

Das Pizzatheorem

Ein Thema mit Variationen

von

Wolfgang Kroll, Marburg & Joachim Jäger, Saarbrücken

Hans Schupp zum 75. Geburtstag gewidmet

Kurzfassung: Ein Pizzamesser besteht aus n sich in gleichen Winkelabständen kreuzenden Klingen. Problem: Kann man eine mit einem solchen Messer zerlegte Pizza gerecht unter zwei Leuten aufteilen, wenn das Zentrum des Messers nicht auf den Pizzamittelpunkt gesetzt wird? Das Pizzatheorem beantwortet die Frage. Das Problem wird mit Methoden der Analysis und der synthetischen Geometrie in vielen Variationen diskutiert. Dabei zeigt sich, dass das Problem und seine Lösungen ein beachtliches didaktisches Potential besitzen. Vorschläge für eine Behandlung im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II werden erarbeitet.

Abstract: The article deals with the so-called Pizza Theorem: A pizza is divided into $2n$ equiangular pieces by a symmetric pizza knife with n crossing blades. The problem: a fair fifty-fifty partition of the pizza, where each of two persons gets n pieces, but on condition that the center of the knife does not meet the center of the pizza. The problem and a lot of its variations are being solved and discussed with methods of calculus and geometry. It has a rich didactic potential. Suggestions for lessons in lower and upper secondary level of mathematical education are submitted.

Einleitung

Im Mai 1967 wurde im *Mathematics Magazine* eine Aufgabe gestellt, die eine überraschende Aussage darüber macht, wie man die Fläche eines Kreises halbieren kann, ohne Schnitte durch seinen Mittelpunkt zu legen. In der mathematischen Literatur spricht man mittlerweile vom *Pizzatheorem*, weil es folgende Einkleidung nahe legt:

Eine kreisrunde Pizza ohne Schnitte durch den Mittelpunkt gerecht zu teilen, so dass jede von zwei Personen genau die Hälfte bekommt, erscheint unmöglich. Es gelingt aber mit einem geeigneten „Messer“. Ein solches Messer ist ähnlich wie ein Tortenteiler beschaffen. Acht Klingen oder Schneiden sind kreisförmig an einer Achse in gleichem Winkelabstand von einander befestigt und bilden den „Pizzaschneider“. Dieser wird wie eine Stanze auf die Pizza aufgesetzt, (wobei der Kreu-

zungspunkt irgendwo im Innern des Kreises oder sogar ganz am Rande liegen darf), und nach unten durchgedrückt. Wenn sich nun jede der beiden Personen abwechselnd, im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt herum, ein Stückchen nach dem andern nimmt, dann haben schließlich beide genau eine halbe Pizza auf ihrem Teller.

Das Problem wurde im Laufe der folgenden Zeit nicht nur auf verschiedene Weisen gelöst, sondern auch substantiell verallgemeinert (vgl. die in [Mabry 2009] angegebene Literatur). Wir sind hier jedoch nicht ausschließlich an den Lösungen interessiert, sondern vor allem am didaktischen Potential der überaus reizvollen Fragestellung. Denn das Thema „Zerschneiden einer Fläche“ besitzt vielfältige Aspekte, von einfach bis kompliziert, und lässt sich in vielfacher Weise variieren, so wie es Hans Schupp schon am Beispiel des Quadrats eindrucksvoll vorgeführt hat (vgl. [Schupp 2002, 99 ff.]). Bevor wir jedoch näher darauf eingehen, sollen die möglichen Lösungen und einige Varianten vorgestellt werden. Wir beginnen dabei mit der wichtigsten Methode.

1 Lösung mit Hilfe der Analysis

Jeder, der zum ersten Mal vor dem Problem steht, wird vermutlich daran zweifeln, dass es in seiner vollen Allgemeinheit geometrisch lösbar ist. Dagegen bieten sich die Methoden der Analysis an, da mit ihr Flächeninhalte relativ bequem allgemein bestimmt werden können. Wir legen Polarkoordinaten zu Grunde und berechnen zunächst r als Funktion des Drehwinkels t , gemessen von der Polarachse aus (Abbildung 1).

Die Polarachse sei durch MP festgelegt. Dass sie in Abbildung 1 waagrecht gezeichnet ist, ist ohne Belang. Im Dreieck MPU fällen wir von M das Lot (Länge h) auf die Gerade PU und erhalten nach einander

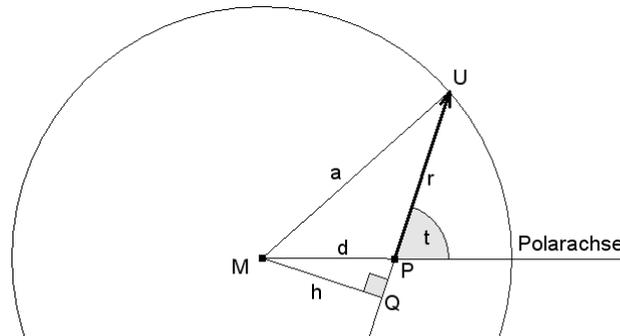


Abb. 1: Berechnung des Sektorinhalts mit Polarkoordinaten

$$h = d \sin t, |QP| = d \cos t, |QU| = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}$$

und schließlich

$$r = |QU| - |QP| = \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t} - d \cos t = f(t). \quad (1)$$

Diese Funktion gilt nicht nur für die hier gewählte spezielle Lage der Punkte, sondern allgemein. Der Nachweis bringt keine neue Erkenntnis; wir übergehen ihn daher.

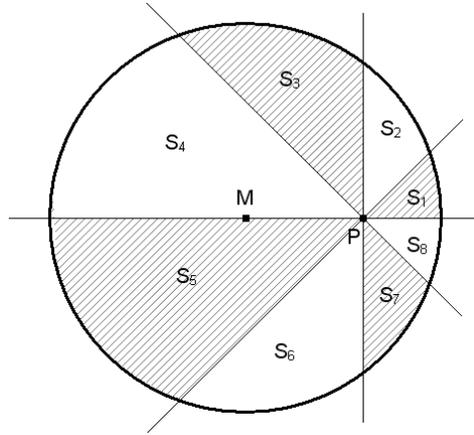


Abb. 2: Sektornummerierung

Abbildung 2 zeigt die Aufteilung in und die Nummerierung der Sektoren. Der Berechnung ihres Flächeninhalts legen wir die bekannte „Leibnizsche Sektorformel“ (für eine Herleitung siehe z. B. [Schupp 1995, 122]) zu Grunde:

$$A_{\text{Sektor}} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (f(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2 dt$$

Mit

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} d^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) - d \cos t \cdot \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} d^2 \cos 2t - d \cos t \cdot \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

gilt dann

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t) dt, \quad S_3 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt, \quad S_5 = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} g(t) dt, \quad S_7 = \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} g(t) dt,$$

und die markierte Fläche in Abbildung 2 hat den Inhalt

$$S = S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} g(t) dt + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} g(t) dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} g(t) dt. \quad (2)$$

Da sich die Integralgrenzen jeweils um $\pi/2$ vergrößern, liegt es nahe, eine entsprechende Variablentransformation vorzunehmen, beim zweiten Integral also $s = t - \pi/2$, beim dritten $s = t - \pi$ und beim vierten $s = t - 3\pi/2$ zu setzen. Dann laufen alle Integrale von 0 bis $\pi/4$ und die Integranden lassen sich zusammenfassen:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t + \pi) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(g(t) + g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + g(t + \pi) + g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) \right) dt \end{aligned}$$

Aufgrund der Verschiebungsformeln der trigonometrischen Funktionen ist zu erwarten, dass sich der Integrand vereinfachen lässt. Danach gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos t, & \sin(t + \pi) &= -\sin t, & \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) &= -\cos t, \\ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t, & \cos(t + \pi) &= -\cos t, & \cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin t. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}d^2 \cos 2t + d \cdot \sin t \cdot \sqrt{a^2 - d^2 \cos^2 t}, \\ g(t + \pi) &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}d^2 \cos 2t + d \cdot \cos t \cdot \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}, \\ g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}d^2 \cos 2t - d \cdot \sin t \cdot \sqrt{a^2 - d^2 \cos^2 t} \end{aligned}$$

und somit

$$g(t) + g(t + \pi) = a^2 + d^2 \cos 2t, \quad g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = a^2 - d^2 \cos 2t,$$

also

$$g(t) + g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + g(t + \pi) + g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = 2a^2. \quad (3)$$

Also ist der Flächeninhalt der in Abbildung 2 gestrichelten Fläche

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 dt = \frac{1}{2} a^2 \pi \quad (4)$$

halb so groß wie der Kreis, und die schraffierten Sektoren sind zusammen genauso groß wie die nicht schraffierten. Das ist die Lösung des Pizzaproblems.

Im Rückblick erkennen wir: Die explizite Berechnung der trigonometrischen Integrale ist gar nicht nötig (wenngleich möglich). Hätte man sie durchgeführt, so hätten sich die Vereinfachung durch Zusammenfassen zu einem späteren Zeitpunkt ergeben. Entscheidend ist, dass bei der Zusammenfassung $S_1 + S_5$ bzw. $S_3 + S_7$, also von gegenüber liegenden Sektoren, sich der komplizierte Wurzelterm heraushebt.

2 Ein (fast) rechnungsfreier Beweis und eine überraschende Verallgemeinerung

Wie wir oben gesehen haben, beruht der dort geführte Beweis wesentlich auf der Tatsache, dass

$$g(t) + g\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + g(t + \pi) + g\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = 2a^2$$

ist. Um das einzusehen, bedarf es jedoch keiner Rechnung. Abbildung 3 zeigt eine „Momentaufnahme“ der Situation, in der das schwarze Pfeilkreuz die Positionen der sich drehenden (und dabei in der Länge ändernden) Radien beschreibt, wenn sie die jeweils zusammengehörigen Sektoren gleichzeitig durchlaufen. Dabei bilden sie, ausgehend von ihrer Anfangsposition, stets rechte Winkel mit einander.

