Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung – Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie

von

Christoph Ableitinger, Essen & Hans Humenberger, Wien

Kurzfassung: Der Artikel zielt darauf ab, die beiden wohl prominentesten Lösungsmethoden der Spieltheorie – das Nash-Gleichgewicht und die Minimax-Lösung – für den Schulunterricht der Sekundarstufe II fruchtbar zu machen. Beide Konzepte bilden menschliche Entscheidungsmechanismen in alltäglichen (Konflikt-)Situationen ab, an denen zwei oder mehrere Personen beteiligt sind. Die dabei zugrunde gelegten Entscheidungskriterien unterscheiden sich wesentlich voneinander. Während man beim Nash-Gleichgewicht nach maximalem eigenen Nutzen in Abhängigkeit vom Verhalten der anderen Konfliktparteien strebt, stellt die Minimax-Lösung eine eher risikoscheue Sicherheitsvariante in Entscheidungssituationen dar. An einem einfachen Zweipersonenspiel werden die sich daraus ergebenden Konsequenzen vergleichend analysiert. Dabei ergibt sich in ganz natürlicher Weise eine verblüffende Dualität, die von Schüler(inne)n selbst entdeckt werden kann. Technisch kommt die Bearbeitung im Unterricht mit elementaren Methoden der Schulmathematik aus, der intendierte Fokus ist aber ein prozessorientierter, d. h. er liegt auf Tätigkeiten wie dem Interpretieren, Argumentieren, Darstellen sowie auf dem konzeptuellen Verständnis der beiden Methoden.

Abstract: The article wants to analyse the two most important principles in game theory – Nash equilibrium and Minimax solution – in order to teach them in upper secondary. Both concepts reflect human ways of coming to decisions in every day (conflict-)situations in which two or more persons are participating. The considered criteria are differing to a great extent. On the one hand the Nash equilibrium solution wants to maximise the own benefit depending on the behaviour of the other „parties“, on the other hand the Minimax solution is a more risk-averse principle. Presenting a simple two persons' game the consequences are analysed in the article. Here a striking duality arises naturally which can be discovered by students themselves. Teaching this topic requires technically only elementary methods of school mathematics but the intended focus lies primarily on processes like interpreting, arguing, displaying and on the real comprehension of the concepts of the two methods.

1 Einleitung

Das ganze Leben besteht aus Entscheidungen. Manche davon fallen uns leicht, andere sehr schwer, manche treffen wir aus dem Bauch heraus, andere überhaupt nie. Die so genannte Spieltheorie versucht seit etwa 60 Jahren, menschlichem Handeln auf die Schliche zu kommen und entwickelt Modelle und Theorien, die menschliche Entscheidungen aus einer rationalen Sichtweise heraus erklären, beschreiben und manchmal auch vorhersagen sollen. Es gibt dazu mittlerweile eine Reihe von Konzepten, von denen sich für die Beschreibung von Konfliktsituationen mit mehreren beteiligten Personen zwei in besonderer Weise etabliert haben: Während das *Minimax-Konzept* eher risikoscheues Verhalten abbildet, das großen Verlusten aus dem Weg gehen möchte, gibt das *Nash-Konzept* vor, wie auf bestimmte Handlungen des jeweiligen Gegenspielers reagiert werden sollte, um den eigenen Nutzen zu maximieren (siehe etwa Peters 2008, S. 24 ff bzw. S. 33 ff).

Wir wollen beide Konzepte anhand des so genannten „Schwarzfahrerspiels" vorstellen und besonders auf einen Vergleich dieser beiden Konzepte hinarbeiten. Dabei fassen wir uns beim Nash-Konzept etwas kürzer, da dieses z. B. auch in Ableitinger 2009 detailliert beschrieben ist (eine formalisierte Definition des Nash-Gleichgewichts findet man z. B. in Wiese 2002, S. 178). Das Thema Schwarzfahren wurde aus spieltheoretischer Sicht auch in Reck 2008 behandelt, der Fokus ist dabei allerdings auf die ökonomische Frage gerichtet, ob sich Schwarzfahren prinzipiell lohnt und weniger auf die didaktische Reflexion der verwendeten Lösungskonzepte.

2 Das Schwarzfahrerspiel

Wir werden unser Vorhaben an einem sehr einfachen Spiel mit relativ restriktiven Modellannahmen entwickeln. Dabei stellen wir uns folgende Situation vor:

Fahrgast Franz (FF) fährt mit öffentlichen Verkehrsmitteln und hat die Wahl zwischen den beiden Strategien *Schwarzfahren* und *Zahlen*. Kontrolleur Karl (KK) hat die beiden Möglichkeiten *Kontrollieren* und *Nicht kontrollieren*. Dieses simpel anmutende Spiel basiert auf folgenden Annahmen:

- FF fährt täglich in derselben Straßenbahn.
- FF entscheidet sich jeden Tag neu dafür, ein Ticket zu kaufen oder nicht. Er sieht also von der Möglichkeit ab, ein Wochen-, Monats- oder Jahresticket zu erwerben.
- KK kann sich täglich entscheiden, FF in dieser Straßenbahn zu kontrollieren oder nicht.
- Wir betrachten lediglich die Situation zwischen diesen beiden Personen und schließen dadurch alle anderen Fahrgäste bzw. Kontrolleure aus unseren Überlegungen aus.

Selbstverständlich könnte man das Schwarzfahrerspiel wesentlich realistischer formulieren, für unsere weiteren Überlegungen ist es aber (auch aus didaktischer Sicht) sinnvoll, sich zunächst auf dieses „Duell" mit klar definierten Regeln zu beschränken. Es lassen sich – wie man gleich sehen wird – daran die beiden Konzepte „Nash-Gleichgewicht“ und „Minimax-Lösung“ in ihrer Eigentümlichkeit am besten herausarbeiten. Uns geht es gar nicht um eine möglichst realistische Gesamtbeschreibung des Themas Schwarzfahren mit all seinen ökonomischen Aspekten, sondern vielmehr darum, die in den beiden Akteuren wirksam werdenden Mechanismen mit mathematischen, spieltheoretischen Methoden zu erfassen. Man darf also nicht erwarten, dass man nach der Lektüre dieses Aufsatzes Empfehlungen an die Verkehrsbetriebe der jeweils eigenen Stadt geben könnte, wie häufig diese kontrollieren sollten. Die Leser(innen) sollen aber durchaus dazu befähigt werden, die im Folgenden beschriebenen Entscheidungsmechanismen in ganz alltäglichen Situationen zu identifizieren.

Die untenstehende Bimatrix[1] in Tabelle 1 gibt die so genannten Auszahlungen an die beiden beteiligten Personen an, in den einzelnen Feldern links unten stehen jeweils die Auszahlungen für FF und rechts oben für KK. Man nennt Spiele, die man durch solche Bimatrizen darstellen kann und bei denen die Entscheidungen der einzelnen Personen nicht in zeitlicher Abfolge, sondern unabhängig voneinander erfolgen, Spiele in *Normalform* (siehe z. B. Ortmanns 2008, S. 73 ff oder Rieck 2008, S. 152 ff).

