

Entdecken, Prüfen und Begründen

Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze

von

Michael Meyer, Dortmund & Jörg Voigt, Münster

Kurzfassung: Mathematische Sätze können auf unterschiedliche Weisen erarbeitet werden. Es wird ein System von Optionen vorgestellt, das die Vielfalt der Erarbeitungswege auf wenige Grundelemente zurückführt. Die theoretische Grundlage bilden Begriffe aus der philosophischen Logik: Abduktion, Induktion und Deduktion. Die Optionen werden beispielhaft an Aufgabenstellungen konkretisiert, die Schüler der Sekundarstufe I zur selbständigen Erarbeitung einschlägiger mathematischer Sätze herausfordern. Vor- und Nachteile der Erarbeitungswege werden vergleichend diskutiert.

Abstract: Mathematical theorems can be constructed and established in many different ways. In this text we present a system of options, in which the plurality of ways of constructing and establishing theorems is reduced to a few basic elements. The framework is based on terms of philosophical logic: abduction, deduction and induction. The options are exemplified by problems, which challenge students to discover and verify mathematical theorems. The pros and cons of the options are going to be discussed.

1 Einführung

Aufgaben bilden ein zentrales Moment des Mathematikunterrichts. Mit ihnen lassen sich unterschiedliche Ziele verfolgen: Mathematische Kenntnisse können entdeckt, systematisiert, begründet, geprüft, geübt werden usw. Wir betrachteten Aufgaben aus Schulbüchern und analysierten sie nach ihren Potentialen zum Entdecken, Prüfen und Begründen mathematischer Sätze. Die analysierten Aufgaben gehören in die Kategorie „Einstiegsaufgaben“ (Rezat 2008). Sie dienen dazu, dass Schüler¹ einen mathematischen Satz erarbeiten, bevor sie diesen in folgenden Aufgaben anwenden. Ein Ergebnis unserer Analysen wird in diesem Aufsatz vorgestellt. Es ist ein System von Optionen zur Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze.

¹ Auf eine getrennte Nennung der männlichen und weiblichen Form wird in diesem Artikel verzichtet. Das jeweils andere Geschlecht sei stets mitbedacht.

In unseren Schulbuchanalysen untersuchten wir acht aktuelle Schulbuchreihen für verschiedene Schulformen der Sekundarstufe I. Wir werden hier aber keine allgemeinen empirischen Aussagen über die Schulbuchreihen machen, sondern ein Kategoriensystem vorstellen, welches wir erstellten, um einzelne Schulbuchaufgaben nach logischen Gesichtspunkten einordnen und vergleichen zu können (s. Abschnitt 3). Dieses Kategoriensystem, ein System von Optionen zur Gestaltung von Aufgaben, basiert in seiner Grobstruktur auf einer Theorie, die bereits vor der Schulbuchanalyse entwickelt und erprobt war (s. Abschnitt 2). Die Feinstruktur des Systems entstand erst während der Schulbuchanalysen. Wenn wir in den folgenden Abschnitten auf einzelne Aufgaben aus den Schulbüchern verweisen, dann dienen diese lediglich zur Illustrierung einzelner Kategorien und ihrer Vor- und Nachteile. Wir werden auch nicht die Methoden darstellen, mittels derer die Logik eines konkreten Erarbeitungsweges zu einem mathematischen Satz rekonstruiert werden kann. Dies würde den Rahmen des Aufsatzes sprengen.

Wenn der Lehrer gemäß aktueller didaktischer Prinzipien den Schülern relativ große Freiheit in der Erarbeitung eines mathematischen Satzes oder mehrerer Sätze lässt, ist er gefordert, die Schüler darin zu orientieren und zu unterstützen, dass sie auf mathematische Weise Sätze entdecken, prüfen und begründen. Denn es liegt Schülern der Sekundarstufen oft näher, mathematische Sätze wie empirische Sätze entdecken und ihre Gültigkeit sichern zu wollen, weil es ihnen so leichter fällt und weil bei ihnen ein mathematisches Beweisbedürfnis noch nicht genügend ausgeprägt ist (s. Winter 1983, Heinze und Reiss 2005, S. 186 f.). Der Lehrer sollte auf die Eigenaktivitäten der Schüler reagieren, indem er solche Erarbeitungswege hervorhebt und unterstützt, die einen besonderen Beitrag zur mathematischen Bildung liefern. So werden die Schüler in der Freiheit zu eigenen Wegen orientiert, und sie erfahren die Mathematik als ein systematisches Wissensgebiet, in dem ein Satz auf einem System bekannter Sätze und Definitionen beruht. So wird die Gefahr geringer, dass Schüler die Mathematik als eine Ansammlung von Sätzen erfahren, von denen jeder Satz nur einen lokalen empirischen Bereich repräsentiert und nur für eine eng umrissene Klasse von Übungsaufgaben zu lernen ist.

Während sich in den Schulbüchern der Sekundarstufen relativ leicht ein mathematischer Satz identifizieren lässt, u. a. weil er zumeist (in einem roten Kasten) hervorgehoben ist, kommt man nicht umhin zu analysieren, auf welche Weise der Satz erarbeitet wird bzw. werden kann. Welche Erkenntniswege werden dem Schüler durch die Aufgaben zur Erarbeitung eines mathematischen Satz nahe gelegt, wenn der Schüler die Aufgabenstellung genau befolgt? Welche Optionen können Schulbuchautoren oder Lehrer bei der Gestaltung von Aufgaben wählen, um einen mathematischen Satz entdecken, prüfen und/oder begründen zu lassen?

Zur Beantwortung dieser Fragen bedarf es eines theoretischen Begriffssystems mit dem sich nicht nur die Aufgaben(folgen) analysieren lassen, sondern bereits auf

theoretischer Ebene das Entdecken, Prüfen und Begründen beschreiben lässt. In der mathematikdidaktischen Literatur sind die Begriffe „Entdecken“, „Prüfen“ und „Begründen“ in der Regel nicht fest definiert. Die Begriffsbestimmungen reichen beim Begründen von der vagen Bezeichnung „intuitives Begründen“ im Kernlehrplan für Gymnasien in NRW (MSJK 2004, S. 18 und 32) bis hin zu Normen mathematischen Beweisens. Hinsichtlich des Entdeckens ist die Begriffsbestimmung noch vager. In der Regel werden hier Beschreibungen genutzt, die theoretisch schwer einzuordnen sind und ihre Überzeugungskraft aus Metaphern und dem Ansprechen subjektiver Erfahrungen gewinnen. Man denke zum Beispiel an Bruners (1981, S. 16) Worte: „ein Fall des Neuordnens oder Transformieren des Gegebenen“. Zur Klärung der Begriffe Entdecken, Prüfen und Begründen greifen wir in Abschnitt 2 auf die Theorie der Schlussformen Abduktion, Induktion und Deduktion des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce zurück. Diese Theorie wurde bereits mehrfach in der mathematikdidaktischen Forschung verwendet (Hoffmann 2001; Voigt 2000; Meyer 2007a) und hat sich zur Analyse von Schüleräußerungen und Schulbüchern bewährt (Meyer 2007a und b; Meyer und Voigt 2008). Vereinfachend werden wir in diesem Artikel die Abduktion als charakteristische Schlussform des Entdeckens, die Induktion als charakteristische Schlussform des Prüfens und die Deduktion als charakteristische Schlussform des Begründens betrachten. Weiterhin werden auch verschiedene Kombinationen dieser Schlussformen erfasst.

