# Logik und Mystik des (entdeckenden) Lernens

von

**Michael Meyer, Dortmund**

**Kurzfassung:** Das eigenständige Erarbeiten mathematischer Zusammenhänge steht im Mittelpunkt vieler didaktischer Prinzipien. Die theoretischen Grundlagen des Entdeckens sind jedoch eher vage und werden in der Regel mit mehrdeutigen Begriffen umschrieben. Es bleibt u. a. unklar, wie es möglich ist, dass Schüler (mathematisches) Wissen selbständig erarbeiten bzw. welcher Grundlagen oder Bedingungen es hierfür bedarf. In diesem Artikel wird mittels der Schlussform Abduktion versucht, den unklaren Bereich des Entdeckens genauer zu fassen und rationale Strukturen im Entdeckungsprozess herauszuarbeiten. Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet eine Unterrichtsszene aus einer vierten Klasse.

**Abstract:** A central element of pedagogical approaches is that students recognize mathematical coherences on their own. The theoretical backgrounds of these processes of discovering are rather vague. Questions arise like: How is it possible that students acquire (mathematical) knowledge on their own? Resp.: What are the conditions for these processes? In this article, abduction is used to describe the processes and outcomes of discovering mathematical coherences by elaborating on their underlying rational structures. The theoretical considerations will be guided by a scene of classroom interaction.

## 1 Einführung

Das eigenständige Entdecken mathematischen Wissens von Schülerinnen und Schülern stellt ein wesentliches Charakteristikum vieler didaktischen Theorien und Prinzipien dar (u. a. entdeckendes Lernen, (neo-)sokratische Methode, Problemlösen). Trotz all der Bedeutung, die dem Entdecken im Rahmen pädagogischer Normvorstellungen zugeschrieben werden kann, bleibt der Kern des Entdeckens, das Entwickeln einer neuen Idee, in der Literatur zumeist vage. Es finden sich in diesem Kontext Begriffe, die theoretisch kaum verständlich sind und ihre suggestive Kraft aus Metaphern und dem Ansprechen subjektiver Erfahrungen gewinnen. Die Vagheit der Begriffe lässt sich zum Beispiel an den von Bruner (1981, S. 16) verwendeten Worten „Neuordnen" und „Transformieren des Gegebenen" erkennen. Häufig werden in diesem Kontext uneindeutige Worte wie „Intuition" genutzt[1]. Die Schwierigkeit einer Definition des Entdeckens bewegt Winter (1989, S.

[1] Für eine ausführliche Diskussion verschiedener Auffassungen von „Intuition" und den Versuch einer Definition dieses Begriffs sei auf Fischbein (1999) verwiesen.

1) zu der Aussage: „Wäre das Entdecken präzis (als außenstehendes Phänomen) beschreibbar, so wäre es maschinell simulierbar, technisch beherrschbar. Da das letztere offenbar nicht möglich ist, bleibt ein irrationaler, ein allenfalls intuitiv fühlbarer Rest von Unaussprechlichem. Das heißt aber nicht, dass man in einen stammelnden Entdeckungsmystifizismus verfallen müsste."

In der neueren mathematikdidaktischen Diskussion finden sich vereinzelt Ansätze, sich mit der *Abduktion* dem Entdecken zu nähern. Mit der Abduktion arbeitete der amerikanische Philosoph Charles Sanders Peirce eine dritte elementare Schlussform neben der Induktion und der Deduktion aus. Innerhalb der Mathematikdidaktik wurde die Abduktion bereits aus verschiedenen Richtungen betrachtet. Beispielsweise thematisiert Hoffmann (1999) die Abduktion aus philosophisch-theoretischer Sicht als die entscheidende Schlussform für die Erkenntnisentwicklung und somit auch als die entscheidende Schlussform für das entdeckende Lernen. Voigt (1984 und 2000) betrachtet zudem die Abduktion als die Schlussform zur Rechtfertigung der Hypothesen innerhalb der interpretativen Unterrichtsforschung. Das Schema der Abduktion wurde von einigen Forschern genutzt, um die Entdeckungen von Schülern[2] zu analysieren. Unter Berufung auf die Theorie der Schlussformen, die Peirce vor Beginn des 20. Jahrhunderts aufstellte, rekonstruieren u. a. Cifarelly (1999), Ferrando (2005), Knipping (2003, S. 131 f.), Loska (1995) und Pedemonte (2007) die Abduktionen von Schülern im Mathematikunterricht hinsichtlich unterschiedlicher Fragestellungen. In Meyer (2007a und b) werden Schüleräußerungen unter Berücksichtigung der späteren Philosophie von Peirce analysiert.

Wie der kurze Literaturüberblick zeigt, wird die Abduktion sowohl aus theoretischer als auch aus empirisch-rekonstruktiver Perspektive als die entscheidende Schlussform beim entdeckenden Lernen angesehen. In diesem Artikel wird nun dargestellt, inwieweit die Abduktion Licht in das Entdecken bringen kann bzw. ob der von Winter beschriebene „allenfalls intuitiv fühlbare Rest von Unaussprechlichem" (s. o.) bestehen bleibt. Dabei wird zwischen der philosophisch-theoretischen Analyse der Entstehung mathematischen Wissens und der Rekonstruktion der logischen Strukturen des Entdeckungsprozesses vermittelt. Es wird zudem diskutiert, ob es auf der Basis der Kenntnis der Abduktion als erkenntniserweiternde Schlussform möglich ist, Entdeckungen zu methodisieren bzw. die Möglichkeit des Entdeckens zu unterstützen. Hinter diesem Vorhaben steht die Frage, inwieweit in dem Entdecken eine Logik zu erkennen ist oder ob eher Begriffe wie „mystische Erleuchtung" oder „mystische Einsicht" (Russel 1952, S. 12 und 25) angebracht sind. Mit anderen Worten: Es wird versucht, basierend auf der Theorie der Abduktion

[2] Auf eine getrennte Nennung der männlichen und weiblichen Form wird in diesem Artikel verzichtet. Das jeweils andere Geschlecht sei stets mitbedacht.

die Grenze zwischen der Logik und der Mystik des Entdeckungsprozesses herauszuarbeiten.

Den Artikel einleitend wird zunächst eine Unterrichtsepisode dargestellt. Nach der sich anschließenden theoretischen Thematisierung der Abduktion erfolgt der Versuch einer Rekonstruktion dieser Unterrichtsszene. Abschließend wird diskutiert, welche Einsichten die Abduktion für ein Verständnis des Entdeckens bringen kann.

## 2 Eine Unterrichtsepisode

Die folgende Unterrichtsszene stammt aus einem Unterrichtsversuch (s. Meyer 2007a, S. 112 ff.) in einer vierten Klasse. Der Unterricht wurde von einem Wissenschaftler durchgeführt. Es handelt sich um die fünfte und somit letzte Stunde des Versuchs. Die Schüler beschäftigten sich zuvor mit Funktionen ohne Bezug zu Brüchen. Sie setzten u. a. Zahlenfolgen fort und ordneten die Verläufe von Graphen diesen Folgen zu. Zu Beginn der fünften Stunde bearbeiteten die Schüler Aufgaben auf einem Arbeitsblatt. Bei den ersten beiden, hier nicht abgebildeten Aufgaben des Arbeitsblattes sollten die Schüler zunächst Bruchteile von Zahlen bestimmen (eine Aufgabenstellung lautete beispielsweise: „Ein Viertel von 20 Stücken sind □“). Anschließend musste ein Bruchteil zu einer Zahl hinzugefügt oder weggenommen werden (s. Abb. 1).

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe merkten die Schüler schnell, dass die Startzahlen der dritten Aufgabe den Ergebnissen der vierten Aufgabe entsprechen. Sowohl arbeitsökonomische als auch tiefergehende mathematische Deutungen ließen sich rekonstruieren. Zum Beispiel erläuterte Simon[3]: „bei, ehm der vierten Aufgabe ist das halt umgekehrt, dass da dann die 80 steht und da die 100. (*zeigt auf die Werte bei Aufgabe 4*) .. konnte man auch abgucken.“ Einen Grund, warum dies so sei, äußerte der Schüler nicht. Das Phänomen verbleibt somit auf der Wahrnehmungsebene und wird nicht weitergehend erklärt.

David äußerte sich folgendermaßen: „aber weil bei bei Fünftel verkleinern ist es um ein Viertel, und bei bei der Aufgabe 3 ist es hier bei Aufgabe 4 genau um ein Viertel größer– (das ist ja?) fünf mal das Teil. also ist ja hier das Fünfte.“ Im Gegensatz zu Simon gibt David eine Erklärung für das von ihm beobachtete Phänomen an. Wie aber ist David zu seiner tiefergehenden mathematischen „Ausgleichvorstellung“ gekommen? Er könnte ein Viertel zu einer fiktiven Größe bzw. Zahl hinzugefügt und so erkannt haben, dass sich nun insgesamt fünf der vorherigen Viertel ergeben („fünf mal das Teil“). Dieses fünfte „Teil“ müsste in der vierten Aufgabe als Fünftel wieder abgezogen werden. Der Vergleich zwischen der Start-

[3] Bei allen Namen handelt es sich um Pseudonyme. Im Anhang dieses Artikels finden sich die verwendeten Transkriptionsregeln.

und der Ergebniszahl würde dann zeigen, dass sich wieder die anfängliche Anzahl der „Viertel“ ergibt (eine ausführlichere Analyse der hier verkürzt dargestellten Unterrichtsszene findet sich in Meyer 2007, S. 173 ff.).