		Karl	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Franz	fährt schwarz	3 −8	−2 1
	zahlt	−1 0	0 −1

Tabelle 1: Bimatrix mit den Auszahlungen für FF und KK

Diese Auszahlungen geben den „subjektiven Nutzen“ in fiktiven Einheiten an, den die beiden Akteure selbst der jeweiligen Situation zuschreiben. Große positive Werte bedeuten also, dass der jeweilige Spieler die Situation als besonders gut beurteilt, kleine negative Werte hingegen stehen für unangenehme, schlechte Situationen. Diese Einheiten könnten Geldeinheiten sein, man könnte dabei aber auch an andere Kategorien denken (z. B. positive bzw. negative Emotionen, Zeitgewinn bzw. -verlust, usw.).

[1] Die Bimatrix ist eine in der Spieltheorie übliche und sehr übersichtliche Darstellung der Auszahlungen bei Zweipersonenspielen (siehe z. B. Holler 2006, S. 3).

Wie das Wort „subjektiv“ schon andeutet, könnten diese Nutzenwerte für andere Personen ganz anders aussehen. Es lohnt sich, zu der Situation passende Matrixeinträge im Unterricht gemeinsam mit den Schüler(inne)n zu entwickeln, ihre Sinnhaftigkeit zu diskutieren oder zumindest die von der Lehrkraft vorgegebenen Nutzenwerte zu interpretieren. Dabei können sowohl ökonomische wie auch moralische Argumente berücksichtigt werden. Hier bietet sich eine Chance, für den Unterricht wichtige Forderungen nach Interpretieren und Argumentieren zu realisieren. Diese sind in sehr vielen Präambeln zu Lehrplänen, in vielen fachdidaktischen Literaturstellen und in Formulierungen zu Standards zu finden (in Deutschland z. B. Blum/Drüke-Noe/Hartung/Köller, 2006, S. 35 ff; in Österreich z. B. IDM-Klagenfurt 2007, S. 12).

Für die spieltheoretische Analyse bzw. genauer gesagt für die qualitative Lösung solcher Spiele kommt es nämlich ohnehin nicht auf die konkrete Wahl der Einträge an. Wichtig dabei ist nur, dass die Präferenzordnung zwischen den Einträgen eine bestimmte Reihenfolge hat, dass also „schwarzfahren und nicht kontrolliert werden“ für Franz besser ist als „zahlen und kontrolliert werden“, diese Strategienkombination wiederum besser als „zahlen und nicht kontrolliert werden“, welche schließlich besser als „schwarzfahren und kontrolliert werden“ ist (siehe dazu Ableitinger/Hauer-Typpelt 2010). Analoges gilt für die Nutzenwerte von Karl. Wir haben uns für die Einträge in Tabelle 1 entschieden, weil sie uns erstens recht plausibel vorkommen (auch hinsichtlich ihrer Abstände zueinander, was zwar keine qualitative, wohl aber eine quantitative Auswirkung auf die Lösung hat) und weil sie zweitens zu Berechnungen führen, die leicht im Kopf durchgeführt werden können und so den Fokus unserer Ausführungen nicht unnötig auf das Operieren lenken.

Bemerkung: Von moralischen Aspekten kann man hier entweder bewusst ganz absehen (*Schwarzfahren* ist moralisch ja klarer Weise verwerflich: Man nimmt eine Leistung in Anspruch, die normalerweise auch etwas kostet, bezahlt aber nicht dafür. So schädigt man das System und schmarotzt: die anderen bezahlen für einen dabei quasi mit), oder man könnte solche moralischen Aspekte auch in der Auszahlungsmatrix tendenziell berücksichtigen (niedrigere Auszahlungen für FF in der Zeile *Schwarzfahren*).

Wenn man sich darauf verständigt hat, die gewählten Einträge als festgeschrieben zu akzeptieren, kann man den nächsten Schritt zur Lösung dieses Spiels wagen. Und zwar durch die Beschäftigung mit folgenden Fragen: Wie sollte man in dieser Situation als Fahrgast bzw. Kontrolleur agieren? Nach welchen Kriterien soll man entscheiden, welche der beiden Strategien man an einem bestimmten Tag wählt?

3 Das Nash-Konzept

Damit das *prozesshafte Betreiben von Mathematik* (siehe z. B. Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001, Müller/Steinbring/Wittmann 2004) nicht nur frommer Wunsch bleibt, sondern tatsächlich im Unterricht realisiert wird, ist es unerlässlich, die Schüler(innen) an diesem Prozess des Erkenntnisgewinns teilhaben zu lassen. Spieltheoretischer Unterricht – so wie wir ihn verstehen – erlaubt, dass sich die Lernenden selbst an der Konzeption einer (oder mehrerer) Lösungsstrategie(n) versuchen können. Das Schöne dabei ist, dass intuitiv naheliegende Herangehensweisen in dieser Schwarzfahrersituation recht einfach entweder zum Nash-Konzept oder aber zum Minimax-Konzept hinführen.

Eine typische Schüler(innen)antwort auf die eben gestellten Fragen könnte nämlich lauten: „Naja, es kommt darauf an, wie häufig der Kontrolleur normalerweise kontrolliert. Danach würde ich entscheiden, ob ich es riskiere, schwarzzufahren oder nicht!“. Eine andere Position könnte hingegen durch „Ich bin eher vorsichtig. Ich weiß schon, dass ich vermutlich in vielen Fällen mein Ticket unnötig kaufen werde, weil so selten kontrolliert wird. Aber das Risiko, beim Schwarzfahren erwischt zu werden, ist mir dann doch zu groß!“ ausgedrückt werden. Im Wesentlichen wird sich eine Diskussion im Spannungsfeld dieser beiden Argumente bewegen. Und die Kerne dieser beiden Aussagen bilden die Grundlage für das Nash- bzw. das Minimax-Konzept.

		Karl	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Franz	fährt schwarz	**3** −8	−2 **1**
	zahlt	−1 **0**	**0** −1

Tabelle 2: Bimatrix mit den Auszahlungen für FF und KK
– die besten Antworten sind fett markiert

Beim Nash-Konzept geht es grob gesprochen darum, jene Strategie zu spielen, die die *beste Antwort* auf die gegnerische Strategie darstellt. So schaut FF auf die Spaltenmaxima seiner Auszahlungen und KK auf die Zeilenmaxima seiner Auszahlungen (z. B. ist *Zahlen* (FF) die beste Antwort auf *Kontrollieren*, da $0 > -8$ gilt und *Kontrollieren* (KK) die beste Antwort auf *Schwarzfahren*, da $3 > -2$ gilt). Wir vermerken diese Information, indem wir die jeweils besten Antworten in der Bimatrix fett markieren (Tabelle 2). Hier spielt also schon die erste Schüler(innen)-aussage eine Rolle, indem man – je nachdem mit welchem Verhalten des „Gegners“ man zu rechnen hat – immer die Strategie mit dem unter dieser Voraussetzung höchsten Nutzen wählt.