Wir werden im dritten Abschnitt drei verschiedene Erarbeitungswege eines beliebigen mathematischen Satzes u. a. danach differenzieren,

- ob die Erarbeitungswege das Risiko der Entdeckung eines falschen Satzes verringern oder erhöhen,
- ob die Plausibilität bzw. Glaubwürdigkeit des vermuteten Satzes auch durch den Typ des Erarbeitungsweges bestimmt ist und
- ob die Erarbeitungswege an der Oberfläche empirischer Phänomene verbleiben oder ob sie mathematische Zusammenhänge tiefer erfassen, so dass auch der nachträgliche Beweis des vermuteten Satzes den Schülern erleichtert wird.

In ihrem Buch „Mathematikaufgaben selbst entwickeln“ (2005) schildern Büchter und Leuders systematisch, wie Mathematikaufgaben zu gestalten sind. Im Vergleich mit unserem Aufsatz erfasst das Werk der beiden Autoren einen sehr viel größeren Bereich von Aufgaben; es werden z. B. auch Aufgaben zur Modellierung von Sachsituationen und Aufgaben zur Begriffsbildung betrachtet. Ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen den Grundlagen der Arbeit von Büchter und Leuders und unserem Ansatz. Während die genannten Autoren von der Frage ausgehen, was eine „gute Aufgabe“ sei (2005, S. 9 ff.), und die Aufgabenkonstruktion an didaktischen Prinzipien orientieren (S. 13 f.), gründen wir unsere Erörterungen auf einer nicht-normativen Basis, auf einer philosophisch-logischen Grundlage.

In beiden Arbeiten bilden mathematische Aufgabenstellungen die konkreten Gegenstände der mathematikdidaktischen Analyse, sodass nur spekuliert werden kann, welche Aktivitäten Schülern nahe liegen, wenn sie eine Aufgabe bearbeiten. Keine Aufgabenstellung determiniert die Schüleraktivität. Ein technologisches Verständnis des Zusammenhangs von Aufgabenstellung und -bearbeitung ginge fehl (s. Luhmann und Schorr 1982). Es hängt z. B. auch von der Unterrichtskultur ab, in der eine Aufgabe gestellt wird, welche Aktivität den Schülern nahe liegt. Die Aufgabe, die Winkelsumme in Vielecken zu bestimmen, kann in der einen Klasse die Mehrheit der Schüler zum Messen von Winkeln veranlassen und zum Satz über die Winkelsumme im Sinne einer empirischen Verallgemeinerung von Messergebnissen führen, insbesondere wenn auf diese Weise schon im vorangegangenen Unterricht der Winkelsummensatz für Dreiecke entdeckt wurde. Dieselbe Aufgabe kann in einer anderen Klasse die Mehrheit der Schüler anregen, konkrete Vielecke als „Planskizzen“ für allgemeine Vielecke zu verstehen und in Dreiecke zu zerlegen, wenn die Schüler darin erfahren sind, Entdeckungen auf der Basis von Sätzen und Definitionen zu machen, statt nur mit Algorithmen (Messen u. Ä.) empirische Regelmäßigkeiten festzustellen.

Vordergründig werden im vorliegenden Aufsatz geschlossene Aufgaben konstruiert und diskutiert, die Schüler zu eng umrissenen Tätigkeiten in der Erarbeitung mathematischer Sätze veranlassen sollen. Wenn der Leser geneigt ist, die Aktivitäten der Schüler im Unterricht deutlich zu lenken, mag er den Text zur Optimierung seiner Vorgaben an die Schüler nutzen. Jedoch ist unser Anliegen ein anderes. Wir möchten das Potential von Schüleraktivitäten in der Erarbeitung mathematischer Sätze ausdifferenzieren und vergleichend diskutieren. Wir konkretisieren die unterschiedlichen Schüleraktivitäten zunächst an relativ geschlossenen Aufgaben, damit ein systematischer und klarer Vergleich möglich wird. Der systematische Vergleich soll aber auch denjenigen Leser unterstützen, der mit offeneren Aufgaben die Schüler zu vielfältigen und selbstbestimmten Aktivitäten veranlassen will und dann im Unterrichtsprozess vor folgender Herausforderung steht: In der Vielfalt der Erarbeitungswege der Schüler muss er die verschiedenen Qualitäten der Wege erkennen und einschätzen, um auf diese angemessen und zielbewusst reagieren zu können. Offene Aufgaben werden in Abschnitt 4 erörtert. Dort geht es nicht um die Gestaltung von Aufgaben, sondern unsere Theorie soll dort dazu dienen, bei der Lehrperson, die offenere Aufgaben einsetzt, eine differenzierte Erwartung von möglichen Erarbeitungswegen der Schüler zu wecken und ihre Kompetenz zu erhöhen, die Wege vergleichend bewerten zu können.

2 Das theoretische Begriffsnetz

In diesem Abschnitt präsentieren wir ein Begriffsnetz, das die Gestaltung von Aufgaben in Kapitel 3 orientieren wird. Wir unterscheiden zwischen dem Entdecken,

dem Prüfen und dem Begründen von mathematischen Sätzen. Für das Entdecken ist die Schlussform Abduktion charakteristisch, für das Prüfen die Induktion und für das Begründen die Deduktion.

2.1 Entdecken mittels Abduktion

Die Abduktion wurde von dem amerikanischen Philosophen Ch. S. Peirce als dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion dargestellt:

Resultat	$R(x_0)$	„The surprising fact, C, is observed;“
Gesetz:	$\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$	„But if A were true, C would be a matter of course“
Fall:	$F(x_0)$	„Hence, there is a reason to suspect that A is true.“

Abb. 1: Die allgemeine Form der Abduktion und die rechts hinzugefügte Beschreibung von Peirce (CP 5.189, 1903 verfasst)²

Den Ausgangspunkt für eine Abduktion bildet die Beobachtung eines überraschenden Phänomens. Als Phänomen wird dabei eine Zusammenführung von einem oder mehreren Subjekten (x_0) und einem Prädikat R verstanden. Durch eine Abduktion erkennen wir ausgehend von diesem Phänomen eine mögliche Erklärung: Mittels der Unterstellung eines ursächlichen Gesetz kommen wir zu einem erklärenden Fall. Sobald das Gesetz bewusst ist, erscheint das beobachtete Phänomen als ein Resultat dieses Gesetzes. Das Aufstellen des Gesetzes erfolgt versuchsweise: Auch ein anderes Gesetz könnte das beobachtete Phänomen erklären lassen. Ein anderes Gesetz würde einen anderen Fall mit sich bringen. Die Abduktion als Schluss von

² Eine ausführlichere Herleitung des linken Schemas ausgehend von der Beschreibung von Peirce (rechts in der Abbildung) erfolgt in Meyer (2007a, S. 40 ff.). Unsere formale Darstellung der Abduktion schränkt die Universalität der Schlussform, wie sie in der Philosophie bedeutsam ist, ein. Jedoch hat unsere Spezifizierung den Vorteil, dass die Anwendbarkeit im Bereich der Schulmathematik erleichtert wird. Fast alle Sätze der Schulmathematik lassen sich in die Form $\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$ transformieren, wenn mitbedacht wird, dass Äquivalenzaussagen als Kombinationen von Implikationen verstanden werden. Der Gültigkeitsbereich der Implikation im Gesetz soll sich auf eine Grundmenge erstrecken, die in der Regel unendlich ist. Dagegen steht die Variable x_0 für ein Element dieser Grundmenge oder für eine endliche Teilmenge der Grundmenge oder für eine Klasse von Elementen der Grundmenge. Die mit unserer Darstellung einer Schlussform verbundenen Beschränkungen der Universalität, wie sie in der philosophischen Literatur beansprucht wird, erwiesen sich als außerordentlich hilfreich, als wir (mit Studierenden) Schüleräußerungen und Schulbuchseiten analysierten.

einer beobachteten Wirkung zu einer möglichen Ursache führt lediglich zu einem möglichen, keinem sicheren Fall.

