Textaufgaben in der Grundschule

Lernvoraussetzungen und Konsequenzen für den Unterricht

von

Renate Rasch, Landau

Kurzfassung: Mathematische Kompetenzen können sich besonders dann optimal entwickeln, wenn sie auf bisherigem Wissen und Können der Kinder aufbauen. Dies gilt auch für Fähigkeiten im Lösen von Textaufgaben. Erst der Blick auf Entwicklungen und Entwicklungsbesonderheiten beim Umgang mit mathematischen Texten und davon abgeleitete methodisch-didaktische Schlussfolgerungen gestatten eine zielgerichtete Organisation individueller Lernprozesse in diesem Bereich. Die im Anschluss ausschnittweise vorgestellte Untersuchung widmet sich diesen beiden in engem Zusammenhang zu sehenden Forschungsfeldern, den Voraussetzungen der Lernenden und einer darauf abgestimmten Begleitung und Unterweisung durch die Lehrenden.

Abstract: Mathematical abilities can develop especially optimal when they are based on the previous knowledge and skills of the children. This is also valid for the abilities in solving problems. Only the look at developments and distinctive features of development whilst handling mathematical texts and methodical-didactic conclusions drawn from them allow a purposeful organization of individual processes of learning in this area. The following study presented as an extract is devoted to the two fields of research being closely linked with each other, to the pre-conditions of the learners and the coordinated accompanying and instructing by the teachers.

1 Vorstellen der Untersuchung

1.1 Theoretische Einbettung

In den letzten beiden Jahrzehnten wurde vor allem im Zusammenhang mit Untersuchungen zum Anfangsunterricht deutlich, wie wichtig für eine effektive Unterstützung der Kinder beim Lernen das Wissen über spezifische Vorerfahrungen ist (vgl. u. a. Krajewski 2003; Fritz/Ricken/Gerlach/Schmidt 2007; Hasemann 2007). Empirische Erhebungen, die Aussagen zu Lösungskompetenzen von Grundschulkindern bei Text- und Sachaufgaben machen, findet man vor allem im Bereich der Kognitionspsychologie (vgl. Riley/Greeno/Heller 1983; Reusser 1992; Renkl/Stern 1994). An diese Untersuchungen knüpft die vorliegende Studie an. In den meisten Untersuchungen zu Textaufgaben wurden die von Riley et al. (1983) konzipierten 14 Typen arithmetischer Textaufgaben genutzt, die additive Vereinige- und Kombinationsaufgaben, Verändere- oder Austauschaufgaben und Vergleichsaufgaben zugrundelegen.

- *Vereinigeaufgabe*: Selina hat 3 Murmeln. Fritz hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?
- *Austauschaufgabe*: Selina hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Fritz 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Selina jetzt?
- *Vergleichsaufgabe*: Selina hat 8 Murmeln. Fritz hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Selina mehr als Fritz?

Im Ergebnis dieser Studien konnte u. a. festgestellt werden, dass Austauschaufgaben von Grundschulkindern häufiger richtig gelöst werden als Vergleichsaufgaben. Begründet wurde diese Erkenntnis vor allem mit semantischen Aspekten: Austauschaufgaben haben einen dynamischen Charakter und spiegeln dadurch die zugrunde liegende Rechenoperation gut wider. Schon Kindergartenkinder können elementare Austauschaufgaben bewältigen (vgl. Riley et al. 1983; Stern 1998). In Vergleichsaufgaben werden Größen gegenübergestellt. Ein solcher statischer Vergleich gibt keinen deutlichen Hinweis auf die zuzuordnende Rechenoperation. Außerdem müssen bei Vergleichsaufgaben Zahlen bezüglich ihres relationalen Aspektes von den Kindern verarbeitet werden. Solche Beziehungen können in der Regel erst genutzt werden, wenn mit dem kardinalen und ordinalen Zahlaspekt relativ sicher umgegangen werden kann (vgl. Krajewski 2003; Fritz/Ricken/Gerlach/Schmidt 2007). Weiterhin wurden die Textaufgaben unterschieden nach dem Platz, den die gesuchte Größe in der Aufgabenstruktur jeweils einnimmt. Auf der Grundlage solcher strukturellen und semantischen Aspekte wurden Textaufgaben nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet (vgl. Fricke 1987; Reusser 1997).

Renkl/Stern (1994) kamen u. a. zu der Erkenntnis, dass die Erfolgsquote bei der Bearbeitung von Textaufgaben sich auch bei höherem Übungsanteil nicht wesentlich verbessert. Diese Aufgaben sind scheinbar von den kognitiven Eingangsvoraussetzungen mehr abhängig als normale Rechenaufgaben, war eine der Schlussfolgerungen. Individuelle Unterschiede im Lösen einfacher und komplexer Textaufgaben konnten durch die Variablen „kognitive Eingangsvoraussetzungen“ und „Unterrichtsmerkmale“ geklärt werden. Obwohl die kognitiven Eingangsvoraussetzungen den größten Teil der Leistungsvarianz ausmachten, hatten auch die Unterrichtsmerkmale keinen geringen Einfluss auf die Leistungen beim Lösen von Textaufgaben. So konnten die Klassen, in denen ein höherer Anteil konzeptuell anspruchsvoller Mathematikaufgaben während des Mathematikunterrichts bearbeitet wurde, größeren Erfolg im Lösen von Textaufgaben verbuchen als die, bei denen dies nicht so war. Die Autoren kamen zu der Erkenntnis, dass die Schüler, die über abstrakt-mathematische Repräsentationen verfügen, beim Lösen von Textaufgaben bevorteilt sind. Unterricht sollte deshalb Strategien möglichst mathematisch vermitteln, da sie dadurch leichter auf andere Aufgaben übertragbar sind; im Kontext können sie scheinbar schlechter herausgelöst werden.

In den genannten Studien wurde das frühe Verständnis für multiplikative Zusammenhänge und solche der Division nicht untersucht. Ebenso fehlen Erkenntnisse zu spezifischen individuellen Lösungskompetenzen. Durch die Heterogenität der Schülerschaft und die sich daraus ergebende Notwendigkeit der Individualisierung des Unterrichts kommt diesen eine besondere Bedeutung zu.

Das Lösen von Textaufgaben initiiert häufig komplexe Denkprozesse: das Verstehen von numerischer und/oder verbaler Information, das Umsetzen dieser Information in eine innere Repräsentation und das Entwickeln von Lösungsvorschlägen (vgl. Montague/Appelgate 2000). So oder ähnlich, mitunter noch detaillierter, werden die Lösungsprozesse in der didaktischen und psychologischen Literatur beschrieben. In diesen Modellen schließt der eigentliche arithmetische Lösungsvorgang die Denkprozesse ab. So auch bei Mayer/Hegarty (1996), die die „Strategie Problem modellieren“ in drei Schritten darstellen:

1. Entwicklung und Aufbau einer Textbasis: In einem ersten Schritt wird eine Verstehensgrundlage auf der Basis des Textes erstellt. Der erlesene Inhalt wird mit schon vorhandener Information verknüpft.
2. Entwicklung und Aufbau der Problemrepräsentation: Der Aufbau der Problemrepräsentation kann auf der enaktiven, ikonischen und/oder symbolischen Ebene erfolgen.
3. Entwicklung und Aufbau einer Lösungsstrategie: Sobald die innere Repräsentation des Problems vorhanden ist, kann der eigentliche arithmetische Lösungsvorgang geplant werden.

Schon in früheren Projekten (vgl. Rasch 2003) fiel auf, dass die beschriebenen Teilprozesse bei Grundschulkindern zwar beobachtet werden können, die arithmetischen Lösungsvorgänge dabei aber Dominanz besitzen. Grundschulkinder setzen an den Anfang des Denkprozesses häufig Rechenaktivitäten und verbinden diese mehr oder weniger bewusst mit Verstehens- und Repräsentationsprozessen. Betrachtet man die Entwicklung mathematischer Kompetenzen vom Vorschulkind bis zum Grundschulkind erscheint dieses Herangehen über das Rechnen als eine natürliche Konsequenz dieser Entwicklung (vgl. Fritz et al. 2007). Eine Intention unseres Projektes war/ist, das ursprüngliche Herangehen der Lernenden aufzugreifen und zu fördern. So soll die Untersuchung unter anderem genauer Aufschluss geben über die Rolle der Rechenaktivitäten beim Bearbeiten von Textaufgaben und darüber, wie es Lösenden gelingen kann, diese mit Verstehens- und Repräsentationsaktivitäten zu verbinden.

1.2 Annahmen

Auf der Grundlage der dargestellten Theorie und basierend auf Erkenntnissen aus früheren Projekten wurde für die Untersuchung von folgenden Annahmen ausgegangen:

- *Annahme 1*: Schon Schulanfängerinnen und Schulanfänger können auf der Grundlage von Sachsituationen operative Zusammenhänge zu allen vier Grundrechenoperationen bewältigen. Mathematikunterricht sollte deshalb Möglichkeiten schaffen, das frühe Operationsverständnis mit Hilfe von Textaufgaben anzusprechen und zu fördern.
- *Annahme 2*: Die Rechenkompetenzen der Kinder und die Art und Weise wie mathematische Zusammenhänge im Rahmen von Textaufgaben repräsentiert werden können, beeinflussen entscheidend den Lösungserfolg.
- *Annahme 3*: Eine frühe Begegnung mit Textaufgaben, die unterschiedliche Anforderungen repräsentieren, begünstigt die Entwicklung konzeptuellen Lösungswissens. Fixierungen und wenig durchdachte Verknüpfungsroutinen durch gleichartige, immer wiederkehrende operative Zusammenhänge können, ausgehend von dieser Wissensbasis, minimiert bzw. vermieden werden.
- *Annahme 4*: Durch die Heterogenität der Lerngemeinschaft kann das einzelne Kind aus Unterweisungen, die an alle Lösenden in gleicher Weise gerichtet werden, nur wenig Nutzen ziehen. Im Mittelpunkt des didaktischen Interesses sollte deshalb die Konzipierung von Lernumgebungen stehen, die die Entwicklung individueller lösungsunterstützender Komponenten auf den Weg bringen und fördern kann.