Ein *Nash-Gleichgewicht* ist nun eine besondere Strategienkombination, bei der sowohl der erste Spieler die beste Antwort auf die Strategie des zweiten Spielers als auch umgekehrt der zweite Spieler die beste Antwort auf die Strategie des ersten Spielers spielt (vgl. Wiese 2002, S. 178). Hier ist aus didaktischer Sicht zu erwähnen, dass diese Art der Optimierung des eigenen Nutzens dem Bild der Fundamentalen Idee des „Optimierens“ ein wichtige, neue Facette verleiht (vgl. dazu etwa Humenberger/Reichel 1995, S. 181 ff oder Schupp 1992). Das Prinzip des Optimierens kommt im Unterricht oft erstmalig und ausschließlich bei der Differentialrechnung vor, was u. E. bedauerlich ist und einem authentischen Bild von Mathematik nicht entspricht. Die Idee des Optimierens sollte sich vielmehr wie ein roter Faden durch das Curriculum ziehen, die Methode mit der Nullstelle der 1. Ableitung reiht sich dann in diesen Reigen ein und ist eine der mächtigsten Methoden, aber eben nicht die einzige und vor allem nicht die erste, die Schüler(innen) kennen lernen. Dass das Optimieren von unterschiedlichen, subjektiven Standpunkten aus auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann, werden wir spätestens beim Vergleich mit dem Minimax-Konzept sehen.

Wie man sieht, treffen beim Schwarzfahrerspiel in keinem der vier Felder der Bimatrix beste Antworten aufeinander, es gibt demnach kein Nashgleichgewicht in reinen Strategien[2]. Bei jedem Ausgang des Spiels hat einer der beiden Grund zu Ärger, am dramatischsten bei der Kombination *Schwarzfahren*/*Kontrollieren* zu sehen. FF wird sich dann natürlich denken: „Wenn ich gewusst hätte, dass KK kontrolliert, dann wäre ich selbstverständlich nicht schwarzgefahren.“ Spielt man dieses Spiel öfter, so ist es aus spieltheoretischer Sicht also sicher nicht gut, immer dieselbe Strategie zu benutzen, denn dann kann sich der Gegner darauf leicht einstellen und ständig die beste Antwort auf diese Strategie wählen. Es ist also selbstverständlich ratsam, die beiden zur Verfügung stehenden Strategien in einer gewissen Weise zu mischen. Auch dieses Hinwenden zum wiederholten Spiel[3] kann aus den beiden Antworten von Schülerinnen und Schülern gewonnen werden. Dort war ja die Rede von „wie häufig er normalerweise kontrolliert“ bzw. von „so selten“,

[2] Man nennt die beiden Strategien, die den Spielern jeweils zur Verfügung stehen *reine Strategien*. Im Gegensatz dazu gibt es noch die so genannten *gemischten Strategien*, die aus dem Mischen von reinen Strategien entstehen (vgl. dazu Amann 1999, S. 13 ff.).

[3] Zusätzliche Modellannahme: Jedem einzelnen Spiel liegt dabei die Auszahlungsmatrix aus Tabelle 1 zugrunde. Die Einträge in dieser Matrix bleiben also über die Zeit hin konstant.

zwei Formulierungen, die auf die Wiederholung ein und desselben Spiels hindeuten. Die Betrachtung des wiederholten Spiels ergibt sich also ganz natürlich. Niemand würde an dieser Stelle – außer er/sie ist schon mit anderen spieltheoretischen Überlegungen vertraut, bei denen das einmalige Spiel sinnvoll ist – auf die Idee kommen, das Schwarzfahrerspiel als *ein* isoliertes Ereignis zu betrachten. Und gerade diese Wiederholbarkeit liefert den Schlüssel zu einer erfolgreichen Analyse des Spiels (eine fachliche Perspektive auf wiederholte Spiele gibt z. B. Sieg 2005, S. 42 ff).

3.1 Nashanalyse des Spiels aus der Sicht des FF

Die Nashanalyse liegt also sehr nahe an einer intuitiven Vorgangsweise, FF kann sich sinngemäß denken: „Wenn KK sehr häufig kontrolliert, dann ist es sicher besser zu zahlen, wenn er so gut wie nie kontrolliert, dann ist für mich schwarzfahren besser“ (Moral außer Acht gelassen).

		Karl	
		q kontrolliert	$1-q$ kontrolliert nicht
Franz	fährt schwarz	**3** −8	−2 **1**
	zahlt	−1 **0**	**0** −1

Tabelle 3: Bimatrix – KK kontrolliert mit relativer Häufigkeit q

Wenn man die relative Häufigkeit, mit der KK kontrolliert, mit q bezeichnet (Tabelle 3), so wird es für FF einen „kritischen“ Wert q_{Nash} geben, ab dem es besser ist zu bezahlen. Diesen kritischen Wert des „Fremdparameters“ q versucht FF herauszufinden, um dann so verfahren zu können: Wenn FF die tatsächliche Kontrollhäufigkeit q von KK (z. B. aus langer Erfahrung) kennt, wird er diesen Wert mit dem kritischen q_{Nash} vergleichen und bei $q > q_{\text{Nash}}$ lieber *Zahlen*, bei $q < q_{\text{Nash}}$ *Schwarzfahren* wählen.

Zu diesem kritischen Wert des Fremdparameters q kann FF leicht kommen, indem er seine durchschnittliche Auszahlung[4] u_F in Abhängigkeit von q betrachtet, und

[4] Die Begriffe „relative Häufigkeit“ und „durchschnittliche Auszahlung“ bzw. „Auszahlung auf lange Sicht“ ermöglichen einen Unterricht, der ohne Konzepte der Wahrschein-

zwar in den beiden für ihn möglichen Fällen (*Schwarzfahren*, *Zahlen*). Z. B. hat er beim Schwarzfahren mit Wahrscheinlichkeit q eine Auszahlung von –8 und mit Wahrscheinlichkeit 1 – q eine Auszahlung von 1, insgesamt also folgende durchschnittliche Auszahlung zu erwarten[5]:

- *Schwarzfahren*: $u_F(q) = (-8) \cdot q + 1 \cdot (1-q) = 1 - 9q$
- Analog *Zahlen*: $u_F(q) = 0 \cdot q + (-1) \cdot (1-q) = q - 1$

Das Aufstellen dieser beiden Terme für die durchschnittlichen Auszahlungen kann didaktisch vorbereitet werden, indem man Schüler(innen) überlegen lässt, wie man zu einem „mittleren" („durchschnittlichen") Wert einer Größe kommt, wenn diese z. B. in 30% der Fälle (allgemein: q) den Wert –8 und in 70% der Fälle (allgemein: 1 – q) den Wert 1 annimmt.

Zeichnet man beide Graphen dieser linearen Funktionen $u_F(q)$, so erhält man Abbildung 1.

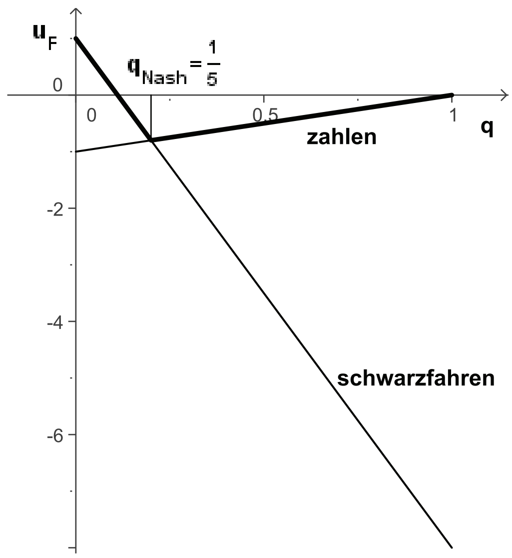

Abbildung 1: Erwartete Auszahlung an FF in Abhängigkeit seines Fremdparameters q

lichkeitstheorie auskommt. Will man aber gerade eine mögliche Anbindung an die Wahrscheinlichkeitstheorie betonen, so können alternativ auch die Begriffe „Wahrscheinlichkeit" für q und „Erwartungswert" für $u_F(q)$ verwendet werden.