Betrachten wir zur Verdeutlichung der Abduktion ein fiktives Beispiel: Der Lehrer, welcher die Schüler am Morgen noch in Deutsch unterrichtet hatte, erscheint nicht rechtzeitig zum regulären Mathematikunterricht. Ein Schüler könnte sich das Fehlen des Lehrers damit erklären, dass dieser mal wieder schwänzende Schüler aus der benachbarten Gaststätte einsammelt. Die Abduktion, mit der die Erklärung für das nicht notwendig überraschende, jedoch zumindest erklärungsbedürftige Phänomen, das Fehlen des Lehrers, gefunden wird, kann wie folgt dargestellt werden:

Resultat:	Der Lehrer erscheint nicht rechtzeitig zum Mathematikunterricht.
Gesetz:	Wenn eine Lehrperson Schüler vom Schwänzen abhält, dann erscheint sie nicht rechtzeitig zum Unterricht.
Fall:	Der Lehrer sammelt Schüler aus der benachbarten Gaststätte ein.

Abb. 2: Beispiel für eine Abduktion

Das Fehlen des Lehrers kann natürlich auch andere Ursachen haben: Zum Beispiel könnte der Lehrer seine Kaffeepause im Lehrerzimmer ausdehnen (insofern würde das beobachtete Phänomen mittels eines anderen Gesetzes auf einen anderen Fall zurückgeführt).

Der Anwendungsbereich der Abduktion ist nicht auf den Alltag oder die Naturwissenschaften beschränkt, auch Entdeckungen von Schülern im Mathematikunterricht lassen sich mittels dieser Schlussform fassen. Hierzu sei der folgende mathematische Satz betrachtet, den wir im Weiteren als Standardbeispiel verwenden werden und der Kürze halber einfach mit „Potenzregel“ abkürzen:

Wenn zwei Potenzen die gleiche Basis besitzen, a^b und a^c ($a, b, c \in \mathbb{N}$), dann ist ihr Produkt $a^b \cdot a^c$ gleich a^{b+c} .
--

Abb. 3: Produktregel für Potenzen mit gleichen Basiszahlen

Um die Schüler die Potenzregel entdecken zu lassen, könnte das Schulbuch bzw. der Lehrer die Schüler auffordern, $3^5 \cdot 3^2$ und 3^7 mit dem Taschenrechner zu berechnen. Die Schüler sollen dann an der Gleichheit der Ergebnisse eine Regel er-

kennen. Mit folgender Abduktion wäre es dem Schüler möglich, das intendierte Gesetz festzustellen:

Resultat	$3^5 \cdot 3^2 = 243 \cdot 9 = 2187$ und $2187 = 3^7$ (nach Taschenrechner)
Gesetz:	Potenzregel
Fall:	Die Basiszahlen sind gleich und $5 + 2 = 7$.

Abb. 4: Eine kreative Abduktion zum Erkennen des mathematischen Satzes

Wenn wir davon ausgehen, dass der Schüler den mathematischen Satz, hier die Potenzregel, zuvor nicht kannte, dann stellt obige Abduktion ein Beispiel dafür dar, wie beobachtete Phänomene mittels eines neuen Gesetzes erklärt werden. Wenn mit einer Abduktion nicht nur der Fall, sondern auch das Gesetz neu entdeckt wird, spricht Eco (1985, S. 301) von „kreativen Abduktionen“. Kreative Abduktionen lassen die erkenntnisgenerierende Funktion der Schlussform besonders deutlich erkennen. Sie zeigen auch, dass eine Abduktion nur auf einer sicheren Prämisse beruht, auf dem Phänomen, das durch die Abduktion als das Resultat eines Gesetzes erscheint. Um den kognitiven Gedankengang des Schülers beim Vollziehen einer Abduktion wiederzugeben, müsste der ‚Schlusstrich‘ in der Abbildung 1 und 4 eigentlich unter dem Resultat (als beobachtetes Phänomen) erscheinen.

Eco (1985, S. 295) schreibt, dass Gesetz und Fall in einer Art „Chiasmus“ verbunden sind und wir sie gleichzeitig erkennen. Wir müssen daher unterscheiden zwischen dem kognitiven Vorgang der Erkenntnisgewinnung (dem Bilden von Gesetz und Fall zu dem Resultat) und der schematischen Gestalt (der Anordnung von Gesetz und Fall im Schema der Abduktion). Der Geistesblitz – das gleichzeitige Erkennen von Fall und Gesetz – bleibt verborgen. Das Schema gibt nur die Rationalität einer Entdeckung wieder, indem es den Zusammenhang zwischen den Elementen verdeutlicht. Die Darstellung des Zusammenhangs rechtfertigt die Entdeckung, die Hypothese erhält Plausibilität. Mit anderen Worten: Die Hypothese, das Gesetz gelte und sei ursächlich für die vorgefunden Phänomene bzw. der Fall wäre gegeben, erscheint nun nicht mehr als beliebige Spekulation, sondern ist durch die logische Verknüpfung mit dem beobachteten Phänomen, dem Resultat, plausibel (wenn auch nicht sicher).

Als einzige Prämisse für das Entdecken mathematischer Sätze kommt dem beobachteten Phänomen (einem Resultat des dann zu erkennenden Satzes) eine entscheidende Bedeutung zu. Der Lehrer muss den Schülern Phänomene anbieten oder zumindest erkennbar machen, welche die Schüler mit ihrer Abduktion dann als Resultat des zu entdeckenden Gesetzes erkennen können. Die Phänomene sind somit nicht beliebig wählbar, sondern durch die Struktur als konkrete Folgerung

des zu entdeckenden Satzes vorgegeben. Das Entdecken ist also keine „creatio ex nihilo“ (Hoffmann 2002, S. 271 ff.).

2.2 Begründen mittels Deduktion

Als Deduktion bezeichnet man den Schluss von einem Fall und einem Gesetz auf ein Resultat:

Fall:	$F(x_0)$
Gesetz:	$\forall x : F(x) \Rightarrow R(x)$
Resultat:	$R(x_0)$

Abb. 5: Das allgemeine Schema der Deduktion³

Bei der Deduktion stellen der Fall und das Gesetz gegebene Prämissen dar. Ausgehend hiervon wird das Resultat als notwendige Konsequenz erschlossen. Da die Deduktion der einzige wahrheitsübertragende Schluss ist, spielt er eine große Rolle in der Mathematik. Betrachten wir das Beispiel der Potenzregel aus Abbildung 3. Zum Beweis dieses Satzes kann eine vereinfachte Kette von Deduktionen angeführt werden:

$$a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_b \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_c \Rightarrow a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b+c} \Rightarrow a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

Der letzte Schritt dieser Kette entspricht der folgenden Deduktion:

Fall:	$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b+c \text{ Faktoren } a}$
Gesetz:	$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_y = x^y$ (Definition der Potenz)
Resultat:	Potenzregel

Abb. 6: Eine Deduktion im Beweis des mathematischen Satzes⁴

³ Bei dieser Deduktion handelt es sich um einen Schluss im ‚modus ponens‘. Wir werden hier nicht einzelne Ausprägungen der Deduktion diskutieren, weil es uns um die grundsätzlichen Unterschiede und Zusammenhänge zwischen Abduktion, Induktion und Deduktion geht.