1.3 Untersuchungsaufbau

Der Untersuchung liegt ein zweistufiger Aufbau zugrunde. Zunächst wurde im Rahmen einer Längsschnittstudie – durchgeführt gemeinsam mit Lehrerinnen und Lehrern sowie Studierenden – der Frage nachgegangen, welche Voraussetzungen zur Bearbeitung von Textaufgaben in den einzelnen Schuljahren zu erwarten sind (vgl. Annahmen 1 und 2). Zur Erfassung der Voraussetzungen wurden 20- bis 30-minütige Lösungsinterviews in beliebig ausgewählten Klassen mit insgesamt 150 Kindern durchgeführt. Die Interviews fanden zu Schulbeginn, am Ende der Klassenstufe 1 und in den folgenden drei Jahrgängen jeweils in der Mitte des Schuljahres statt. In den Einzelinterviews bearbeiteten die Kinder 8 Textaufgaben. In den Klassen 1 und 2 sowie 3 und 4 wurden jeweils ähnliche Textaufgaben gestellt, die sich häufig nur in der Größe des gewählten Zahlenraums unterschieden. Die Aufgaben spiegelten zum einen die vier Grundrechenoperationen wider. Hinzu kamen Vergleichsaufgaben und Problemaufgaben. Darüber hinaus unterschieden sich die Aufgaben in der Komplexität. Wie es zu vermuten war und bei anderen Kompetenzbereichen auch beobachtet werden konnte, sind die Lernvoraussetzungen und

Lernerfahrungen der Kinder sehr verschieden. Trotz der Unterschiede in den individuellen Voraussetzungen ließen sich grundsätzliche Tendenzen und Entwicklungen charakterisieren (vgl. Kapitel 2).

Im Rahmen der zweiten Stufe der Untersuchung wurde auf der Basis der durch die Interviews gewonnenen Erkenntnisse ein Konzept zur Begleitung und Unterweisung der Schüler/innen beim Lösen von Textaufgaben im Mathematikunterricht konzipiert (vgl. Annahmen 3 und 4). Die Erprobung des Konzeptes in den ersten vier Klassenstufen der Grundschule läuft derzeit noch und soll mit dem Schuljahr 2009/10 abgeschlossen werden (vgl. Kapitel 3).

Durch die aus den Lösungsinterviews hervorgegangenen Ergebnisse ergaben sich weitere spezifische Forschungsfragen, die inzwischen zur Initiierung interdisziplinärer Projekte geführt haben. So entstanden eine Kooperation mit dem VERA-Projekt – eine Videostudie, die hauptsächlich Unterrichtsmerkmale beim Umgang mit Textaufgaben erfasst (vgl. Staub 2008) – und ein Forschungsprojekt gemeinsam mit der Psychologie im Rahmen eines DFG-geförderten Graduiertenkollegs, das sich spezifischen Fragen der Repräsentationskompetenz von Grundschulkindern zuwendet (Schnotz et al., erscheint 2010).

2 Lernvoraussetzungen für das Lösen von Textaufgaben

2.1 Lernsituation zu Schulbeginn

Unseren Interviews zu Schulbeginn lag die Annahme zugrunde, dass situationsbezogene Vorerfahrungen zu allen vier Grundrechenoperationen schon zu erwarten sind (vgl. Annahme 1). So wurde davon ausgegangen, dass Situationen zum Hinzufügen und Zusammenfassen, zum Wegnehmen, Teilen und Vervielfachen einsichtsvoll aufgenommen und bearbeitet werden können. Modelle zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen machen deutlich, dass zu Schulbeginn Niveaustufen erreicht werden, die vor allem Operationsverständnis für die Addition erwarten lassen (vgl. Fritz et al. 2007). Das Aufgreifen operativer Vorerfahrungen auf der Grundlage von Textaufgaben bietet die Chance, auf Verknüpfungen zwischen den Operationen ausgehend von dem additiven Grundverständnis frühzeitig aufmerksam zu machen. Dies ist im Rahmen des klassischen Curriculums erst im Verlauf der Klassenstufe 2 möglich, nachdem die Operationen Multiplikation und Division auch auf formaler Ebene eingeführt worden sind.

In den 20- bis 30-minütigen Einzelinterviews wurden die Schulanfänger ermutigt, Material (Zählstäbchen, Muggelsteine) zur Unterstützung hinzuzunehmen. Ausdrücklich wurde auch auf die Möglichkeit verwiesen, die Finger (als bisher vertrautes Arbeitsmittel) für Zählprozesse und Überlegungen zu nutzen. Die Texte wurden vorgelesen, bei Bedarf auch mehrfach.

1. *Additive Situation*

   Franz und Anna spielen mit kleinen Autos. Franz hat 2 und Anna hat 6. Wie viele haben sie zusammen?

   78% der Schulanfänger konnten die Frage richtig beantworten. 33% dieser Kinder nutzten Veranschaulichungsmittel. Bei der Aufgabe ist zu berücksichtigen, dass es die erste Textaufgabe der Staffel war und die Anforderungen für die Kinder neu waren. Der prozentuale Anteil richtig gelöster Aufgaben wäre sonst bei dieser Additionssituation sicherlich noch höher gewesen (Abb. 1).

2. *Situation zur Subtraktion*

   Aus dem Märchen von den 7 Geißlein: Als der Wolf kommt, versteckt sich das kleinste Geißlein im Uhrenkasten, die anderen holt der Wolf. Wie viele Geißlein hat er gefunden?

   Die einfache Subtraktionssituation mit einem für die meisten Kinder vertrauten Erzählhintergrund bewältigten knapp 85% der Schulanfänger. Einem Großteil von ihnen gelang die Zuordnung der Lösung im Kopf, nur 19% benötigten die bereitgelegten Hilfsmittel.

3. *Additive Teil-Ganzes-Beziehung*

   Aufräumen, sagt Mutti – alles wieder dahin, wo es war. Wo sind die Würfel? 6 waren es, jetzt sind nur noch 2 in der Schachtel. Die restlichen finde ich unter dem Bett. Wie viele lagen dort?

   88% der Kinder lösten die Aufgabe erfolgreich. Allerdings nutzten deutlich mehr als bei den ersten beiden Aufgaben Veranschaulichungsmittel. 42% der erfolgreichen Kinder setzten die Finger, Stäbchen oder Muggelsteine zur Lösungssuche ein.

4. *Situation zur Multiplikation*

   Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ hat Vera zweimal hintereinander eine 6 gewürfelt. Um wie viele Felder konnte sie vorrücken (wenn alle Spielsteine schon eingesetzt waren)?

   Diese Sachsituation bewältigten 79% der Schulanfänger. Ungefähr 50% dieser Kinder operierten mit den Fingern bzw. mit den bereitgelegten Arbeitsmitteln.

5. *Situation zur Division*

   Teilen fällt nicht immer leicht. Ich esse gern Schokolade. 8 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben (wenn es gerecht sein soll)?

   Bei der Situation zum Teilen waren wie bei der Multiplikation 79% der Kinder erfolgreich. Der Anteil der Lösenden, die mit Arbeitsmaterial agierten, erhöhte sich im Vergleich zu den vorangegangenen Aufgaben nochmals: 66% der Kinder nutzten Veranschaulichungsmittel.

6. *Situation zum Vergleichen*

   Jan und Paula bauen mit Legosteinen. Jan steckt 5 Steine zusammen. Paula baut mit 7 Steinen. Wie viele Bausteine hat Paula mehr?

   In Untersuchungen zur Zahlbegriffsentwicklung konnte nachgewiesen werden, dass sich der relationale Zahlaspekt erst auf einem recht hohen Niveau der Zahlbegriffsentwicklung entwickelt (vgl. Abschnitt 1.1). So konnte zum Schulanfang eine auf der Grundlage einer Vergleichssituation zu betrachtende Differenz zwischen zwei Zahlen nur von wenigen Kindern als Anzahl repräsentiert werden. Lediglich 22% der Schulanfänger kamen zur Lösung „Paula hat 2 Steine mehr“. Die Hälfte dieser Kinder nutzte Arbeitsmittel. Welches Kind in der geschilderten Situation mehr Steine hat, konnten alle Kinder sagen. Bei dem größeren Teil der Erstklässler waren Verstehensdefizite zu beobachten und so konnten diese Kinder auch das bereitgelegte Material nicht lösungsunterstützend einsetzen. Sie legten zwar teilweise 5 und 7 Stäbchen, konnten die beiden Anzahlen aber nicht so miteinander in Beziehung setzen, wie es die Frage verlangte. Ähnliche Befunde gab es auch in früheren Untersuchungen zu Textaufgaben (vgl. Stern 2005). Schon in unserer zweiten Versuchsreihe am Ende der 1. Klassenstufe konnte eine Fragestellung wie die oben genannte ohne Probleme aufgenommen und beantwortet werden.

7. *Beziehung zwischen Anzahl und Wert*

   Heute hatte ich Glück. Ich habe drei Münzen gefunden: 2 Cent, 1 Cent und 5 Cent. Wie viele Cent habe ich gefunden?

   Eine ähnliche entwicklungsbedingte Lösungssituation zeigte sich bei dieser Aufgabe, bei der das Verhältnis zwischen der Anzahl von Münzen und ihrem Wert berücksichtigt werden musste. Die Kinder antworteten auf die gestellte Frage häufig mit „3“ – das Dominierende blieb die Anzahl der Münzen, die Beziehung zum Wert konnte nur von einem Teil der Kinder hergestellt werden. 42% der Schulanfänger konnten diese Aufgabe bewältigen, ein Drittel von ihnen mit Material. Ähnlich wie bei der Textaufgabe Nr. 6 gehörten auch Aufgaben dieser Art am Ende des 1. Schuljahres für die Kinder zu den leichten Aufgaben.

8. *Schluss von der Einheit auf die Vielheit* (vgl. Fricke 1987)

   Kaffeetrinken bei den 7 Zwergen hinter den 7 Bergen: Jeder Zwerg isst zwei Stücke Kuchen. Wie viele Kuchenstücke wurden gegessen?