Nach dem Satz von Pythagoras ist daher

$$r_1^2 + r_2^2 = |U_1 U_2|^2 \quad \text{und} \quad r_3^2 + r_4^2 = |U_3 U_4|^2,$$

und wenn wir noch den Durchmesser $U_2 U_2'$ zeichnen, sieht man, dass das Dreieck $U_2 U_2' U_1$ rechtwinklig ist (Satz des Thales). Also ist $U_2' U_4$ parallel zu $U_1 U_3$ und daher (Achsensymmetrie des Kreises)

$$|U_3 U_4| = |U_1 U_2'|.$$

Mit dem Satz des Pythagoras, jetzt angewandt auf das Dreieck $U_2 U_2' U_1$, folgt dann

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 4a^2,$$

also

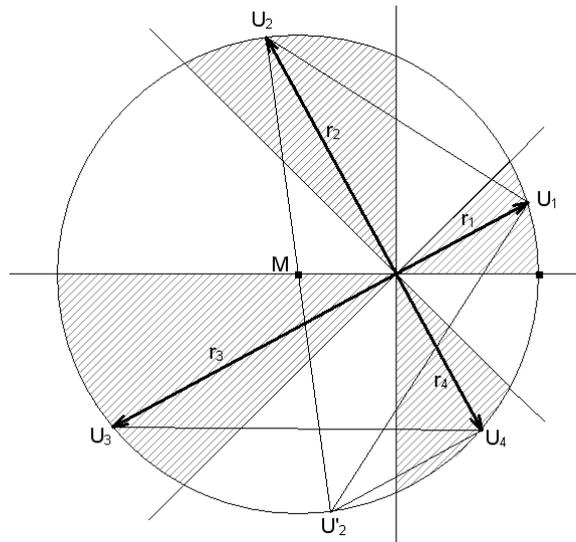


Abb. 3: Geometrische Berechnung der Summe der Radiusquadrate

$$S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) dt = \frac{1}{2} a^2 \pi.$$

Damit aber nicht genug! In der Pizzaaufgabe beginnt man mit zwei zueinander senkrecht stehenden Messern, die den Kreis in 4 Segmente teilen. Dann nimmt man zwei weitere Messer (als „Winkelhalbierende“) hinzu, die jeden der 4 Sektoren in 2 Sektoren teilen. Was geschieht, wenn wir jeden der 4 Sektoren nun statt in 2 allgemein in n Sektoren teilen? Diese Sektoren haben bei P Winkel vom Maß $\pi/2n$. Genau die gleiche Rechnung würde dann bei entsprechender Nummerierung

$$S_k + S_{k+n} + S_{k+2n} + S_{k+3n} = \frac{1}{n} a^2 \pi \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (5)$$

ergeben. Und dies besagt: Ein Pizzaschneider mit $4n$ Klingen erlaubt die gerechte Teilung auf n Personen.

Wenn etwa $n = 3$ ist, muss sich jede der drei Personen, im Kreise abzählend, einfach nur jedes dritte Stückchen nehmen. Überraschenderweise gilt in diesem Fall aber auch: Wenn sich eine Person stattdessen jedes zweite Stückchen greifen würde, dann hätte sie genau die Hälfte der Pizza bekommen! Aus den bisherigen Überlegungen geht diese Aussage allerdings noch nicht hervor. Wir beweisen sie später, weil wir zunächst die geometrischen Zusammenhänge genauer untersuchen wollen.

3 Geometrische Analyse des Phänomens

Die zuletzt dargestellte Lösung beruht wesentlich auf der Formel zur Berechnung von Flächeninhalten in Polarkoordinaten sowie einer Eigenschaft des Kreises. Obwohl sie bereits sehr einfach ist, wird man dennoch nicht sagen können, dass man damit den „wahren Grund“ für die Aussage verstanden habe. Was haben zum Beispiel die 45° -Winkel des Pizzaschneiders mit dem Kreis zu tun, bei dem ja kein Winkel ausgezeichnet ist? Darauf gibt es eine nahe liegende Antwort. Sie lautet: Der Kreis besitzt – unter anderen – dieselben Symmetrien wie das Quadrat.

Tatsächlich lässt sich das Halbierungsphänomen vollständig aufklären, wenn man dem Kreis dasjenige Quadrat einbeschreibt, dessen Symmetrieachsen zu den Klingen des Pizzaschneiders parallel verlaufen. Abbildung 4 zeigt, wie dabei die vier kongruenten Kreisabschnitte zwischen den Quadratseiten und dem Kreis („Segmente“) in kleinere Teilstücke *A* bis *L* zerschnitten werden. Dabei ist die Darstellung „exemplarisch“ zu verstehen. Denn je nachdem, wo der Ankerpunkt (Kreuzungspunkt der Klingen) im Quadrat liegt, erhält man unterschiedliche Aufteilungen. Doch bei jeder von ihnen sind die Beziehungen, auf die es im Folgenden ankommt, analog. Wir legen den Kreuzungspunkt zunächst ins Innere des Quadrats.

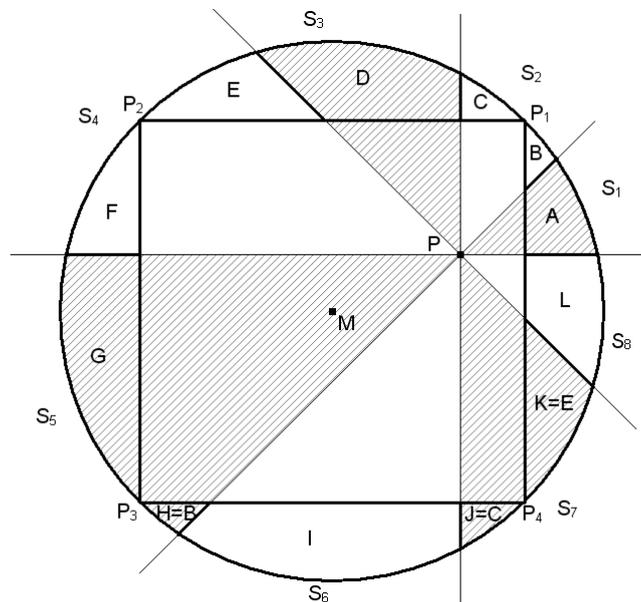


Abb. 4: Zerlegung der Kreissegmente

Unsere Strategie sieht so aus: Zunächst zerlegt unser Pizzamesser nicht nur den Kreis in Sektoren sondern auch das einbeschriebene Quadrat. Wir werden sehen, dass damit nicht nur der Kreis halbiert wird sondern auch das Quadrat. Das geht natürlich nur dann, wenn auch die vier zueinander kongruenten Kreisabschnitte zwischen Quadrat und Kreis durch das Pizzamesser halbiert werden. Und dies wiederum folgt aus einer geschickten Anordnung der schraffierten Anteile (A, D, G, H, J und K) zu zwei Kreisabschnitten.

Das Segment $\widehat{P_1P_4}$, das von der Quadratseite P_1P_4 und dem Kreis gebildet wird, besteht aus B, A, L und K . Nun sind aber K und L zusammen zu G und B zu H kongruent. Also lässt sich das Segment $\widehat{P_1P_4}$ zusammensetzen aus den schraffierten Flächenstücken H (an Stelle von B), G (an Stelle von K und L) und dem ohnehin zu $\widehat{P_1P_4}$ gehörenden Flächenstück A . Damit ist $\widehat{P_1P_4}$ zerlegbar in H, G und A . Nun zerlegen wir das Segment $\widehat{P_1P_2}$. Es besteht aus den Flächenstücken C, D und E . D gehört ohnehin zu den schraffierten Flächenstücken. Weiter ist C zu J und E zu K kongruent. Daher lässt sich das Segment $\widehat{P_1P_2}$ zusammensetzen aus D, J und K . Die beiden Segmente $\widehat{P_1P_4}$ und $\widehat{P_1P_2}$ lassen sich also in die schraffierten Flächenstücke A, K, J, H, G und D zerlegen. Der Pizzaschneider halbiert also die Fläche, mit der der Kreis über das Quadrat hinausragt. Daher ist – bei Lage des Kreuzungspunktes im Quadrat – das Pizzatheorem für den Kreis äquivalent mit dem entsprechenden Theorem für das Quadrat. Und noch mehr:

Weil nicht nur Flächengleichheit, sondern sogar Zerlegungsgleichheit¹ vorliegt, halbiert der Pizzaschneider auch den Umfang des Kreises.

Nun zum Quadrat. Dass das Pizzamesser auch das Quadrat halbiert, lässt sich ebenfalls mittels einer Zerlegung einsehen.² (Abbildung 5).

Wir vergleichen die zu S_1, S_3, S_5, S_7 gehörenden Sektoren mit dem Dreieck $P_1P_3P_4$ (halbes Quadrat). Dieses Dreieck setzt sich aus A, B, D', E', F, H', I und J zusammen, während die vier Sektoren S_1, S_3, S_5, S_7 aus A, B', D, E, F, H, I und J bestehen. Dem Dreieck und den 4 Sektoren gemeinsam sind A, F, I und J . Nun sind aber folgende Flächenstücke kongruent: B und B', D und D', E und E' und schließlich H und H' . Daher haben die 4 Sektoren S_1, S_3, S_5, S_7 nicht nur die Größe des halben Quadrats, sondern lassen sich zerlegen und zu dem halben Quadrat zusammensetzen, was zu beweisen war. Darüber hinaus gilt sogar:

Die Kreissektoren mit ungerader Nummer lassen sich so in Flächenstücke zerlegen, dass aus den Flächenstücken ein Halbkreis zusammengesetzt werden kann.

¹ Achsenspiegelungen sind dabei zugelassen.

² Dabei gilt, wie bereits oben für die Segmentteile bemerkt, dass die Aufteilung von der Lage des Ankerpunktes abhängt. Sie ist aber in jedem Fall leicht herzustellen.

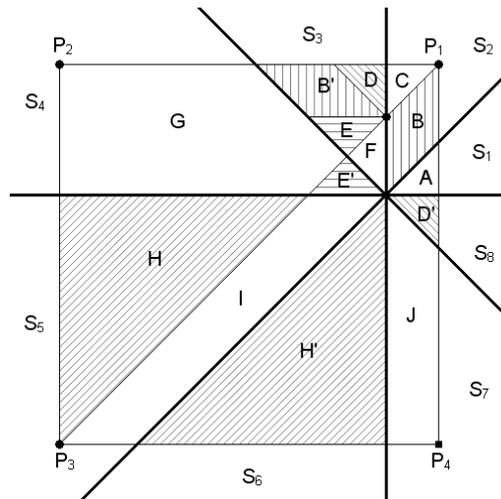


Abb. 5: Zerlegung des Quadrats, Kreuzungspunkt im Inneren

Es bleibt der Fall, dass der Ankerpunkt außerhalb des Quadrats liegt. Auch hier kann man eine passende Zerlegung angeben. Wir zerlegen die Sektoren S_1, S_3, S_5, S_7 in Flächenstücke, die wir dann zu dem unterhalb von P_1P_3 gelegenen Halbkreis zusammensetzen. Dies hat auch hier mehr als bloß eine Übereinstimmung der Flächeninhalte zur Folge. Die Flächen sind sogar zerlegungsgleich, und der Umfang wird halbiert.

Abbildung 6 zeigt exemplarisch die Vorgehensweise. Der Sektor A (S_1) wird zunächst an P_2P_4 gespiegelt (A'), desgleichen der mit B bezeichnete Teil des Sektors S_3 an der waagerechten Symmetrieachse g . Damit werden diese Flächen frei („weiß“), um mit dem Teil des Sektors S_3 , der oberhalb P_1P_3 liegt (H) ausgefüllt zu werden (Spiegelung von H an P_1P_3). Die restliche Aufteilung ist den Bezeichnungen unmittelbar zu entnehmen. Kongruente Flächen werden dabei durch den gemeinsamen Buchstaben wie z. B. C und C' gekennzeichnet.³

Die obigen Zerlegungen bleiben richtig, wenn P in die Grenzlage auf dem Kreis wandert, so dass auch dort das Pizzatheorem richtig ist.