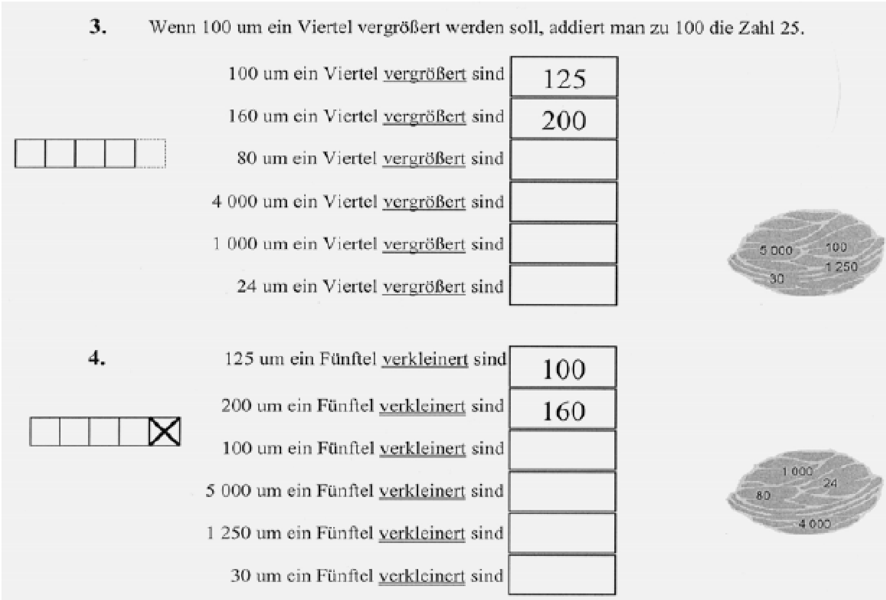


Abb. 1: Ausschnitt aus dem Arbeitsblatt[4]

Einige Schüler sahen also in der Möglichkeit des Abschreibens eine Vereinfachung des Lösungsprozesses, ohne nach tiefergehenden (mathematischen) Zusammenhängen zu suchen. Andere hingegen führten Gründe an, warum das gleiche Ergebnis bei den Aufgaben herauskommen muss. Im Anschluss an diese Aufgabe schrieb der Lehrer die folgende Aufgabe an die Tafel (Abb. 2).

> Eine Tafel Schokolade wird um ein Viertel vergrößert. Dann wird diese größere Tafel um ein Viertel verkleinert.

Abb. 2: Die Schokoladenaufgabe

[4] In den „Nüssen“ auf der rechten Seite des Arbeitsblattes sind – leider schlecht erkennbar – die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben ungeordnet eingetragen.

Die „Schokoladenaufgabe“ stellt eine Weiterführung des Arbeitsblattes dar. Dort war es bei jeder einzelnen Rechenaufgabe noch möglich, sich den Bruch als ein feststehendes empirisches Stück eines fixen Ganzen vorzustellen. Die Schokoladenaufgabe erfordert eine Betrachtung des Bruches als Operator, der innerhalb einer Aufgabe auf verschiedene Grundgesamtheiten angewandt wird. Auch bei dem Arbeitsblatt hatte der Bruch die Funktion eines Operators (z. B.: „ein Viertel von 100“) und es änderte sich von Zeile zu Zeile die Bezugsgröße. Bei der Schokoladenaufgabe liegt jetzt ein Problem darin, dass der Operator zweimal hintereinander verwendet wird. Mit anderen Worten: Die Verkettung (Hintereinanderausführung) zweier Operatoren wird thematisch.

Ein Problem der Schokoladenaufgabe stellt die Bedeutung des Ausdrucks „um ein Viertel verkleinert“ dar. Es bleibt auf der sprachlichen Ebene unklar, ob hiermit das zuvor hinzugefügte Viertel oder ein Viertel von der bereits vergrößerten Schokolade gemeint ist. Dies ist einerseits als begriffliches Problem und andererseits als Sprachproblem zu sehen.[5]

Nachdem der Lehrer die Aufgabe an die Tafel geschrieben hatte, setzt folgendes Gespräch ein:

| | |
|---|---|
| David | ja ist genauso wie am Anfang. |
| L | so, David (*auffordernde Handbewegung zu David*) .. du hast eben was gesagt |
| David | dann ist die Tafel doch wieder wie beim Anfang. .. |
| L | wer ist der Meinung, dass David Recht hat– die Tafel ist dann wieder wie am Anfang’ |
| David | ich nicht ich nicht |
| L | (*lächelnd*) doch nicht’, also dann sag noch mal David |
| David | soll ich es an der Tafel machen’ |

Innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne ändert der Schüler seine Meinung. Während er zunächst von einer unveränderten Tafel überzeugt zu sein scheint, plädiert er im Folgenden für eine verkleinerte Schokolade:

| | |
|---|---|
| David | (*läuft zur Schultafel*) die Tafel Schokolade … *(zeichnet ein Viereck)* ein Teil, ein Teil, (*unterteilt dabei das gezeichnete Viereck und zählt die letzten Stücke mit Hilfe des Fingers ab*) drei vier. jetzt um ein Viertel vergrößert, ist sie so groß (*fügt ein weiteres Kästchen dran*) |

5 Das Verständnis dieses Ausdrucks ist für den mathematischen Experten naheliegend, denn er hat gelernt, eine Bedeutung hineinzusehen. An dieser Stelle könnte entsprechend gefordert werden, dass Schülern Aufgabenstellungen auch so interpretieren (lernen) sollten, wie der Mathematiker sie sehen würde. Dieser Punkt wird hier jedoch nicht weiter thematisiert.

| | |
|---|---|
| L | so machen wir das vielleicht auch mal gestrichelt damit man sieht, was das Viertel da– |
| David | (..) (*beginnt die Trennstriche zu entfernen*) |
| L | halt (*spricht schnell*) halt halt halt +, lass mal erst mal stehen (*zeichnet Striche nach*) |
| David | stimmt doch |
| L | ja .. aber ich will damit das jeder– das so erkennt, das ist so gestrichelt ne', das ist dann hinzugekommen das Viertel (*strichelt das hinzugekommene Stück der Schokolade*) .. und jetzt sag es mal nur wie du es meinst. .. |
| David | wie– kann ich es jetzt zeigen oder nicht' |
| L | versuche es mal mit nur in Worten zu sagen, damit wir nicht alles so (*deutet in Richtung der Zeichnung*) durcheinander– (*lächelnd*) dann zeichne es, dann zeichne es |
| David | ehm ist ja die Schokolade jetzt wieder normal groß (*wischt die Unterteilungen weg*), aber– |
| L | das ist ja jetzt die größere Tafel ne' |
| David | nein jetzt kommen ja wieder normale Stücke dabei. (*unterteilt die vergrößerte Schokoladentafel in Viertel*) |
| Ss | hä' |
| David | eins zwei ... drei vier. (*zählt die neuen Stücke mit Hilfe der Finger ab*) jetzt stehen ja keine 5– eben waren es ja 5 Teile jetzt sind ja wieder nur 4 Teile .. |
| L | Aha |
| David | hier abgemacht dann ist sie ja kleiner als vorher. (*deutet auf den rechten Unterteilungsstrich*) |
| L | streich es durch |
| David | ist sie kleiner als vorher. |
| L | streich es durch was abgemacht wird. .. |
| David | ja, jetzt ist sie kleiner als vorher. (*streicht dabei das letzte Viertel durch*) das ist so (*zeigt mit seinen Händen die Breite der neuen Schokolade*) (größere?) am Anfang war sie so groß (*deutet die Größe der Anfangstafel an*) .. jetzt ist sie so (*zeigt wiederum die Breite der neuen Schokoladentafel*) |

David ändert innerhalb einer kurzen Zeitspanne seine Meinung. Wie aber könnte der Schüler nun zu der Entdeckung gekommen sein, die ihn dann zu seiner – aus mathematischer Sicht richtigen – Lösung führte? Diese Frage wird im weiteren Verlauf mittels der Abduktion zu beantworten versucht. Insbesondere wird der Frage nachgegangen, inwiefern Entdeckungen wie die von David auf der Grundlage dieser Theorie methodisierbar sind und welcher Voraussetzungen es für eine Aufgabe bedarf, damit die Wahrscheinlichkeit für Entdeckungen seitens der Schüler nicht allzu gering ist. Zunächst erfordert dies eine Thematisierung der theoretischen Grundlage für die Analyse.