   Diese Aufgabe mit multiplikativem Hintergrund war für die Schulanfänger eine echte Herausforderung. Die bis zur Aufgabe 5 tauglichen Lösungsstrategien (Zählaktivitäten in Verbindung mit dem Vereinigen oder Zerlegen von Mengen) schienen nicht auszureichen. Eine mögliche Verknüpfung musste erst überlegt werden. Immerhin 60% der Kinder erreichten die richtige Lösung. Zwei hauptsächliche Strategien waren zu beobachten: Ein Teil der Kinder bewältigte die Situation ausgehend von additiven Zusammenhängen. Sie legten immer 2 Dinge und vergewisserten sich zwischenzeitlich, wie oft sie das schon getan hatten. Für andere gestaltete sich die Suche nach der Lösung aufwändiger. Sie legten 7 Stäbchen, ausgehend von den 7 Zwergen, und versuchten dann über Zuordnungen der „Kuchenstäbchen" die Lösung zu erreichen. Durchgängig begleiteten Zählprozesse die Lösungssuche.

Die 45 mit Schulanfängern durchgeführten Interviews bestätigten unsere Annahmen (Abb. 1). Schon Erstklässler besitzen zu Schulbeginn ein reiches operatives Vorwissen. Es wurde deutlich, dass ihnen das auf der Grundlage von Textaufgaben bewusster werden kann und dass sich diese Kompetenzen gut entwickeln lassen. Die Unterschiede zwischen einzelnen Kindern waren – wie dies auch für andere Lernbereiche festgestellt wurde (vgl. bspw. Hasemann 2007) – recht groß.

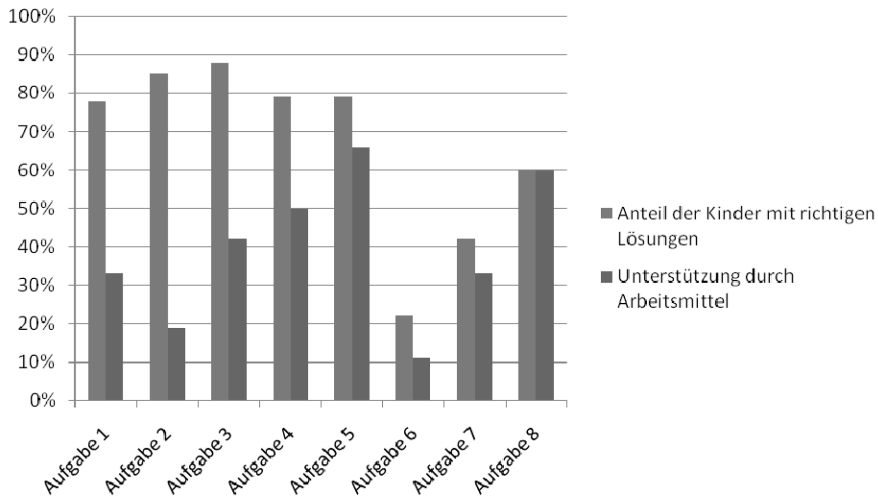

Abb. 1: Interviewaufgaben Schulanfang – Anteil richtiger Lösungen

Die erfolgreichen Kinder benötigten für die einfachen Aufgaben ca. 30 Sekunden. Bei den anspruchsvollen Aufgaben verdoppelte sich die Lösungszeit. Diese Kinder waren in der Lage, sich nach dem Hören der Aufgabe selbst für oder gegen das die Denkprozesse unterstützende Material zu entscheiden. Allerdings unterschieden sie sich bezüglich der Argumentationsfähigkeit und des Einsatzes lautsprachlicher Äußerungen. So gab es Kinder, die schnell und richtig lösten, aber auf die Frage, wie sie überlegt hatten, den Lösungsweg nicht noch einmal sprachlich aufgreifen konnten. Andere kompetente Kinder konnten ihre Überlegungen gut nachvollziehbar sprachlich herleiten und mitunter auch begründende Elemente einfügen. So argumentierte bspw. Joyce bei der Aufgabe 2 im Zusammenhang mit der von ihr gefundenen Lösung 6: „Warum? Wegen 7. Eins versteckt sich ja ganz gut und der Wolf kann das ja nicht sehen. Warte, ich mal's dir mal auf …"

Die weniger erfolgreichen Schulanfänger benötigten im Durchschnitt 2 Minuten Arbeitszeit pro Aufgabe. Ihre Bearbeitungen machten vor allem auf Defizite bezüglich des Operationsverständnisses und der Zahlbegriffsentwicklung in Verbindung mit geringeren Zählfähigkeiten aufmerksam. Schon die zuerst genannte Textaufgabe, die eine einfache additive Situation widerspiegelt, machte dies deutlich. Die Kinder, die nicht zum Lösungserfolg kamen, konnten die Frage „Wie viele haben sie zusammen?" nicht mit dem Vereinigen von Mengen in Verbindung bringen. Generell fiel auf, dass das additive Grundverständnis, von dem ausgehend die anderen Kinder ihre operativen Kompetenzen entwickeln, bei den schwächsten Schulanfängern noch nicht stabil ist. Darüber hinaus war zu beobachten, dass die Kinder mit weniger guten Voraussetzungen beim Repräsentieren von Mengen und Teilmengen mit Material unsicher sind. Die beiden in der Textaufgabe 1 („Ein Kind hat 2 Autos, das andere 6") aufgeführten Mengen wurden bspw. nicht als separate Anzahlen repräsentiert. So legte ein Mädchen zunächst 2 Stäbchen für die eine in der Aufgabe genannte Anzahl und zählte ausgehend davon vier Stäbchen dazu. Ein weiterer operativer Anlass wurde dadurch für das Kind nicht sichtbar. Unsicherheiten bezüglich der Repräsentation, wenn es um Teil-Ganzes-Beziehungen ging, wurden auch bei anderen Textaufgaben deutlich (vgl. auch Gerster/Schulz 2000).

2.2 Lernsituation am Ende des 1. Schuljahres

In den Interviews am Ende des ersten Schuljahres (wieder in beliebig ausgewählten Klassen) nutzten wir die gleichen Aufgaben wie zu Schulbeginn, tauschten allerdings eine Routineaufgabe (Aufgabe 4) gegen eine problemhaltige Textaufgabe (Aufgabe 9) aus. Je nach der individuellen Rechensituation des Kindes variierten wir die Größe der in den Aufgaben verwendeten Zahlen. Es wurde deutlich sichtbar, welch großes Lösungspotenzial durch die sich inzwischen entwickelten Rechenkompetenzen im Zusammenhang mit den erworbenen Fähigkeiten zum Einsatz von Arbeitsmitteln bereitsteht. Dies galt zunächst grundsätzlich für alle Lernenden. Unterschiede wurden jedoch recht schnell deutlich. Kinder mit guten Kopfrechenfähigkeiten benötigten deutlich weniger Zeit zum Lösen der Aufgaben und konnten sich (mit den sicheren Rechenkompetenzen als Hintergrund) besser auf die in der Textaufgabe genannten Zusammenhänge konzentrieren als die weniger fitten Kopfrechner. Letztere begegneten den Textaufgaben unsicherer und mit einem geringeren Selbstvertrauen als ihre im Rechnen sicheren Mitschüler. Deutlich wurde auch, dass die Kinder einen Lösungsvorteil haben, die in der Lage sind, verschiedene Unterstützungskomponenten zu nutzen. So arbeitete eine erfolgreiche

Schülerin nach Bedarf mit geschickten Zählstrategien im Zusammenhang mit dem bereitgelegten Arbeitsmaterial oder aber sie rechnete im Kopf oder schrieb sich die Rechenzahlen auf, nutzte dabei auch schon das Untereinanderschreiben wie beim schriftlichen Rechnen („von meiner Mama gelernt“).

Wie die enaktive Ebene die Lösungsentwicklung unterstützen kann, wird beispielhaft an folgendem Interviewausschnitt mit einer Schülerin am Ende der ersten Klasse gezeigt:

> Die Interviewerin las die Aufgabe Nr. 8 (Kaffeetrinken bei den 7 Zwergen) vor. Julia (7 Jahre) sprach wichtige Textteile wiederholend nach und begann ihre Lösungsaktivitäten mit einer doppelten Zählstrategie: „Also 2 hat einer, 4 hat zwei, 6 hat drei, 8 haben 4, 10 haben 5, … 7 haben, halt, nee, jetzt bin ich ganz durcheinander. (*Sie versuchte es erneut mit dem eingeschlagenen Zählrhythmus, schaffte es aber nicht ohne Brüche und nahm sich die Einheitswürfel.*) Nochmal – 4 haben zwei, … Warte, hier mach ich am besten die die's schon haben und hier, die die's sind. (*Sie legte an eine Stelle die ‚Personen‘ und an eine andere die ‚Kuchenstücke‘.*) Dann drei … Muss ich einfach nur so machen, muss einfach nur da zählen (*zeigte auf die ‚Zwerge‘ und legte weiter*). Jetzt sind's 7 Stück (*zählte das andere Häufchen aus*), also 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14?“

Am Ende der Klassenstufe 1 hatten die Grundmodelle des Rechnens zum Addieren und Subtrahieren schon eine gewisse Festigkeit erreicht. Textaufgaben wie die Aufgaben 1 bis 7 sprachen vor allem die Rechenkompetenzen der Kinder an. Bezüglich der Vergleichsaufgaben oder der Münzaufgaben waren keine Entwicklungsbesonderheiten mehr zu beobachten, auch diese Aufgaben konnten mit Lösungsroutinen bearbeitet werden. So waren es die Aufgaben 8 und die neu hinzugenommene Vergleichsaufgabe 9, die insbesondere die Denkaktivitäten der Erstklässler herausforderten.

9. *Vergleichsaufgabe – beide Vergleichsmengen gesucht*

   > Max und Jan haben zusammen 10 Sammelbilder. Max hat 4 mehr als Jan. Wie viele Sammelbilder hat Max, wie viele hat Jan?