³ Die beiden letzten Fälle geben Beispiele dafür, wie sich der Kreis aufteilen lässt, ohne dass man auf das Quadrat zurückgreift. Das ist natürlich auch dann möglich, wenn P im Inneren des Quadrates liegt. Anders als bei diesen beiden wären dann aber viele Fallunterscheidungen erforderlich, um den Beweis allgemeingültig zu machen. So ist zum Beispiel auch die in [Sielaff 1997, 17] angegebene Zerlegung nicht ohne weiteres auf andere Lagen von P übertragbar.

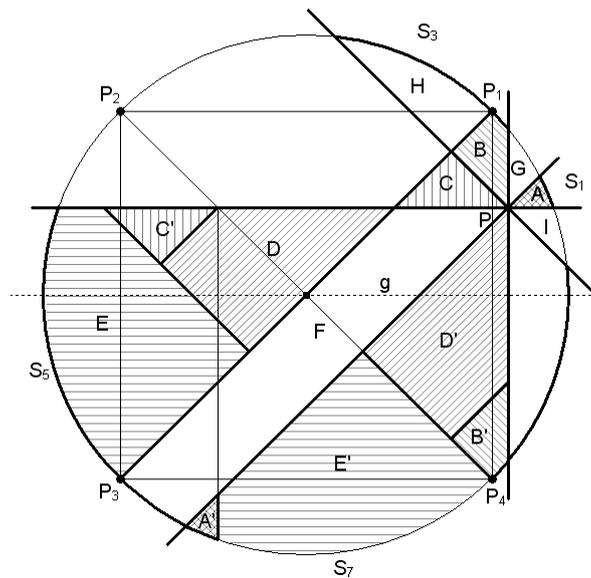


Abb. 6: Zerlegung des Kreises, Kreuzungspunkt außerhalb des Quadrats

Abschließend soll noch die Möglichkeit erwähnt werden, dass der Kreuzungspunkt ganz außerhalb des Kreises liegt. Mit sehr einfachen Überlegungen kann man aber zeigen, dass dann – von Sonderfällen abgesehen – im Allgemeinen keine Halbierung mehr stattfindet.

Somit entpuppt sich das Pizzatheorem als eine einfache Aussage der Kongruenzgeometrie.

4 Variationen und Verallgemeinerungen

4.1 Pizzaschneider mit einer anderen Klingenzahl

Wir sind bisher nicht auf die Frage eingegangen, ob ein Pizzaschneider mit weniger als acht Klingen denselben Zweck erfüllen kann. Die Antwort lautet aber stets nein. Weiter bringt uns die folgende Überlegung. Eine Halbierung kann man voraussichtlich nur dann erreichen, wenn sich die Sektoren zu „Doppelsektoren“ zusammenfassen lassen, und zwar so, dass einander gegenüber liegende Sektoren einen Doppelsektor bilden. Ist die Anzahl der Doppelsektoren n , so bilden immer die Sektoren S_k und S_{k+n} einen Doppelsektor DS_k . In Abbildung 7 ist DS_3 hervorgehoben. Damit die Nummern der Sektoren, aus denen ein Doppelsektor gebildet wird (also k und $k+n$), gleiche Parität haben (gleiche Schraffur der Sektoren in Abbildung 7), muss n gerade sein. Davon gehen wir jetzt aus und notieren $n = 2m$.

Der Öffnungswinkel eines solchen Doppelsektors ist π/n und die Anzahl der Klinsen beträgt nun $2n$.

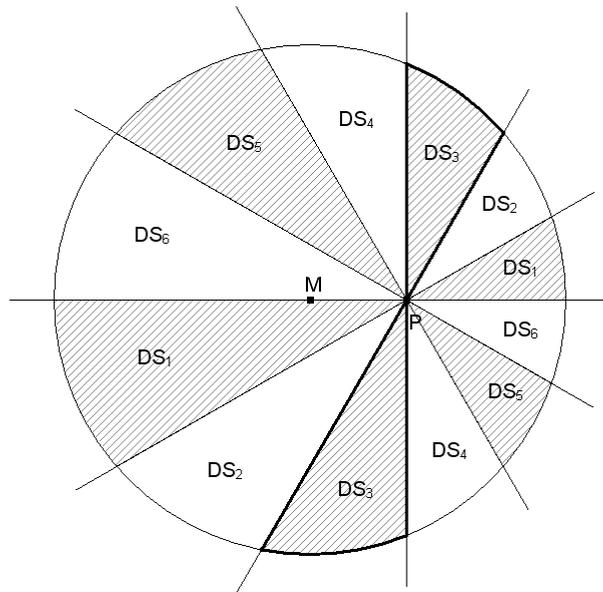


Abb.7: Doppelsektoren im Fall $n = 6$

Ein solcher Pizzaschneider korrespondiert also mit dem regulären $2n$ -Eck, dessen Symmetrieachsen ebenfalls den Winkelabstand π/n haben. Der Fall $n = 2$ scheidet infolgedessen aus. Demnach stellt der von uns bisher betrachtete Pizzaschneider ($n = 4$) die einfachste Möglichkeit (dieser Art) dar.

Wir wollen nun den Flächeninhalt eines solchen Doppelsektors berechnen. Dabei verwenden wir erneut Polarkoordinaten. Abbildung 8 ist im Grunde nichts anderes als Abbildung 1, wobei hier nur die Sektoren hinzugefügt sind.

$\angle MPU'$ ist gleich dem Polarwinkel t und daher ist

$$h := |MQ| = d \sin t, \quad b := |QP| = d \cos t.$$

Für $c := |QU| = |QU'|$ gilt $c^2 = a^2 - h^2 = a^2 - d^2 \sin^2 t$. Wegen

$$r = c - b, \quad r' = c + b$$

folgt daraus

$$r^2 + r'^2 = 2(c^2 + b^2) = 2(a^2 + d^2(\cos^2 t - \sin^2 t)) = 2(a^2 + d^2 \cos 2t).$$

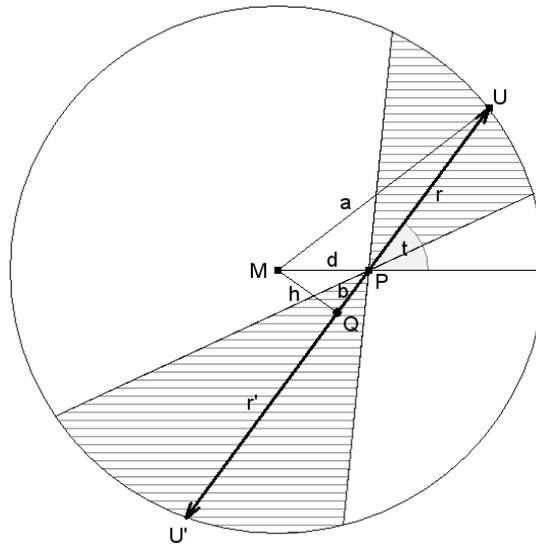


Abb. 8: Berechnung eines Doppelsektors mit Polarkoordinaten

Damit gilt für den Inhalt eines solchen Doppelsektors zwischen den Polarwinkeln t_0 und t_1 :

$$\begin{aligned} DS &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (r^2 + r'^2) dt = \int_{t_0}^{t_1} (a^2 + d^2 \cos 2t) dt \\ &= a^2 (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} d^2 (\sin 2t_1 - \sin 2t_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Im k -ten Doppelsektor (Nummerierung wie in Abbildung 7) bewegt sich der Polarwinkel t im Intervall von $t_0 = (k-1)\frac{\pi}{n}$ bis $t_1 = k\frac{\pi}{n}$. Aus (6) folgt daher für den Flächeninhalt dieses Doppelsektors:

$$\begin{aligned} DS_k &= a^2 \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2} d^2 \left(\sin \frac{2k\pi}{n} - \sin \left(2(k-1)\frac{\pi}{n} \right) \right) \\ &= a^2 \frac{\pi}{2m} + \frac{1}{2} d^2 \left(\sin \frac{k\pi}{m} - \sin \left((k-1)\frac{\pi}{m} \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Zu berechnen ist nun die Summe

$$DS_1 + DS_3 + \dots + DS_{n-1} = \sum_{k=1}^m DS_{2k-1} \quad \text{mit } n = 2m.$$

Die Summation der ersten Summanden in (7) ergibt $\frac{1}{2}a^2\pi$. Die Summe der trigonometrischen Terme berechnen wir getrennt mit Hilfe der im Anhang hergeleiteten Summenformel:

$$\sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{(2k-1)\cdot\pi}{m}\right) = \sum_{k=1}^m \sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{m} - \frac{\pi}{m}\right) = \frac{\sin\left(m\cdot\frac{2\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left((m+1)\frac{2\pi}{m} - \frac{\pi}{m}\right) = 0,$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^m \sin\left((2k-2)\frac{\pi}{m}\right) = \frac{\sin\left(m\cdot\frac{2\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)} \cdot \sin\left((m+1)\frac{2\pi}{m} - \frac{2\pi}{m}\right) = 0,$$

denn

$$\sin\left(m\cdot\frac{2\pi}{m}\right) = \sin\pi = 0.$$

Die Summe der Inhalte der ungerade nummerierten Sektoren ist also $\frac{1}{2}a^2\pi$ und damit halb so groß wie der Kreis. Damit ist das Pizzatheorem auch für Pizzaschneider mit $2n$ Klängen bewiesen, wenn n gerade ist.

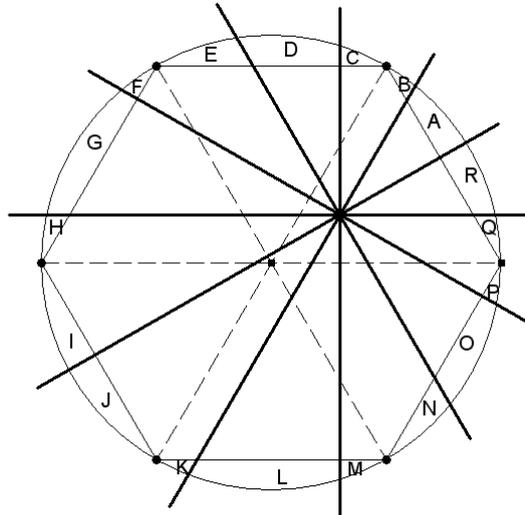


Abb. 9: Geometrische Interpretation im Fall $n = 6$

Es ist lehrreich, die Situation auch geometrisch zu untersuchen. Dazu betrachten wir das Beispiel $n = 6$, also einen Pizzaschneider mit zwölf Klingen, zusammen mit dem regulären Sechseck, die zu dessen Symmetrieachsen parallel verlaufen (Abbildung 9). Wie schon im Falle des Quadrats sieht man auch hier, dass in jedem Doppelsektor genau eine Ecke des zugeordneten regulären $2n$ -Ecks liegt.⁴ Die zu einer solchen Ecke gehörigen Segmentteile eines Doppelsektors – oben zum Beispiel H und I – sind offenbar kongruent zu Q bzw. $A + B$. Infolgedessen stimmt die Summe ihrer Flächeninhalte mit dem Flächeninhalt eines der $2n$ Kreissegmente überein. Damit gilt wie im Falle $n = 4$, dass der Pizzaschneider sowohl die Kreissegmente ihrem Inhalt nach als auch den Kreisumfang halbiert.