# 3 Deduktion, Induktion, Abduktion

In diesem Abschnitt werden die drei Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion vorgestellt. Hierbei wird u. a. gezeigt, dass nur mittels der Abduktion eine differenzierte Betrachtung des Entdeckens möglich ist. Die Abduktion und insbesondere ihre schematische Darstellung wird dann zur Analyse der Unterrichtsszene angewendet.

## 3.1 Deduktion

Als Deduktion bezeichnet man den Schluss von einem Fall und einem gegebenen Gesetz zu einem Resultat (Abb. 3).

| | |
|---|---|
| Fall: | $F(x_0)$ |
| Gesetz: | $\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$ |
| Resultat: | $R(x_0)$ |

Abb. 3: Die Deduktion[6]

Wenn ein Schüler weiß, was der Ausdruck „um ein Viertel verkleinern“ bedeutet, könnte er bei der Bearbeitung der dritten Aufgabe auf dem Arbeitsblatt (s. Abb. 1) folgende Deduktion vollziehen:

[6] Es handelt sich bei diesem Schluss um eine Deduktion im „Modus ponens“ und somit um eine spezielle Form der Deduktion. Der Grund für die Reduktion liegt darin, dass in diesem Beitrag nicht die verschiedenen Formen der Deduktion dargestellt werden sollen, sondern vielmehr die grundsätzlichen Unterschiede zwischen den Schlussformen. Für eine ausführliche Analyse von Deduktionen sei etwa auf Buth (1996) verwiesen. Diese formale Darstellung der Deduktion schränkt die Universalität dieser Schlussform ein. Der Vorteil liegt darin, dass fast alle Sätze der Schulmathematik auf die obige Form des Gesetzes gebracht werden können, wenn man bedenkt, dass Äquivalenzaussagen Kombinationen von Implikationen sind. Der Grundbereich des Gesetzes soll sich auf eine Grundmenge beziehen, die zumeist unendlich ist. Dagegen steht die Darstellung $x_0$ für ein Element dieser Grundmenge oder für eine endliche Teilmenge der Grundmenge oder für eine Klasse von Elementen der Grundmenge.

| | |
|---|---|
| Fall: | 80 soll um ein Viertel vergrößert werden. |
| Gesetz: | Wenn eine Zahl um ein Viertel vergrößert werden soll, dann teilt man diese Zahl durch 4 und addiert das Ergebnis zu der Zahl |
| Resultat: | $80:4=20$ und $80+20=100$ |

Abb. 4: Eine mögliche Deduktion zur Bearbeitung des Arbeitsblattes (s. Abb. 1)

Betrachtet man Mathematik als ein fertiges Produkt (zum Beispiel die Darstellung in Lehrwerken für die Hochschule), so stellt die Deduktion die entscheidende Schlussform dar. Allerdings eignet sie sich nicht, um die Entdeckung mathematischer Zusammenhänge zu beschreiben: Die Prämissen (der Fall und das Gesetz) dieser Schlussform stellen (Voraus-)Setzungen dar, die bei richtiger Anwendung zu einer denknotwendigen Konklusion (dem Resultat) führen. Die Prämissen werden gesetzt und müssen zuvor bekannt und gegeben sein. Entsprechend kann mittels der Betrachtung der Schlussform Deduktion nicht die Frage beantwortet werden, wie wir zu diesen Prämissen kommen. Das ermittelte Resultat ist zudem bereits in dem Konsequenz (dem „dann-Teil“) des Gesetzes enthalten. Da das Gesetz bereits bekannt ist, enthält das hiermit ermittelte Resultat keine Informationen, die über den Erkenntnisgehalt des Gesetzes hinausgehen.

Der Deduktion kommt beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge nur eine sekundäre Bedeutung zu: Sie kann zur Erarbeitung der Phänomene führen, die den Prozess der Entdeckung auslösen. Welcher Art diese Phänomene sein müssen, wird weiter unten ausgeführt.

Bei der Schokoladenaufgabe liegen die Voraussetzungen zur deduktiven Bearbeitung nicht vor: Die Schüler wussten aus ihrem bisherigen Unterricht nicht, dass der Bruchteil auf verschiedene Grundgesamtheiten angewendet werden muss. Denn weder nannte der Lehrer eine entsprechende Regelmäßigkeit bzw. ein entsprechendes Gesetz noch zeigt das Ergebnis der vom Lehrer initiierten Abstimmung unter den Schülern, dass ein anzuwendendes Gesetz im Horizont der Betrachtungen der Schüler der Klasse liegt. Die Schüler müssen zur Lösung der Schokoladenaufgabe also ein neues Gesetz bilden. Die Bildung von Gesetzen ist jedoch mittels Deduktionen nicht möglich. Entsprechend muss David seine Lösung auf einem anderen Weg gewonnen haben.

### 3.2 Induktion

Bei der Induktion handelt es sich um den Schluss von einem gegebenen Fall und einem gegebenen Resultat zu einem Gesetz (Abb. 5).

| | |
|---|---|
| Fall: | $F(x_0)$ |
| Resultat: | $R(x_0)$ |
| Gesetz: | $\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$ |

Abb. 5: Die Induktion

Die Funktionen, die der Induktion im Forschungsprozess zugeschrieben werden, sind vielfältig. Eine Auffassung ist, dass mittels dieser Schlussform neue Gesetze generiert werden (wie es das Schema der Induktion nahe legt). Eine genauere Analyse des Schemas hilft jedoch, diese Auffassung zu widerlegen. Denn um das Gesetz aus Fall und Resultat schließen zu können, bedarf es der Kenntnis des Zusammenhangs zwischen diesen beiden Prämissen. Betrachten wir hierzu ein sehr bekanntes Beispiel: Die Beobachtung einer endlichen Anzahl weißer Schwäne führe zu der Vermutung, dass alle Schwäne weiß sind (Abb. 6).

| | |
|---|---|
| Fall: | Diese Tiere sind Schwäne. |
| Resultat: | Diese Tiere sind weiß. |
| Gesetz: | Alle Schwäne sind weiß. |

Abb. 6: Eine Induktion zum Schwanbeispiel

Diese Auffassung der Induktion lässt die Frage offen, wie wir zu der Erkenntnis gelangen, dass die Eigenschaft von beobachteten Tieren „Schwäne zu sein“ und deren Eigenschaft „weiß zu sein“ zusammenhängen könnten. Die Unterstellung eines potentiellen Zusammenhangs ist jedoch zentral, denn sonst würden wir die beiden Eigenschaften nicht zu einem Gesetz verbinden. Entsprechend muss die Erkennen von möglichen Zusammenhängen bereits vor der Durchführung einer Induktion geschehen.

Die Betrachtung der Abduktion wird zeigen, dass das Erkennen solcher Zusammenhänge abduktiv erfolgt und dass mit dem Erkennen dieses Zusammenhangs die hypothetische Unterstellung eines verbindenden Gesetzes bereits einhergeht. Entsprechend dieser theoretischen Betrachtung hilft die Abduktion und nicht die Induktion Prozesse des Generierens neuer Erkenntnisse – und somit auch das, was unter dem Wort „Induktionsprinzip“ (u. a. in der Formulierung „was dreimal gilt, das gilt immer“) zu fassen ist – differenzierter zu betrachten.

Der Nutzen einer Induktion besteht darin, dass man hiermit bereits vorhandene Gesetze überprüfen kann. Der (schematische) Schluss auf das Gesetz ist dabei nur als eine Bestätigung (oder Widerlegung) desselben anzusehen[7]. Die folgende Rekonstruktion zeigt, wie man Simons Äußerung nicht nur als Darstellung, sondern auch als Bestätigung eines zuvor erkannten Zusammenhanges auffassen kann. Nehmen wir an, Simon hat an den ersten beiden Rechnungen u. a. den folgenden Zusammenhang erkannt: Die Ausgangszahlen von Aufgabe 4 wiederholen die Rechenergebnisse von Aufgabe 3. Deduktiv könnte Simon nun darauf schließen, dass entsprechend dieses Zusammenhangs bei der Ausgangszahl „80“ in Aufgabe 3 als Ergebnis „100“ erscheinen muss (dies wäre das Resultat einer „vorausschauenden“ Deduktion). Würde Simon dieses Ergebnis nur hinschreiben, bliebe es bei einer Anwendung des zuvor erkannten Zusammenhanges, es käme nicht zu dessen Prüfung. Wenn Simon nun jedoch die auf dem Arbeitsblatt geforderte Rechnung (zum Beispiel mittels der Deduktion in Abb. 4) durchführt, dann würde die folgende Induktion stattfinden (Abb. 7).

| | |
|---|---|
| Fall: | Die Startzahl in Aufgabe 3 ist „80“. |
| Resultat: | Das *ausgerechnete* Ergebnis in Aufgabe 3 ist „100“, die Startzahl von Aufgabe 4. |
| Gesetz: | Die Ausgangszahlen von Aufgabe 4 wiederholen die Rechenergebnisse von Aufgabe 3 (die Bestätigung des den Erkenntnisschritt einleitenden Zusammenhanges). |

Abb. 7: Eine mögliche Induktion zu Simons Bearbeitung des Arbeitsblattes

### 3.3 Abduktion

Die *Abduktion* wurde von Charles Sanders Peirce (1839-1914) als dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion ausgearbeitet und für die wissenschaftliche Debatte bereitgestellt. Peirce beschreibt die „perfectly definite logical form“ (CP 5.189) der Abduktion folgendermaßen (Abb. 8).