5 „Erwarten" ist hier in dem Sinne gemeint, dass die relative Häufigkeit q aus der Vergangenheit „repräsentativ" ist für das nächste Spiel: An dieser Stelle kann sich in natürlicher Weise ein intuitives Verständnis frequentistischer Wahrscheinlichkeit entwickeln. Dafür ist der explizite Begriff des Erwartungswertes aber noch nicht unbedingt nötig.

Man rechnet leicht den Schnittpunkt dieser beiden Geraden aus, dieser liegt bei $q_{\text{Nash}} = \frac{1}{5}$. Die beiden fett gezeichneten oberen Abschnitte kennzeichnen dabei die höhere durchschnittliche Auszahlung: Für $q < \frac{1}{5}$ liegt die Gerade von *Schwarzfahren* höher, hier ist also diese Strategie beste Antwort. Für $q > \frac{1}{5}$ liegt die Gerade von *Zahlen* höher, in diesem Fall ist also diese Strategie zu wählen.

Wenn FF weiß, mit welcher relativen Häufigkeit KK die Fahrgäste kontrolliert (q), so kann er – je nachdem ob $q \gtrless \frac{1}{5}$ gilt – entsprechend reagieren und hat das anfangs erklärte Ziel erreicht, nämlich „die beste Antwort zu finden".

Obgleich in dieser Art der Formalisierung der Situation und der anschließenden Berechnung relativ wenige innermathematische Voraussetzungen gebraucht wurden (lineare Gleichungen, relative Häufigkeiten, eventuell Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, funktionale Abhängigkeiten), werden diese aber doch wiederholt und sinnvoll miteinander vernetzt. So verstanden kann also spieltheoretischer Unterricht auch dazu beitragen, im herkömmlichen Unterricht häufig isoliert nebeneinander stehende Inhalte auf natürliche Weise miteinander in Beziehung zu bringen.

3.2 Nashanalyse des Spiels aus der Sicht des KK

Für KK funktioniert die Analyse natürlich analog. Er kann sich sinngemäß denken: Wenn FF sehr häufig schwarzfährt, dann ist es sicher besser zu kontrollieren, wenn er ohnehin so gut wie nie schwarzfährt, dann brauche ich wohl nicht zu kontrollieren.

			Karl	
			kontrolliert	kontrolliert nicht
Franz	p	fährt schwarz	−8 / **3**	**1** / −2
	$1-p$	zahlt	**0** / −1	−1 / **0**

Tabelle 4: Bimatrix – FF fährt mit relativer Häufigkeit p schwarz

D. h. je nach Schwarzfahrhäufigkeit p von FF (Fremdparameter aus der Sicht von KK; Tabelle 4) und dem kritischen Wert p_{Nash} wird er sich für eine der beiden Strategien entscheiden. Den kritischen Wert p_{Nash} erhält er wieder durch Betrachten seiner eigenen durchschnittlichen Auszahlungen in Abhängigkeit des Fremdparameters p für seine beiden Möglichkeiten *Kontrollieren* bzw. *Nicht kontrollieren*:

- *Kontrollieren*: $u_K(p) = 3 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 4p-1$
- *Nicht kontrollieren*: $u_K(p) = (-2) \cdot p + 0 \cdot (1-p) = -2p$

Als Funktionsgraphen ergeben sich jene in Abbildung 2 und der Schnittpunkt liegt bei $p_{\text{Nash}} = \frac{1}{6}$. Für $p < \frac{1}{6}$ liegt die Gerade von *Nicht kontrollieren* höher, für $p > \frac{1}{6}$ ist *Kontrollieren* besser.

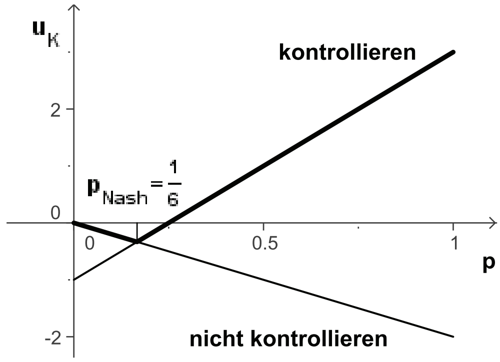

Abbildung 2: Erwartete Auszahlung an KK in Abhängigkeit seines Fremdparameters *p*

Wenn KK weiß, mit welcher relativen Häufigkeit FF schwarzfährt (*p*), so kann er – je nachdem ob $p \gtrless \frac{1}{6}$ gilt – entsprechend reagieren und auch er hat das Ziel nach dem Nash-Konzept erreicht.

Beide Ergebnisse lassen sich sehr übersichtlich in der so genannten „Graphik der Beste-Antwort-Linien" darstellen (Abbildung 3). Hier ist noch einmal schön abzulesen: Für $q < \frac{1}{5}$ soll FF $p = 1$ wählen (*Schwarzfahren* = SF) und für $q > \frac{1}{5}$ soll er $p = 0$ wählen (*Zahlen* = Z). Für $q = \frac{1}{5}$ ist *Schwarzfahren* für ihn genau so gut bzw. schlecht wie *Zahlen*, dies wird durch die gestrichelte Linie ausgedrückt. Analog für den Parameter *p* und KK: Für $p < \frac{1}{6}$ soll KK $q = 0$ wählen (*Nicht kontrollieren* = nicht K) und für $p > \frac{1}{6}$ soll er $q = 1$ wählen (*Kontrollieren* = K). Für $p = \frac{1}{6}$ ist *Kontrollieren* für ihn genau so gut bzw. schlecht wie *Nicht kontrollieren* (für eine ausführlichere Erklärung der Graphik der Best-Antwort-Linien und didaktisch-methodische Umsetzungsmöglichkeiten im Unterricht siehe z. B. Ableitinger/Hauer-Typpelt 2008, für eine fachliche Perspektive vgl. Illing 2006, S. 67 ff).

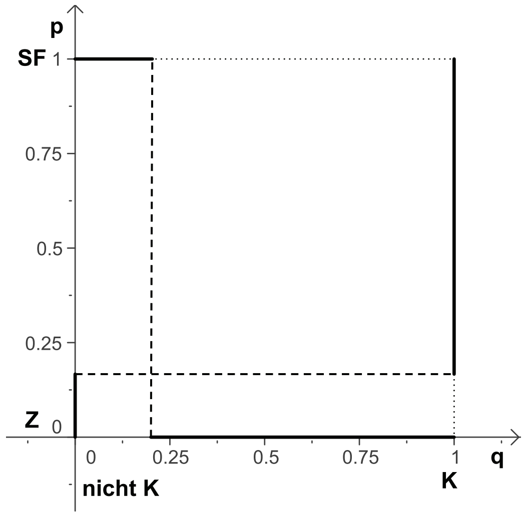

Abbildung 3: Graphik der Beste-Antwort-Linien

Das Darstellen von Sachverhalten und das verständige Umgehen mit diesen Darstellungen ist eine besonders wichtige Kompetenz, die in vielen Lehrplänen und Formulierungen zu so genannten Bildungsstandards gefordert wird. Wir haben es mittlerweile schon mit mehreren Darstellungsformen zu tun gehabt: der Bimatrix, den Auszahlungsfunktionen in obigen Grafiken und jetzt auch mit der Beste-Antwort-Grafik. Alle haben ihre je eigenen Vorzüge und unterschiedlichen Informationsgehalte. Das birgt Chance und Gefahr zugleich. Im Unterricht sollte also Wert darauf gelegt werden, diese Darstellungen zu thematisieren und zu vergleichen, um ihre Funktion klar zu machen und ihren didaktischen Gehalt in entsprechender Weise nutzen zu können.