Um dieses Ergebnis aber auf den gesamten Kreis ausdehnen zu können, müsste man zeigen, dass auch der Flächeninhalt des Sechsecks halbiert wird. Bei konkreten Lagen des Kreuzungspunktes wäre das nicht allzu schwierig. Mit einem DGS erhält man zwar verhältnismäßig einfach einen Überblick über alle auftretenden Fälle; jedoch ist ihre Anzahl groß. Und für jeden Fall müsste man eine passende Zerlegung angeben. Nun zeigt sich aber der Nutzen des analytischen Beweises. Er liefert zusammen mit der obigen geometrischen Überlegung die Begründung dafür, dass auch das zugeordnete reguläre Sechseck halbiert wird. Nach dem Satz, dass flächengleiche Polygone stets auch zerlegungsgleich sind (vgl. [Hilbert 1972, 69 ff.]), existiert daher immer eine solche Zerlegung.

Abschließend gehen wir gemäß der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2 noch kurz auf andere Kreisteilungen als Halbierungen ein. Wir betrachten dazu einen Pizzaschneider, dessen Klingen den Winkelabstand π/k haben ($k \in \mathbb{N}$). Dann gibt es insgesamt k Doppelsektoren. Von diesen soll jetzt aber nicht jeder zweite, sondern allgemein jeder j -te addiert werden. Sofern k durch j teilbar ist, also $k = l \cdot j$ mit einer ganzen Zahl l , ist das möglich. Nunmehr lautet die untere Integralgrenze $t_i = (i-1) \cdot \pi/k$ und die obere $t_{i+1} = i \cdot \pi/k$, wobei $i = r \cdot j$ ist und r von 1 bis l läuft. Setzt man diese Daten in die Sinussummenformel wie oben ein, so verschwinden die beiden trigonometrischen Summen, und es bleibt allein $a^2\pi/j$ für die Summe der Sektorenflächeninhalte übrig.

Ein Beispiel möge diese Aussage verdeutlichen. Für $k = 15$ und $j = 5$ sind die Flächeninhalte von drei Doppelsektoren zu addieren. Sie schneiden zusammen ein Fünftel der Kreisfläche aus. Anders als beim oben betrachteten Sechseck aber gilt in diesem Falle die entsprechende Umfangsaussage nicht. Denn nur bei n -Ecken mit *gerader* Eckenzahl lässt sich die Umfangsteilung zusammen mit der Flächenenteilung durch Zerlegung in kongruente Teilflächen realisieren.

⁴ Diese Aussage gilt für beliebige n und ist nicht schwer mit Hilfe der Kreiswinkelsätze zu beweisen.

4.2 Messer für regelmäßige n -Ecke bei ungeradem n

Die Halbierung eines regulären $2n$ -Ecks mittels eines Messers, dessen Klingen mit einander einen Winkel von π/n bilden, legt die Frage nahe, ob es nicht auch eine analoge Halbierungsmöglichkeit für reguläre n -Ecke mit ungerader Eckenzahl gibt. Tatsächlich muss man den Pizzaschneider nur ein wenig umbauen, um dieses Ziel zu erreichen. Allerdings funktioniert er dann nur, wenn die Pizza die Form eines regelmäßigen n -Ecks hat, jedoch nicht mehr, wenn sie kreisförmig ist.

Um konkret zu sein, betrachten wir ein regelmäßiges Fünfeck. Seine Halbierung gelingt, wenn einerseits fünf Klingen starr an einer Achse befestigt sind, die miteinander einen Winkel von $2\pi/5$ bilden, andererseits in jedem der Winkelräume sich eine zusätzliche Klinge befindet, *die aber um die Achse drehbar ist*. Ein solches „Messer“ wird dann so auf das Fünfeck gesetzt, dass die festen Klingen seine Seiten senkrecht schneiden. Alsdann werden die beweglichen Klingen so gedreht, dass sie jeweils durch eine Ecke des Fünfecks gehen. Mit anderen Worten: Wir wählen einen Punkt $P = (x_0, y_0)$, fällen die Lote auf die Seiten und verbinden P mit den Ecken (Abbildung 10)⁵.

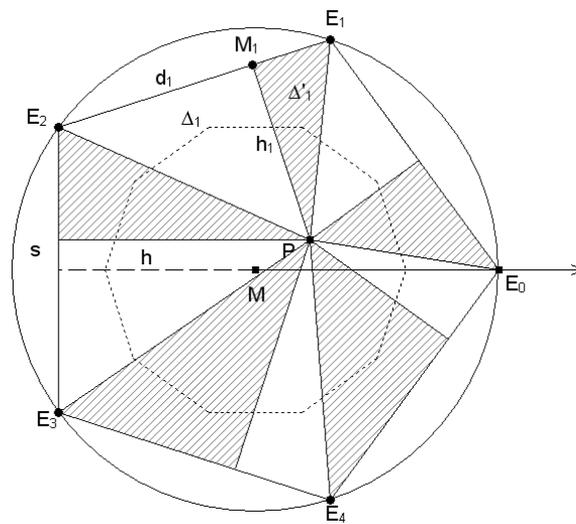


Abb. 10: Fünfeckzerlegung⁶

⁵ Damit die Lotfußpunkte im Innern der Seitenstrecken liegen, muss P auf dem Rand oder innerhalb des regulären Zehnecks gewählt werden, das oben ebenfalls eingezeichnet ist. Es entsteht als Durchschnitt aller Parallelstreifen, die durch die Senkrechten auf den Seiten in benachbarten Eckpunkten gebildet werden.

⁶ Liegt P nicht in dem im Inneren angezeigten 10-Eck, ergibt sich eine andere Zerlegung.

Dem Folgenden legen wir die Bezeichnungen aus Abbildung 10 zu Grunde, argumentieren aber allgemein, so dass die Aussagen für beliebige reguläre n -Ecke gelten. Unser Ziel ist die Berechnung der Summe der Inhalte der Dreiecke Δ_i . Zunächst gilt

$$\sum_{i=1}^n h_i = n \cdot h. \quad (8)$$

Die Dreiecke $\Delta E_i M E_{i+1}$ haben nämlich alle s als Basisseite und h als Höhe, daher den Flächeninhalt

$$\frac{s \cdot h}{2}.$$

Das n -Eck hat daher den Flächeninhalt

$$\frac{n \cdot s \cdot h}{2}.$$

Bei der Zerlegung des n -Ecks in die Dreiecke Δ_i und Δ'_i erhält man andererseits für diesen Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n s \cdot h_i = \frac{s}{2} \cdot \sum_{i=1}^n h_i$$

Vergleich der beiden Formeln für den Flächeninhalt führt dann zu (8).

Nun berechnen wir die d_i und h_i , um weitere Aussagen zu erhalten (Abbildung 11). Dazu führen wir ein Koordinatensystem so ein, dass sein Ursprung mit M übereinstimmt. Die Ecken nummerieren wir mit 0 bis $n-1$ im Gegenuhrzeigersinn und legen E_0 auf die positive x -Achse (vgl. Abbildung 10).

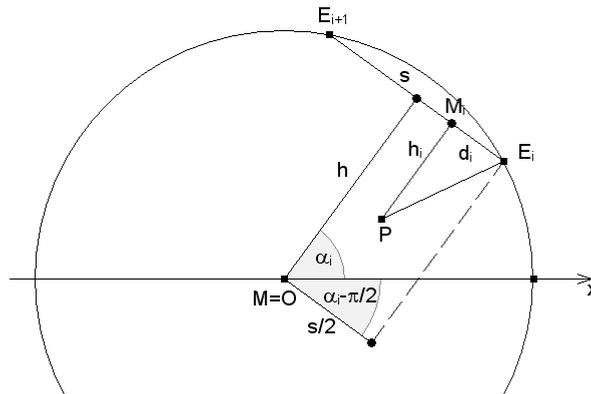


Abb. 11: Zur Berechnung der Sektorinhalte

Dann bilden die Radien $\overline{ME_i}$ mit der x -Achse die Winkel $(2\pi/n) \cdot i$ und die Mittelsenkrechte von $E_i E_{i+1}$ (die durch M geht) mit der x -Achse den Winkel

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{n} \cdot i + \frac{\pi}{n}.$$

Die Gerade durch E_i und E_{i+1} hat nun die Gleichung (Hessesche Normalform) $x \cdot \cos \alpha_i + y \cdot \sin \alpha_i = h$, da $(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$ ein auf Länge 1 normierter Normalenvektor der Geraden ist und der Abstand zum Ursprung h ist. h_i ist der Abstand von $P = (x_0, y_0)$ zu dieser Geraden, also

$$h_i = h - x_0 \cdot \cos \alpha_i - y_0 \cdot \sin \alpha_i, \quad (9)$$

da P und O auf derselben Seite der Geraden liegen.

Die Gerade senkrecht zu $E_i E_{i+1}$ durch E_i hat die Gleichung

$$x_0 \cdot \sin \alpha_i - y_0 \cdot \cos \alpha_i = \frac{s}{2},$$

da $(\sin \alpha_i, -\cos \alpha_i)$ orthogonal zu $(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$ ist und $s/2$ der Abstand zum Ursprung ist. Dann ist d_i der Abstand von P zu dieser Geraden, und es gilt wie oben

$$d_i = \frac{s}{2} - x_0 \cdot \sin \alpha_i + y_0 \cdot \cos \alpha_i. \quad (10)$$

Die Formel (9) für h_i setzen wir in (8) ein:

$$n \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i = n \cdot h - x_0 \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i - y_0 \cdot \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i,$$

und es folgt

$$x_0 \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i + y_0 \cdot \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0.$$

Da x_0, y_0 beliebig gewählt werden können, zum Beispiel $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ oder $x_0 \neq 0, y_0 = 0$, gilt insbesondere:

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = 0 \quad (11)$$

Dieses Ergebnis können wir nutzen, wenn wir gemäß (10) die d_i aufsummieren:

$$\sum_{i=1}^n d_i = \frac{n \cdot s}{2} - x_0 \cdot \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i + y_0 \cdot \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = \frac{n \cdot s}{2} \quad (12)$$