2.3 Prüfen mittels Induktion

Abbildung 7 zeigt das allgemeine Schema der Induktion:

Fall:	$F(x_0)$
Resultat:	$R(x_0)$
<hr/>	
Gesetz:	$\forall x : F(x) \Rightarrow R(x)$

Abb. 7: Das allgemeine Schema der Induktion

Eine Induktion ist nicht wahrheitsübertragend: Das Gesetz kann nicht notwendig aus Fall und Resultat erschlossen werden. Eine Vorstellung, die wir im Folgenden kritisieren werden, ist, dass mittels einer Induktion ein neues Gesetz geschaffen wird (s. u.a. Winch 1913; Olander u.a. 1973; Holland 2007, Pedemonte 2007). Die Induktion wird dabei als ein Schluss verstanden, mittels dem wir von einzelnen Phänomenen allgemeine Regelmäßigkeiten generieren. Angenommen, ein Schüler stellt die Gleichheit von $3^5 \cdot 3^2$ und 3^7 , $3^7 \cdot 3^4$ und 3^{11} sowie $2^4 \cdot 2^5$ und 2^9 fest und beobachtet, dass in den drei Beispielen jeweils die Basiszahlen gleich sind und sich der Exponent des Ergebnisses aus der Summe der Exponenten der Ausgangszahlen ergibt. Entsprechend der Vorstellung der Induktion als gesetzgenerierender Schluss würde man von einer induktiven Verallgemeinerung sprechen, wenn der Schüler ausgehend von diesen Beobachtungen die allgemeine Potenzregel äußert.

Um aber auf die Potenzregel schließen zu können, bedarf es der Verknüpfung der Prämissen miteinander (der Feststellung der Gleichheit der Terme und der Feststellung, dass die Basiszahlen gleich sind und die Exponenten addiert werden). Ein Zusammenhang zwischen diesen Prämissen muss also bereits vor der Durchführung der ‚induktiven Verallgemeinerung‘ erkannt worden sein. Hierzu bedarf es einer Abduktion. Entsprechend wird deutlich, dass eine Induktion nur auf der Basis einer bereits vollzogenen Abduktion durchgeführt werden kann und somit nicht geeignet ist, um im Kern die Entdeckung neuer mathematischer Sätze zu beschreiben.

⁴ Wenn eine Begründung bzw. ein Beweis von dem Schüler eigenständig durchgeführt werden soll, dann muss das Gesetz (im oberen Beispiel die Definition der Potenz und zuvor das Assoziativgesetz der Multiplikation) dem Schüler nicht notwendigerweise präsent sein. Der Schüler muss es zunächst zu den vorgefundenen Fakten assoziieren. Somit wird deutlich, dass Abduktionen auch zur Begründung bzw. zum Beweis von mathematischen Sätzen dienen. Holland (2007, S. 196ff) spricht in diesem Kontext von „Beweisfindung“. Diese ist von dem Entdecken des Satzes zu unterscheiden.

Im Vergleich zur herkömmlichen Auffassung wird der Induktion also ihr erkenntnisgenerierender Charakter abgesprochen. Eine Induktion dient nur zur Prüfung einer bereits vorhandenen Hypothese. Das Vorgehen beschreibt Peirce wie folgt:

„Abduction having suggested a theory, we employ deduction to deduce from that ideal theory a promiscuous variety of consequences to the effect that if we perform certain acts, we shall find ourselves confronted with certain experiences. We then proceed to try these experiments, and if the predictions of the theory are verified, we have a proportionate confidence that the experiments that remain to be tried will confirm the theory.“ (Peirce, CP 8.209)

Zur Prüfung eines mathematischen Satzes mittels eines weiteren Einzelfalls wird deduktiv vorhergesagt, welches Resultat die notwendige Konsequenz für einen weiteren Fall wäre. Der Satz wird dabei als Gesetz der Deduktion angewendet. Er erscheint nicht als Resultat der Deduktion und wird somit nicht bewiesen. Anschließend wird eine Rechnung, ein Experiment o. Ä. zur Überprüfung der Vorhersage durchgeführt. Deckt sich die deduktiv ermittelte Vorhersage mit dem ermittelten, unbestreitbaren Resultat, so wird der Satz durch einen weiteren Einzelfall bestätigt, wenn auch nicht in seiner Allgemeingültigkeit bewiesen. Fällt der Test negativ aus, wird der Satz falsifiziert; zumindest bedarf es einer Einschränkung seines Gültigkeitsbereiches. Zur induktiven Prüfung der obigen Potenzregel für gleiche Basiszahlen könnte der Schüler ($a^b \cdot a^c =$) $2^4 \cdot 2^3$ betrachten. Der Schüler könnte zunächst deduktiv die Vorhersage folgern: $2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$. Diese Folgerung basiert auf der Annahme der Korrektheit der Potenzregel. Das Ergebnis stellt eine Vorhersage dar, die z. B. mit dem Taschenrechner oder rechnerisch „zu Fuß“ geprüft werden kann. Mit der folgenden Induktion wird der Satz für den Einzelfall $2^4 \cdot 2^3$ bestätigt:

Fall:	In $2^4 \cdot 2^3$ sind die Basiszahlen gleich und $4 + 3 = 7$.
Resultat:	$2^4 \cdot 2^3 = 16 \cdot 8 = 128 = 2^7$
Gesetz:	Potenzregel

Abb. 8: Die induktive Bestätigung eines mathematischen Satzes, hier der Potenzregel

Der Schluss auf das Gesetz bei einer Induktion dient also nur zur Bestätigung eines bereits erkannten, in seiner Gültigkeit unsicheren Gesetzes; er dient nicht zu dessen Generierung.

Wie im Beispiel erkennbar, tritt die Deduktion nicht nur in der Begründung (Beweis) eines mathematischen Satzes auf, sondern auch zur induktiven Prüfung eines Satzes. Der Unterschied liegt in der Art der Deduktion: Die Deduktion zur Be-

gründung eines Satzes zeichnet sich dadurch aus, dass sie den zu beweisenden allgemeinen Satz als Resultat beinhaltet. Mit der Deduktion zur induktiven Prüfung eines mathematischen Satzes wird auf eine konkrete notwendige Konsequenz geschlossen, wobei der hypothetische Satz als Gesetz auftaucht. Bei der induktiven Prüfung eines mathematischen Satzes sind prinzipiell sogar zwei Arten von Deduktionen notwendig, eine zur Vorhersage und eine zur Feststellung des Resultats (in Abbildung 8 mehrfach in der Gleichungskette „versteckt“). Bei Letzterer sollte der Satz nicht als Aussage auftauchen, weil es sich sonst um eine zirkuläre Prüfung handeln würde. Auch beim Entdecken, dessen charakteristische Schlussform die Abduktion ist, lässt sich die Deduktion bei der Feststellung eines Resultats rekonstruieren (in Abbildung 4 in den Gleichungen „versteckt“).