---

[7] Eine ausführlichere theoretische Betrachtung der Induktion und die Rekonstruktion von empirischen Überprüfungen von Hypothesen durch Schüler mittels des Schemas der Induktion erfolgen in Meyer (2007a und b). (Induktive) Überprüfungen von Hypothesen wurden auch von Polya unter der Bezeichnung „plausibles Schließen“ schematisch dargestellt: „Die Verifizierung einer neuen Konsequenz zählt umso mehr, je verschiedener die neue Konsequenz von der bereits verifizierten ist.“ (Polya 1963, S. 18).

| |
|---|
| „The surprising fact, C, is observed;“<br>„But if A were true, C would be a matter of course“<br>„Hence, there is a reason to suspect that A is true.“ |

Abb. 8: Die Beschreibung der Abduktion nach Peirce (CP 5.189, ca. 1903)

Zwischen dem beobachteten Phänomen C und dessen Erklärung A setzt Peirce einen vermittelnden Satz („But if A were true, C would be a matter of course“), der selbst nicht die Form eines allgemeinen Gesetzes hat. In einer früheren Auffassung von Abduktion (damals unter dem Begriff „Hypothesis“) verwendet Peirce ein Gesetz („rule“, s. CP 2.619ff). Auch Hempel und Oppenheim fordern, dass eine wissenschaftliche Erklärung zumindest ein allgemeines Gesetz enthalten und sich die Beobachtung rein logisch aus der Erklärung ergeben muss (s. Stegmüller 1976, S. 452). Zusammenfassend entsteht folgendes Schema der Abduktion (Abb. 9):

| | |
|---|---|
| Resultat | $R(x_0)$ |
| Gesetz: | $\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$ |
| Fall: | $F(x_0)$ |

Abb. 9: Die allgemeine Form der Abduktion[8]

Eine Abduktion beginnt mit der Beobachtung eines überraschenden Phänomens. Ein Phänomen ist dabei eine Kombination aus einem konkreten Subjekt ($x_0$) und einem Prädikat $R$. Ausgehend hiervon wird ein Fall ermittelt, der möglicherweise ursächlich für das konkret beobachtete Phänomen war. Im Fall wird das Prädikat $F$ wieder auf das konkrete Phänomen ($x_0$) übertragen. Um den Fall zu ermitteln bedarf es der Unterstellung eines allgemeinen Gesetzes. Das Gesetz stellt eine „allgemeine Verbindung“ zwischen Resultat und Fall her. Wenn beispielsweise das konkret beobachtete Subjekt ($x_0$) die Zahl 2 ist, dann wird im Gesetz auf beliebige (nicht notwendig nur natürliche) Zahlen verallgemeinert (vgl. Fußnote zu Abb. 3).

Betrachten wir zunächst ein Beispiel für eine Abduktion: Sherlock Holmes sieht Gartenerde neben einer Leiche liegen. Dieses Phänomen könnte damit erklärt werden, dass der Gärtner der ermordeten Person den Mord verübt hat. Die Erläuterung

8 In der Literatur finden sich viele andere Schemata der Abduktion (zusammengefasst in Schurz 2009). Das obige Schema hat sich bei den empirischen Analysen von Schüleräußerungen (Meyer 2007a und b) und bei der Arbeit mit Studierenden als brauchbar erwiesen.

dieser Vermutung für Dr. Watson könnte die folgende Abduktion öffentlich werden lassen (Abb. 10):

| | |
|---|---|
| Resultat | Neben der Leiche liegt Gartenerde. |
| Gesetz: | Wenn ein leichtsinniger Gärtner nach der Arbeit einen Mord verübt, dann hinterlässt er Spuren von der Gartenarbeit am Tatort. |
| Fall: | Der Gärtner des Toten könnte der Mörder sein. |

Abb. 10: Eine Abduktion von Sherlock Holmes

Die Abduktion ermöglicht es also, eine Erklärung ausgehend von beobachteten Phänomenen zu finden. Diese Erklärung hat natürlich nur den Rang einer Hypothese. Im Beispiel von Sherlock Holmes könnte auch ein anderer Täter durch den Garten gekommen sein und den Mord verübt haben. Auch wäre es möglich, dass der Fund von Gartenerde nichts mit dem Mordfall zu tun hat. Wäre der Gärtner des Nachbarn der Mörder, so hätte mit dem gleichen Gesetz ein anderer Fall erschlossen werden müssen. Wäre es jedoch eine andere Person oder läge die Gartenerde nur zufällig am Tatort, so hätte ein anderes Gesetz zur Klärung des beobachteten Phänomens angewendet werden müssen. Die Abduktion ist nur ein hypothetischer Schluss, aber gleichzeitig ist sie die einzige Schlussform, die uns die Generierung neuer Erkenntnisse ermöglicht:

„The only thing that induction accomplishes is to determine the value of a quantity. It sets out with a theory and it measures the degree of concordance of that theory with fact. It never can originate any idea whatever. No more can deduction. All the ideas of science come to it by the way of Abduction. " (CP 5.145)[9]

---

9 Peirce fasst in seinen späteren Schriften den Begriff der Abduktion weiter, als bisher dargestellt wurde: Neben dem bisher beschriebenen Finden von Erklärungen für beobachtete Phänomene fasst er hierunter auch die Wahrnehmung von Dingen. Denn wir nehmen Dinge nicht als solche wahr, sondern ihre Erscheinungsform. Ausgehend von dieser Erscheinungsform ordnen wir sie einer Kategorie zu, zu der sie möglicherweise gehören. Der Unterschied zwischen der Abduktion zur Wahrnehmung und der Abduktion zur Erklärung von Sachverhalten besteht darin, dass wir bei der Wahrnehmung Subjekte (z. B.: einen Schwan) mit Prädikaten (z. B.: weiß sein) verbinden und somit zu einem Urteil (z. B.: der Schwan ist weiß) kommen. Bei der Abduktion zur Erklärung von Sachverhalten verbinden wir hingegen zwei Urteile (Phänomene und unterstelltes Gesetz) so, dass sie zu einem weiteren Urteil führen. Zwar spielt die Abduktion zur Wahrnehmung etwa zur Feststellung des Resultats auch für mathematische Entdeckungen eine Rolle, dennoch wird im folgenden Text hierauf nicht weiter eingegangen (für eine genauere Darstellung s. Apel, 1975, S. 301ff).

# 4 Davids Erkenntnisprozess

Versucht man zunächst, Davids öffentliche Aussage zu rekonstruieren, so kann sich ein mehrschrittiges Argument, bestehend aus insgesamt fünf Deduktionen, ergeben: Zunächst vergrößert David die Tafel um ein Viertel. Die anschließende Unterteilung der Tafel bedarf einer neuen Einteilung, die David in einem zweiten Schritt anspricht. Nachdem die vergrößerte Tafel in Viertel unterteilt ist (Schritt 3), kann das geforderte Viertel abgezogen werden (Schritt 4). Im letzten Schritt vergleicht David nun die Start- mit der Endtafel und stellt fest, dass letztere kleiner als die anfängliche Schokoladentafel ist (eine ausführlichere Rekonstruktion des Arguments erfolgt in Meyer 2007, S. 186 ff.).

Das öffentliche Argument Davids geht von der Erkenntnis aus, die Schokolade müsse neu eingeteilt werden. Wie David auf diese Idee kommt, lässt sich mittels der Argumentanalyse nicht weiter rekonstruieren. Im Folgenden werden daher mögliche Interpretationen angeführt, die zeigen, wie David von seiner anfänglichen Lösung abgewichen sein könnte.

## 4.1 Davids Erkenntnisprozess – erste Interpretation

Versucht man Davids Erkenntnis interaktionistisch zu deuten, so könnte man einen Anhaltspunkt für die Änderung von Davids Meinung in der Äußerung des Lehrers suchen. Dieser stimmt der ersten Lösung des Schülers nicht sofort zu: „wer ist der Meinung, dass David Recht hat– die Tafel ist dann wieder wie am Anfang'". Würde dies den Ausgangspunkt für Davids Erkenntnisprozess bilden, so könnte folgende Abduktion rekonstruiert werden (Abb. 11):

| | |
|---|---|
| Resultat | Der Lehrer akzeptiert die Lösung nicht sofort. |
| Gesetz: | Wenn eine Lösung falsch ist, dann akzeptiert der Lehrer sie nicht. |
| Fall: | Die Lösung (Starttafel = Endtafel) ist falsch. |

Abb. 11: Davids „soziale" Abduktion

Im Schulalltag lassen sich derartige Abduktionen häufig beobachten: Gerade bei einer vermeintlich einfachen Aufgabe mag es Schülern auffällig erscheinen, dass der Lehrer eine Lösung nicht sofort akzeptiert. Eine fehlerhafte Lösung wäre eine mögliche Erklärung für das Verhalten des Lehrers.