3.3 Interpretationen der Nash-Werte

a) Ursprüngliche Interpretation

In der ursprünglichen Interpretation ist der jeweils *eigene* kritische Nash-Wert bedeutungslos für die eigene Entscheidung. Für FF beispielsweise spielt nur der Fremdparameter q und der zugehörige kritische Nash-Wert q_{Nash} eine Rolle, nicht aber der eigene Nash-Wert p_{Nash}. Bei jedem Spiel treffen die Spieler eine 0-1-Entscheidung zwischen den ihnen zur Verfügung stehenden Möglichkeiten, indem sie in die Vergangenheit des Gegners schauen: FF blickt in die Vergangenheit des KK (genauer gesagt auf seine relative Kontrollhäufigkeit q) und entscheidet dann für *Schwarzfahren* oder für *Zahlen*:

$$\text{FF: } q? \xleftarrow[]{\text{Blick in die Vergangenheit von KK}} \left| \begin{array}{l} \nearrow\ q < q_{\text{Nash}} \rightarrow \text{SF } (p = 1) \\ \searrow\ q > q_{\text{Nash}} \rightarrow \text{Z } (p = 0) \end{array} \right. \tag{1}$$

Analog für KK, der in die Vergangenheit des FF blickt und sich dann für *Kontrollieren* bzw. *Nicht kontrollieren* entscheidet:

$$\text{KK: } p? \xleftarrow[]{\text{Blick in die Vergangenheit von FF}} \left| \begin{array}{l} \nearrow\ p < p_{\text{Nash}} \rightarrow \text{nicht K } (q = 0) \\ \searrow\ q > q_{\text{Nash}} \rightarrow \text{K } (q = 1) \end{array} \right.$$

So gesehen spielt man die Nashwerte p_{Nash} bzw. q_{Nash} nicht aktiv selbst, sondern man benutzt nur den jeweiligen Fremdwert für die bei jedem Spiel anstehende Entscheidung zwischen den eigenen Möglichkeiten. Dafür ist allerdings nötig, dass eine „Long-run-Situation" vorliegt (nicht nur ein einzelnes Spiel!) und dass man Informationen über eine lange Serie von Spielen in der Vergangenheit hat: D. h. das Spiel zwischen FF und KK findet schon lange Zeit täglich statt und die Spieler haben sich die gegnerischen relativen Häufigkeiten gemerkt. Alternativ dazu könnte man sich vorstellen, dass zwar *nicht so viele Spielrunden* vorliegen, sondern nur wenige, aber dafür in einer *ganzen Population* (z. B. steht KK ja nicht nur diesem einen Fahrgast Franz gegenüber, sondern einer Vielzahl von Personen, die öffentliche Verkehrsmittel in seinem Kontrollbereich benutzen). p_{Nash} steht dann für den relativen Anteil der Schwarzfahrer und q_{Nash} für den relativen Anteil der kontrollierten Fahrgäste an einem bestimmten Tag (siehe dazu Ableitinger 2009). Das wäre außerdem eine Möglichkeit, die anfangs getroffenen Modellannahmen etwas aufzulockern und die Situation in einem etwas realistischeren Kontext zu sehen.

b) Eine zweite Interpretation

Wenn man sich bei jedem einzelnen Spiel so wie oben verhält (Entscheidung anhand des Fremdparameters), so ergibt sich dadurch auf lange Sicht, dass sich die eigene relative Häufigkeit (d. h. der eigene Parameter) beim Nash-Wert einpendelt.

D. h. wenn sich FF à la longue wie in (1) verhält, so stellt sich bei ihm, quasi als Nebeneffekt, eine relative Schwarzfahrhäufigkeit von $p = p_{\text{Nash}}$ ein (vgl. Ableitinger 2009). Analog natürlich für KK. Das bedeutet aber auch, dass statt in die Vergangenheit des Gegners zu schauen und darauf zu *re*agieren, es *à la longue gleichwertig* ist, selbst zu *agieren*, d. h. jetzt wirklich selbst den eigenen Nash-Parameter zu spielen, indem man sich z. B. ein Zufallsexperiment einfallen lässt, das mit Wahrscheinlichkeit p_{Nash} (FF) bzw. q_{Nash} (KK) ein bestimmtes Resultat liefert. Auch dann stellen sich nämlich auf Dauer die Nash-Häufigkeiten p_{Nash} und q_{Nash} ein. FF führt also jeden Tag dieses Zufallsexperiment aus und entscheidet demnach zwischen *Schwarzfahren* und *Zahlen,* analog für KK, der sich täglich anhand seines Zufallsexperiments für *Kontrollieren* bzw. *Nicht kontrollieren* entscheidet:

$$\text{FF:}\ \left|\begin{array}{l} \xrightarrow{p_{\text{Nash}}}\ \text{SF} \\[1ex] \xrightarrow[1-p_{\text{Nash}}]{}\ \text{Z} \end{array}\right. \qquad\qquad \text{KK:}\ \left|\begin{array}{l} \xrightarrow{q_{\text{Nash}}}\ \text{K} \\[1ex] \xrightarrow[1-q_{\text{Nash}}]{}\ \text{nicht K} \end{array}\right.$$

Wichtig scheint uns an dieser Stelle, dass Spieltheorie im Unterricht nicht darauf hinaus laufen darf, lediglich kalkülhaft Nash-Gleichgewichte zu berechnen. Das würde am hier postulierten Potential des Themas als Unterrichtsinhalt vorbeiführen. Vielmehr soll hier der semantische Aspekt, also die inhaltliche Bedeutung des Nash-Gleichgewichts ins Zentrum rücken. Folglich muss in solch einem Unterricht Raum geschaffen werden für interpretative Tätigkeiten, für inhaltliche Auseinandersetzungen mit der Lösungsgewinnung und der Lösung an sich.

3.4 Auswirkungen durch das Handeln nach dem Nash-Konzept

Welche langfristigen Auswirkungen haben die Nash-Werte, wenn sie langfristig gespielt werden[6]? Wir werfen dazu noch einmal einen Blick auf die Abbildungen 1 und 2. Dort haben wir ja die oberen Äste fett eingezeichnet, diese stellen das jeweilige durchschnittliche Auszahlungsmaximum eines Spielers bei gegebenem Fremdparameter dar. Man sieht für die Nash-Werte (Schnittpunkt der beiden Geraden) unmittelbar zwei Effekte:

- Nash-Werte *fixieren* die durchschnittliche *gegnerische Auszahlung* (*Kontrollieren* und *Nicht kontrollieren* liefern dort ja genau die gleiche Auszahlung).
- Nash-Werte *minimieren* das durchschnittliche *gegnerische Auszahlungsmaximum* (die fett eingezeichneten Äste haben dort ja ihr Minimum).

