarkeit Sicherheit (vgl. Brunner, 2009).

Verallgemeinerungen beruhen auf Restrukturierungsprozessen. Ausgehend von Spezialfällen

$$1+2+3+\ldots+99+100\,,\ 1+2+3+\ldots+99+100+101\,,\ \text{usw.}$$

ist das Herausarbeiten des Ikons ein wesentlicher Schritt der Verallgemeinerung:

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

Die geltenden Relationen treten in den Vordergrund. Die Zahlen und die Variable sind Symbole, die insofern von Bedeutung sind, als sie durch Regeln den Möglichkeitsraum der Darstellungsvarianten bestimmen. Nach Hoffmann (2005, 127) ist dieser Möglichkeitsraum der Darstellungsvarianten nur dadurch beschränkt, dass eben die gegebene Relationalität zwischen den Relata (hier Zahlen) bestehen muss.

Nach Dörfler (2010, 34f.) sind die Zahlzeichen und Variablen hier im Diagramm in erster Linie Indizes, welche die Existenz der zugehörigen abstrakten Objekte behaupten. Die abstrakten Objekte selbst sind für das Diagramm aber irrelevant. Sie werden nur in Form von Regeln innerhalb des Diagramms wirksam.

$$\frac{100\cdot 101}{2},\ \frac{101\cdot 102}{2},\ \text{usw.}$$

kann wiederum durch

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

verallgemeinert werden. Die Herleitung von

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

gelingt mit Hilfe von induktivem Schließen der Form:

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+99+100&=(1+100)+(2+99)+\ldots+(49+52)+(50+51)\\&=50\cdot 101=\frac{100\cdot 101}{2},\end{aligned}$$

$$1+2+3+\ldots+99+100+101=\frac{101\cdot 102}{2},\ \text{usw.}$$

Die hierfür erforderlichen Transformationen sind Restrukturierungen im Sinne der bereits öfters erwähnten „relationalen Zusammenfassung". Den Transformationen liegen Strategien zugrunde. Beispielsweise wird in die „Unordnung", die auf der Verschiedenheit der Relata beruht, etwa durch die Entdeckung und Darstellung von „Gleichem" Ordnung gebracht. Der Rest beruht im obigen Fall auf Beobachtung und der Nutzung der Multiplikation als „relationaler Zusammenfassung" von Additionen. Sie bewirkt wiederum die bereits erwähnten Vorteile Darstellungskürze, bessere operative Handhabbarkeit, erhöhte Rechensicherheit und bessere Überschaubarkeit. Die Auslotung des Geltungsbereichs der Relata ist natürlich ebenfalls eine Erkenntnis, die letztlich auf Restrukturierungsmaßnahmen beruht. Die Beweistechnik der vollständigen Induktion enthält in dieser Sichtweise Restrukturierungselemente. Beispielsweise kann der Induktionsschluss für „$n+1$" als Restrukturierung (im Sinne von Transformationen nach Strategien) der Induktionsbehauptung für „n" gesehen werden.

In vielen Fällen entstehen mathematische Modelle durch die Vereinheitlichung und Kombinationen von verschiedenen Darstellungen, die ihrerseits aus Restrukturierungen unterschiedlichster realer Ausgangsprobleme entstanden sind. Als Beispiel kann hier der so genannte „Wiener-Prozess" angeführt werden. Ausgangspunkt für diesen Prozess war die sogenannte „Brown`sche Bewegung“ (vgl. z.B. Davis/ Etheridge, 2006). 1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen unregelmäßige „Zick-Zack-Bewegungen“ ausführen. Um ca. 1900 versuchte Bachelier mit Hilfe eines solchen Prozesses die Kursbewegungen an der Pariser Börse zu analysieren. Einstein (1905) und unabhängig von ihm Smoluchowski (1906) definierten den Wiener-Prozess in seiner heutigen Gestalt. Einstein beschäftigt sich in der betreffenden Arbeit mit der durch die „molekularkinetische Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“. In der Folge gelang es 1923 Wiener durch Restrukturierungsmaßnahmen (z.B.: der Sichtweise als Markow-Prozess, durch stetige Pfade und einen konstanten Erwartungswert) und der Einbeziehung von Hilfsmitteln (z.B. maßtheoretische Hilfsmittel von Lebesgue und Borel) den Prozess wahrscheinlichkeitstheoretisch abzuleiten. Die Herauslösung des Prozesses aus der realen Ausgangsumgebung und die damit verbundene Diagrammatisierung des Prozesses als Irrfahrt erlaubten durch die Loslösung aus der „metaphorischen Umgebung“ die zielgerichtete Bearbeitung des Problems, die Einbeziehung anderer mathematischer Darstellungsmethoden und Erkenntnisse und in der Folge die Anwendung der neu entwickelten Formelsprache in „metaphorischer Umdeutung“ in weiteren realen Situationen. Die Anwendungen in neuen realen Situationen kann ebenfalls als Restrukturierung gesehen werden. Heute werden Brown`sche Bewegungen und verwandte Prozesse in so gut wie allen Natur- und Sozialwissenschaften als Hilfsmittel verwendet. Die Brownsche Bewegung, der Wiener-Prozess und seine Weiterentwicklungen sind beispielsweise auch bei der Simulation von Aktienkursenverläufen oder der Erforschung von Warteschlangen von Bedeutung.