Alternativ könnte der Schüler auch überlegt haben, welche Auswirkung die Veränderungen der Aufgabenstellung auf eine fiktive Tafel Schokolade mit einer konkreten Anzahl an Stücken haben würde. Wenn der Schüler dann bei der konkreten

Rechnung eine sich verändernde Grundgesamtheit (implizit) berücksichtigt, hätte er erkennen können, dass seine anfängliche Lösung nicht korrekt ist. Diese Möglichkeit wird hier aber nicht weiter verfolgt.

Unabhängig davon, welchen Weg der Schüler gegangen sein mag, könnte er nach einem Grund dafür gesucht haben, weshalb die Tafel Schokolade nicht ihre alte Größe zurückerlangt. Hier wäre nun die folgende Abduktion denkbar (Abb. 12):

| | |
|---|---|
| Resultat | Die Lösung „Starttafel = Endtafel“ ist falsch. |
| Gesetz: | Etwas, das aus $5 \cdot (4+1)$ gleichen Teilen besteht, muss um ein Fünftel verkleinert werden, damit sich wieder das Alte, aus 4 Teilen Bestehende ergibt. |
| Fall: | Die vergrößerte Tafel besteht aus 5 gleichen Teilen und wird um ein Viertel verkleinert. |

Abb. 12: Davids zweite Abduktion

Mittels dieser Abduktion könnte David nun den Grund für die sich verändernde Größe der Schokoladentafel erkannt haben: Die vergrößerte Tafel besteht aus fünf und nicht mehr vier Teilen.

### 4.2 Davids Erkenntnisprozess – zweite und dritte Interpretation

Die oben dargestellte Deutung stellt nur eine mögliche, grobe Interpretation von Davids Erkenntnisprozess dar. Denn sie zeigt beispielsweise nicht, auf Grund welcher Informationen David zu seiner Abduktion (s. Abb. 12) gekommen ist. Einen möglichen Ansatzpunkt hierzu bildet das Arbeitsblatt, welches direkt zuvor im Unterricht behandelt wurde (s. Abb. 1). Hier wurden gegebene Zahlen zunächst um ein Viertel vergrößert und anschließend um ein Fünftel verkleinert. Das Endergebnis entsprach jeweils der anfänglichen Zahl. Die Rekonstruktion eines entsprechenden Analogieschlusses kann zu folgender Abduktion führen (Abb. 13):

| | |
|---|---|
| Resultat: | Auf Arbeitsblatt F wurden die um ein Viertel vergrößerten Zahlen um den „5. Teil“ verkleinert. |
| Gesetz: | Was in der Geometrie für Flächen gilt, gilt in der Arithmetik auch für Zahlen. |
| Fall: | Das hinzugekommene Viertel der Tafel ist ein geometrisches Fünftel der vergrößerten Tafel. |

Abb. 13: Davids Analogieschluss zur Schokoladenaufgabe (zweite Interpretation)

Ausgehend von seiner Erfahrung mit den Veränderungen auf dem Arbeitsblatt könnte David die Analogie zur Schokoladenaufgabe erkannt haben. Während diese Interpretation nicht abhängig von der „sozialen“ Abduktion (s. Abb. 11) ist, könnte die soziale Abduktion jedoch auch den Ausgangspunkt für einen möglichen Analogieschluss bilden (Abb. 14):

| | |
|---|---|
| Resultat: | Die Starttafel ist nicht gleich der Endtafel. |
| Gesetz: | Was in der Arithmetik für Zahlen gilt, gilt in der Geometrie für Flächen. |
| Fall: | Die Vergrößerung einer Zahl um ein Viertel wurde durch die Verkleinerung um ein Fünftel rückgängig gemacht. |

Abb. 14: Davids (zweiter) Analogieschluss zur Schokoladenaufgabe (dritte Interpretation)

In diesem Abschnitt konnten verschiedene Erkenntnisprozesse des Schülers David rekonstruiert werden. Mehrfach wurden alternative Beobachtungen etc. angeführt, die den Schüler zur Korrektur seiner anfänglichen Lösung geführt haben könnten. Nach Oevermann u. a. (1979) stellen die rekonstruierten Abduktionen „latente Sinnstrukturen“ dar, die aus dem Kontext der Unterrichtsszene heraus rekonstruiert werden können. Um zu erkennen, welche Sinnstruktur derjenigen von David entspricht, bedarf es zusätzlicher Informationen. Da der Schüler seine Lösung zwar begründet, jedoch keine Informationen zu deren Entstehungsprozess gibt (auch im weiteren, hier nicht dokumentierten Verlauf der Unterrichtsszene), bleibt sein individueller Gedankenprozess letztlich im Dunkeln. Dieses Vorgehen – die Lösung eines Problems zu begründen, anstatt den Weg zur Entdeckung darzustellen, ist in der Mathematik nicht untypisch: „Er macht es wie der Fuchs, der seine Spuren im Sande mit dem Schwanz auslöscht“ (Abel über Gauss, zitiert nach Meschkowski 1990, S. 116). Welchen Erkenntnisweg der Schüler in der konkreten Szene gegangen ist, kann also nicht identifiziert werden. Alternative Erkenntnisprozesse könnten ebenso plausibel sein, wie eine Mischung aus den rekonstruierten Abduktionen. Die Analyse zeigt also, dass die individuellen, mystischen ‚Geistesblitze' mittels des Schemas der Abduktion nicht rekonstruiert werden können – auch wenn die Abduktion die entscheidende Schlussform für die Hypothesengenerierung ist.

## 5 Die Abduktion – Generierung und Plausibilisierung

Entscheidend für das Verständnis der Abduktion ist, dass das Gesetz nicht einfach vorgegeben ist. So mag Sherlock Holmes das Gesetz seiner Abduktion (s. Abb. 10) wohl zuvor gekannt haben, aber im Gegensatz zur beobachteten Gartenerde ist dieses nicht vorgeben und kann somit nicht als Prämisse für die (kognitive) Durchführung der Abduktion gedient haben. Vielmehr wird das Gesetz zur Ermittlung eines ursächlichen, das Phänomen erklärenden Falls lediglich unterstellt. Zudem ist der Fall bereits in allgemeiner Form in der Bedingung des Gesetzes enthalten. Wenn also das Gesetz bei einer Abduktion bewusst ist, dann ist auch der Fall bewusst. Peirce schreibt zu seinem Schema (Abb. 8):

> „Thus, A cannot be abductively inferred, or if you prefer the expression, cannot be abductively conjectured until its entire content is already present in the premiss, ‚If A were true, C would be a matter of course.'" (CP 5.189)

Entsprechend wird der Fall nicht in der Form eines ‚naiven Umkehrschlusses' ausgehend von Resultat und Gesetz erschlossen. Andererseits kann der Fall jedoch nur mittels des Gesetzes ermittelt werden. Die Abduktion beginnt also nur mit einer sicheren Prämisse, dem beobachteten Phänomen, von dem ausgehend Gesetz und Fall gleichzeitig ermittelt werden (s. auch Eco 1985, S. 295). Sobald das Gesetz bewusst ist, erscheint das Phänomen als eine konkrete Folgerung dieses Gesetzes und erhält somit seinen ‚logischen Status' als Resultat.

Das Schema der Abduktion in Abb. 9 gibt also nicht den Gedankengang desjenigen wieder, der eine Abduktion vollzieht, sondern verdeutlicht vielmehr die Rationalität der öffentlichen Darstellung einer Abduktion: Die Plausibilisierung einer Hypothese. Der ‚Geistesblitz' (das gleichzeitige „Erkennen" von Gesetz und Fall) lässt sich hingegen wie folgt schematisch darstellen (Abb. 15):

| | |
|---|---|
| Phänomen (Resultat): | $R(x_0)$ |
| Gesetz: | $\forall x : F(x) \Rightarrow R(x)$ |
| Fall: | $F(x_0)$ |

Abb. 15: Schema der kognitiven Generierung einer Abduktion

Das Schema in Abb. 9 zeigt somit natürlich nur die Rationalität des ‚Geistesblitzes' aus nachträglicher Sicht. Es erklärt nicht, wie wir zu einer Entdeckung kommen, welche Irrwege[10] wir zuvor gegangen sind, welche sozialen Einflüsse eine Rolle gespielt haben könnten usf. Mit anderen Worten: Das Schema verdeutlicht nur den Teil des (kognitiven) Entdeckungsprozesses, der öffentlich wird – unabhängig davon, ob die Erkenntnis hiermit tatsächlich gewonnen wurde oder ob die öffentliche Darstellung nur ein Produkt ist, das erst auf der Basis der Erkenntnis erkannt wurde und anschließend dargestellt wird, weil es zum Beispiel eleganter erscheint als der Weg zur Entdeckung. Da nur die öffentliche Äußerung zur Entwicklung des Themas (s. Neth und Voigt 1991) im Unterricht und somit zum Lernen der gesamten Klasse beiträgt, kann an dieser Stelle auch dafür argumentiert werden, dass die Betrachtung der öffentlichen Äußerung die entscheidende ist.