   33% der Erstklässler konnten die Aufgabe mit Materialunterstützung im Rahmen der Interviews lösen. Die meisten Kinder begannen ihre Überlegungen mit gewohnten additiven Denkmustern, die zu Lösungen wie der folgenden führten: „Max hat 10 und Jan hat 14.“ Erst der Hinweis, dass die beiden Kinder zusammen ja nur 10 Bilder haben, brachte die Lösenden zum weiteren Nachdenken.

Die Erkenntnisse aus den Interviews mit Schulanfängern und Erstklässlern machten auf verschiedene Schwerpunkte aufmerksam, die bei der schulischen Entwicklung von Fähigkeiten im Textaufgabenlösen beachtet werden sollten:

- Eine Basis, auf der man Schulanfänger zum Bewältigen mathematischer Sachsituationen führen kann, ist die *handelnde Arbeitsebene*. Schon im Rahmen der Interviews konnten die Kinder ihre Fähigkeiten zur Nutzung von Arbeitsmaterial bei der Lösungssuche weiterentwickeln. Während zunächst ein sehr zaghaftes Herangehen zu beobachten war und vielfach auch der Einsatz des vertrauten Arbeitsmittels „Finger“ zur Lösungsunterstützung herangezogen wurde, war nach Fortschreiten der Interviews und dem wiederkehrenden Hinweis, bspw. die Stäbchen zu nutzen, bei vielen Kindern zu beobachten, wie sie die Mittel zur Lösungsunterstützung immer besser zielführend nutzen konnten. Das Material wurde zunächst eingesetzt, um die in den Aufgaben genannten Anzahlen mit Hilfe der Zählfähigkeiten zu repräsentieren. Vielen Kindern gelang es auf dieser Grundlage, sich die erforderlichen Verknüpfungen zu veranschaulichen. Dies war vor allem bei den für Schulanfänger anspruchsvollen Aufgaben 5 bis 8 notwendig, die teilweise über den vertrauten Zehnerraum hinausführten. Auffallend war die enge Verbindung zwischen den Denkprozessen der Kinder und ihren handelnden Aktivitäten. Denken und Handeln erfolgten sozusagen parallel, so dass Denkprozesse immer sofort auch in den Darstellungen mit dem Material sichtbar wurden. Dies regte wiederum das Weiterdenken an.

- Bei einem Teil der Kinder wurden die handelnden Aktivitäten durch *lautes Denken* begleitet. Mit Blick auf die Unterweisung im Bearbeiten von Textaufgaben ist der Aspekt des lauten Denkens, der in der Problemlösekultur nachhaltig verankert ist, zu beachten (vgl. Duncker 1935). Kinder, die laut denken, sollten darin bestärkt werden und entsprechende Lernbedingungen auch im Rahmen des Mathematikunterrichts finden (vgl. Kapitel 3).
- Wir baten die Schulanfänger jeweils im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgaben darum, die errechnete Lösungszahl zu notieren. Dieser Aufforderung folgten die Kinder gern, selbst dann, wenn sie die Zahlen noch nicht sicher als Schriftzeichen darstellen konnten und Hinweise dafür benötigten. Die Anregung zur Verschriftlichung der Lösungen unter der jeweiligen Aufgabe geschah mit dem Hintergrund, die *symbolische Ebene* frühzeitig in die Förderung von Kompetenzen zum Bearbeiten von Textaufgaben einzubeziehen. Dies könnte der Anfang für eine differenzierte Arbeit auf der mathematisch-symbolischen Ebene sein. Einzelne Kinder werden mit dem Erwerb von Rechenfähigkeiten in kurzer Zeit dazu fähig sein, nicht nur Lösungszahlen, sondern auch Terme und Rechenaufgaben zur Darstellung des Lösungsgeschehens zu nutzen. Kinder, die die abstraktere symbolische Ebene nicht so schnell erreichen, können länger beim ausschließlichen Notieren der Ergebniszahl(en) bleiben.
- Wenn man im ersten Schuljahr Lernprozesse voranbringen will, sollte man bezüglich der *Auswahl von Textaufgaben* beachten, dass zum einen die vier Grundmodelle des Rechnens und ihre Varianten in Sachsituationen Berücksichtigung finden, zum anderen aber auch mathematische Situationen angeboten werden, die das vorherrschende additive Denken der Kinder aufbrechen und auf andersartige, bisher nicht vertraute Zusammenhänge aufmerksam machen (s. Aufgaben 8 und 9).

2.3 Lernvoraussetzungen nach dem schulischen Erwerb der vier Grundrechenoperationen (Klasse 2)

Im Februar, als die Interviews in Klassenstufe 2 stattfanden, war davon auszugehen, dass sich Kompetenzen zur Addition und Subtraktion inzwischen auch auf der symbolischen Ebene entwickelt hatten. Für die Multiplikation und die Division im Rahmen der Behandlung des Einmaleins erwarteten wir ein elementares Operationsverständnis, erste automatisierte Zahlensätze und elementare mathematisch-symbolische Darstellungsfähigkeiten. Um Vergleichsmöglichkeiten zur Situation am Schulanfang und am Ende der Klassenstufe 1 zu haben, wurden Aufgaben mit ähnlichem Anforderungsniveau wie dort eingesetzt. Der Zahlenraum wurde der Klassenstufe 2 angepasst.

Es konnte beobachtet werden, dass der Rechenaufwand für Zweitklässler beim Auftreten zweistelliger Zahlen im Rahmen von Textaufgaben noch sehr hoch ist, so dass der größte Teil der Lösungskapazitäten für das Rechnen benötigt wird. Für Textaufgaben, die sich an Grundmodellen des Rechnens orientierten wie die folgende, benötigten die Lösenden im Durchschnitt 2 Minuten. Den schnellen Kopfrechnern reichte die Hälfte der Zeit.

1. *Additive Teil-Ganzes-Beziehung* (vgl. Aufgabe 3, Schulbeginn)

   > Die 33 Kobolde des Waldes fürchten den Donner. Als das Gewitter kommt, verstecken sich 12 in einer Höhle. Die anderen suchen Schutz unter einem großen Stein. Wie viele sind unter dem Stein?

   86% der Kinder erkannten, dass eine Differenz berechnet werden muss, die mit Hilfe des Wegnehmens oder Ergänzens ermittelt wurde. Die restlichen Kinder bildeten die Summe aus den beiden gegebenen Zahlen. 23% der Zweitklässler unterstützten die Rechnungen mit Arbeitsmitteln (Mehrsystemmaterial). Im Verlauf der Interviews fiel auf, dass das erste „greifbare Produkt“ für die Kinder die Ergebniszahl war. Erst danach dachten sie noch einmal über ihre Rechenaktivitäten nach und notierten (nach Aufforderung) ihre Rechnungen. Wir griffen schon während der Interviews diese natürliche Lösungsreihenfolge der Kinder auf (erst Ergebniszahlen, dann Rechensätze) und bestärkten sie darin, das auch in dieser Abfolge zu notieren. Bei der obigen Aufgabe gelang es den Lösenden recht gut, ihre Rechnungen auch auf symbolischer Ebene darzustellen. Wir ermutigten sie, die tatsächlich ausgeführten Rechnungen abzubilden, also bspw. 33-2-10 zu notieren. Dies geschah mit dem Hintergrund, eine möglichst enge Verbindung zwischen den verschiedenen Repräsentationsebenen (hier Rechenebene und mathematisch-symbolische Ebene) herzustellen. Je anspruchsvoller der durch die Textaufgabe ausgelöste Rechenprozess war, desto schwieriger wurde es für die Kinder, die mathematisch-symbolische Ebene zur Darstellung der Lösungsaktivitäten hinzuzunehmen. Dies zeigte sich unter anderem auch bei der folgenden Aufgabe.

2. *Situation zur Division* (vgl. Aufgabe 5, Schulbeginn)

   Teilen fällt nicht immer leicht. Ich esse gern Schokolade. 26 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben, wenn es gerecht sein soll?

   93% der Zweitklässler lösten die Aufgabe ohne größere Probleme im Kopf. Zwei Beispiele sollen die Hürden, die für junge Grundschulkinder zwischen den Rechenaktivitäten und der mathematisch-symbolischen Form liegen, verdeutlichen. Ein Zweitklässler, nach seinem Lösungsweg befragt, erklärte: „Ich habe gedacht, 10 und 10 kann's ganz bestimmt nicht sein. Dann 11 und 11 sind 22, 12 und 12 sind 24 und 13 und 13 sind 26 und das war's." Als er aufgefordert wurde, seine Rechnung zu notieren, überlegte er eine Weile und schrieb schließlich $23+23=26$. Ein anderer Schüler, der sofort die Lösung nennen konnte, machte uns darauf aufmerksam, dass das Aufschreiben einer Rechenaufgabe schwer sei. Er überlegte eine ganze Weile und schrieb schließlich (wobei er Teile der Aufgabe noch einmal durchstrich und änderte): „$20:10+6:2=13$". Er fügte erläuternd hinzu: „Es sind zwei verschiedene Aufgaben, 20 geteilt durch 10 und dann 6 geteilt durch 2." Obwohl die Notation nicht exakt gelang (der Weg zum Teilen erfolgt noch deutlich über additives Denken – 20 ist 10 und 10), sollten Darstellungen dieser Art gefördert werden.

3. *Vergleichsaufgabe, bei der beide Vergleichsmengen gesucht sind* (vgl. Aufgabe 9, Schuljahresende)

   Max und Vera haben zusammen 10 Sammelbilder. Max hat 4 mehr als Vera. Wie viele Sammelbilder hat Max, wie viele hat Vera?