Zusammengefasst kennzeichnet die Abduktion das Entdecken, die Deduktion das Begründen und die Induktion das Prüfen eines Satzes. Das Begründen beinhaltet nur Deduktionen, wenn man vom Finden der Beweisidee absieht. Das Prüfen und das Entdecken beinhalten auch Deduktionen, was auf den ersten Blick spitzfindig erscheinen mag. Im folgenden Abschnitt wird sich dies als praktisch bedeutsam herausstellen.

3 Optionen zur Gestaltung von Aufgaben

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten logischen Schlussformen bilden die entscheidenden Elemente für folgendes System von Optionen, wie ein mathematischer Satz erarbeitet werden kann:

Der Satz wird

- ohne Schluss präsentiert (Option 1: *Präsentation*), oder
- qua Abduktion entdeckt und somit als plausibel gerechtfertigt (Option 2: *Entdeckung*).

Nachdem der mathematische Satz vom Schulbuch bzw. vom Lehrer präsentiert oder vom Schüler entdeckt wurde, kann er

- qua Induktion geprüft werden, was ihm eine relative Glaubwürdigkeit verleiht (Option 3: *Prüfung*), und/oder
- qua Deduktion begründet werden (Option 4: *Begründung*).

Diese Optionen können zu Erarbeitungen eines Satzes kombiniert werden. Folgende Kombinationen sind typische Erarbeitungen:

- Präsentation → Prüfung
- Präsentation → Prüfung → Begründung
- Präsentation → Begründung

sowie analog

- Entdeckung → Prüfung
- Entdeckung → Prüfung → Begründung
- Entdeckung → Begründung

In der Übersicht fehlt die Möglichkeit, dass ein Satz hergeleitet wird, m. a. W., dass der Satz aus einer Kette von Deduktionen resultiert, ohne dass er vorab präsentiert oder entdeckt wurde. Diese Möglichkeit haben wir nicht eigens aufgeführt, weil aus logischer Sicht kein entscheidender Unterschied zwischen Herleitung und Begründung besteht, auch wenn von dem Lernenden unterschiedliche Erkenntnisleistungen gefordert sind. In der Deduktionskette der Herleitung muss der mathematische Satz erkannt werden, bzw. zur Begründung muss ein Beweisansatz gefunden werden.

Insgesamt ergibt sich folgendes System von Optionen, welches im Folgenden detailliert vorgestellt wird.

Option	Tätigkeit
1	<i>Präsentation</i>
2	<i>Entdeckung</i>
2.1	Entdeckung an einem speziellen Phänomen
2.2	Entdeckung an einem typischen Phänomen
2.3	Entdeckung an mehreren Phänomenen
2.4	Entdeckung an einer Klasse von Phänomenen
2.5	Entdeckung mit latenter Beweisidee
3	<i>Prüfung</i>
3.1	Prüfung an einem speziellen Fall
3.2	Prüfung an einem typisch anderen Fall
3.3	Prüfung an mehreren Fällen
3.4	Prüfung an einer Klasse von Fällen
3.5	Prüfung mit latenter Beweisidee
3.6	Prüfung durch Vernetzung
4	<i>Begründung (Herleitung, Beweis)</i>

Abb. 9: Überblick über die Optionen der Erarbeitung eines mathematischen Satzes

Wir werden nun die Optionen stets an der Potenzregel als Satz konkretisieren und ausdifferenzieren. Zudem werden wir weitere mathematische Sätze aus dem Bereich der Sekundarstufe I als Beispiele verwenden.

Wenn zwei Potenzen die gleiche Basis besitzen, a^b und a^c ($a, b, c \in \mathbb{N}$), dann ist ihr Produkt $a^b \cdot a^c$ gleich a^{b+c} .

Abb. 10: Eine Potenzregel als Beispiel eines mathematischen Satzes

Das Vorgehen, an einem Beispiel alle oben genannten Optionen zu konkretisieren, hat einen Nachteil. Die eine oder andere Konkretisierung mag zu konstruiert und zu exotisch erscheinen, sie wird erst bei einem anderen Beispiel realistisch erscheinen. Wir halten jedoch den Vorteil für größer, dass an einem einfachen Beispiel alle Optionen zur Gestaltung von Aufgaben zum Entdecken, Prüfen und Begründen miteinander verglichen werden können. Zusätzlich werden wir einige Optionen auch mit Hinweisen auf entsprechende Schulbuchaufgaben konkretisieren.

Für den Leser, der die Unterscheidungen von Methoden zur Entdeckung und zum Beweis geometrischer Sätze bei Holland (2007, S. 152 ff.) kennt, sei hier ein Vergleich mit dem Optionensystem gezogen. Die von Holland als „induktive Satzfindung“ bezeichnete Methode entspricht in unserem System der Kombination der Optionen 2.3 und 4: Nachdem in einer ersten Stufe der mathematische Satz an Beispielen vermutet worden ist, wird er in einer zweiten Stufe bewiesen, ohne auf den Erkenntnisweg der ersten Stufe zurückzugreifen. Holland verwendet allerdings die Bezeichnung „induktiv“ anfangs zur Beschreibung eines abduktiven Prozesses, und er verwendet den Terminus „Allgemeingültigkeit“ in mehrdeutiger, irritierender Weise (S. 152). Hollands Methode „Satz- und Beweisfindung“ entspricht in unserem Optionensystem der Option 2.5 „Entdeckung mit latenter Beweisidee“, die Holland in drei Unteroptionen geometriespezifisch differenziert. Allerdings weist Holland nicht auf das Problem der Latenz der Beweisidee hin.

Option 1: Präsentation des Satzes

In traditionellen fachlichen Vorlesungen präsentiert üblicherweise der Dozent die Sätze, er lässt sie nicht von den Hörern entdecken. Im schulischen Mathematikunterricht wird zunehmend darauf Wert gelegt, dass Schüler die mathematischen Sätze entdecken. Jedoch kann die Entdeckungsleistung im Verhältnis zur Bedeutung des Satzes im Curriculum zu aufwendig sein. Der Schüler kann bei der Präsentation zunächst nur durch Nachvollzug ein Wissen von dem Satz gewinnen.

Zur Motivation, zur Anwendung und zur Festigung des Wissens von dem neuen Satz können den Schülern Aufgaben gestellt werden, zu deren Lösung sie den Satz verwenden. Falls obige Potenzregel präsentiert wurde, kann z. B. die Umwandlung von einem Megabyte in $2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20}$ Byte gefordert werden, wenn der übliche Umrechnungsfaktor 1024 von Megabyte in Kilobyte und deren Umwandlung in Byte vorgegeben ist (s. „LambacherSchweizer“ 10, Schmid und Weidig 1996 b, S. 11).

Option 2: Entdeckungen des Satzes

Die charakteristische Schlussform für das Entdecken ist die Abduktion. Man kann verschiedene Abduktionen voneinander unterscheiden, indem man auf die Phänomene achtet, an denen der Satz entdeckt werden soll. Die Phänomene können konkrete Rechnungen, Zeichnungen, Messungen u. ä. sein, welche die Schüler in einer einleitenden Aufgabe selbst herstellen sollen. In einer weiteren Aufgabe wird dann gefordert, an diesen Phänomenen etwas zu entdecken. Der Gestaltung der einleitenden Aufgabenstellung zur Herstellung von Phänomenen kommt große Bedeutung zu, weil von ihr abhängt,

- ob es dem Schüler erleichtert wird, die Phänomene als Resultat eines bestimmten hypothetischen Satzes zu erkennen,
- welche Plausibilität der hypothetische Satz dabei gewinnen kann und
- wie groß der Schritt zu einer möglichen nachfolgenden Begründung ist.