Etwas mehr Aufwand kostet die Berechnung der Inhalte der Dreiecke Δ_i :

$$\begin{aligned}
2|\Delta_i| &= d_i h_i = \left(\frac{s}{2} - x_0 \sin \alpha_i + y_0 \cos \alpha_i \right) \cdot (h - x_0 \cos \alpha_i - y_0 \sin \alpha_i) \\
&= \frac{sh}{2} + \left(h y_0 - \frac{s x_0}{2} \right) \cdot \cos \alpha_i - \left(h x_0 + \frac{s y_0}{2} \right) \cdot \sin \alpha_i + (x_0^2 - y_0^2) \cdot \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\
&\quad + x_0 y_0 \cdot (\sin^2 \alpha_i - \cos^2 \alpha_i) \\
&= \frac{sh}{2} + \left(h y_0 - \frac{s x_0}{2} \right) \cdot \cos \alpha_i - \left(h x_0 + \frac{s y_0}{2} \right) \cdot \sin \alpha_i + \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} \cdot \sin 2\alpha_i \\
&\quad - x_0 \cdot y_0 \cdot \cos 2\alpha_i
\end{aligned}$$

Mit (11) folgt daraus für die Summe der Flächeninhalte

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_i| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \cdot h_i = \frac{n \cdot s \cdot h}{4} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i - x_0 \cdot y_0 \cdot \sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i.$$

Tatsächlich haben aber auch die noch verbliebenen trigonometrischen Summen den Wert 0. Denn nach den im Anhang hergeleiteten Summenformeln gilt sowohl

$$\sum_{i=1}^n \sin 2\alpha_i = \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{4\pi}{n} i + \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\sin 2\pi}{\sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)} \sin \left(\frac{(n+1) \cdot 4\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} \right) = 0$$

als auch

$$\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i = \sum_{i=1}^n \cos \left(\frac{4\pi}{n} i + \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{\sin 2\pi}{\sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)} \cos \left(\frac{(n+1) \cdot 4\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} \right) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\sum_{i=1}^n |\Delta_i| = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i \cdot h_i = \frac{n \cdot s \cdot h}{4} \tag{13}$$

Die Summe der Flächeninhalte der Lotdreiecke ist gleich dem halben Flächeninhalt des regulären n-Ecks.

Die oben hergeleiteten Aussagen gelten für alle $n \geq 3$. Im Falle gerader n kann man noch weitere Eigenschaften herleiten.

Sei also n gerade: $n = 2 \cdot m$. Wir berechnen dann

$$\sum_{i=1}^m d_{2i}, \quad \sum_{i=1}^m h_{2i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m |\Delta_{2i}|.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^m d_{2i} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{s}{2} - x_0 \sin \alpha_{2i} + y_0 \cos \alpha_{2i} \right) = \frac{s m}{2} - x_0 \sum_{i=1}^m \sin \alpha_{2i} + y_0 \sum_{i=1}^m \cos \alpha_{2i} = \frac{s m}{2},$$

wenn wir wieder die Summenformeln aus dem Anhang heranziehen:

$$\sum_{i=1}^m d_{2i} = \frac{s m}{2}, n = 2m$$

Ebenso folgt für $n = 2 \cdot m$

$$\sum_{i=1}^m h_{2i} = \sum_{i=1}^m (h - x_0 \cos \alpha_i - y_0 \sin \alpha_i) = m h - x_0 \sum_{i=1}^m \cos \alpha_i - y_0 \sum_{i=1}^m \sin \alpha_i = m h$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |\Delta_{2i}| &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d_{2i} h_{2i} = \frac{m \cdot s \cdot h}{4} + \frac{x_0^2 - y_0^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^m \sin 2\alpha_{2i} - x_0 y_0 \sum_{i=1}^m \cos 2\alpha_{2i} \\ &= \frac{m \cdot s \cdot h}{4}. \end{aligned} \quad (14)$$

4.3 Krumme Klinsen

Eine überraschende Variante erhält man, wenn man die acht geraden Klinsen unseres ursprünglichen Pizzaschneiders durch Viertelkreise ersetzt (Abbildung 12).

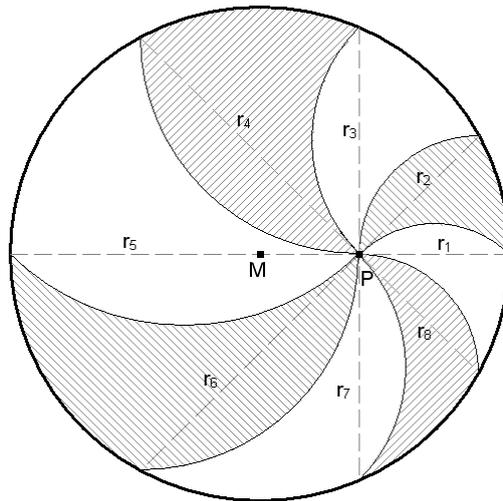


Abb. 12: Krumme Klinsen

Man legt einen Punkt P im Kreis als Kreuzungspunkt der zunächst noch geradlinigen Klingen fest. Dann sind ihre Teilstücke innerhalb des Kreises, die wir zyklisch mit r_1, r_2, \dots, r_8 bezeichnen, ebenfalls festgelegt, und über jedem dieser „Radien“ wird nach der gleichen Seite hin ein Viertelkreis konstruiert. Für einen solchen „Pizzaschneider“ gilt dann ebenfalls die Halbierungsaussage. Zum Beweis beachten wir, dass die vier Radien mit ungeradem Index und die vier Radien mit geradem Index je ein rechtwinkliges Kreuz bilden, also die beiden Beziehungen

$$r_1^2 + r_3^2 + r_5^2 + r_7^2 = 4a^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 + r_4^2 + r_6^2 + r_8^2 = 4a^2$$

erfüllen. Eine einfache Rechnung ergibt dann für den Flächeninhalt A_1 des ersten Sektors

$$A_1 = S_1 + \frac{1}{8}(\pi - 1)(r_2^2 - r_1^2),$$

wobei S_1 den Flächeninhalt des von den beiden Radien r_1 und r_2 begrenzten Sektors bezeichnet. Analog berechnen sich die anderen Sektoren. Dann ist

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 + A_5 + A_7 &= \\ &= S_1 + S_3 + S_5 + S_7 + \frac{1}{8}(\pi - 1)(r_2^2 + r_4^2 + r_6^2 + r_8^2 - r_1^2 - r_3^2 - r_5^2 - r_7^2) \\ &= S_1 + S_3 + S_5 + S_7 + \frac{1}{8}(\pi - 1)(4a^2 - 4a^2) \\ &= S_1 + S_3 + S_5 + S_7. \end{aligned}$$

Analog lassen sich andere „Pizzaschneider“ mit krummen Klingen konstruieren. Man braucht nur jeweils ähnliche Kurven über den Radien zyklisch hinzuzufügen. Die Analogie zu einem echten Pizzaschneider ist aber nur äußerlich. Denn seine Gestalt ist anders als bisher abhängig von der Lage des Kreuzungspunktes innerhalb des Kreises.⁷

4.4 Regelmäßige $2n$ -Ecke

Als letzte Variante betrachten wir nun folgende Situation. Unserer kreisrunden Pizza beschreiben wir ein regelmäßiges $2n$ -Eck ein, dessen Ecken wir mit $E_0, E_1, \dots, E_{2n-1}$ bezeichnen. Wir wählen wieder einen Ankerpunkt P in dem Kreis und führen von ihm aus gerade Schnitte zu den Ecken E_i . Damit wird unsere Pizza in $2n$ Stücke S_1, S_2, \dots, S_{2n} zerlegt. Aber dieses Mal sind die Winkel zwischen den Schnitten nicht identisch. Und wieder ist die Summe der Flächeninhalte der ungerade nummerierten Sektoren genau so groß wie die Summe der Inhalte der Sektoren mit gerader Nummer. Abbildung 13 zeigt den Fall $n = 3$.

⁷ Man könnte aber von einer verallgemeinerten „Yin-Yang-Halbierung“ des Kreises sprechen.

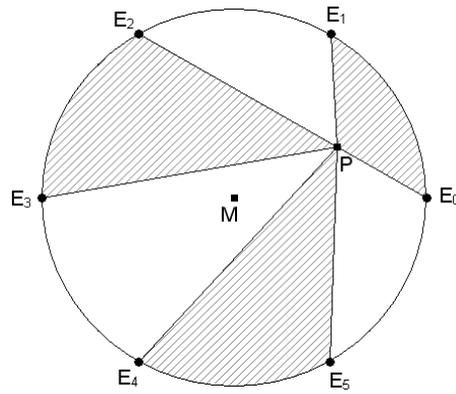


Abb. 13: Teilung mit gleich langen Bögen

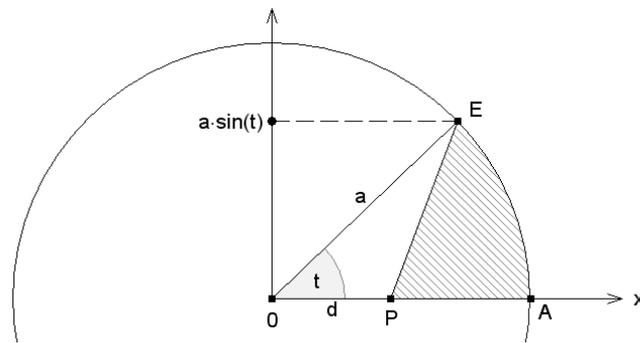


Abb. 14: Einführung eines Koordinatensystems

Wir berechnen nun die Größe der einzelnen Sektoren. Dazu führen wir ein Koordinatensystem ein und betrachten Abbildung 14. Der Radius des Kreises sei a und P habe die Koordinaten $(d, 0)$. Für einen beliebigen Kreispunkt E (mit positiver y -Koordinate) hat das Kreissegment \widehat{OAE} den Inhalt

$$a^2 \pi \cdot \frac{t}{2\pi} = \frac{a^2 t}{2}.$$

Das Dreieck $\triangle OPE$ hat den Inhalt $\frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin t$. Der Inhalt des schraffierten Sektors \widehat{APE} beträgt also

$$|\widehat{APE}| = \frac{a^2 t}{2} - \frac{d \cdot a \cdot \sin t}{2} = \frac{a}{2} (a \cdot t - d \cdot \sin t). \quad (14)$$

Das gilt auch dann, wenn $\pi \leq t \leq 2\pi$ ist. Nun können wir allgemein den Inhalt des k -ten Sektors S_k berechnen.