Betrachten wir nun die Interpretationen zur Äußerung Davids eingehender: Bei der ersten Interpretation des Erkenntnisprozesses wird in der zweiten Abduktion (s. Abb. 12) ein Gesetz benutzt, das die Schüler zuvor nicht kannten. Dies liegt vorrangig daran, dass es sich hierbei um ein sehr spezielles Gesetz handelt. Solche Abduktionen, mittels derer nicht nur ein neuer Fall, sondern auch ein neues Gesetz gebildet wird, bezeichnet Eco als „kreativ" (1985, S. 301; nach Bonfantini und Proni 1985, S. 201). Auch existieren hierfür die Bezeichnungen „innovatorische Abduktion" (Habermas 1968, S. 147f) und „terminogene Abduktion" (Eberhard 1999, S. 138).

Bei den beiden letzten rekonstruierten Abduktionen zur Äußerung Davids (Abb. 13 und 14) wird im Gesetz der Wechsel zwischen den „subjektiven Erfahrungsbereichen" (Bauersfeld 1983) „Zahlen" und „Flächen" deutlich. Die Leistung des Schülers würde entsprechend darin liegen, diese Bereiche – und somit die Schokoladenaufgabe mit der zuvor behandelten Aufgabe – zu verbinden. In der Grundschule werden häufig Zahlenverhältnisse geometrisch veranschaulicht, wodurch den Schülern vergleichbare Gesetze bekannt sein könnten. Mittels dieser Abduktionen wird somit (vermutlich) kein neues Gesetz geschaffen, sondern vielmehr ein bekanntes Gesetz zu dem gegebenen Phänomen assoziiert. Habermas (1968, S. 147 f.) bezeichnet diesen Typ von Abduktion als „explanatorisch", Eberhard (1999, S. 138) als „subsumierend". Eco (1985, S. 299 f.; nach Bonfantini und Proni 1985, S. 201) unterscheidet je nach der Codiertheit des Gesetzes zwischen „übercodierten" und „untercodierten" Abduktionen. Betrachten wir hierzu das Beispiel Davids: Während in der Grundschule häufig die geometrische Veranschaulichung von Zahlenverhältnissen erfolgt, bedarf es zur Lösung der Schokoladenaufgabe jedoch einer Umkehrung: Die Geometrie muss mit Einsichten in Zahlen verbunden werden.

---

[10] Diese Irrwege basieren zwar auf Abduktionen, jedoch lassen sich diese ohne den Prozess des öffentlichen Rechtfertigens einer Hypothese nicht rekonstruieren.

Für den Mathematikexperten mag dieses Vorgehen quasi ‚auf der Hand liegen'. Für einen Schüler der Grundschule wäre eine solche Assoziation des Gesetzes zumindest kein vertrauter Vorgang. Wenn die Assoziation des bekannten Gesetzes auf der Hand liegt, so bezeichnet Eco (1985, S. 299 f.) die Abduktion als „übercodiert". Bei „untercodierten Abduktionen" (ebd., S. 300) ist die (vermeintliche) Sicherheit der Assoziation nicht gegeben. Vielmehr muss nun das Gesetz aus einer Vielzahl bekannter Gesetze als das plausibelste ausgewählt werden.

Die Unterscheidungen Ecos bieten die Möglichkeit, das Entdecken genauer zu fassen. Denn während sich untercodierte und kreative Abduktionen als Entdeckungen bezeichnen lassen, ist dies bei übercodierten Abduktionen kaum möglich. Die empirische Rekonstruktion (Meyer 2007a) von Abduktionen zeigte jedoch, dass auch übercodierte Abduktionen eine große kognitive Leistung beanspruchen können, wenn das Gesetz zwar leicht zu assoziieren, der Fall aber nicht leicht als Fall eines Gesetzes zu erkennen ist. Um den hiermit verbundenen kognitiven Anspruch auch begrifflich fassen zu können, wurde der Begriff „untercodierte Abduktion" erweitert und hierunter solche Abduktionen gefasst, bei denen entweder das Gesetz nicht leicht zu dem beobachteten Phänomen zu assoziieren ist oder bei denen der Fall nicht leicht als Fall des Gesetzes zu erkennen ist. Entsprechend dieser Beschreibung bedarf es für das Entdecken also Abduktionen, bei denen

a) das Gesetz neu generiert werden muss oder
b) das bekannte Gesetz nicht leicht zu dem beobachteten Phänomen zu assoziieren ist oder
c) bei dem der Fall nicht leicht als Fall des Gesetzes zu verstehen ist.

Beim entdeckenden Lernen kann somit sowohl ein (konkreter) Fall als auch ein (allgemeines) Gesetz neu gebildet werden. Entsprechen können sowohl der Fall als auch das Gesetz hypothetischen Charakter besitzen. Unabhängig vom Typ der Abduktion wird zudem die Zuordnung eines Gesetzes zu einem Phänomen, welches dann als Resultat des Gesetzes erscheint, entdeckt. Mit einer einzelnen Entdeckung können entsprechend bis zu drei Hypothesen einhergehen.

Die Abduktion – betrachtet als kognitiver Prozess, bei dem Gesetz und Fall quasi gleichsam „erscheinen" – bedarf nur einer einzigen Prämisse, dem beobachteten Phänomen. Ausgehend von dieser Beobachtung werden Gesetz und Fall quasi gleichzeitig gebildet bzw. assoziiert. Entsprechend bleibt die Frage offen, wie wir (bzw. David) zu einer neuen Erkenntnis kommen. Rescher schreibt eindrucksvoll:

> „[…] an evolutionary model of random trial and error with respect to possible hypotheses just cannot operate adequately within the actual (or perhaps even any possible) timespan." (ebd. 1995, S. 321)

Bei Peirce findet sich zur Beantwortung der Frage, warum wir mit unseren Ideen so häufig „ins Schwarze treffen“, eine Mischung von „objektivem Idealismus“ und „Realismus“ (s. Nagl 1992, S. 117):

> „[…] every reasoning involves another reasoning, which in its turn involves another, and so on *ad infinitum*. Every reasoning connects something that has just been learned with knowledge already acquired so that we thereby learn what has been unknown. It is thus that the present is so welded to what is just past to render what is just coming about inevitable. The consciousness of the present, as the boundary between past and future, involves them both. Reasoning is a new experience which involves something old and something hitherto unknown.“ (CP 7.536)

Das Vollziehen einer sinnvollen Abduktion setzt also voraus, dass der Forscher Kenntnisse in dem betreffenden Bereich hat. Hoffmann (u. a. 2003, S. 305) bezeichnet dieses Wissen auch als „implizites Wissen“.

> „The abductive suggestion comes to us like a flash. It is an act of *insight*, although of extremely fallible insight. It is true that the different elements of the hypothesis were in our minds before; but it is the idea of putting together what we had never before dreamed of putting together which flashes the new suggestion before our contemplation.“ (CP 5.181)

Bei der Generierung einer neuen Idee setzen wir einen Sachverhalt (das beobachtete Phänomen) zunächst als gegeben voraus. Unsere kognitive Leistung ermöglicht es uns, diesen Sachverhalt, der aus ontologischer Sicht bereits an sich ein solcher ist, für uns zu erkennen. Wir setzen hierzu Ideen unseres Hintergrundwissens zusammen und kreieren auf diese Weise neue Ideen, die einen Anhalt an der Wirklichkeit finden.

Die Notwendigkeit des Hintergrundwissens zeigt wiederum, dass „[…] quite new conceptions cannot be obtained from abduction“ (CP 5.190). Die Abduktion ermöglicht also keine „creatio ex nihilo“ (s. Hoffmann 1999, S. 288 f.). Vielmehr bedarf es zum Bilden neuer (zunächst nur hypothetischer) Ideen solcher Phänomene, welche Schüler als Resultate bekannter oder neu zu bildender Gesetze erkennen können.

Der Wahl der Phänomene kommt somit eine bedeutende Rolle bei der Generierung neuen Wissens zu. Auch wenn mathematische Phänomene Schüler nicht notwendig überraschen mögen, so ist doch die Erklärungsbedürftigkeit dieser Phänomene entscheidend:

> „Was wir wissen wollen, wollen wir aus einem bestimmten Grunde wissen. Der Grund ist der, daß es eine Lücke, ein Loch oder einen freien Raum in unserem Verständnis der Dinge, das heißt in dem gedachten Bild der Welt, gibt. […] Und wenn die Lücke in unserem Verständnis ausgefüllt ist, fühlen wir uns angenehm erleichtert und zufrieden. Die Dinge wurden wieder verständlich oder sind jedenfalls verständlicher geworden.“ (Holt 1971, S. 176f)

Die erklärungsbedürftigen Phänomene stellen also eine Lücke in unserem Verständnis dar. Es handelt sich um eine Abweichung von der Normalität, die den kognitiven Konflikt (Piaget) bedingt. Diese Lücke gilt es, mittels Abduktion zu schließen:

> „Hence, if a given phenomenon looks strange, this only means that the theoretical framework used to interpret this phenomenon must be revisited! The revisiting cognitive process is labelled *abduction*, and its aim is to ‚normalize' anomalies." (Andreewsky 2000, S. 839)

Wenn der Lernende mittels der tentativen Unterstellung einer Regelmäßigkeit eine Erklärung für das beobachtete Phänomen gefunden hat (bzw. die „Lücke" in seinem Verständnis geschlossen hat), dann ist das so erlangte Wissen zunächst subjektiv. Erst die Veröffentlichung des ‚Geistesblitzes' erlaubt, das subjektive Wissen zu verobjektivieren und somit analysierbar zu machen.