Option 2.1: Entdeckung an einem speziellen Phänomen

Für das Beispiel der Potenzregel könnte die Entdeckung so vorbereitet werden, dass der Schüler die Terme in der Gleichung $100\,000 \cdot 100 = 10\,000\,000$ als Potenzen zur Basiszahl 10 umschreiben soll. Dabei muss er nur deduktiv die Definition der Potenz verwenden. An der neuen Gleichung kann der Schüler eine allgemeine Regel entdecken (s. „Querschnitt Mathematik 10“, Kahle und Lörcher 1996, S. 36). Wenn der Schüler den Satz, die Potenzregel, entdeckt, vollzieht er aus logischer Sicht im Wesentlichen folgende Abduktion, wobei der konkrete Gedankengang eines realen Schülers sehr viel komplizierter sein kann:

Resultat:	$10^5 \cdot 10^2 = 10^7$ (nach der Regel des Anhängens von Nullen)
Gesetz:	Potenzregel
Fall:	Die Basiszahlen sind gleich und $5 + 2 = 7$.

Abb. 11: Abduktion an einem speziellen Phänomen

Das Phänomen zur Basiszahl 10 ist dem Schüler vermutlich so vertraut, dass ihm zur Erklärung der Gleichung die Regel zum Anhängen der Nullen bei der Multiplikation mit 10, 100, ... ausreicht, eine Regel, die dem dezimalen Stellenwertsystem geschuldet ist. Deshalb ist zum einen Skepsis angebracht, ob es für einen Schüler dann nahe liegt, die allgemeine Potenzregel für beliebige Basiszahlen an der Gleichung zu entdecken, m. a. W. nur darauf zu achten, dass die Basiszahlen gleich sind, statt darauf zu achten, dass sie gleich 10 sind. Falls es trotzdem geschieht, schafft die Abduktion wenig Plausibilität dafür, dass die Potenzregel auch für an-

dere Basiszahlen als 10 gelte, weil die zur Herstellung des Phänomens verwendete Regel des Anhängens von Nullen nicht für andere Basiszahlen gilt. Es ist also darauf zu achten, dass für die Entdeckungsaufgabe ein nicht zu spezielles Beispiel gewählt wird.

Dieses Problem ist in Schulbüchern auch bei Entdeckungsaufgaben erkennbar, bei denen aus Gründen der Realitätsnähe ein sachbezogener Kontext den Ausgangspunkt bildet. Zum einen fordert die Einkleidung in einen Sachkontext vom Schüler wiederum die „Entkleidung“, wenn der Satz als ein universaler, mathematischer Satz und nicht als ein bereichsspezifisches, sachkundliches Gesetz entdeckt werden soll. Zum anderen kann die Einkleidung einen Spezialfall implizieren, der den Schüler einen anderen mathematischen Kontext assoziieren lässt, als er vom Experten angezielt ist. Beispielsweise werden zur Entdeckung des 1. Strahlensatzes oft Schatten von Gegenständen betrachtet, welche senkrecht zum Erdboden stehen (s. z. B. „LambacherSchweizer 9“, Schmid und Weidig 1996 a, S. 138). Auf Grund des rechten Winkels können die Schüler die Längenabschnitte der Gegenstände mittels der Kenntnis der Schattenlängen berechnen, indem sie auf das Wissen um proportionale Abbildungen (Konstanz der Steigung) zurückgreifen, statt auf das Wissen um Eigenschaften der zentrischen Streckung. Es ist dann fern liegend anzunehmen, dass die Gleichheit der Streckenverhältnisse auch für Beispiele gilt, in denen die Parallelen zu keinem der beiden Strahlen senkrecht sind.

Option 2.2: Entdeckung an einem typischen Phänomen

Die Abduktion an einem für den Satz typischeren Phänomen verschafft der Potenzregel höhere Plausibilität, weil die Potenzregel dann nicht mit der vertrauten Regel zum Anhängen von Nullen konkurriert. Ein Beispiel ist das Rechnen zur Basiszahl 3 (s. Abb. 4). Allgemein gesagt unterscheidet sich das „typische“ Phänomen von dem „speziellen“ Phänomen dadurch, dass die Verallgemeinerung des typischen Phänomens gleich zu dem gesamten Geltungsbereich des mathematischen Satzes führt, während die Verallgemeinerung des speziellen Phänomens auf einen deutlich eingeschränkteren Geltungsbereich führen kann, weil ein bekanntes Gesetz verwendet wird, das nur für den eingeschränkten Geltungsbereich anwendbar ist.

Für die Entdeckung des 1. Strahlensatzes verwendet das Schulbuch „Elemente der Mathematik 9, Gymnasium NRW“ (Griesel u. a. 2004 a, S. 174) folgendes Problem: Zwei Balken und der Fußboden bilden ein Dreieck, das weder rechtwinklig noch gleichschenkelig ist. Maßangaben bestimmen, an welcher Stelle des einen Balken ein Ablagebrett zu montieren ist. Gefragt wird, wo die Stelle an dem anderen Balken ist. Hier kann die geometrische Lösung nur mittels des Wissens um Eigenschaften der zentrischen Streckung gewonnen werden, und nicht wie oben (s. Option 2.1) mittels des Wissens um Eigenschaften der proportionalen Abbildungen. Und hier ist die Vermutung, die Gleichheit der Streckenverhältnisse würde

auch für beliebige Winkel zwischen den Parallelen und den Strahlen gelten, nicht mehr fern liegend.

Wenn man Schüler auffordert, selbst ein Beispiel zu wählen, ist entsprechend darauf zu achten, dass sie sich nicht ein zu spezielles Beispiel aussuchen. Angenommen, man will die Schüler den Satz von der Winkelsumme im Dreieck entdecken lassen. Man fordert die Schüler auf, selbst ein Dreieck zu wählen und mit ihm die Ebene zu parkettieren, wobei in der Parkettierung gleiche Ecken gleich gefärbt sein sollen. Es ist damit zu rechnen, dass die Schüler spezielle Dreiecke bevorzugen, weil mit ihnen leichter parkettiert werden kann. Aber bei gleichschenkligen oder rechtwinkligen Dreiecken muss sich kein gestreckter Winkel aus drei unterschiedlich gefärbten Winkeln ergeben (s. Abb. 12). Man kann den Schülern den Gültigkeitsbereich des zu entdeckenden Satzes auch vorab angeben, damit sie sich nicht damit begnügen, zu spezielle Beispiele zu wählen.