Hoffmann (2005, 220) bringt im Zusammenhang mit der Schaffung eines gemeinsamen Darstellungssystems für bislang getrennte Subsysteme Beispiele von Mormann und Molodsij zu den komplexen Zahlen und der analytischen Geometrie von Descartes-Fermat. Mormann sieht in der Verallgemeinerung der reellen durch die komplexen Zahlen keine bloße Gegenstandserweiterung, sondern auch eine begriffliche Fortentwicklung. Zum Beispiel bleibt die Theorie von Polynomgleichungen im Reellen eine unbefriedigende Sammlung von Einzelfällen. Sie wird erst durch die Theorie der komplexen Zahlen begründet oder erklärt. Nach Molodsij erlaube es die Verallgemeinerung „das Besondere“ der jeweils vorangehenden Stufe „besser zu erforschen“.

> Die analytische Geometrie von Descartes-Fermat ist im Vergleich zur euklidischen Geometrie abstrakter. Das beruht darauf, dass in der analytischen Geometrie dank der Koordinatenmethode die Untersuchung geometrischer Formen mit algebraischen Mitteln durchgeführt wird. In diesem Zusammenhang ermöglichte es die analytische Geometrie, den inneren Zusammenhang und die Einheit vieler geometrischer Tatsachen aufzudecken, die in der euklidischen Geometrie als isolierte Fakten angesehen und entsprechend untersucht wurden. Eben deshalb gestatten es die Methoden der analytischen Geometrie, eine Reihe geometrischer Aufgaben zu lösen, die im Rahmen der euklidischen Geomet-

> rie nicht gelöst werden konnten. (Molodsij, 1977 <1969>, 99, zitiert bei Hoffmann, 2005, 220)

Neben den zahlreichen Vorteilen, die sich bei der Kombination von Darstellungsmitteln hinsichtlich der Verallgemeinerung und Erweiterung des Wissens ergeben, muss für diese Vorteile aber häufig auch ein Preis bezahlt werden. Beispiel: Sind die reellen Zahlen noch geordnet, so geht diese Ordnung in den komplexen Zahlen verloren. Bei der Schaffung eines gemeinsamen Darstellungssystems aus vorher getrennten Subsystemen ändert sich offensichtlich auch die Rationalität des gemeinsamen Systems gegenüber den Subsystemen. In der analytischen Geometrie ändern sich etwa die Verwendungsweisen der bisherigen Darstellungen. Man beschäftigt sich mit der Geometrie häufig rein syntaktisch. Die geometrische Struktursprache bleibt dabei häufig auf der Strecke. Auch die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sicher die Rationalität der Darstellungen verändert. Ein Ereignis wird nun beispielsweise als Menge gesehen. Darstellungssysteme sind offensichtlich nicht ohne Einbußen beliebig kombinier- und erweiterbar.