Die empirische Rekonstruktion von Abduktionen (Meyer 2007a) hat gezeigt, dass die semantischen Felder zwischen dem Resultat einer Abduktion und dessen erklärenden Fall bei kreativen Abduktionen zumeist sehr nahe beieinander lagen. Die neuen Gesetze entsprachen also häufig einer tentativen Verallgemeinerung eines leicht erkennbaren Zusammenhangs. Tiefergehende Abduktionen, also solche Abduktionen, mit denen tiefere Einsichten in mathematische Zusammenhänge gewonnen wurden, vollzogen in der Regel solche Schüler, die sich auch in einem Mathematikunterricht durch gute Leistungen auszeichneten, der nicht vorrangig auf Entdeckungen ausgelegt war.

Bisher wurde festgestellt, dass nur die Abduktion eine differenzierte, inferentielle Betrachtung der Generierung neuen Wissens ermöglicht. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um einen logischen Schluss im herkömmlichen Sinn: Neue Elemente als Prämissen genügen den Anforderungen der mathematisch-formalen Logik nicht. Das neue Element (das Gesetz) wird versuchsweise zur Klärung der Phänomene angeführt. Es bleibt offen, warum gerade ein bestimmtes Gesetz bzw. ein bestimmter Fall zur Erklärung der beobachteten Phänomene herangezogen oder gebildet wurde. Das Entstehen einer Abduktionen vollzieht sich vielmehr unvermittelt, quasi „blitzartig". Diese Unvermitteltheit methodisch unter Kontrolle zu bringen, ist nicht möglich – sowohl im schulischen Mathematikunterricht, als auch im Forschungsprozess eines Wissenschaftlers. Beck und Jungwirth (1999, S. 249) drücken dies für den Forschungsprozess wie folgt aus:

> „Die Abduktion darf man nun jedoch nicht als Anleitung für die Bildung von Deutungshypothesen auffassen. Sie charakterisiert nur formal die Hypothesengenerierung, stellt aber selbst keine Methodologie dar. […] Zufall, Intuition oder Spekulation spielen bei jedem Verfahren eine gewisse Rolle, zumal es sich in der Regel um sogenanntes Kunstlehren handelt; dies widerspricht aber keinesfalls dem Prinzip der Abduktion."

Entdeckungen lassen sich zwar nicht methodisieren, jedoch lassen sich in der Literatur Strategien finden, wie die Entstehung von Entdeckungen forciert werden kann. Peirce selbst beschreibt zwei Strategien, die sich dazu eignen sollen, den Prozess der Generierung neuer Erkenntnisse anzuregen. Konstitutiv für die *erste Strategie* ist ein Zustand höherer Anspannung, von „[…] echtem Zweifel oder Unsicherheit oder Angst oder großem Handlungsdruck […]“ (Reichertz 2003, S. 85). Dieser Zustand soll durch vom Datenmaterial ausgelöste Zweifel entstehen. Gleichsam auf Detektivarbeit versucht man durch angestrengtes Nachdenken das Eintreten des Geistesblitzes zu begünstigen. Innerhalb der Mathematikdidaktik spricht zum Beispiel Krauthausen von einer „Forscherhaltung“, welche die Schüler einnehmen sollen, um

> „[…] in bislang unerschlossenes Gelände vorzudringen, die Gegebenheiten zu sondieren, Dinge experimentell auszuprobieren und zu sehen, was sich ergeben mag. Sollte etwas nicht gelingen, dann kann er [der Schüler, M. M.] prüfen, woran es gelegen haben, was man übernehmen und was man im weiteren Vorgehen verändern mag.“ (ebd. 1994, S. 16f)

Die *zweite Strategie* stellt nahezu das Gegenteil der ersten dar. Obwohl der rational arbeitende Verstand ständig mit den gegebenen Fakten umgeben ist, soll er so weit wie möglich ausgeschaltet werden. Um es mit den poetischen Worten von Peirce zu sagen:

> „‚Enter your skiff of Musement, push off into the lake of thought, and leave the breath of heaven to swell your sail. With your eyes open, awake to what is about or within you, and open conversation with yourself; for such is all meditation.’ It is, however, not a conversation in words alone, but is illustrated, like a lecture, with diagrams and with experience.” (CP 6.461)

Auch wenn diese Haltungen den abduktiven Prozess anregen können, so scheint ihre Übertragbarkeit auf den Schulunterricht nicht problemlos zu sein. Zum einen bedarf es einer vielfach noch zu entwickelnden forschenden Einstellung. Es kann kaum davon ausgegangen werden, dass sich jeder Schüler Sherlock Holmes imitierend auf Spurensuche begibt und nicht der Auflösung durch (Besser-)Wissende harrt. Zum anderen setzt das „Musement“ voraus, dass sich der Schüler (wenn auch passiv) mit den Fakten beschäftigt und nicht durch sonstige Aktivitäten abgelenkt ist. Der vage zu beschreibende Zustand eines ‚freien Gedankenspiels’ könnte von Schülern auch missverstanden werden.

## 6 Fazit und Ausblick

Ausgehend von den Analysen der späten Philosophie von Peirce, die beschreiben, dass die drei Schlussformen Abduktion, Deduktion und Induktion die einzigen elementaren Schlussformen seien (CP 2.774), wurde in diesem Artikel die Abduktion als zentrale Schlussform für das Entdecken mathematischer Zusammenhänge herausgestellt. Die Rekonstruktionen von Entdeckungen mittels des Schemas der Abduktion können die Rationalität des öffentlichen Entdeckungsprozesses aufzeigen, indem sie beispielsweise implizite Gesetze oder Fälle der Schüler aufzeigen können. Der kognitive Prozess beim Erkennen mathematischer Zusammenhänge (der „Geistesblitz“) bleibt hingegen der Mystik überlassen. Denn die rekonstruierte Rationalität muss natürlich nicht der Rationalität des Schülers entsprechen, der den mathematischen Zusammenhang veröffentlicht. Die Prozesse des (kognitiven) Generierens und des Explizierens von Vermutungen sind zwei unterschiedliche Prozesse. Explizierte Vermutungen lassen sich analysieren.

Die Nicht-Methodisierbarkeit des Geistesblitzes beschränkt den Einflussbereich des Lehrers erheblich. Er kann den Prozess des Entdeckens nur durch die „Prämisse des Entdeckens“ forcieren: die Schaffung von Phänomenen, welche die Schüler mittels einer Abduktion als Folgerungen der zu generierenden oder assoziierenden Gesetze erkennen und somit erklären können. Die konkreten Phänomene müssen den Schülern entweder direkt vorgegeben sein oder zumindest von ihm leicht erarbeitbar bzw. herleitbar sein. Diese notwendige Voraussetzung für das Entdecken macht deutlich, dass mathematische Zusammenhänge nicht „von einem (platonischen Ideen-)Himmel“ fallen, sondern in einem gewissen Rahmen provozierbar sind.

In verschiedenen Projekten wurde die Nutzbarkeit der hier dargestellten Theorie für die mathematikdidaktische Forschung und Theorieentwicklung aufgezeigt: In Meyer (2007a) werden Schüleräußerungen rekonstruiert. Hierbei wird u. a. gezeigt, dass die Mehrdeutigkeit sowohl von Aufgabenstellungen, als auch von Äußerungen (sowohl hinsichtlich der Darstellung einer Hypothese als auch hinsichtlich der logischen Zusammenhänge zwischen dem Entdecken und Begründen) ein entscheidendes und nutzbares Charakteristikum entdeckenden Lernens ist. Die Analysen ergeben zudem, dass der kognitive Anspruch, der mit dem Vollziehen einer Abduktion verbunden ist, sich nur unzureichend mittels der Unterscheidung von untercodierten, übercodierten und kreativen Abduktionen fassen lässt. Die semantischen Felder zwischen dem zu Erklärenden und dem Erklärenden können selbst bei kreativen Abduktionen nahe beieinander liegen, so dass das neue Gesetz der tentativen Verallgemeinerung der leicht erkennbaren Zusammenhangs von Resultat und Fall entspricht.