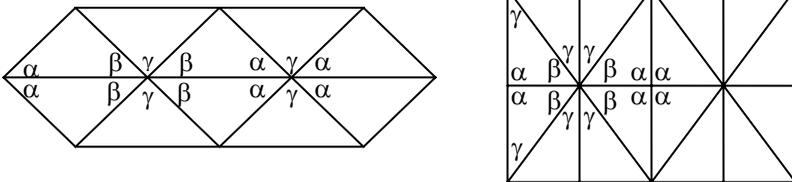


Abb. 12: Parkettierung der Ebene mit gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken

Option 2.3: Entdeckung an mehreren Phänomenen

Wenn ein Satz nicht nur an einem Phänomen, sondern an mehreren Phänomenen (welche dann als ein Resultat des zu entdeckenden Satzes erkannt werden) entdeckt wird, erhält der entdeckte Satz höhere Plausibilität. Denn die Gefahr ist geringer, unbemerkt einen Sonderfall zur Erklärung zu verwenden, der keine Verallgemeinerung erlauben würde. Zum Beispiel sollen die Schüler $243 \cdot 9$, $64 \cdot 8$ und $125 \cdot 5$ mit dem Taschenrechner berechnen, die resultierenden Gleichungen mit Potenzen zu der jeweils kleinstmöglichen Basiszahl umschreiben und an den Gleichungen eine Regel entdecken. Die Entdeckung des Satzes lässt sich als Abduktion wie folgt darstellen:

Resultat:	$3^5 \cdot 3^2 = 3^7$, $2^6 \cdot 2^3 = 2^9$, $5^3 \cdot 5^1 = 5^4$ (nach Taschenrechner)
Gesetz:	Potenzregel
Fall:	Die Basiszahlen sind jeweils gleich und $5 + 2 = 7$, $6 + 3 = 9$, $3 + 1 = 4$.

Abb. 13: Abduktion an mehreren Phänomenen

Es ist nicht fern liegend, dass der Schüler schon an der Gleichung $3^5 \cdot 3^2 = 3^7$ den Satz entdeckt und die beiden anderen Gleichungen zur Bestätigung seiner Hypothese verwendet. Dann sprechen wir von der Entdeckung an einem Phänomen mit anschließender Prüfung an mehreren weiteren Fällen (s. Option 3.3).

Bei Verwendung des Computers im Unterricht lassen sich rasch viele Resultate herstellen, vorausgesetzt, der Umgang mit der Software ist vertraut. Damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Schüler die intendierte Entdeckung machen. Damit meinen wir aber nicht, dass mit der Anzahl der Phänomene die Entdeckungswahrscheinlichkeit gegen eins konvergiere. Quantität schlägt nicht notwendigerweise in Qualität um.

Es gibt noch einen weiteren Grund für die Variation der Phänomene, welche die Schüler mittels der Abduktion als ein Resultat des zu entdeckenden Satzes erkennen können. Wenn man die Schüler einen Satz entdecken lassen will, dessen Gültigkeitsbereich so groß ist, dass strukturell verschiedene Fälle zu berücksichtigen sind, sollten auch die Phänomene entsprechend vielfältig sein. Beispielweise soll die Achsensymmetrie von Potenzfunktionen mit geradzahligem Exponenten entdeckt werden. Dann haben die Schüler Graphen zu Funktionstermen mit sowohl positiven als auch negativen Exponenten zu zeichnen, damit sie den Satz in seiner Allgemeinheit entdecken. Wenn die Schüler damit vertraut sind, selbständig mathematische Zusammenhänge und ihre Gültigkeitsbereiche zu erkunden, kann auf diese Vorgabe verzichtet werden. Viele Sätze der Schulmathematik, die für einen größeren Zahlbereich als den der natürlichen Zahlen gelten, lassen sich an Phänomenen entdecken, die nur für die natürlichen Zahlen leicht herstellbar sind. Man kann auch kleinschrittig gestuft vorgehen, indem der Satz zunächst nur für einen eingeschränkten Geltungsbereich entdeckt werden soll und dann später verallgemeinert wird (s. z. B. zur Potenzregel „Elemente der Mathematik 10“, Griesel u. a. 2004 b, S. 18 ff.).

Option 2.4: Entdeckung an einer Klasse von Phänomenen

Die Entdeckung des Satzes an mehreren Phänomenen kann besondere Plausibilität erlangen, wenn die Phänomene eine ganze Klasse bilden. Das ist bei einigen mathematischen Sätzen möglich. Während wir mit „mehreren Phänomenen“ eine end-

liche Menge kennzeichnen, steht „eine Klasse von Phänomenen“ für eine unendliche (echte) Teilmenge der für den mathematischen Satz relevanten Gesamtmenge.

Zunächst soll diese Option wieder am Beispiel der Potenzregel konkretisiert werden, obwohl sie hier ungünstig ist: Beispielsweise werden die Schüler an die Regel zum Anhängen von Nullen bei der Multiplikation mit Potenzen von 10 erinnert. Sie werden aufgefordert, diese bekannte Regel in Potenzschreibweise darzustellen und daran eine allgemeinere(!) Regel zu entdecken. Die Entdeckung des Satzes lässt sich als Abduktion wie folgt darstellen:

Resultat:	$10^b \cdot 10^c = 10^{b+c}$ (nach der Regel des Anhängens von Nullen)
Gesetz:	Potenzregel
Fall:	Die Basiszahlen der Potenzen sind gleich.

Abb. 14: Abduktion an einer Klasse von Phänomenen

Wenn die Entdeckung an einer Klasse von Phänomenen geschehen soll, besteht ein geringeres Risiko, dass der Schüler eine wohl richtige, aber noch zu spezielle Regel entdeckt. In den früheren Abb. 4 oder 11 wäre im Falle, dass die Gefahr sich realisiert, eine Potenzregel speziell nur für die Basiszahl 3 bzw. 10 entdeckt.

Ein weiteres Beispiel für die Option stellt die Entdeckung des Zusammenhangs zwischen der Verschiebung beliebiger Parabeln längs einer Achse und dem Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ dar, ausgehend von dem Wissen um den Zusammenhang für Funktionen der Art $f : x \mapsto ax^2 + c$.

Der Vorteil der Option, einen Satz an einer Klasse von Phänomenen entdecken zu lassen, hat eine Kehrseite. Von den Schülern wird erwartet, mit Variablen zu arbeiten, bzw. in der Geometrie in einer gezeichneten (Plan-)Figur das Allgemeine zu sehen und mit dem Allgemeinen in innerer Anschauung zu operieren. Die höhere Plausibilität des entdeckten Satzes hat den Preis der größeren Schwierigkeit bei der vorangegangenen Herstellung des Resultates der Abduktion.

Option 2.5: Entdeckung mit latenter Beweisidee

„Die Vorstellungen, die man beim Entdecken [...] über den Satz gewinnt, können auch nützlich sein für den systematischen Beweis; die Entdeckung kann beweisleitend sein.“ (Winter 1991, S. 35)

Der Schüler kann den Satz auch an Phänomenen entdecken, zu deren Bestimmung er eine Rechnung, eine geometrische Konstruktion o. Ä. vollzogen hat, die die Struktur einer möglichen Begründung des Satzes erkennen lässt. Beispielsweise sollen die Schüler

1. 3^5 und 3^2 als Produkte schreiben: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ und $3^2 = 3 \cdot 3$,
2. das Produkt der Produkte bilden und das Ergebnis als Potenz zur Basiszahl 3 schreiben: $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$ und
3. daran etwas Allgemeines entdecken.

Die Entdeckung lässt sich im Schema der Abduktion wie folgt darstellen:

Resultat:	$3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$
Gesetz:	Potenzregel
Fall:	Die Basiszahlen sind gleich und $5 + 2 = 7$.