Der Parameterwert p_{Nash} von FF fixiert also die durchschnittliche Auszahlung an KK und minimiert dessen Auszahlungsmaximum. Analog fixiert q_{Nash} (Parameter von KK) die durchschnittliche Auszahlung an FF und minimiert dessen durchschnittliches Auszahlungsmaximum.

Diese beiden wichtigen Beobachtungen können – wohl unter Anleitung der Lehrkraft – wieder durch die Schüler(innen) entdeckt und formuliert werden. Sie stellen gerade die kontrastierenden Merkmale des Nash-Konzeptes gegenüber dem Minimax-Konzept dar, wie wir später sehen werden.

---

6 Es ist dabei im Folgenden gleichgültig, *wie* sie entstanden sind: „beste Antwort – *re*agieren“ oder „aktives Selbstspielen des Parameters – agieren“.

4 Das Minimax-Konzept

Beim Minimax-Konzept herrscht eine ganz andere Philosophie vor, dort geht es nicht um ein *Re*agieren auf den Fremdparameter („beste Antwort"), sondern um aktive Wahl des eigenen Parameters mit dem erklärten Ziel, dass der dabei eintretende „worst case" möglichst wenig schlimm ist. Dies ist also die durch die zweite Schüler(innen)aussage von oben implizit angedeutete risikoscheue Herangehensweise: Wähle jene Strategie, bei der der mögliche worst case am wenigsten dramatisch ausfällt (siehe dazu auch Humenberger 1998).

Für FF ist der worst case bei Wahl der Strategie *Schwarzfahren die* Auszahlung –8 und bei *Zahlen* die Auszahlung –1 (Tabelle 1), also müsste sich FF in diesem Sinn für *Zahlen* entscheiden. Analog zu oben (Nash-Konzept) könnte er sich aber überlegen, ob er durch Mischen seiner beiden Strategien seine Situation auf lange Sicht noch verbessern könnte. Die Frage ist also, ob er sich langfristig eine bessere durchschnittliche Auszahlung als –1 sichern könnte. Wenn ja, wie soll er dazu seinen eigenen Parameter p wählen? Analoge Fragen stellt sich natürlich auch KK.

Jetzt betrachten die beiden Spieler ihre Auszahlung also nicht mehr in Abhängigkeit des jeweiligen Fremdparameters, sondern in Abhängigkeit des *eigenen* Parameters. Hier erkennt man schon, warum sich die Diskussion über eine mögliche sinnvolle Lösung der Schwarzfahrersituation zwischen den beiden Polen „Nash" und „Minimax" abspielt. Sie sind beide Realisierungen von Optimierungsprozessen – aber jeweils in Bezug auf unterschiedliche Parameter. Hier liegt also eine wichtige Erfahrung auch für Schüler(innen): Je nach Modellvoraussetzung und Kriterien der Optimierung ergeben sich unterschiedliche Lösungen desselben Problems. Diese Erfahrung der Nicht-Eindeutigkeit eines Lösungsweges und (in diesem Fall sogar) der Nicht-Eindeutigkeit der Lösung (Optimum) selbst darf man an dieser Stelle nicht ungenutzt lassen. Es ist zwar klar, dass Optimieren nach verschiedenen Kriterien im Allgemeinen verschiedene Lösungen liefert, trotzdem muss dies im Unterricht betont werden, denn nur allzu oft herrscht der Glaube vor, dass in der Mathematik alles eine eindeutige Lösung habe, noch dazu wenn es um ein Optimum geht.

4.1 Minimax-Analyse des Spiels aus der Sicht des FF

Die durchschnittliche Auszahlung an FF in Abhängigkeit des eigenen Parameters p ist gegeben durch (Tabelle 4).

- Wenn KK kontrolliert: $u_F(p) = -8 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = -8p$
- Wenn KK nicht kontrolliert: $u_F(p) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$

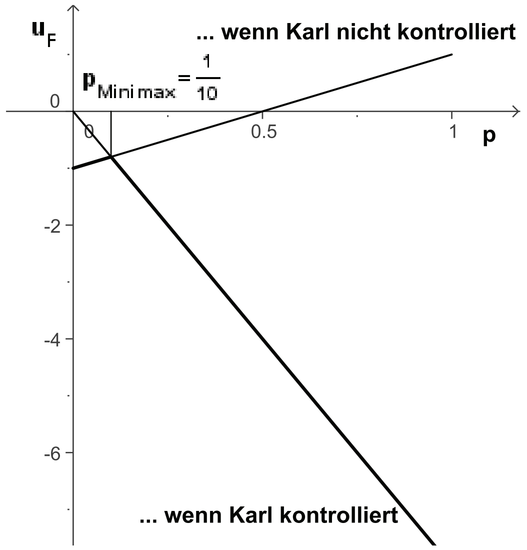

Abbildung 4: Erwartete Auszahlung an FF in Abhängigkeit seines eigenen Parameters p

Zeichnen dieser beiden linearen Funktionen liefert Abbildung 4 (der Schnittpunkt liegt bei $p_{\text{Minimax}} = \frac{1}{10}$). Die unteren beiden Äste sind fett gezeichnet, sie stellen bei jedem Wert von p den jeweiligen worst case dar. Der größte dieser worst-case-Werte liegt bei $p = p_{\text{Minimax}} = \frac{1}{10}$ und ist tatsächlich größer als –1, nämlich –0,8. Spielt also FF mit relativer Häufigkeit $p = p_{\text{Minimax}} = \frac{1}{10}$ die Strategie *Schwarzfahren*, so erhält er auf lange Sicht gesehen eine durchschnittliche Auszahlung von –0,8 pro Spiel.

4.2 Minimax-Analyse des Spiels aus der Sicht des KK

Die durchschnittliche Auszahlung an KK in Abhängigkeit des eigenen Parameters q ist gegeben durch:

- Wenn FF schwarzfährt: $u_K(q) = 3 \cdot q + (-2) \cdot (1-q) = 5q - 2$
- Wenn FF zahlt: $u_K(q) = (-1) \cdot q + 0 \cdot (1-q) = -q$

Der Graph dieser beiden Funktionen ist in Abbildung 5 dargestellt, der Schnittpunkt liegt bei $q_{\text{Minimax}} = \frac{1}{3}$, KK erhält dabei auf Dauer eine durchschnittliche Auszahlung von etwa –0,33.

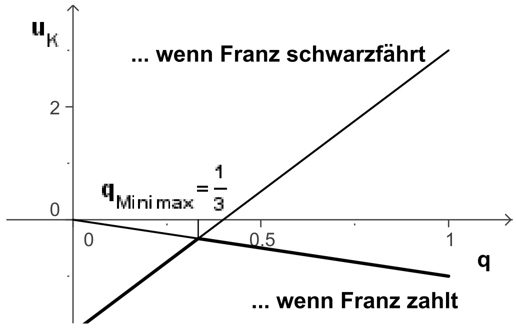

Abbildung 5: Erwartete Auszahlung an KK in Abhängigkeit seines eigenen Parameters *q*

Durch aktives „Drehen an der eigenen Parameterschraube" d. h. durch bewusste Wahl von $p = p_{\text{Minimax}} = \frac{1}{10}$ erreicht FF also Folgendes:

- Der durchschnittliche worst case ist dort am wenigsten schlimm, er *maximiert* also sein *eigenes Auszahlungsminimum* (in der Graphik ist es der höchste Punkt der fett eingezeichneten unteren Äste, die die jeweiligen worst cases darstellen).
- Er *fixiert* dadurch *seine eigene durchschnittliche Auszahlung* (egal welche Strategie der Gegner wählt).