   Wie ungewohnt und überraschend die Anforderungen beim Bearbeiten problemhaltiger Textaufgaben sind, machte auch bei den Zweitklässlern die Aufgabe 9 deutlich. 50% der Kinder konnten die Aufgabe mit Materialunterstützung lösen. Die durchschnittliche Bearbeitungszeit verlängerte sich auf 4 Minuten. Der kleine Zahlenraum, der durch die Aufgabe angesprochen wird, ließ diese zunächst für die Kinder einfach erscheinen. Erst auf den zweiten Blick wurden sie auf das Problem aufmerksam. Die im Rechnen schwächeren Kinder griffen schneller zu Arbeitsmitteln als die fitten Kopfrechner. Letztere gingen zunächst davon aus, dass sie die Lösungssuche mit Rechenaktivitäten im Kopf bewältigen können. Man konnte ähnliche Denkmuster (orientiert an den vertrauten Grundmodellen des Rechnens) wie am Ende der Klasse 1 beobachten. Zunächst wurden die Lösungen 10 und 14 vermutet, dann 6 und 4. Wenn auch diese Ergebnisse nicht bekräftigt wurden, ließen sich die Kinder für die weitere Suche nach dem Ergebnis zum Nutzen von Material anregen. Nachfolgend werden die Lösungsüberlegungen von Kevin (8 Jahre) vorgestellt:

I: (*Die Interviewerin las die Aufgabe vor.*) Max und Vera haben zusammen 12 Sammelbilder. Max hat 4 mehr als Vera. Wie viele Sammelbilder hat Max, wie viele hat Vera?
K: Also Vera hat ja 10?
I: Nein, beide Kinder haben insgesamt 10.
K: 8, nee, 6 hat die Vera und 10 hat Max.
I: Dann hätten sie ja 16, aber sie haben insgesamt nur 10.
K: Mhm. (*überlegte*) Bis hierher ging's schon ganz schön schnell nach unten. (*Zeigte dabei auf die Textaufgaben, die er zuvor ohne größere Probleme gelöst hatte.*)
I: Du kannst auch Material zu Hilfe nehmen.
K: (*Er griff zum Zehnerstab, überlegte aber weiter ohne das Material zu nutzen.*) Also dann, Vera kann schon mal nicht die 6 haben, sonst insgesamt 10, dann hat sie ja … Ich glaube, die Vera hat dann 6 und noch 2 und der Max hat dann nochmal 2. So haben sie dann auch 10.
I: Leg's dir mal so hin und sieh nach, ob es so stimmen kann.
K: (*Er legte 8 und gliederte die Menge in 6 und 2. Dann verteilte er die restlichen 2 noch auf die beiden Teilmengen und kam so auf 7 und 3. Er schaute sich alles noch einmal an und war mit seiner Lösung zufrieden.*)
K: (*notierte*) Max hat 7 und Vera hat 3.

Wie das Beispiel zeigt, wird es durch die sich im Verlauf des Lösungsprozesses entfaltende Komplexität für junge Grundschulkinder vor allem bei Problemaufgaben schwierig, einzelne Lösungsschritte in mathematisch-symbolischer Form darzustellen. Wir fanden hierzu kaum „spontane" Vorerfahrungen. Allerdings sollte bedacht werden, dass mathematisch fitte Kinder sicherlich dazu angeregt werden können, entscheidende Lösungsüberlegungen auch symbolisch zu repräsentieren. Einzelne Kinder konnten ihre Lösung (in der Regel konstruiert über das Hantieren mit Material) auch sprachlich herleiten. So formulierte Valentin (8 Jahre) auf die Frage, wie er überlegt hat, die folgende Antwort: „Der Max hat 7, die Vera 3, … weil $3+3$ sind 6 und davon hat der Max auch 3 und da bleiben noch 4 übrig und dann $4+3$ gibt 7." Für Kinder, die ihr Denken auf diese Weise versprachlichen können, ist sicherlich auch eine mathematisch-symbolische Entsprechung auf dem Papier möglich.

2.4 Lernvoraussetzungen und Lernerfahrungen bei älteren Grundschulkindern (Klassen 3 und 4)

Um Voraussetzungen für das Bearbeiten von Textaufgaben in der 3. und 4. Klasse zu erfassen, ließen wir wiederum im Rahmen von Interviews jeweils zur Schuljahresmitte Textaufgaben bearbeiten. Die Klassen wurden hierfür wie schon zuvor beliebig ausgewählt. Es wurden 36 Interviews geführt. Die Texte lagen den Kindern vor. Sie wurden aber zunächst, wie in den vorangegangenen Klassenstufen auch, vorgelesen, um gleiche Ausgangsbedingungen für alle – unabhängig von der sprachlichen Entwicklung der Kinder - zu schaffen. Der größte Teil der Textaufgaben war mit Rechenroutinen zu bewältigen. Es traten sowohl Simplexaufgaben als auch komplexere Aufgaben mit mehreren Rechenschritten auf (vgl. Fricke 1987).

In die Beobachtung einbezogen wurden die sich inzwischen entwickelten Rechenkompetenzen. Darüber hinaus sollte der Stand bezüglich der Problemlösefähigkeiten analysiert werden (Aufgaben 4 und 9). Unser Blick galt auch mathematischen Begriffen (Aufgaben 2 und 5). Wie schon in den Klassen 1 und 2 lagen Arbeitsmittel zur Benutzung bereit. Ausgewählte Ergebnisse auf der Grundlage von 6 der 8 Textaufgaben werden nachfolgend vorgestellt.

1. *Multiplikativer Simplex – Grundaufgabenkenntnis*

   > Seit ich die neue Schule besuche, muss ich 8 km mit dem Bus fahren. Mein Papa fährt viermal so weit zur Arbeit. Wie weit ist sein Weg? (Kl. 3, 4)

   In Klassenstufe 4 konnten 85% der Kinder die Aufgabe richtig bearbeiten, bei den Drittklässlern waren es 65%. Schaut man genauer auf die fehlerhaften Bearbeitungen der Drittklässler, so zeigte sich, dass die Hälfte der Fehler auf mangelhaftes Operationsverständnis zurückzuführen war (Die beiden Zahlen wurden addiert.). Die anderen Fehler entstanden durch unsichere Grundaufgabenkenntnisse ($4 \cdot 8 = 31$ usf.). Im vierten Schuljahr traten beide Fehlerquellen nicht mehr so oft auf.

2. *Simplexaufgabe – Hälfte*

   > Endlich Wochenende und ich darf mal am Abend fernsehen. In der Fernsehzeitung waren für den Film 130 min angegeben. Aber schon zur Hälfte der Zeit schlief ich ein. Wie viele Filmminuten habe ich verpasst? (nur Kl. 3)

   52% der Drittklässler konnten die Frage richtig beantworten. Die Schwierigkeit bestand darin, die Hälfte von 130 zu finden. Mit der 100 gelang dies allen. Die Kinder scheiterten an der Hälfte von 30. Bereitgelegtes Material wurde nicht oder nicht zielführend genutzt. Einige Kinder waren der Meinung, dass man von dieser Zahl keine Hälfte finden könne. Interessant war auch die Beobachtung, dass nur 20% der erfolgreichen Drittklässler die Division nutzten. Die Zahl 130 wurde im Kopf zerlegt und notiert wurden in der Regel Subtraktionen (bspw.: „$100 - 50 = 50$; $30 - 15 = 2$“). Dies zeigte, wie auch schon bei anderen Lösungsanlässen, dass die Lernenden recht lange brauchen, um die Operationen zweiter Stufe zu verinnerlichen. Teilweise bis zum Ende der Grundschulzeit ist das Zurückgreifen auf die stabilen additiven Erfahrungen zu beobachten. Vor allem bei leistungsschwächeren Kindern wurde deutlich, dass sie ihre Lösungen auf additive Überlegungen aufbauen, dann aber nicht in der Lage sind, ihre Rechnungen auf der symbolischen Ebene abzubilden. So errechnete bspw. ein leistungsschwacher Schüler 70 als Lösung (Er hatte im Kopf versucht 100 und 30 entsprechend zu zerlegen.). Aber auf die Frage nach der Rechenaufgabe, die er notieren könnte, antwortete er „$70 \cdot 1$“.

3. *Problemaufgabe – Vergleich*

   Tim und Paul haben zusammen 30 Legosteine. Tim hat 6 mehr als Paul. Wie viele hat Tim? Wie viele hat Paul? (Kl. 3, 4)

   38% der Dritt- und Viertklässler waren bei dieser problemhaltigen Textaufgabe erfolgreich. Bis zur Lösungsfindung wurden durchschnittlich 6 Minuten benötigt. Bezüglich des prozentualen Anteils der Lösungshäufigkeit gab es zwischen der dritten und vierten Klassenstufe keinen Unterschied. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem der vergleichbaren Problemaufgabe am Ende der Klasse 1 dann gibt es fast keinen Zuwachs bezüglich des Lösungserfolgs (vgl. Aufgabe 9 – 33% der Erstklässler konnten die Aufgabe lösen.) In der Klassenstufe 2 bearbeiten 50% der Kinder eine solche Vergleichsaufgabe erfolgreich. Der Rückgang des Lösungserfolges bzw. die Stagnation der Problemlösefähigkeiten hat sicherlich verschiedene Ursachen. Im Vergleich mit Klassenstufe 2 sehen wir eine Ursache darin, dass die Kinder seltener lösungsunterstützende Maßnahmen aktivierten. Da die Dritt- und Viertklässler im Unterrichtsalltag kaum noch auf der enaktiven Ebene arbeiten, tun sie das bei einer solchen Aufgabe, bei der handelnde Aktivitäten evtl. Lösungshilfe bringen könnten, auch nicht. Und wenn sie dies (meistens nach Aufforderung) taten, konnten sie dieses freie überlegende Operieren mit den Hilfsmitteln, wie es junge Grundschulkinder spontan tun, nicht leisten. Auffällig war, dass der Kopf der alleinige Träger der Aktivitäten blieb und auch Notizen oder Skizzen nur selten genutzt wurden.