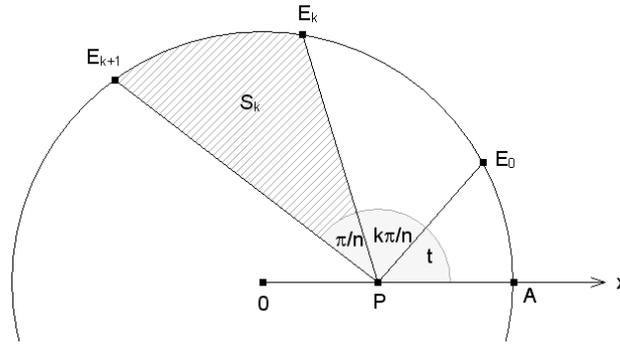


Abb. 15: Berechnung der Segmente S_k

S_k erscheint als Differenz zweier Sektoren, wie sie in (14) berechnet werden, wobei sich die Werte des jeweiligen Öffnungswinkels aus Abbildung 15 ablesen lassen.

$$\begin{aligned} S_k &= \left| \widehat{APE_{k+1}} \right| - \left| \widehat{APE_k} \right| \\ &= \frac{a}{2} \left(a \left(t + (k+1) \frac{\pi}{n} \right) - d \cdot \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \right) - \frac{a}{2} \left(a \left(t + \frac{k\pi}{n} \right) - d \cdot \sin \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= \frac{a^2 \pi}{2n} + \frac{ad}{2} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{(k+1)\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Die Summe $S_1 + S_3 + \dots + S_{2n-1}$ der ungerade nummerierten Sektoren erhalten wir mit den trigonometrischen Formeln im Anhang. Es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n S_{2k-1} = \frac{a^2 \pi}{2} + \frac{ad}{2} \left(\sum_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{n} - \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{a^2 \pi}{2}, \quad (15)$$

weil die beiden trigonometrischen Summen verschwinden. Auch in dieser Variante ist der Satz über die gerechte Teilung der Pizza richtig. Hier ist übrigens der Übergang vom Kreis zum regelmäßigen $2n$ -Eck überhaupt kein Problem, da die Segmente, die den Unterschied zwischen Kreis und $2n$ -Eck ausmachen, alle zueinander kongruent sind. Dass wir hier zur Berechnung der Sektorgröße Integralrechnung nicht benötigen, hat seinen Grund: Die Winkel $\angle E_i O E_{i+1}$ sind alle gleich groß. Mit derselben Methode ließen sich aber die Rechnungen in Abschnitt 1 bzw. 4 nicht vereinfachen, denn man müsste dazu den Zusammenhang zwischen den Winkeln $\angle E_i O E_{i+1}$ und $\angle E_i P E_{i+1}$ heranziehen.

5 Didaktische Bemerkungen

„Aufgaben bilden den roten Faden des Unterrichts sowohl aus der Sicht der Lernenden als auch aus der Sicht der Lehrenden, und sie strukturieren die Lehrer-Schüler-Interaktion.“ (vgl. Herget [2000, 5]). Dieser Feststellung wird heute wohl niemand widersprechen. Aber sie besagt noch nichts über die anzustrebende „Aufgabekultur“, um einmal das Stichwort zu nennen, das die didaktische Diskussion in den letzten Jahren weitgehend beherrscht hat. Heute besteht jedoch Konsens darüber, dass es für den Lernerfolg günstig ist, wenn Schüler zu möglichst selbständiger Eigenarbeit angeregt werden, und dass ein unerwartetes Phänomen oder Problem im Allgemeinen einen interessanteren Untersuchungsgegenstand darstellt als eine Aufgabe, die nur die Anwendung altbekannter Techniken erfordert. Fragestellungen dieser Art dürfen jedoch den „mathematischen Horizont“ der Schüler nicht übersteigen, und sie sollten zugleich den Erwerb wünschenswerter mathematischer Kompetenzen fördern.

5.1 Das Pizzatheorem in der Sekundarstufe I

Der große Reiz des Pizzatheorems besteht ohne Zweifel darin, dass seine Aussage nicht zu den Vorstellungen von den Symmetrieverhältnissen eines Kreises passt. Trotzdem verbietet es sich, die Schüler gleichsam mit dem Phänomen zu überrumpeln. Sie müssten dann den Eindruck bekommen, dass ihnen bloß ein Kuriosum vorgeführt wird, ein mathematisches „Event“ zum Zweck des Nervenkitzels. Wie aber der geometrische Beweis zeigt, ist es in Wirklichkeit gerade umgekehrt. Das Pizzatheorem bringt, *und zwar auf nichttriviale Weise*, die Symmetrien des Kreises erst richtig zur Geltung. Doch in welchen Kontext wäre es einzuordnen? Nahe liegt das Gebiet der Termumformungen, die ja üblicherweise mit Hilfe von Flächenberechnungen veranschaulicht werden. Wie sich noch zeigen wird, ermöglicht es noch vor dem Satz des Pythagoras, sowohl Termumformungen zu üben, als auch weit reichende Erfahrungen mit der Kongruenzgeometrie zu sammeln. Wir skizzieren, wie wir uns einen entsprechenden Unterrichtsgang denken (Abbildung 16).

Hierzu einige Bearbeitungshinweise:

1. Niemand sollte sich daran stören, dass das Problem unrealistisch ist; denn Schüler stören sich auch nicht daran. Aber sie finden es sicher spannend, sich Lösungen auszudenken. Dabei werden sie auch zu *krummen* Linien greifen, was die Aufgabenstellung keineswegs ausschließt, und zumindest approximative Lösungen finden, die sie vor ihren Mitschülern verteidigen müssten. Erst danach wird die Devise ausgegeben: Die Trennlinien sollen gerade sein.
2. Nach dem Vorschlag des Mathematikers könnte man den Birnbaum fällen und die Trennungslinie dann durch A und den Mittelpunkt des Quadrates ziehen. Vielleicht aber haben schon einige Schüler beim ersten Anlauf gesehen, dass man noch zusätzlich die Gerade durch B und den Mittelpunkt des Quadrates

ziehen könnte. Wenn diese beiden „Durchmesser“ zufällig senkrecht auf einander stehen würden, wäre das Problem nämlich bereits gelöst, sofern jedem Zwilling *zyklisch* jedes zweite Viertel zugeschlagen wird. Bei der auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Lage der Bäume ist das nicht der Fall.

Schwierige Erbteilung

Bei der Geburt ihrer Zwillingsskinder, einer Tochter und einem Sohn, pflanzen die Eltern auf ihrem Grundstück einen Apfel- und einen Birnbaum. Beide, wie auch die Kinder, gedeihen prächtig, aber die Eltern entzweien sich im Laufe des Lebens; und da der Sohn zur Mutter, die Tochter zum Vater hält, will jedes Elternteil, dass ihr Erbe zu gleichen Teilen an ihre Kinder gelangt.

Der Erbfall tritt ein. Aber wie soll das Grundstück geteilt werden, wenn jedes Kind gleich viel Land und auch gleich viel von den beiden Bäumen bekommt soll? Ein befreundeter Mathematiker schlägt den Zwillingen vor, einfach einen der beiden Bäume zu fällen; dann wäre das Problem leicht lösbar. Aber das wollen die Kinder nicht, und tatsächlich finden sie selbst nach einigem Probieren eine Lösung.

(Die gestrichelten Kreise stellen die Baumkronen dar. Von jeder beansprucht jeder Zwilling genau die Hälfte.)

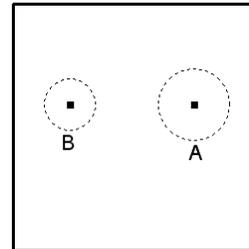


Abb. 16: Erbteilungsproblem

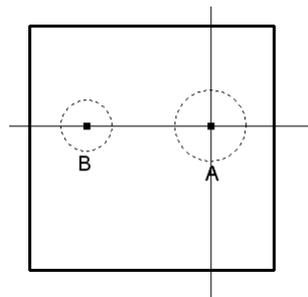


Abb.17: Zur Lösung des Erbteilungsproblems

3. Durch die Vorgabe zweier Bäume wird AB als Trennungslinie besonders nahe gelegt. Doch sieht man dann sofort, dass sich die Flächeninhalte der Teilrechtecke oben und unten stark unterscheiden. Man könnte diesen Unterschied dadurch zu verkleinern suchen, dass man durch A (oder B) eine weitere Trennlinie zieht. Zeichnet man sie senkrecht und verteilt die vier Rechtecke erneut zyklisch, dann bekommt jeder Zwilling von jedem Baum die Hälfte (Abbildung

17). Nachrechnen (im Zahlenbeispiel oder allgemein) zeigt aber, dass die Rechtecke rechts oben und links unten zusammen immer noch größer sind als die beiden übrigen⁸.

Was würde sich nun ergeben, wenn man die Senkrechte im Uhrzeigersinn dreht? Dann wird das obere rechte Rechteck zu einem Trapez mit kleinerem Flächeninhalt und ebenso das untere linke, und ihre Summe würde kleiner. Offenbar könnte man es so erreichen, dass ihr Flächeninhalt zusammen schließlich nur noch so groß wie der des halbierten Quadrates ist. Doch dann wären, wie man sofort sieht, die Anteile an den Bäumen nicht mehr gleich verteilt.

4. In dieser Situation ist ein Tipp erforderlich. Die Schüler werden aufgefordert, es doch einmal mit *zwei* zusätzlichen Geraden durch A zu versuchen. Es bleibt dann immer noch Einiges, was sie selbstständig herausfinden müssen:
 - Die beiden Geraden müssen die Senkrechte zur Symmetrieachse haben, wenn bei zyklisch abwechselnder Übereignung die Obstbäume zu gleichen Teilen an die Kinder gehen sollen
 - Durch *Probieren* (Messen und Rechnen oder durch die Anwendung eines DGS) stellt sich heraus, dass die beiden Geraden zusätzlich die rechten Winkel halbieren müssen. Die endgültige Bestätigung bei beliebiger Position von A erfordert dann nur noch eine Verallgemeinerung der bereits durchgeführten Zahlenrechnung.
5. Man sollte nicht versäumen, mit den Schülern darüber zu diskutieren, welche Konsequenzen das obige Ergebnis für die Erbteilung hat. Wenn nämlich B auf keiner der Schnittlinien liegt, existiert keine Lösung.
6. Da Schüler Rechnungen mit algebraischen Termen häufig als mühsam empfinden, dürften sie leicht dazu anzuregen sein, die Halbierung des Quadrates durch konstruktive Zerlegung zu realisieren. Dass es eine solche Möglichkeit geben muss, hat die Rechnung ja bereits ergeben. Wenn man nur etwas systematisch vorgeht, sind die Erfolgsaussichten groß. Man schaut, was passt, zeichnet oder besser noch, nimmt die Schere zu Hilfe, schneidet, pflastert und so weiter. Deklariert man die Aufgabe als Erfindung eines *Puzzlespiels* (mit dem man auch seine Eltern zu Hause überraschen könnte), dürfte der Anreiz noch größer sein. Abbildung 18 zeigt ein solches „Tangram“ (ohne das Gewand der Einkleidung). Es ist wohl keine Frage, dass die Schüler bei solchen Aktivitäten gewissermaßen spielerisch lernen, Symmetrien zu sehen, herzustellen und auch zu begründen (wobei die Argumentation unter Umständen auch in einer konkreten Pflasterung bestehen könnte).

⁸ Hier könnte man diskutieren, wo die Bäume stehen müssten, damit das nicht der Fall ist.