Analog gilt das natürlich auch für KK. Im Gegensatz zu den Nash-Werten beeinflussen also die Mimimax-Werte die jeweils eigene Auszahlung!

Es ist u. E. wünschenswert, dass die Schüler(innen) an dieser Stelle selbst die Chance bekommen, auf diese Charakterisierung der Minimax-Lösung zu stoßen. Gerade im Hinblick darauf, dass so eine Charakterisierung schon für das Nash-Gleichgewicht vorgenommen wurde, ist zu hoffen, dass ihnen das gelingt. Es soll den Lernenden also die Möglichkeit gegeben werden, selbst die Dualität dieser beiden Konzepte zu erkennen. *Danach* halten wir es für sinnvoll, einen Überblick durch folgende prägnante Gegenüberstellung zu geben.

5 Zusammenfassende Gegenüberstellung der beiden Konzepte

Eine zusammenfassende Gegenüberstellung, was im Standardfall mit einem *inneren* Nash-Gleichgewicht und einer *inneren* Minimax-Lösung gilt, gibt Tabelle 5 wieder.

Nash-Konzept	**Minimax-Konzept**
Ziel: Der Spieler wählt jedes Mal die *beste Antwort* auf den bisher gespielten Fremdparameter. Als Folge davon stellt sich langfristig beim eigenen Parameter der Nash-Wert *von selbst* ein.	*Ziel*: Der Spieler will den *worst case* abfedern (risikoscheu!), er wählt dazu *bewusst* seinen eigenen Minimax-Wert!
Das durchschnittliche *fremde* Auszahlungs-*Maximum* wird *minimiert*. Diese „missgönnerisch" klingende Tatsache ist hier nicht das Kriterium, sondern eine mehr oder weniger „unschuldige" Folgerung.	Das durchschnittliche *eigene* Auszahlungs-*Minimum* wird *maximiert*. Dies ist hierbei der primäre Gedanke bzw. das eigentliche (risikoscheue) Kriterium.
Die durchschnittliche *Fremdauszahlung* wird *fixiert*.	Die durchschnittliche *eigene Auszahlung* wird *fixiert*.

Tabelle 5: Zusammenfassende Gegenüberstellung der beiden Konzepte

Welches Konzept ist nun das bessere, Nash oder Minimax? In dieser stringenten Form kann man die Frage gar nicht beantworten. Ihnen liegen einfach verschiedene Philosophien zugrunde, es wird nach verschiedenen Kriterien optimiert. Je nach Situation werden auch die Leser(innen) persönlich schon nach der einen oder anderen Methode entschieden haben. Trotzdem gibt es interessante Phänomene zu beobachten, die beide Konzepte verbinden. So könnte man sich z. B. fragen, ob bei diesem Schwarzfahrerspiel die durchschnittlichen Auszahlungen bei den Minimax-Werten oder bei den Nash-Werten höher sind.

Allgemein ergibt sich ja die Auszahlung für FF zu

$$\begin{aligned} u_F(p,q) &= (-8)\cdot p\cdot q + 1\cdot p\cdot(1-q) + 0\cdot(1-p)\cdot q + (-1)\cdot(1-p)\cdot(1-q) \\ &= 2p + q - 1 - 10pq \end{aligned}$$

Setzt man hier die Nash-Werte bzw. die Minimax-Werte ein, so erhält man:

$$u_F(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Nash}}) = u_F\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}\right) = -0{,}80$$

$$u_F(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Minimax}}) = u_F\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{3}\right) = -0{,}80$$

Beide Konzepte liefern also die gleichen Auszahlungen für FF. Auch die Auszahlungen für KK sind gleich:

$$u_K(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Nash}}) \approx -0{,}33 \quad \text{und} \quad u_K(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Minimax}}) \approx -0{,}33$$

Ist das hier Zufall? Oder ist diese Gleichheit der Auszahlungen bei den Nash-Werten und bei den Minimax-Werten immer gegeben? Alleine an diesen Fragen erkennt man eine typisch mathematische Tätigkeit. Man stellt aufgrund eines Musters bzw. einer Auffälligkeit allgemeine Vermutungen an, die man dann näher untersucht und zu beweisen versucht. In diesem Fall geht das recht einfach.

Wenn man die inhaltlichen Überlegungen von vorher

(*) q_{Nash} fixiert die Auszahlung an FF (Fremdauszahlung), unabhängig von p

(**) p_{Minimax} fixiert die Auszahlung an FF (eigene Auszahlung), unabhängig von q

nutzt, ist leicht zu begründen, dass gilt:

$$u_F(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Nash}}) \overset{(*)}{=} u_F(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Nash}}) \overset{(**)}{=} u_F(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Minimax}}) \tag{2}$$

Dies lässt sich auch durch einen 3D-Plot der Funktion

$$u_F(p,q) = 2p + q - 1 - 10pq$$

graphisch darstellen (Sattelfläche; Abbildung 6). An dieser Stelle bietet sich ein Computeralgebrasystem als sinnvolles Werkzeug an.

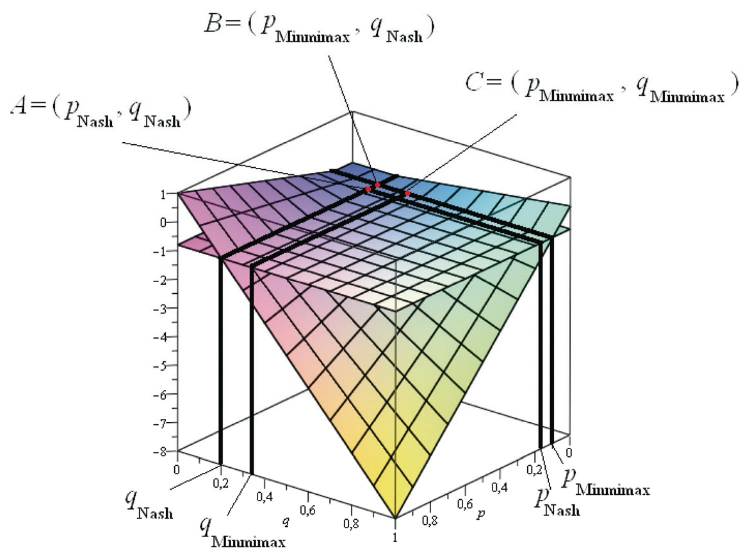

Abbildung 6: Auszahlung an FF in Abhängigkeit von p und q

Bei $q = q_{\text{Nash}}$ und bei $p = p_{\text{Minimax}}$ ist $u_F(p,q)$ konstant. Wird der Graph der Funktion $u_F(p,q)$ (Sattelfläche) mit der Ebene $z = -0{,}8$ geschnitten, so entstehen zwei waagrechte Strecken bei $q = q_{\text{Nash}}$ und bei $p = p_{\text{Minimax}}$. Die obige Gleichung (2) entspricht also einer waagrechten Wanderung von *A* über *B* nach *C*.