Die Erweiterung der Zahlenbereiche und die Restrukturierung der Operationen erfordern weitere hilfreiche Restrukturierungen. Neben dem Bewusstmachen der geltenden Rechenregeln kann auch die Klassifizierung derselben von großem Nutzen sein. Gewisse Regeln wie etwa $(-1)(-1)=1$ (in der Schule) oder die Regel der Abstandsmessung im $\mathbb{R}^n$ ($n>3$) gelten wirklich per Konvention. Bei der Abstandsmessung im $\mathbb{R}^n$ wird durch die Übertragung der Regel des $\mathbb{R}^3$ in Analogie eine „kompatible“ Lösung für diese Aufgabe eingeführt. Viele der so genannten Rechenregeln sind aber Regularitäten, die nur mittelbar aus zugrundeliegenden Konventionen ableitbar sind. Sie resultieren im Wesentlichen aus den Restrukturierungen der Darstellungen im Sinne der bereits beschriebenen „relationalen Zusammenfassung“ (gleiche Additionen werden durch Multiplikationen abgekürzt, Potenzen fassen Multiplikationen zusammen usw.). Beispiel: Eine Regel wie etwa „Punkt- vor Strichrechnung“ resultiert nicht nur aus den Konventionen nach welchen die elementaren Rechenoperationen Addition und Subtraktion Relationen formulieren, sondern auch aus den, in den Operationen Multiplikation und Division implementierten „relationalen Zusammenfassungen“. Multiplikationen sind eben „verdichtete Additionen“, Divisionen eben „verdichtete Subtraktionen“. Beim Zusammenwirken der vier Grundrechnungsarten dürfen die zugrundeliegenden Konventionen von Addition und Subtraktion nicht beeinträchtigt werden. Aus didaktischer Sicht ist diese Unterscheidung zwischen Konventionen und Regularitäten wichtig. Sicherheit im Umgang mit den Diagrammen kann nur aus echtem Verständnis des Zusammenwirkens der Diagramme resultieren. Die bloße Befolgung von Regeln wird bald an Grenzen stoßen. Bei allen Merksätzen, die im Zusammenhang mit den so genannten Rechenregeln verwendet werden, sollte übrigens größte Vorsicht herrschen. Dies beginnt bei einfachsten Merksätzen. Die Regel „Rechne zuerst was in Klammern steht“ ist bereits bei der Verwendung von Variablen häufig nicht mehr anwendbar. Derartige Regeln sind also ebenfalls ständig zu restrukturieren.

Eine spezielle Form der Restrukturierung sei hier ebenfalls erwähnt: „Restrukturierung als Umschreiben". Häufig sind zum Zeitpunkt der Einführung von Darstellungen gewisse Hilfsmittel noch nicht vorhanden. Beispiel: Beschäftigt man sich etwa in der 5. Schulstufe reflektierend mit dem Stellenwertsystem als 2er-, 3er-, …, 10er-System, so ist dies, da Inskriptionen wie „a^n" für $n = 0, 1, 2, \ldots$ noch nicht bekannt sind, nur unter Verwendung von Darstellungen wie „$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$" für „$a^n$" und von „1" für „$a^0$" möglich. Das Darstellungssystem kommt dabei natürlich nicht in seiner „Schönheit" zur Geltung. Hier empfiehlt sich die Restrukturierung des Darstellungssystems nach der Einführung der Darstellung „a^n".

5 Restrukturierung aufgrund didaktischer Erfordernisse

Didaktisches Handeln weist generell immer Komponenten der Restrukturierung auf. Wissensbereiche können nie abgeschlossen sein. Jede Wissenserweiterung aber auch jede sinnvolle Wiederholung verlangt immer auch die Restrukturierung des bereits erworbenen Wissens. Einige wenige Beispiele sollen diese These belegen. Durchgenommene Stoffgebiete sollten immer zusammengefasst und unter neuen Aspekten beleuchtet werden. Dabei spielen auch die abstrakten Objekte eine Rolle. Es ist aber beispielsweise sinnvoll, alle vertrauten Diagramme, die für ein bestimmtes abstraktes Objekt in einem bestimmten Kontext stehen, zusammenfassend zu betrachten (etwa alle Darstellungsmöglichkeiten von Geraden oder Ebenen in verschiedenen Vektorräumen). Ebenso kann es hilfreich sein, gewisse Eigenschaften zu beleuchten. Beispielsweise kann betrachtet werden, wie bestimmte Diagramme „parallel" formulieren (etwa Vektoren, Parameterdarstellungen oder Gleichungen). Ebenso kann man das Zusammenwirken von Diagrammen von behandelten Stoffgebieten unter gewissen Verwendungsaspekten betrachten. Beispielsweise kann man die verschiedenen Möglichkeiten der Berechnung des Normalabstandes eines Punktes zu einer Geraden in verschiedenen Vektorräumen beleuchten. Auch der reflektierende Vergleich von Lösungswegen kann zur Restrukturierung von Wissen genutzt werden. Es kann beispielsweise herausgearbeitet werden, welche Diagramme in welchen Verwendungsfällen zu deutlich kürzeren Lösungswegen führen.