   Es gab wie in den Klassenstufen 1 und 2 typische fehlerhafte Lösungsüberlegungen, die aus vertrauten Rechenmustern abgeleitet wurden. Am häufigsten war die Lösung: Paul hat 9 und Tim hat 21. Es wurde die Hälfte von 30 gebildet und dann zur 15 sechs dazu bzw. sechs weggenommen. Dass so aber die in der Textaufgabe genannten Bedingungen nicht erreicht werden, wurde in der Regel nicht bemerkt. Die erfolgreichen Kinder konnten sich eher von gewohntem Denken lösen, z. B. erklärte eine Schülerin ihr Vorgehen so: „Ich habe erst beiden 10 gegeben, dann beiden 2 und Tim dann noch 6." Ein anderer Schüler erläuterte: „ Ich habe erst 14 und 16 gedacht, weil das so dicht zusammen liegt und bin dann immer eins hoch und eins runter gegangen bis 12 und 18. Und da stimmt's."

4. *Komplexaufgabe – Begriffsverständnis*

   In den letzten Wochen habe ich 12 € sparen können. Den dritten Teil des Geldes habe ich heute ausgegeben. Wie viel Geld habe ich noch? (Kl. 3, 4)

   39% der Drittklässler konnten die Aufgabe erfolgreich bearbeiten. Bei den Viertklässlern errechneten 61% die richtige Lösung. Der Unterschied beim Lösungserfolg zwischen beiden Klassenstufen lässt sich vor allem darauf zurückführen, dass das Operationsverständnis für die Division in Klasse 4 schon deutlich stabiler ist als im Schuljahr zuvor. So konnten die Viertklässler dem Begriff „dritter Teil“ mit einer fundierten Orientierung begegnen und die 12 als Dividend flexibler betrachten. Die Drittklässler identifizierten „dritter Teil von 12“ häufig als 3. Sie wählten den Weg über die Hälfte von 12 und dann die Hälfte von 6 und kamen so zur Lösung 9 ($12-3$).

5. *Komplexaufgabe*

   Wir würfeln. Wer zuerst 99 Punkte erreicht, ist der Sieger. Zweimal habe ich schon gewürfelt und jedes Mal 34 Punkte erzielt. Wie viele Punkte fehlen noch bis zum Sieg? (Kl. 3, 4)

   52% der Drittklässler lösten die Aufgabe erfolgreich. Bei den Viertklässlern waren es 62%. Die fehlerhaften Lösungen entstanden vor allem durch das Nichtbeachten einer Bedingung. Hauptsächlich wurde nicht berücksichtigt, dass „zweimal 34 Punkte“ erzielt wurden (65% aller fehlerhaften Lösungen).

6. *Problemaufgabe – räumlich-statische Situation*

   Felix betrachtet ärgerlich seine Pralinenschachtel. In der Schachtel sind eigentlich 5 Reihen mit Pralinen und in jeder Reihe sind 6 Stück. Doch seine beiden Brüder hatten schon welche stibitzt. Rundherum fehlt die äußere Reihe, stellt er fest. Wie viele Pralinen bleiben für ihn noch übrig? (Kl. 4)

   54% der Viertklässler lösten die Aufgabe richtig. Die Hälfte der erfolgreichen Kinder veranschaulichte sich den Sachverhalt durch eine Skizze. Dagegen taten dies nur 17% der Kinder, die zu fehlerhaften Lösungen kamen (vgl. hierzu auch Winter 1985).

Die Lösungsinterviews wiesen auf Schwerpunkte hin, die beim Umgang mit Textaufgaben im Unterricht beachtet werden sollten:

- *Bedeutung der Rechenkompetenz für den Lösungserfolg*: Im Ergebnis der Interviews zeigte sich, dass gute Rechner auf der Grundlage der entwickelten Kopfrechenfähigkeiten einen schnellen Zugriff auf Rechenprozesse im Zusammenhang mit Textaufgaben haben. Dieser Gruppe von Kindern gelang es in der Regel auch, komplexe Sachrechenprozesse zu erfassen und zu verarbeiten. Weniger kopfrechenstarke Kinder benötigten nach wie vor einen großen Teil ihrer Arbeitskapazität für das Rechnen. Dies ist ein Grund dafür, dass gerade die weniger kopfrechengewandten Kinder häufig nicht alle in der Textaufgabe genannten Beziehungen überblickten bzw. erfassen konnten. Sie konzentrierten sich nach der ersten Begegnung mit der Sachsituation schnell auf die zuerst wahrgenommenen Rechenanlässe und begannen mit den für sie anstrengenden Rechenprozeduren noch bevor sie die in der Aufgabe genannten Zusammenhänge vollständig erfasst hatten. Gute Rechner gingen mit Zahlbeziehungen flexibel um und konnten auf dieser Grundlage auch Textaufgaben bearbeiten, bei denen die Grundmodelle des Rechnens nicht immer sofort sichtbar waren. In den Klassenstufen 3 und 4 wurde besonders deutlich, wie fehlende Rechenkompetenzen das Lösen von Textaufgaben erschweren.

- *Strategien für das Lösen anspruchsvoller Aufgaben*: Für die Gruppe der problemhaltigen Textaufgaben sind noch andere Voraussetzungen als das sichere Rechnen notwendig. Es fiel auf, dass auch den fitten Rechnern für das Lösen von problemhaltigen Textaufgaben kaum Strategien zur Verfügung standen. Bei dieser Schülergruppe erhöhte sich die Lösungszeit auf dem Hintergrund einer nicht-strategiegestützten Lösungssuche deutlich bzw. die Lösungsversuche führten wie auch bei der mathematisch generell schwächeren Leistungsgruppe nicht zum Erfolg. Die guten Rechenfähigkeiten mussten durch weitere Kompetenzen ergänzt werden, z. B. durch solche Arbeitsweisen wie lautes Denken, begleitende Notizen, skizzierendes Arbeiten. Heuristische Strategien wie das Veranschaulichen einer Sachsituation und das systematische Probieren waren nur vereinzelt zu beobachten (vgl. Winter 1989, Franke 2003).
- *Repräsentieren von Lösungswegen auf mathematisch-symbolischer Ebene*: Unser Blick galt auch den Entwicklungen bezüglich der Darstellungsfähigkeiten der Kinder, hier insbesondere ihren Möglichkeiten, Kopfrechen- und Denkprozesse abzubilden. In den Klassenstufen 1 und 2 konnte beobachtet werden, dass diese Ebene zunächst nur ganz elementar bedient werden kann. Für die Kinder führte der Weg zur Lösung über die Kopfrechenaktivitäten (ohne bzw. mit dem vertrauten Arbeitsmaterial) direkt zur „Lösungszahl" – die als wahrnehmbares Produkt der geleisteten Kopfarbeit von allen Kindern notiert werden konnte (unabhängig von der Richtigkeit der Lösung). An die Notation der Lösungszahl schlossen sich vorsichtige Versuche an, die tatsächlich geleistete Rechenarbeit zu notieren. Dabei wurde deutlich, dass dies eine wesentlich anspruchsvollere Stufe als die des Rechnens selbst ist. Wie hatte sich diese mathematisch-symbolische Ebene bis zum Ende der Grundschulzeit entwickelt? Letztendlich muss gesagt werden, dass Variabilität im Gebrauch mathematisch-symbolischer Darstellungsformen kaum zu beobachten war. Der Mathematikunterricht schafft in der Regel Rechenanlässe, die mit schriftlich notierten Rechensätzen in immer gleicher Form repräsentiert werden (vgl. hierzu auch Steinweg 2001). Offene Formen von Rechennotizen, wie sie zur Darstellung von mathematischen Gedanken zu Textaufgaben mitunter notwendig sind, werden scheinbar nicht kultiviert. Der Rechensatz kommt im Unterricht immer in der gleichen Form daher: links der Term mit dem Operationszeichen, dann das Gleichheitszeichen, das das Ergebnis nach sich zieht. Variable Ausdrucksweisen für Rechenprozesse fehlen. Schon eine andere Position des Gleichheitszeichens bei Rechenausdrücken kann für Verwirrung sorgen. Der Platzhalter zur Markierung einer „Lücke" im Rechenprozess setzt sich nach unseren Beobachtungen als Darstellungselement bei Gleichungen zu Textaufgaben nicht durch. Die Schüler bildeten ihre Rechenprozesse ohne dieses Instrument ab. Die gemachten Beobachtungen führten zu Überlegungen darüber, welche Kompetenzen bezüglich der schriftsprachlich-symbolischen Ebene sich entwickeln lassen, wenn Unter-

richt auch diese Repräsentationsebene deutlicher als bisher in die Unterweisungen zum Lösen von Textaufgaben einbezieht.

3 Im Textaufgabenlösen auf der Grundlage der Lernvoraussetzungen unterweisen

Wissen zu Lernvoraussetzungen und das Berücksichtigen dieser im Sachrechenalltag des Mathematikunterrichts ist nach unseren Erfahrungen eine wichtige Prämisse, um Kompetenzen zur Bearbeitung von Sachaufgaben auf den Weg bringen zu können. Die unterschiedlichen Voraussetzungen, mit denen die Lernenden den Textaufgaben begegnen, sollten dabei Berücksichtigung finden.

3.1 Entwicklungsbesonderheiten und -unterschiede beachten – Anforderungen differenziert stellen

1. *Reduzieren des Kopfrechen-Aufwandes*: Die Rechenkompetenzen der Kinder haben, wie schon dargestellt, einen bedeutenden Einfluss auf die Bewältigung von Textaufgaben. Demzufolge sollten bei der Organisation von Lernprozessen diese unterschiedlichen Voraussetzungen beachtet werden. Lernende bewegen sich von Schulbeginn an in verschieden großen Zahlenräumen, für die sie dann eine mehr oder weniger hohe Sicherheit für das Operieren mit Zahlen aufbauen. Am Ende der ersten Klassenstufe erfährt man von den Erstklässlern recht zuverlässig, ob sie lieber mit kleineren oder größeren Zahlen (Zahlenraum bis 20 oder darüber hinaus) in Sachaufgaben rechnen möchten. Wenn man diesbezüglich den individuellen Unterschieden der Kinder folgt und gleiche Sachaufgaben mit verschiedenem Zahlenniveau anbietet, kommt man sowohl schwächeren als auch leistungsstärkeren Kindern entgegen und muss trotzdem nicht auf das gemeinsame Reflektieren über Lösungswege verzichten.