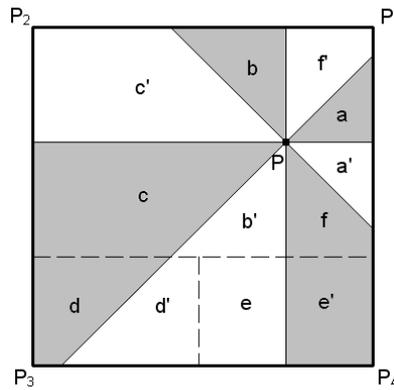


Abb. 18: Pflasterung des Quadrats

Die „Schlusspointe“ setzen wir mit der folgenden Frage:

Das Grundstück wird zu einem Kreis erweitert, der durch die Ecken des Quadrates geht, und die Zwillinge ziehen die vier Trennlinien zwischen ihren Anteilen einfach weiter. Wie ist das kreisförmige Grundstück zwischen ihnen aufgeteilt?

Hier sind die Schüler noch einmal stark gefordert, nämlich *zu sehen*, was Abbildung 4 zeigt: Kongruenzen von Kreisteilen. Bisher haben sie mit dem Begriff der Kongruenz ja eigentlich nur Dreiecke, höchstens Vielecke verbunden. Möglicherweise wird man deshalb darauf hinweisen müssen, dass natürlich auch Kreisteile gespiegelt und verschoben werden könnten. An dieser Stelle erleben die Schüler jedenfalls, dass Rechnen nicht alles ist. Geometrie kann (unter Umständen) mehr leisten und noch dazu auf eine sehr einfache, *durchsichtige* Weise.

Bis hierhin war vom Pizzateorem keine Rede. Hätte man nun die Erbteilungsaufgabe gleich für ein kreisförmiges Grundstück formulieren sollen? Unseres Erachtens wäre das falsch, da die Schüler dann *rückwärts* alle die Schritte geführt werden müssten, die sie oben weitgehend *vorwärts* gegangen sind. Die Neuinterpretation des Ergebnisses als „Pizzateiler“ sollte gleichwohl nicht fehlen. Dabei genügt es hervorzuheben, dass der Kreuzungspunkt der Schneiden überall im einbeschriebenen Quadrat liegen darf. Wer aber Lust am puzzeln hat, den könnte man darauf hinweisen, dass der Kreis auch dann noch halbiert wird, wenn der Kreuzungspunkt direkt auf dem Rand liegt, weil in diesem Fall die Zerlegung besonders einfach ist.

Bemerkung zum Schluss: In den hier vorgegebenen Kontext würde die Halbierung von gleichseitigen Dreiecken oder Quadraten mit dem modifizierten Pizzateiler (4.2) gut passen, während für die entsprechende Halbierung von regulären Fünf-

und Sechsecken unbedingt ein DGS erforderlich wäre. Mit dessen Hilfe könnten die Schüler auch *selbständige „Explorationen“* vornehmen und zum Beispiel untersuchen, wie sich ein Rechteck oder auch ein Parallelogramm mittels eines passenden Schneiders halbieren lässt. Dass in diesem Fall die Schnitten zu den Mittellinien und den Diagonalen der jeweiligen Figur parallel sein müssen, „erklärt“ gewissermaßen nachträglich, worauf letztlich auch die Quadrathalbierung beruht. Der Einsatz eines DGS unterstützt den Schüler ganz wesentlich bei der Gewinnung und bei der Prüfung von Invarianzen, wie sie für unsere Diskussion des Pizzaproblems charakteristisch sind. Hat man eine entsprechende Zeichnung angefertigt, so kann man nicht nur die Veränderungen beim Bewegen eines Basispunktes beobachten und Vermutungen aufstellen, man kann auch (in Abhängigkeit vom DGS) Flächengrößen oder Längen bestimmen und z.B. summieren. Auf diese Weise erhält der Schüler eine Möglichkeit, Vermutung zu finden (wir haben z. B. die Invarianzen in 4.2 und 4.4 so gefunden). Wenn sich z. B. die Summe der Flächeninhalte von Sektoren bei beliebiger Bewegung eines Basispunktes nicht ändert, hat man starke Gründe, eine Invarianz anzunehmen. Noch leichter – und das ist sogar beweiskräftig – ist die Möglichkeit, eine Hypothese über eine Invarianz zu widerlegen, denn ein DGS erlaubt ja die Herstellung beliebig vieler Beispiele. Bei der Diskussion der Teilung von n -Ecken haben wir gesehen, dass u. U. viele Fallunterscheidungen nötig sind. Abbildung 9 zeigt z. B. eine von mehreren Situationen, die bei einem Sechseck auftreten können. Dann ist es mit Hilfe eines DGS verhältnismäßig einfach, die Fälle herauszufinden, zwischen denen unterschieden werden muss, und ggf. Flächenaufteilungen anzupassen. So erweist sich ein DGS als ein ausgezeichnetes Werkzeug zur Gewinnung bzw. zur Falsifizierung von Vermutungen und zur Unterstützung der Argumentation.

5.2 Das Pizzatheorem in der Sekundarstufe II

Der Analysisunterricht, wie er normalerweise in den Schulen praktiziert wird, ist vorwiegend auf die Anwendung formaler Techniken ausgerichtet. Die grundlegenden infinitesimalen Ideen, die zu ihrer Entwicklung geführt haben, werden dagegen viel zu selten angewendet. Man vermeidet bewusst Situationen, in denen das nötig oder sinnvoll wäre, und lässt die Schüler in dem Glauben, dass Analysis nur ein anderes Wort sei für Kurvendiskussion und Inhaltsberechnung, eine „Kurve“ stets den kartesischen Graphen einer Funktion meine und andere Kurven überhaupt nicht als mathematische Objekte existierten. Jede Gelegenheit, diese Fehlvorstellung zu korrigieren, sollte deshalb wahrgenommen werden, sofern der zeitliche und stoffliche Rahmen das auch zulässt. Das Pizzatheorem bietet diese Möglichkeit. Wie schon für die Sekundarstufe I gilt dabei, dass es nicht einfach den Schülern vorgesetzt, sondern in einen ihnen vertrauten Kontext eingebettet wird, die Häufung der Schwierigkeiten des unter 1 dargestellten Weges aber unbedingt vermie-

den werden sollte. Von daher fügt es sich gut, dass man auch von einem *Optimierungsproblem* aus starten kann, wie es die folgende Aufgabe zeigt (Abbildung 19).

In einer zylindrischen Buchse rotiert um einen festen Punkt P exzentrisch ein Doppelsektor, dessen begrenzende Radien einen festen Winkel α miteinander bilden. Die vier Radien werden während der Drehung mit Hilfe von eingebauten Federn wie Teleskopstabe stets fest an die Zylinderwand gedrückt. In welchen Positionen nimmt der Inhalt des Doppelsektors seinen maximalen und wann seinen minimalen Wert an, und wie gro sind diese?

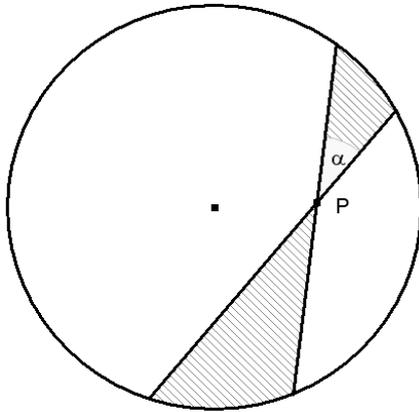


Abb. 19: Doppelsektor

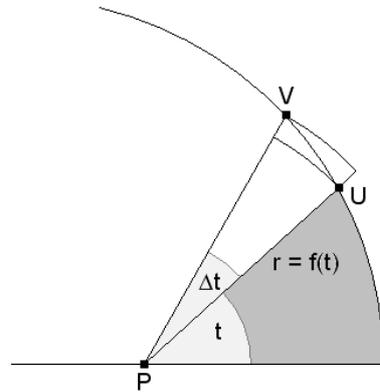


Abb. 20: Zur Berechnung des Doppelsektors

Zur Beantwortung der Frage ist offensichtlich die Kenntnis der Funktion für den Flächeninhalt des Doppelsektors in Abhängigkeit vom Drehwinkel notwendig. Dabei ist klar, dass eine Berechnung mit den bereits entwickelten Methoden der Integralrechnung wohl kaum in Frage kommt. Stattdessen wird man auf *eine der beiden Grundideen der Integralrechnung* zurückgreifen.

Wir wählen hier die Bestimmung der lokalen Flachenanderung⁹

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t}.$$

Dazu schätzen wir den Flächenzuwachs an Hand der Graphik in Abbildung 20 ab.¹⁰ Die Formel für den Flächeninhalt von Kreissektoren liefert unmittelbar die Abschätzung

⁹ Für die andere Grundidee der Riemannsumimation vergleiche Schupp [1995, 122].

¹⁰ Eine explizite Einführung von Polarkoordinaten ist nicht erforderlich und würde nur vom Wesentlichen ablenken.

$$\frac{1}{2}(f(t))^2 \cdot \Delta t \leq \Delta F \leq \frac{1}{2}(f(t + \Delta t))^2 \cdot \Delta t .$$

Aus dieser folgt wie üblich nach Division und Grenzübergang

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2}(f(t))^2$$

und damit

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{2}(f(\tau))^2 d\tau .$$

Das ist die Leibnizsche Sektorenformel. Wir bezeichnen nun die Winkelhalbierende von α als „Achse“ und messen den Drehwinkel t als Winkel zwischen der Achse und der Waagerechten (Nulllinie). Die in Formel (6) allgemein als Grenzen angegebenen Werte für den Polarwinkel des Doppelsektors sind nun

$$t_0 = t - \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad t_1 = t + \frac{\alpha}{2} .$$

Nach Formel (6), die ja auf der Sektorenformel beruht, ist der Inhalt des Doppelsektors dann

$$DS = a^2 \cdot \alpha + \frac{1}{2}d^2 (\sin(2t + \alpha) - \sin(2t - \alpha)) = a^2 \cdot \alpha + d^2 \sin \alpha \cos 2t , \quad (16)$$

das heißt, der Flächeninhalt des Doppelsektors verhält sich bis auf einen konstanten Summanden und konstante Faktoren wie die Kosinusfunktion des doppelten Drehwinkels. Demnach wird der maximale Flächeninhalt für $t = 0$ angenommen und der minimale für $t = \pi/2$. Die zugehörigen Werte sind $a^2 \cdot \alpha + d^2 \sin \alpha$ und $a^2 \cdot \alpha - d^2 \sin \alpha$, und es fällt sofort auf, dass sie nach oben und unten um denselben Betrag von $2a^2 \cdot \alpha$ abweichen.