Lehren bedeutet immer auch, dass Wissen auf Basis des Vorwissens der Lernenden restrukturiert werden muss. Dabei ist etwas von Bedeutung, das bei Gallin/Ruf (1998) „Vorschauperspektive" genannt wird. Die Lehrenden müssen in der Lage sein, Stoffgebiete nicht aus der Position der Rückschau, sondern-eben wie die Lernenden-aus jener der Vorschau zu betrachten. Diese Vorschauperspektive kann als restrukturierte Sichtweise auf zu vermittelndes Wissen gedeutet werden. Sie verlangt von den Lehrenden nicht nur Einfühlungsvermögen sondern auch große Bewusstheit über den Bildungsstand der Lernenden (also über die vermeintlich etablierten Verwendungsweisen und Interpretanten der behandelten Darstellungen, über die behandelten Begriffe usw.). Einfühlungsvermögen bezieht sich in diesem Zusammenhang beispielsweise auf die Wahrnehmung und Diagnose von Verständnisproblemen von Lernenden und die Fähigkeit, durch entsprechende Hilfs- und Fördermaßnahmen auf diese Probleme zu reagieren. Viele dieser Hilfsmaßnahmen bestehen selbst wieder aus Restrukturierungsmaßnahmen. Gelerntes ist dabei partiell neu darzustellen. Von großer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das Verständnis der Lehrenden für die Darstellungen selbst. Nur auf Basis dieses Verständnisses sind sie in der Lage, „Fehlinterpretationen“ durch Lernende zu erkennen. „Falsche“ Verwendungsweisen resultieren ja meist aus zumindest partiell „falschen“ oder sagen wir besser „unüblichen“ Sichtweisen auf Darstellungen. Soll es im Mathematikunterricht nicht nur um „Abrichtung“ gehen, so erfordern derartige „unübliche“ Sichtweisen, die ja meist feine semantische Unterscheidungen sichtbar machen, die reflektierende Auseinandersetzung mit den Darstellungen. Nach meiner Meinung ist dies den Lehrenden aber ohne eigene intensive Auseinandersetzung mit den Darstellungen kaum möglich.

Neben all den bereits erwähnten Anlässen für Restrukturierungsmaßnahmen ergeben sich viele weitere Anlässe für erforderliche Restrukturierungsmaßnahmen aus Änderungen in den Rahmenbedingungen des Unterrichts. Beispielsweise müssen die erlernten Darstellungen im Zusammenhang mit neuen Schulbüchern und den dort geltenden Darstellungen und Konventionen restrukturiert werden. Ebenso erfordert jeder Lehrerwechsel eine klärende Auseinandersetzung mit den bisher verwendeten Darstellungen. Der Einsatz neuer Hilfsmittel (Taschenrechner, Computer usw.) verlangt ebenfalls Restrukturierungen (was muss weiter „händisch“ gerechnet werden, was darf ausgelagert werden usw.).