   Aufgabenbeispiel, Kl. 1, März 09

   Du kannst eine Aufgabe auswählen:

   Die Krokusse strahlen mit ihren leuchtenden Farben schon dem Frühling entgegen. Gestern habe ich 25 Stück in unserem Garten gezählt: 9 blühen gelb und 8 blau. Die restlichen sind weiße Krokusse. Kannst du herausfinden, wie viele Krokusse eine weiße Blüte haben?

   Die Krokusse strahlen mit ihren leuchtenden Farben schon dem Frühling entgegen. Gestern habe ich 13 Stück in unserem Garten gezählt: 5 blühen gelb und 3 blau. Die restlichen sind weiße Krokusse. Kannst du herausfinden, wie viele Krokusse eine weiße Blüte haben?

   Gerade für das Heranführen an Textaufgaben in den Klassenstufen 1 und 2 scheint dieses Entgegenkommen wichtig zu sein, um Lernprozesse erst einmal auf den Weg bringen zu können. Das Operieren mit kleinen Zahlen bedeutet im günstigen Fall für schwächere Kinder, dass das Kopfrechnen zu bewältigen ist und dass Kapazitäten bleiben, um über die situativen Zusammenhänge zielführend nachzudenken und einen entsprechenden Zahlensatz zu notieren. Auch bei den Drittklässlern greift dieser Ansatz, wie unser Schulversuch zeigt. Darüber hinaus sollte bei älteren Grundschulkindern auf das Nutzen der schriftlichen Verfahren des Rechnens verwiesen werden, um den Kopfrechen-Aufwand zu minimieren und dadurch Denkkapazitäten freizusetzen.

2. *Notieren des Rechengeschehens:* Die Rechenebene ist bei jungen Grundschulkindern noch nicht so eng mit der symbolischen Darstellungsebene verbunden, wie das in späteren Schuljahren der Fall ist. Das Rechnen im Kopf, evtl. unter Nutzung von Arbeitsmitteln, erfolgt zunächst ohne bewusste Einbeziehung eines Rechensatzes. Das Rechnen wird über Schritte transportiert, die für junge Grundschulkinder nicht zwangsläufig einen Rechensatz erkennen lassen. So ist vor allem für die mathematisch weniger fitten Kinder die allmähliche Hinführung zur schriftsprachlich – symbolischen Ebene wichtig. Für junge Grundschulkinder ist das sichtbarste Produkt das Ergebnis (erreicht über Zähl- und Rechenprozesse, handelnde oder zeichnerische Aktivitäten). Dieses sollte anerkannt werden, auch, wenn der Rechenweg auf schriftsprachlicher Ebene (noch) nicht notiert werden kann.

   Grundschulkinder sollten ermutigt werden, ihre tatsächlich ausgeführten Rechenprozesse abzubilden. Sie können lernen, mit einfacheren oder anspruchsvolleren Darstellungen (je nach Vermögen) zu arbeiten. Viele der situativen Zusammenhänge lassen sich additiv darstellen. Man kann die Rechenprozesse in mehreren Schritten aufzeigen oder aber auch geschickt zusammenfassen. In diesem Zusammenhang sollte beachtet werden, dass für die möglichen symbolischen Repräsentationen nicht sofort Exaktheit und Vollständigkeit angestrebt werden muss, dass bspw. auch Terme aussagekräftige Darstellungsmöglichkeiten sind. Schon Grundschulkinder können lernen, dass mit dem Gleichheitszeichen eher vorsichtig umgegangen werden sollte, insbesondere dann, wenn man eine Kette von Rechenüberlegungen aneinanderreihen will, wie es die Kinder gern tun.

   Aufgabenbeispiel, Kl. 1, November 08

   In wenigen Wochen ist es wieder so weit und wir schmücken den Weihnachtsbaum. Am liebsten hänge ich die silbernen Glaskugeln mit den vielen Glitzersteinchen an den Baum. Man muss besonders vorsichtig sein. Die Kugeln sind in 3 Kisten verpackt, in jeder Kiste 4. Wie viele Glitzersteinchen-Kugeln kann ich aufhängen, wenn keine entzwei geht?

3 *Einbeziehen der enaktiven und ikonischen Repräsentationsebenen:* Schulanfänger benötigen beim Bearbeiten der ersten Textaufgaben in der Regel Arbeitsmittel wie Plättchen, Stäbchen oder ähnliches, um die Rechentechnik bewältigen zu können. Wenn der Zahlenraum etwas größer wird oder der Sachzusam-

menhang komplexer, reichen die vertrauten Finger in Verbindung mit den Zählkompetenzen nicht aus und die Erstklässler greifen von sich aus zum unterstützenden Material. Sie erwerben Kompetenzen, um Denk- und Rechenhandlungen mit Hilfe des Arbeitsmaterials zu konstruieren. Aktivitäten zum Hinzufügen und Wegnehmen gehören schon zu Schulbeginn vielfach zum Repertoire der Kinder. Handlungen, die zu Zuordnungen, Paarbildungen, zum Ermitteln von Unterschieden, zum Teilen und Vervielfachen von Mengen führen, sollten erlernt werden. Im 3. und 4. Schuljahr prägen Aktivitäten mit Veranschaulichungsmitteln seltener das Unterrichtsgeschehen. Mit der Zunahme der Rechenkompetenzen und dem Erschließen größerer Zahlenräume verliert das Arbeitsmaterial für die Schüler seine Bedeutung als Unterstützungshilfe beim Rechnen. Dass Veranschaulichungsmittel auch mathematische Denkprozesse unterstützen können, ist für Dritt- und Viertklässler wenig einsichtig – die Arbeitsmittel werden eher abgelehnt. Unterricht zu Textaufgaben sollte Möglichkeiten aufzeigen, wie bspw. im Zusammenhang mit Problemaufgaben Veranschaulichungsmittel bzw. Skizzen unterstützend genutzt werden können. Dabei sollten das Denken und Notieren, das Denken und Skizzieren sowie das Denken und Handeln als sich gegenseitig unterstützende Prozesse wahrgenommen werden. Sowohl das Lernen unter Gleichaltrigen als auch „das laute Überlegen und öffentliche Skizzieren und Handeln“ der Lehrperson kann auf solche hilfreiche Verbindungen beim Lösen aufmerksam machen.

Aufgabenbeispiel, Kl. 3, März 09

Obwohl es noch kalt ist, verschönern die Farben der Frühblüher schon den Garten. In unserem Vorgarten zähle ich 20 Krokusse, gelbe und blaue. Es sind 2 gelbe mehr als blaue. Wie viele Krokusse blühen gelb? Wie viele Krokusse blühen blau?

3.1 Eine Unterrichtsorganisation anstreben, die individuelles und gemeinsames Lernen fördert

Beim Umgang mit Textaufgaben im Mathematikunterricht sollten offene Lehr- und Lernformen zum Einsatz kommen, die für differenziertes Arbeiten Möglichkeiten schaffen und die Eigenaktivität der Lernenden beim Bearbeiten von Aufgaben fördern. Mit diesen Optionen als Hintergrund sind verschiedene Unterrichtsabläufe denkbar. Erfolgreich arbeiteten wir bei einem früheren Projekt mit heterogenen Arbeitsgruppen (vgl. Rasch 2003; Hengartner/Hirt/Wälti 2006). Dem entgegen steht aber das Wissen um die Individualität von Denkprozessen. Lernende können vor allem dann Kompetenzen erwerben, wenn dies ausgehend von ihrem aktuellen Wissen geschehen kann (vgl. u. a. Gallin/Ruf 1990). In den Arbeitsgruppen wurden zwar die schwächeren Kinder aufgefangen, aber gerade für diese Schülergruppe hatte die gemeinschaftliche Lösungsarbeit zur Folge, dass von ihnen ausgehend selten Lösungsinitiativen in Gang gesetzt wurden. Andererseits sind die unterschiedlichen Fähigkeiten einzelner Kinder eine große Chance, vieles voneinander lernen zu können. So beobachteten wir schon in den Interviews zu Schulbeginn Lösungsfähigkeiten bei einzelnen Kindern, die beispielgebend für andere sein können und die die Lehrperson nicht besser demonstrieren kann. Aufgefallen ist uns beispielsweise Joyce, die den Textaufgaben mit einer hohen Lösungsaktivität begegnete. Spontan schrieb sie die Zahlen, die sie hörte, auf und unterstützte diese frühe Schriftlichkeit durch Zeichnungen. Sie nutzte ikonische Darstellungen wie Strichlisten oder ähnliches. Dies war bei anderen Schulanfängern noch nicht zu beobachten. Uns fielen Kinder auf, die mit den bereitgelegten Arbeitsmitteln besonders geschickt umgingen. Sie stellten die Mengen strukturiert dar und konnten Verknüpfungen einsichtig repräsentieren. Gabor, der einzelne Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 10 schon automatisiert hatte, konnte – wie einige andere Kinder auch – nach dem Hören der Aufgabe selbst entscheiden, ob der Kopf zum Rechnen und Zählen ausreicht oder ob das bereitliegende Material zur Unterstützung hinzugezogen werden sollte. Einzelne Kinder bewiesen ein ausdauerndes Lösungsverhalten, wenn es um probierende Lösungsaktivitäten bei problemhaltigen Textaufgaben ging. Sie unterstützten ihre Überlegungen, indem sie zwischen Veranschaulichungshilfen wechselten (bspw. nutzten sie erst die vertrauten Finger, dann das bereitgelegte Arbeitsmaterial usf.).