Wie sieht es aus, wenn die beiden Spieler unterschiedliche Philosophien (Konzepte) bei der Wahl ihrer Parameter verfolgen, d. h. wenn einer Nash und der andere Minimax spielt?

- $u_F(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Nash}}) = -0{,}80$; dies ist klar: q_{Nash} fixiert die FF-Auszahlung, vgl. obigen Wert
- $u_F(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Minimax}}) \approx -0{,}89$; Verschlechterung!

Analog ergibt sich:

- $u_K(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Minimax}}) \approx -0{,}33$; klar: q_{Minimax} fixiert die KK-Auszahlung, vgl. obigen Wert
- $u_K(p_{\text{Minimax}}, q_{\text{Nash}}) = -0{,}28$; Verbesserung!

Hier kann sich also sowohl eine Verschlechterung als auch eine Verbesserung ergeben!

Bemerkung: Bei diesen Mischungsüberlegungen (Nash- und Minimax-Konzept) kann man sich das Zustandekommen des Spielens des Nash-Wertes nicht mehr durch die ursprüngliche Interpretation (siehe Abschnitt 3.3a) vorstellen (nämlich durch Spielen der besten Antwort als Reaktion auf den jeweiligen Fremdparameter), sondern nur mehr die zweite: Aktives Selbstspielen des Nash-Parameters. Denn wenn z. B. KK nach dem Minimax-Konzept spielt und $q_{\text{Minimax}} = \frac{1}{3}$ für seine Kontrollhäufigkeit wählt, so sollte FF im Sinne des Nash-Konzepts *immer* seine beste Antwort *Zahlen* wählen, denn $\frac{1}{3} = q_{\text{Minimax}} > q_{\text{Nash}} = \frac{1}{5}$. Das würde auf Dauer natürlich zu $p = 0$ führen.

Auch wenn in diesem Aufsatz betont wurde, dass mit den Ausführungen in keiner Weise die Frage nach einer optimalen Kontrollhäufigkeit von Verkehrsbetrieben oder einer perfekten Strategie für potenzielle Schwarzfahrer beantwortet werden kann, so zeigen die Überlegungen doch Anknüpfungspunkte an die reale Welt. Das prinzipielle Problem allgemeiner Güter und deren Ausbeutung durch manche Personen(gruppen) der Gesellschaft ist ein brennendes Thema. Auf globaler Ebene finden sich solche Mechanismen derzeit sehr prominent in der Aushandlung von Klimazielen vertreten. Wer darf wie viel des allgemeinen Gutes in Anspruch nehmen und wie viel soll in Kontrolle investiert werden, um die Ausbeutung des Gutes zu verhindern?

In analoger Weise tragen andere spieltheoretische Modelle zum Verständnis ähnlicher Entscheidungssituationen bei. Dazu sei wieder auf die Literatur verwiesen (z. B. auf diverse Spiele in Sieg 2005, Holler/Illing 2006 oder Wiese 2002). Es geht in der Spieltheorie also nicht unbedingt darum, optimale Strategien in Entscheidungssituationen anzubieten, sondern vielmehr umgekehrt darum, schon getroffene Entscheidungen oder automatisch entstandene Entwicklungen im Nachhinein besser nachvollziehen und verstehen zu können. Es sollen Mechanismen menschlichen Handelns identifiziert werden.

Insofern ist verständlich, dass sich alle möglichen Wissenschaftsdisziplinen spieltheoretischer Methoden bedienen. Seien es die Sozial- und Politikwissenschaften, wenn es darum geht, menschlicher Kooperation oder der Effektivität von Bestrafung auf die Spur zu kommen, die Wirtschaftswissenschaften, die sich für ökonomisch gewinnbringende Entscheidungsstrategien und das Aushandeln von fairen Verträgen interessieren (dafür wurden in den vergangenen Jahren auch Wirtschafts-Nobelpreise an Spieltheoretiker verliehen) oder die Biologie, die mit Hilfe spieltheoretischer Modelle Evolutionsmechanismen erklärt und beschreibt (siehe Brahms 1994, Shubik 1988, Chen 2002, Binmore 1986 und Sigmund 1995).

Literatur

Ableitinger, Christoph (2009): So erhält ein Nash-Gleichgewicht gleich Gewicht. In: Siller, Hans-Stefan/Maaß, Jürgen (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe), Band 13, S. 110–124.

Ableitinger, Christoph/Hauer-Typpelt, Petra (2008): Spieltheorie im Unterricht – kann es das spielen? In: Didaktik-Reihe der ÖMG im Jänner 2008, Heft 40, S. 1–12.

Ableitinger, Christoph/Hauer-Typpelt, Petra (erscheint 2010): Was haben „Koalitionsabkommen“ und „jugendliche Draufgänger“ miteinander zu tun? – Klassifizieren spieltheoretischer Situationen. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe).

Amann, Erwin (1999): Evolutionäre Spieltheorie. Physica Verlag, Heidelberg.

Binmore, Ken (1986): Economic organizations as games. Blackwell, Oxford.

Blum, Werner/Drüke-Noe, Christina/Hartung, Ralph/Köller, Olaf (Hrsg.) (2006): Bildungsstandards Mathematik konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen, Berlin.

Borneleit, Peter/Danckwerts, Rainer/Henn, Hans-Wolfgang/Weigand, Hans-Georg (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Journal für Mathematikdidaktik 22, Heft 1, S. 73–90.

Brahms, Steven J. (1994): Theory of moves. Cambridge University Press, Cambridge.

Chen, Shu-Jen (2002): Evolutionary computation in economics and finance. Physica-Verlag, Heidelberg.

Holler, Manfred J./Illing, Gerhard (2006): Einführung in die Spieltheorie. Springer, Berlin (6., überarbeitete Auflage).

Humenberger, Hans (1998): Optimieren im Mathematikunterricht. Beispiele aus der elementaren Spieltheorie. In: Praxis der Mathematik 40, Heft 3, S. 101–108.

Humenberger, Hans/Reichel, Hans-Christian (1995): Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Klagenfurt (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf
Müller, Gerhard N.; Steinbring, Heinz; Wittmann, Erich Ch. (Hrsg.) (2004): Arithmetik als Prozess. Kallmeyer, Seelze.
Ortmanns, Wolfgang (2008): Entscheidungs- und Spieltheorie. Verlag Wissenschaft und Praxis, Sternenfels.
Peters, Hans (2008): Game theory. Springer, Heidelberg.
Reck, Michael (2008): Lohnt sich Schwarzfahren? In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 61, Heft 7, S. 405–407.
Rieck, Christian (2008): Spieltheorie. Eine Einführung. Verlag Rieck, Eschborn (8., überarbeitete und erweiterte Auflage).
Schupp, Hans (1992): Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
Shubik, Martin (1988): Game theory in social sciences. MIT press, paperback (3rd print).
Sieg, Gernot (2005): Spieltheorie. Oldenbourg, München (2., überarbeitete Auflage).
Sigmund, Karl (1995): Games of life. Penguin books, London.
Wiese, Harald (2002): Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer, Berlin.

Anschrift der Verfasser

Christoph Ableitinger
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen, FB Mathematik,
D-45117 Essen
christoph.ableitinger@uni-due.de

Hans Humenberger
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15 (UZA 4)
A-1090 Wien
hans.humenberger@univie.ac.at

Eingang Manuskript: 15.07.2009 (überarbeitetes Manuskript: 18.04.2010)