6 Weitere didaktische Überlegungen

Die Überzeugungen der Lehrenden beeinflussen natürlich die verwendeten Unterrichtsmethoden. Forschungen zeigen, dass Lehrerhaltungen über Lernen und Lehren (teachers` beliefs) maßgeblichen Einfluss auf die Leistungen der Lernenden haben (z.B. Handal, 2003; Pajares, 1992; Thompson, 1992, zitiert bei Sameiske 2006). Peterson und Kollegen (1989, zitiert bei Sameiske 2006) fanden in einer Studie heraus, dass die Leistungen der Lernenden, die von Lehrern unterrichtet wurden, welche ihre Rolle als gemeinsam mit den Schülern aktiv konstruierend empfanden, gegenüber von jenen, die von Lehrern unterrichtet wurden, welche sich als Wissensvermittler und die Lernenden als Wissensempfänger sahen, im Hinblick auf ihre Problemlösungskompetenz signifikant besser waren. Im Alltag des Mathematikunterrichts findet man häufig noch Einstellungen von Lehrenden, nach denen das Lernen von Mathematik zumindest in Teilen als statisches Geschehen gesehen wird. Nach einer derartigen Grundhaltung glaubt man, dass das Gebäude des mathematischen Wissens aufbauend quasi in Form vollständig vermittelbarer Schichten entsteht. Die Lehrenden sind sich dabei der Erfordernis ständiger Restrukturierung überhaupt nicht bewusst. Restrukturierung erfolgt im Kontext mit einem derartigen Unterrichtsverständnis häufig nur unbewusst durch die Lernenden selbst. Im Gegensatz dazu sind Maßnahmen expliziter und kompetent eingesetzter Restrukturierung als Zeichen einer realistischen Sicht auf das Unterrichtsgeschehen zu werten. Vieles ist eben nicht sofort in allen Aspekten verstehbar. Die ständige Konsolidierung des Wissens ist daher eine unumgängliche Notwendigkeit.

Ein Diskussionsbeitrag sei im Zusammenhang mit den grundsätzlichen Haltungen von Lehrenden noch angeführt. Nach meiner Erfahrung sind immer wieder Restrukturierungsmaßnahmen anzutreffen, die auf fragwürdigen Grundpositionen beruhen und das eigentlich Mathematische aushöhlen. Beispiele: Immer wieder sind Restrukturierungen hin zu sinnentleerten mechanischen Vereinfachungen anzutreffen. Leiten Lehrende beispielsweise die Ableitungen verschiedener reeller Funktionen exemplarisch an der Tafel her, verlangen dann aber von den Lernenden in diesem Zusammenhang keinerlei eigentätige Handlungen und bleibt als vereinfachende Konsequenz die rein mechanische Verwendung der Ableitungen nach Formelsammlungen übrig, so kann dies als sinnlose vereinfachende Restrukturierung gesehen werden. Viele Lernende werden so der Chance, durch Eigentätigkeit ein tieferes Verständnis für die Differentialrechnung zu entwickeln, beraubt. Der Vorteil für die Lehrenden ist klar. Man spart Zeit. Lernende sind nun auch ohne tieferes Verständnis scheinbar in der Lage, anspruchsvolle Aufgaben zu lösen. Als weiteres Beispiel für eine fragwürdige Lehrerhaltung möchte ich noch eine Position anführen. Viele Lehrende machen eine Unterscheidung zwischen Denken und Rechnen. Nach ihrer Meinung gibt es Teile von Aufgaben, in denen zu denken und andere, in denen scheinbar nur zu rechnen sei. Sie restrukturieren daher Aufgaben auf diese Art und Weise und behandeln meist nur die „Denkteile" ausführlich, während die „Rechenteile" klar zu sein scheinen. Sie vergessen dabei aber, dass allem vermeintlich Mechanischen in der Mathematik große Vertrautheit mit den entsprechenden Diagrammen vorausgehen muss. Vieles was heute vielleicht mechanisch ablaufen kann, benötigt nach einer längeren Pause bereits wieder Auffrischung und neuerliche „denkende" Beschäftigung. Es funktioniert deshalb auch die rein rezeptive Behandlung der so genannten Rechenregeln nicht. Nur durch gelenkte Eigentätigkeit im Zusammenwirken mit qualifizierten Rückmeldungen lernt man mit den Diagrammen nach den Konventionen der Mathematik umzugehen.