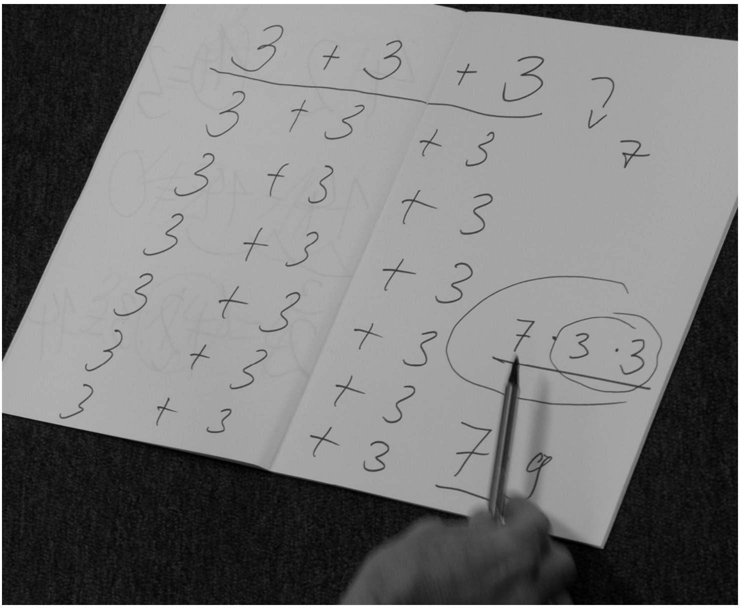

Abb. 2: Repräsentation auf der symbolischen Ebene – demonstriert durch die Lehrperson während der Reflexionsphase

Andererseits konnten wir feststellen, dass sich Wissen nicht ausschließlich von den wachsenden Lernerfahrungen ableiten lässt. Das Wissen zur mathematisch-symbolischen Repräsentationsebene ist zum großen Teil kulturvermitteltes Wissen (vgl. hierzu auch Stern 1998). Diesbezüglich sollten die Lehrpersonen gezielt Angebote machen und für die Kinder sichtbar werden lassen, mit welchen symbolischen Darstellungen die Rechenaktivitäten repräsentiert werden können – ausgehend von den Möglichkeiten, die die Lernenden selbst gefunden haben (Abb. 2).

> *Aufgabenbeispiel, Kl. 2, April 08*
>
> Das weiße Kaninchen des Zauberers ist krank. Die Medizin wird ins Futter gemischt: dreimal täglich drei Tropfen und das 7 Tage lang. Versuche auszurechnen, wie viele Medizintropfen das sind.

Diese Überlegungen veranlassten dazu, Unterrichtsumgebungen zu initiieren, die sowohl das Lernen vom Kind aus berücksichtigen als auch der Lehrperson Spielräume lassen, kulturvermitteltes Wissen an die Kinder heranzutragen. Wir erproben zur Zeit ein Unterrichtskonzept, dass den Umgang mit Textaufgaben gliedert in:

1. Textaufgabe(n) vorstellen
2. Individuelles Lösen
3. Austauschen mit Gleichaltrigen (mit einem oder mehreren Partnern)
4. Reflexion auf der Grundlage der Schülerprodukte (gesteuert durch die Lehrperson in einer der folgenden Unterrichtsstunden).

Die Lernchancen (individuelles Lernen, Lernen unter Gleichaltrigen, Lernen von der Lehrperson) und die damit verbundenen Zeiträume sollen dabei von den Kindern möglichst flexibel genutzt werden können. So können die Lernenden selbst entscheiden, ob sie ihre individuelle Lösungsarbeit nach dem Hören der Textaufgabe beginnen oder ob sie noch weitere Orientierung brauchen. Hierfür gibt es die Option, gemeinsam mit der Lehrperson noch im Eingangskreis zu verweilen, um die Aufgabe weiter zu durchdenken. Auch das Ende der individuellen Lösungsarbeit, um sich mit Gleichaltrigen zu besprechen, können die Kinder im Rahmen des möglichen Zeitlimits selbstbestimmt entscheiden.

Die an unserem Versuch beteiligten Schülerinnen und Schüler nahmen die beschriebene Form des Umgangs mit Textaufgaben im Mathematikunterricht gut an. Für uns ergaben sich vor allem durch die den Lernprozessen zugrunde liegende Offenheit immer wieder Fragen bezüglich der Unterrichtsorganisation und des Umgangs mit den Reaktionen der Lernenden:

- Vor allem die Erstklässler sahen mathematisches Lernen ganzheitlich. So war es für sie legitim, der Bearbeitung der Textaufgaben weitere Rechnungen anzufügen, an denen sie Freude hatten und mit denen sie ihre schon erworbene Kompetenz zeigen konnten. Nicht immer stand für die Kinder dann die Textaufgabe im Mittelpunkt, mitunter eher die noch angefügten Rechnungen und das Rechnen mit den großen und besonderen Zahlen bzw. neuen Rechenzeichen. Wir tolerierten diese Art des Mathematiklernens und bezogen die zusätzlichen Aufgaben auch in die abschließende Reflexion ein.

- Ein Teil der Erstklässler begann die individuelle Lösungsarbeit immer wieder mit Zeichnungen, die ausschnitthaft die in der Aufgabe beschriebenen Sachsituation widerspiegelte. Die Frage, die sich für uns ergab: Geht die dafür genutzte Lösungszeit den Mathematisierungsbemühungen verloren? Wir interpretierten das Verweilen bei der Sachsituation durch anfängliches Zeichnen als eine Form der Lösungsunterstützung. Das Zeichnen kann der genaueren gedanklichen Auseinandersetzung mit der Sache dienen und einen zusätzlichen „Denkraum" (einen zeitlichen Puffer) vor den konkreten Mathematisierungen schaffen.
- Nach dem ersten Hören/Lesen der Textaufgabe konnten die Kinder ihre individuelle Lösungsarbeit beginnen oder aber noch im Kreis bei der Lehrperson zu einer Art erweiterten Orientierung bleiben. Die Lernenden konnten dies selbstbestimmt entscheiden. Mit dieser Form der Differenzierung entstand die Sorge, dass auch Lernende das Angebot nutzen, die eine erweiterte Orientierung zur Aufgabe eigentlich nicht brauchen, diese sich also Denkarbeit abnehmen lassen. Und dass wiederum andere, für die ein nochmaliges gemeinsames Schauen auf die Aufgabe wichtig wäre, sich selbst überschätzend darauf verzichten. Wir behielten trotz dieser Bedenken das offene Angebot zur Unterstützung bei.
- Die Kinder hatten im Anschluss an das individuelle Lösen die Möglichkeit, sich mit den Mitschülern zu den Lösungen und Notizen auszutauschen. In diesem Zusammenhang gab es die deutliche Aufforderung die eigene Lösung evtl. zu ändern und Notizen zu ergänzen. Während die Jüngsten dies nutzten und dadurch Lernprozesse vervollständigten, blieben die älteren Grundschulkinder (Dritt- und Viertklässler) lieber bei ihren eigenen Lösungen und stellten diese weniger bereitwillig in Frage.

Unsere Untersuchung machte, wie viele andere vorher auch, darauf aufmerksam, dass die Analyse von spezifischen Lernvoraussetzungen wichtig ist, um bei der Organisation von Unterricht den natürlichen Lernprozessen der Kinder entgegen kommen zu können. Die optimale Umsetzung der Erkenntnisse bleibt allerdings angesichts der Vielschichtigkeit und Komplexität der Lernprozesse einerseits und des Unterrichts andererseits immer anspruchsvoll.

Literatur

Duncker, K. (1935): Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer.
Franke, M. (2003): Didaktik des Sachrechnens. Berlin: Spektrum.
Fricke, A. (1987): Sachrechnen. Das Lösen angewandter Aufgaben. Stuttgart: Klett.
Fritz, A./Ricken, G./Gerlach, M./Schmidt, S. (2007): Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Teil 1: Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen. Berlin: Cornelsen.
Gallin, P./Ruf, U. (1990): Sprache und Mathematik. Zürich: LCH.
Gerster, H-D./Schulz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Forschungsbericht PH Freiburg. Print-on-Demand-Kopie.
Hasemann, K. (2007): Anfangsunterricht Mathematik. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum.
Hengartner, E./Hirt, U./Wälti, B. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Zug: Klett/Balmer.
Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
Mayer, R. E./Hegarty, M. (1996): The process of understanding mathematical problems. In: Sternberg, R. J./Ben-Zeer, T. (Hrsg.): The nature of mathematical thinking. Mahwah/New Jersey: Erlbaum.
Montague, M./Applegate, B. (2000): Middle school students perceptions, persistence and performance in mathematical problem solving. In: Learning Disabilities Quarterly, 23, S. 215–226.
Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Seelze: Kallmeyer.
Renkl, A./Stern, E. (1994): Die Bedeutung von kognitiven Eingangsvoraussetzungen und schulischen Lerngelegenheiten für das Lösen von einfachen und komplexen Textaufgaben. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 8, 1, S. 27–39.
Riley, M. S./Greeno, J. G./Heller, J. I. (1983): Development of children's problem solving ability in arithmetic. In: Ginsburg, P. H. (Hrsg.): The development of mathematical thinking. New York: Academic Press.
Reusser, K. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen. In: Weinert, F. E./Helmke, A. (Hrsg.): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Psychologie Verlags Union.
Reusser, K. (1992): Kognitive Modellierung von Text-, Situations- und mathematischem Verständnis beim Lösen von Textaufgaben. In: Reiss, K./Reiss, M./Spandl, H. (Hrsg.): Maschinelles Lernen. Berlin: Springer Verlag.
Schnotz, W./Baadte, Ch./Müller, A./Rasch, R. (erscheint 2010): Kreatives Denken und Problemlösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In: Sachs-Hombach, K. u. a. (Hrsg.): Bilder – Sehen – Denken. Zum Verhältnis von begrifflich-philosophischen und empirisch-psychologischen Forschungsansätzen in der bildwissenschaftlichen Forschung. Köln: Halem Verlag.
Staub, S. (2008): Analyse und Evaluation von Mathematikunterricht in 4. Klassen beim Umgang mit Text- und Sachaufgaben – eine Videostudie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM Verlag.
Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Münster: LIT.
Stern, E. (2005): Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In: v. Aster, M./Lorenz, J. H. (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Stern, E. (1998): Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich: Pabst Publisher.

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.
Winter, H. (1985): Sachrechnen in der Grundschule. Bielefeld: Cornelsen.

Anschrift der Verfasserin

Prof. Dr. Renate Rasch
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Im Fort 7
76829 Landau
r-rasch@uni-landau.de

Eingang Manuskript: 30.03.2009 (überarbeitetes Manuskript: 04.09.2009)