Ebenso wie Schüler beim entdeckenden Lernen Abduktionen vollziehen, nutzt der Forscher diese Schlussform, um rationale Strukturen in den Schüleräußerungen zu erkennen. Während sich jedoch für den Schüler die Möglichkeit eines deduktiven Beweises der zunächst hypothetischen Erkenntnis bietet, ist die Erkenntnissicherung des Interpreten auf empirische Erkenntniswege (im Zusammenspiel von Deduktion und Induktion) beschränkt.

Die Nutzbarkeit des Abduktionsschemas wurde zudem bei der Analyse von Schulbüchern aufgezeigt (s. Meyer und Voigt 2009). Mittels der Schlussformen wurden Aufgaben in Schulbüchern analysiert, anhand derer ein neuer mathematischer Satz entdeckt werden soll. Hierbei wurden verschiedene Optionen zur Entdeckung und Prüfung mathematischer Sätze herausgearbeitet und hinsichtlich der potentiellen Überzeugungskraft unterschieden, die diese Aufgaben dem zu entdeckenden bzw. zu überprüfenden Satz zukommen lassen können. U. a. konnte herausgearbeitet werden, wie es möglich ist, das Entdecken und Begründen mathematischer Zusammenhänge miteinander zu verbinden und bereits vor dem Entdecken eines Zusammenhangs (bzw. eines mathematischen Satzes) eine (zunächst latente) Beweisidee für diesen Zusammenhang zu gewinnen.

Trotz all der Einsichten, welche die Abduktion in den vagen Bereich des Entdeckens bringt, verhilft sie nicht, das (kognitive) Entdecken zu entmystifizieren. Der von Winter unterstellte „allenfalls intuitiv fühlbare Rest von Unaussprechlichem" bleibt weiterhin bestehen. Die Abduktion macht jedoch deutlich, dass das Generieren einer Entdeckung kein blindes Raten ist, sondern zu einem gewissen Grad logisch analysierbar ist:

„Nein, nein, ich rate nie. Raten ist eine abscheuliche Angewohnheit; es zerstört die Fähigkeit, logisch zu denken." (Sherlock Holmes; Doyle 2005, S. 15)

**Literatur**

Andreewsky, E. (2000): Abduction in language interpretation and law making. In: Kybernetes, 29(7/8), S. 836–845.

Apel, K.-O. (1975): Der Denkweg von Charles S. Peirce – Eine Einführung in den amerikanischen Pragmatismus. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Bauersfeld, H. (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik. Köln: Aulis, S. 1–56.

Beck, C. und H. Jungwirth (1999): Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, 20(4), S. 231–259.

Bonfantini, M. und G. Proni (1985): Raten oder nicht raten? In: Eco, U. und T.A. Sebeok (Hrsg.): Der Zirkel oder im Zeichen der Drei – Dupin, Holmes, Peirce. München: Fink, S. 180–202.

Bruner, J.S. (1981): Der Akt der Entdeckung. In Neber, H. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen. 3. Auflage. Weinheim: Beltz, S. 15–29. (Original: The act of discovery. Harvard Educ. Rev. 1961, 31, S. 21–32)

Buth, M. (1996): Einführung in die formale Logik unter der besonderen Fragestellung: Was ist die Wahrheit allein aufgrund der Form. Frankfurt: Lang.

Cifarelli, V. (1999): Abductive Inference: Connection between problem posing and problem solving. In: O. Zaslavsky (Hrsg.): Proceedings of PME XXIII, Haifa, Band 2, S. 217–224.

Doyle, A.C. (2005): Das Zeichen der Vier. Zürich: Klein & Aber.

Eberhard, K. (1999): Einführung in die Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. Geschichte und Praxis der konkurrierenden Erkenntniswege. 2. Auflage. Stuttgart: Kohlhammer.

Eco, U. (1985): Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In: Eco, U. und T.A. Sebeok (Hrsg.): Der Zirkel oder im Zeichen der Drei – Dupin, Holmes, Peirce. München: Fink, S. 288–320.

Ferrando, E. (2005): Abductive processes in conjecturing and proving. Ph.D. thesis, Lafayette: Purdue University.

Fischbein, E. (1999): Intuition and schemata in mathematical reasoning. In: Educational studies in mathematics, 38, S. 11–50.

Habermas, J. (1968): Erkenntnis und Interesse. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Hoffmann, M. (1999): Problems with Peirce's concept of abduction. In: Foundations of Science, 4(3), S. 271–305.

Hoffmann, M. (2002): Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. Dresden: Philosophische Fakultät der Technischen Universität.

Hoffmann, M. (2003): „Entdeckendes Lernen" – semiotisch gefasst. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 305–308.

Holt, J. (1971): Wie Kinder lernen. Weinheim: Beltz.

Knipping, Ch. (2003): Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Hildesheim: Franzbecker.

Krauthausen, G. (1994): Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern: Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verlag.

Loska, R. (1995): Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons sokratische Methode der Gesprächsführung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Nagl, L. (1992): Charles Sanders Peirce. Frankfurt a.M.: Campus Verlag.

Oevermann, U.; T. Allert; E. Konau und J. Krambeck (1979): Die Methodologie einer objektiven Hermeneutik und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In: Soeffner, H.G. (Hrsg.): Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften. Stuttgart: Metzler, S. 352–432.

Meschkowski, H. (1990): Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Erw. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Meyer, M. (2007a): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. (2007b): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 28(3/4), S. 286–310.

Meyer, M. (2008): Das Entdecken einer Entdeckung. Die Abduktion als Forschungsgegenstand und -logik. In: Jungwirth, H. und Krummheuer, G. (Hrsg.): Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Band 2. Münster: Waxmann.

Meyer, M. und J. Voigt (2009): Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. In: mathematica didactica, 32, S. 31–66.

Neth, A. und J. Voigt (1991): Lebensweltliche Inszenierungen. Die Aushandlung schulmathematischer Bedeutung an Sachaufgaben. In: Maier, H. und J. Voigt (Hrsg.): Interpretative Unterrichtsforschung. Köln: Aulis, S. 79–116.

Pedemonte, B. (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analysed? In: Educational studies in mathematics, 66, S. 23–41.

Peirce, Ch. S., CP: Collected Papers of Charles Sanders Peirce (Band I-VI hrsg. von C. Hartshorne und P. Weiß, 1931-1935, Band VII-VIII hrsg. von A.W. Burks 1985),

Cambridge: Harvard University Press (Zitiert wird hierbei nach der üblichen Form: *w.xyz* – *w* gibt dabei die Bandnummer, *xyz* die Nummer des Paragraphen an).
Polya, G. (1963): Mathematik und plausibles Schließen. Band 2: Typen und Strukturen plausibler Folgerung. Basel: Birkhäuser.
Reichertz, J. (2003): Die Abduktion in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske und Budrich.
Rescher, N. (1995): Peirce on abduction, plausibility, and the efficiency of scientific inquiry. In: Rescher, N. (Hrsg.): Essays in the History of Philosophy. Aldershot: Avebury, S. 309–326.
Russel, B. (1952): Mystik und Logik. Wien: Humboldt Verlag.
Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim: Beltz.
Voigt, J. (2000): Abduktion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, S. 694–697.

## Anhang: Transkriptionsregeln

### 1 Linguistische Zeichen

1.1 Identifizierung des Sprechers:

L Lehrkraft

Ss mehrere nicht identifizierte Schüler zugleich

1.2 Charakterisierung der Äußerungsfolge

Ein Strich vor mehreren Äußerungen:
Untereinander Geschriebenes wurde jeweils gleichzeitig gesagt, z.B.

M | aber dann
F | wieso denn

### 2 Paralinguistische Zeichen

| | |
|---|---|
| , | kurzes Absetzen innerhalb einer Äußerung, max. eine Sekunde |
| .. | kurze Pause, max. zwei Sekunden |
| ... | mittlere Pause, max. drei Sekunden |
| genau. | Senken der Stimme am Ende eines Wortes oder einer Äußerung |
| und du– | Stimme in der Schwebe am Ende eines Wortes oder einer Äußerung |
| was’ | Heben der Stimme, Angabe am Ende des entsprechenden Wortes |
| <u>sicher</u> | auffällige Betonung |

### 3 Weitere Charakterisierungen

| | |
|---|---|
| (*lauter*), (*leiser*), u.ä. | Charakterisierung von Tonfall und Sprechweise |
| (*zeigen*), u.ä. | Charakterisierung von Mimik und Gestik |
| (*Gemurmel*), (*Ruhe*), u.ä. | Charakterisierung von atmosphärischen Anteilen |

Die Charakterisierung steht vor der entsprechenden Stelle und gilt bis zum Äußerungsende, zu einer neuen Charakterisierung oder bis zu einem „+“.

| | |
|---|---|
| (..), (...), (? *4 sec*) | undeutliche Äußerung von 2, 3 oder mehr Sekunden |
| (mal?) | undeutliche, aber vermutete Äußerung |

**Anschrift des Verfassers**

Dr. Michael Meyer
Technische Universität Dormund, IEEM
44227 Dortmund
e-Mail: michael.meyer@math.uni-dortmund.de

Eingang Manuskript: 16.07.2008 (überarbeitetes Manuskript: 19.02.2010)