Das Besondere dieses Ergebnisses veranlasst uns jetzt, gewissermaßen den „Spieß umzukehren“. Wir betrachten nun *zwei* Doppelsektoren, deren Achsen wie bei den beiden extremalen Positionen eines Doppelsektors senkrecht aufeinander stehen (Abbildung 21). Für die zugehörigen t -Werte gilt dann

$$t' = t + \frac{\pi}{2}$$

und für die Flächeninhalte DS bzw. DS' gemäß der oben hergeleiteten Formel

$$DS = a^2 \cdot \alpha + d^2 \sin \alpha \cos 2t$$

bzw.

$$DS' = a^2 \cdot \alpha + d^2 \sin \alpha \cos(2t') = a^2 \cdot \alpha - d^2 \sin \alpha \cos 2t .$$

Auch ihre Summe ist nur vom Radius des Kreises und vom Winkel des Doppelsektors abhängig. Damit haben wir das folgende bemerkenswerte Ergebnis erzielt:

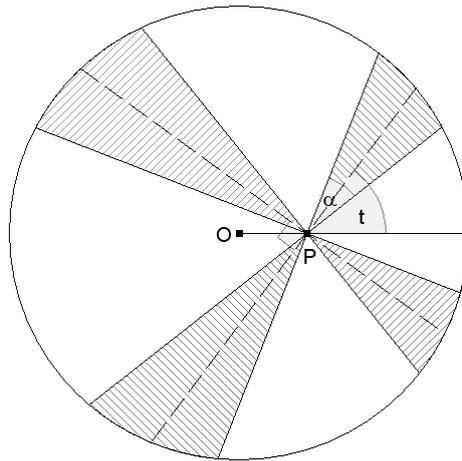


Abb. 21: Zwei orthogonale Doppelsektoren

Wenn die Achsen zweier Doppelsektoren bei gleichem Kreuzungspunkt P und gleichem Öffnungswinkel α rechte Winkel mit einander bilden, dann ist die Summe ihrer Flächeninhalte $2a^2 \cdot \alpha$ unabhängig von der Position, die die Doppelsektoren gerade einnehmen, und unabhängig vom Abstand d , den der Kreuzungspunkt vom Kreismittelpunkt hat.

Im Gegensatz zu dem speziellen Fall $\alpha = \pi/4$ lässt sich diese Aussage in ihrer Allgemeinheit leider nicht mehr geometrisch begründen, was letztlich zeigt, dass die Analysis die mächtigere Methode darstellt. Der Pizzateiler als spezielle und überraschende „Anwendung“ sollte dennoch (kurz) diskutiert werden, am besten zusammen mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereich der obigen Aussage. Aus der obigen Rechnung geht nämlich nicht hervor, warum sie auch noch zutrifft, wenn der Kreuzungspunkt der beiden Doppelsektoren auf der Peripherie des Kreises liegt. Zur Begründung muss man sich einfach nur vorstellen, dass das Kreuz aus zwei Doppelsektoren so lange *stetig* verschoben wird, bis P auf den Rand fällt. Da die Flächeninhalte sich dabei ebenfalls *stetig ändern*, gilt die Aussage dann auch im *Grenzfall*.

Bei dieser Überlegung kommt eine *zentrale Idee der Analysis*¹¹ zum Tragen, die Schüler, auf formales Rechnen konditioniert, vermutlich sehr überraschen wird. Das Pizzateorem bietet die Möglichkeit, sie exemplarisch – etwa unter dem Aspekt der *Heuristik*¹² – zu thematisieren.

¹¹ Vgl. Klika [2003].

¹² Tietze [1997, 42] spricht auch von einer „bereichsspezifischen Strategie“.

Der Doppelsektor liefert noch ein weiteres interessantes Beispiel dafür, wie man mit Hilfe infinitesimaler Vorstellungen unter Umständen Probleme lösen kann, die mit den üblichen Techniken überhaupt nicht angreifbar wären. Wir wollen die Länge der berührenden Bögen, d. h. die Summe der Bogenlängen der beiden Teilsektoren, ermitteln. Hierbei handelt es sich um ein Problem der *Modellierung*, nämlich um die „Anwendung [eines] Begriffs auf neue Sachsituationen“¹³. Zur Lösung könnte man zunächst daran denken, eine der Sektorformel entsprechende Bogenlängenformel aufzustellen. Das würde auf die Integration von

$$\sqrt{(f'(t))^2 + (f(t))^2} \quad \text{mit} \quad f(t) = \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t} \mp d \cos t$$

hinauslaufen und wäre offenbar höchstens numerisch möglich. Nun ist aber bekannt (und schon oft dargestellt worden¹⁴), dass sich unter gewissen Umständen die Bogenlänge mittels einfacher infinitesimaler Überlegungen aus der zugehörigen Flächeninhaltsformel herleiten lässt. Diesen Gedanken nehmen wir auf und wenden ihn auf den Doppelsektor an.

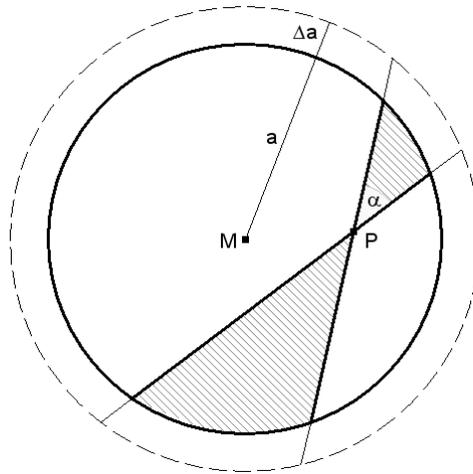


Abb. 22: Variation des Radius

Dazu betrachten wir jetzt den Flächeninhalt des Doppelsektors bei *konstanter* t als Funktion des Kreisradius a und fragen nach der Flächenänderung in Abhängigkeit von a . Abbildung 22 zeigt: Vergrößert man den Radius um Δa , dann vergrößert sich die Fläche um ein Stück des Kreisringes, der – das ist jetzt entscheidend! –

¹³ Vgl. vom Hofe [2003, 7].

¹⁴ Vgl. zum Beispiel Blum/Kirsch [1996].

überall die *gleiche* Breite aufweist. Die Flächenänderung $DS(a + \Delta a) - DS(a)$ ist deshalb in guter Näherung gleich der Gesamtbogenlänge $B(a)$ mal Δa . Im Grenzfalle für $\Delta a \rightarrow 0$ gilt daher $B(a) = DS'(a) = 2a \cdot \alpha$, da der *konstante* Summand $d^2 \sin \alpha \cos 2t$ beim Ableiten fortfällt. Überraschenderweise ist also nicht nur der Flächeninhalt des Doppelsektors, sondern auch die Summe seiner beiden Bogenlängen von t unabhängig. Beide ändern sich bei der Drehung nicht.

Die nachträgliche Reflexion („Wie sind wir vorgegangen?“, „Was haben wir dabei gelernt?“) gibt schließlich noch Gelegenheit, über den Nutzen angepasster Koordinatensysteme bei mathematischen Modellierungen zu sprechen. Wir haben mit *Polar*koordinaten gearbeitet, so wie seinerzeit Archimedes, als er „seine“ Spirale quadriert hat, lange bevor der Begriff Heimatrecht in der Mathematik bekam. Die *archimedische Spirale*, also das *polare* Bild einer linearen Funktion mit der Gleichung $r = f(t) = at + b$, liefert auch das einfachste Beispiel für ihren Nutzen (Abbildung 23). Denn anders als beim Kreis, der auch als kartesischer Graph beschrieben werden kann, besitzt sie keine solche Darstellung, weil t aus dem System der beiden Gleichungen $x = f(t) \cos t$ und $y = f(t) \sin t$ nicht eliminierbar ist. Trotzdem ist es möglich, die in der Graphik grau gefärbte „Ordinatenfläche“ zu berechnen. Die Leibnizsche Sektorformel liefert den Inhalt des von den beiden gestrichelten Radien begrenzten Flächenstückes, und dazu addiert man die Inhalte der beiden Randdreiecke.

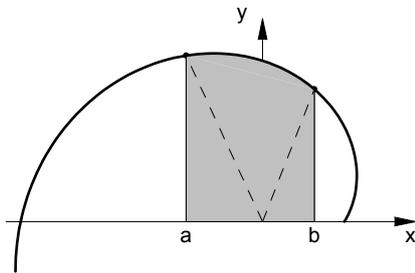


Abb. 23: Archimedische Spirale

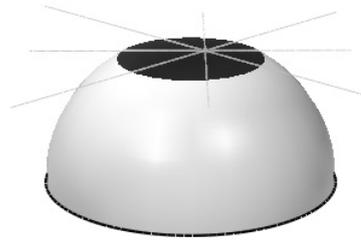


Abb. 24: Puddingteilung

Zu guter Letzt: Wie halbiert man einen Pudding? Das *Cavalierische Prinzip* verrät es uns (Abbildung 24): Der Pudding habe die Form einer *Kugelschicht*. Dann wird jeder Parallelschnitt vom Pizzaschneider halbiert, sofern der Kreuzungspunkt seiner Schneiden dabei stets im Innern der Parallelkreise verbleibt, gleichgültig, auf welcher Kurve er entlang geführt wird!

$$\sum_{i=1}^k \sin(i \cdot \alpha + \beta) = \frac{\sin\left(\frac{k\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sin\left(\frac{(k+1)\alpha}{2} + \beta\right).$$

Literatur

- Blum, Werner und Kirsch, Arnold [1996]: Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. In: *mathematik lehren*, Heft 78, 60–64
- Bruder, Regina [2000]: Mit Aufgaben arbeiten. Ein ganzheitliches Konzept für eine andere Aufgabekultur. In: *mathematik lehren*, Heft 101, 12–17
- Herget, Wilfried [2000]: Rechnen können reicht ... eben nicht. In: *mathematik lehren*, Heft 100, 4–10
- Hilbert, David: [1972]: Grundlagen der Geometrie. Stuttgart: Teubner
- vom Hofe, Rudolf [2003]: Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: *mathematik lehren*, Heft 118, 4–8
- Klika, Manfred [2003]: Zentrale Ideen – echte Hilfen. In: *mathematik lehren*, Heft 119, 4–7
- Kroll, Wolfgang und Vaupel, Jürgen [1986]: Grund- und Leistungskurs Analysis Band 2. Bonn: Dümmler
- Mabry, Rick and Deiermann, Paul [2009]: Of Cheese and Crust: A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results. In: *The Mathematical Association of America, Monthly*, 423–438
- Schupp, Hans [2000]: Geometrie in der Sekundarstufe II. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 21, Heft 1, 50–66
- Schupp, Hans [2002]: Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker
- Schupp, Hans und Dabrock, Heinz [1995]: Höhere Kurven. Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 28. Zürich: BI Wissenschaftsverlag
- Sielaff, Klaus und Usbeck, Friedrich W. [1997]: Hamburger Schülerzirkel Mathematik 1994–1996. Sammlung der Probleme des Monats. Hamburg
- Tietze, Uwe-Peter, Klika, Manfred, Wolpers, Hans [1997]: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg

Anschrift der Verfasser

Prof. Wolfgang Kroll
In der Lache 5
35094 Lahntal
kroll.wolfgang@t-online.de

Prof. Dr. Joachim Jäger
Neugrabenweg 55
66123 Saarbrücken
hajo.jaeger@t-online.de

Eingang Manuskript: 07.10.2009