Eine utopisch anmutende Forderung sei an den Schluss des Aufsatzes gestellt. Es ist die Restrukturierung des Mathematikunterrichts und von Teilen der schulischen Bildung im Allgemeinen an Hand der Leitlinien Ikonizität und Diagrammatik. Es ist hier zwar nicht möglich, diese Forderung im Detail zu begründen. Arbeiten wie

Stjernfelt (2007) oder Brunner (2009b) zeigen aber, dass es sich bei Ikonizität und Diagrammatik um Prinzipien handelt, die nicht nur die Mathematik und die Naturwissenschaften generell sondern bis zu einem gewissen Grad auch Fachgebiete wie Musik, Bildende Kunst, Literatur, Wirtschaft u.a. bestimmen. Beispiele: Die Analyse einer Invention von Bach unterscheidet sich, diagrammatisch betrachtet, wenig vom Erkennen des Bildungsgesetzes einer Zahlenfolge oder der Analyse irgendeiner sprachlichen Codierung. Ebenso unterscheidet sich die Erstellung einer polyphonen Komposition nach den Konventionen des Kontrapunkts, wieder diagrammatisch betrachtet, kaum von der Manipulation mit mathematischen Diagrammen nach den dort geltenden Konventionen. Die Vorteile, die die Beschäftigung mit den Prinzipien der Diagrammatik auf breiterer Basis in der Schule mit sich brächte, wären enorm. Würde das so genannte diagrammatische Denken als eine Art Unterrichtsprinzip in Teilen der Schulfächer Einzug halten, so würde es in diesen Bereichen so etwas wie eine gemeinsame strukturelle Sprache geben. Fähigkeiten wie das Erfinden von Diagrammen, die Manipulation mit Diagrammen, das Erkennen von Ikonizität, das Verstehen der Koppelung von Bedeutung an Zeichen, das Beobachten an sich usw. könnten wesentlich zielgerichteter auf einer breiten Basis entwickelt werden.

Literatur

Brunner, M. (2009a): Lernen von Mathematik als Erwerb von Erfahrungen im Umgang mit Zeichen und Diagrammen. In Journal für Mathematik-Didaktik 30(3/4), 206–231

Brunner, M. (2009b): Das Operieren am Ikon. Diagramme in Musik und Mathematik. In: Zeitschrift für Semiotik 31(3/4), 293–323

Davis, M. & Etheridge A. (2006): Louis Bachelier’s Theory of Speculation. Princeton University Press

diSessa, A. & Sherin, B. (2000): Meta-representation: an introduction. In: Journal of Mathematical Behavior 19(4), 385–398

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 27(3/4), 200–219

Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In: Sprache und Zeichen (Hrsg. G. Kadunz). Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Fischbein, E. (1993): The theory of figural concepts. In: Educational studies in mathematics, 24(2), 139–162

Gallin, P. & Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Seelze: Kallmeyer

Hilbert, D. &. Cohn-Vossen, St. (1932): Anschauliche Geometrie. Zweite Auflage 1996. Berlin, Heidelberg, New York: Springer

Hoffmann, M. (2001): Peirces Zeichenbegriff: seine Funktionen, seine phänomenologische Grundlegung und seine Differenzierung. Online verfügbar unter: http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Peirces_Zeichen.html

Hoffmann, M. (2005): Erkenntnisentwicklung, Philosophische Abhandlungen Bd. 90. Frankfurt am Main: Klostermann

Kolmogoroff, A. (1933): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nachdruck 1977. Berlin, Heidelberg, New York: Springer

Nagl, L. (1992): Charles Sanders Peirce. Frankfurt, New York: Campus

Sameiske, St. (2006): Überzeugungen über Lernen und Lehren und Studien zu Methoden, Unterrichtsgestaltung und Lernerfolg. Online verfügbar unter: http://perspektive89.com/blog/steffen_sameiske

Sherin, B. (2000): How students invent representations of motion. A genetic account. In: Journal of Mathematical Behavior 19(4), 339–441

Stjernfelt, F. (2007): Diagrammatology – An Investigation on the Borderlines of Phenomenology, Ontology, and Semiotics. Dordrecht: Springer

Anschrift des Verfassers

Dr. Martin Brunner
Bundesgymnasium Lienz
A-9900 Lienz
e-Mail: brunner.martin1@gmx.at

Eingang Manuskript: 09.07.2010 (überarbeitetes Manuskript: 14.07.2011)