Abb. 15: Abduktion mit latenter Beweisidee

Bei Aufgabenteil 2 vollzieht der Schüler Deduktionen, in denen er auf die Assoziativität der Multiplikation und auf die Definition der Potenz zurückgreift. Damit wird zugleich eine Beweisidee für den Satz erkennbar. Es ist fraglich, ob der Schüler so reflektiert vorgeht, dass er die Beweisidee erkennt. Daher sollten wir vorsichtiger sagen, dass die Entdeckung eine „latente“ Beweisidee beinhaltet. Jedenfalls verleiht diese Entdeckung dem Satz hohe Plausibilität. Denn auf dem Weg zur Entdeckung, bei der Herstellung des Resultats, wird die für das Thema grundlegende Definition der Potenz genutzt, und die Addition der Exponenten wird in den Zusammenhang mit der Multiplikation von Basiszahlen gebracht. Kurz gesagt: Das Wagnis der Erstellung einer Hypothese geschieht über einem dicht gewebten Netz von einschlägigen Beziehungen auf tieferer Ebene. Ein Nachteil dieses Vorgehens liegt darin, dass die Schüler zur Herstellung des Resultats der nachfolgenden Abduktion deutlicher gelenkt werden müssen, als es zur Auslösung von Entdeckungen anderer Art notwendig wäre. (Zum Kontrast sei an die Herstellung eines Phänomens mit dem Taschenrechner gedacht.)

Die Option „Entdeckung mit latenter Beweisidee“ ist verglichen mit den zuvor dargestellten Optionen didaktisch sehr produktiv, erlaubt sie doch mit der Entdeckung des Satzes gleichzeitig die Einsicht, warum der Satz allgemeingültig ist (s. Meyer und Voigt 2008). Weil das obige Beispiel dafür recht banal ist, sollen nun weitere mathematische Sätze zur Konkretisierung dienen. Dabei werden auch zwei Schulbuchseiten genannt, weil auf jeder von ihnen sogar beide Optionen zum Vergleich realisiert sind, das Entdecken mit und das Entdecken ohne Beweisidee:

- Dass der Graph von $x \mapsto x^2$ symmetrisch zur y-Achse ist, kann visuell entdeckt werden, nachdem er auf algorithmische Weise mittels einer Wertetabelle gezeichnet wurde oder vom Rechner hergestellt wurde. Ein Entdecken der Symmetrie mit Beweisidee liegt aber erst dann vor, wenn bei der Herstellung

der Wertetabelle reflektiert im Sinne von Termumformungen vorgegangen wurde, z. B.: $(-4)^2 = ((-1) \cdot 4)^2 = \dots = 4^2$.

- Der Satz von Vieta kann entdeckt werden, indem Lösungen quadratischer Gleichungen (z. B. $x^2 + 8x + 15 = 0$) mittels bekannter Verfahren (quadratische Ergänzung oder die pq-Lösungsformel) bestimmt und mit den Zahlen in der Gleichung verglichen werden. Da die Schüler zur Lösung einer solchen Aufgabe üblicherweise rasch Terme vereinfachen, sobald es möglich ist, bleibt die Entdeckung des Satzes auf diesem Weg ohne Beweisidee. Wird die quadratische Gleichung jedoch in Form eines Produktes zweier Differenzen (z. B. $(x-3)(x-5) = 0$) gegeben, werden direkt die Nullstellen erkannt und wird die Gleichung in die übliche Form gebracht, so enthält der Weg zur Entdeckung des Satzes von Vieta eine latente Beweisidee. Im Schulbuch „Mathematik – Neue Wege 9“ werden im „Forschungsauftrag 32“ (Lergemüller und Schmidt 2003, S. 113) beide Wege von den Schülern gefordert.
- Auch dort, wo keine mathematischen Sätze in Schulbüchern explizit formuliert werden, wie etwa in Grundschulbüchern, können wir zwischen Entdeckungen ohne und mit Beweisidee unterscheiden. Schüler können die Gleichheit von $1+2+3+4+3+2+1$ und $4 \cdot 4$ rechnerisch feststellen, indem sie die Summe von links nach rechts sukzessive ausrechnen und auch den zweiten Term ausrechnen. Mehrfach durchgeführt kann eine Summenformel entdeckt werden. Wenn dagegen die ersten drei Summanden mit den letzten drei Summanden paarweise zu 4 aufgefüllt werden, eventuell noch anschaulich unterstützt, ist eine latente Beweisidee für beliebige Summen der Art zu erkennen.
- Zur Entdeckung des Winkelsummensatzes für Vierecke können die Ecken eines Papiervierecks abgerissen und aneinander gelegt werden. Wird aber von den Schülern verlangt, ohne Messung die Winkelsumme eines vorgegebenen Vierecks sicher zu bestimmen, können sie zur Lösung nur den Winkelsummensatz für Dreiecke verwenden (eventuell unterstützt durch eine vorgegebene Diagonale). Damit gewinnen sie eine Beweisidee für den Winkelsummensatz für Vierecke. Im Schulbuch „Lernstufen Mathematik 7“ (Leppig 2000, S. 83) werden sogar zwei Wege zur Entdeckung des Winkelsummensatzes dargestellt, ein Weg ohne und ein Weg mit Beweisidee.

Ob der Weg zur Entdeckung eines mathematischen Satzes eine latente Beweisidee beinhaltet, hängt davon ab, wie das konkrete Resultat der späteren Abduktion festgestellt wurde. Dieses Resultat kann durch deduktive Schlüsse als sicher festgestellt werden. Wenn der Satz mit latenter Beweisidee entdeckt wird, müssen bei der Feststellung des Resultates der späteren Abduktion die Sätze oder Definitionen angewendet werden, die für den Beweis des Satzes entscheidend sind. M. a. W., auf das Resultat muss deduktiv geschlossen werden, und in diesen deduktiven Schlüssen werden die Gesetze verwendet, die für die Deduktionen im Beweis wesentlich

sind. Es ist für die Option „Entdeckung mit latenter Beweisidee“ also entscheidend, wie die Aufgabe zur Feststellung des Resultates der Abduktion gestaltet ist. Verglichen mit dem Herstellen von Phänomenen zur Entdeckung ohne Beweisidee ist der Aufwand für den Schüler größer bzw. die Lenkung durch den Lehrer stärker. Das zahlt sich dann aus, wenn der entdeckte Satz zu beweisen ist. Aber auch dann, wenn man nicht beabsichtigt, den zu entdeckenden Satz zu beweisen, hat die Entdeckung mit latenter Beweisidee den Vorteil, dass sie auf einschlägige Sätze und Definitionen beruht, also den Satz erklären und nicht nur erkennen lässt. Und damit der Schüler dieses realisiert, sollte die Beweisidee nicht latent bleiben, sondern im Unterrichtsgespräch manifest werden.

Option 3: Prüfungen des Satzes

In Abschnitt 2 wurde die Schlussform der Induktion als charakteristisch für das Prüfen eines Satzes herausgestellt, der schon entdeckt oder präsentiert wurde, aber noch hypothetisch ist. Analog zu den Differenzierungen des Entdeckens können wir verschiedene Prüfungen unterscheiden. Die Analogie lässt zu, dass die entsprechenden Schemata nicht stets wieder detailliert dargestellt werden müssen. Als letzte Option wird die „Prüfung durch Vernetzung“ diskutiert, die keine Entsprechung bei den Entdeckungen hat.

Die erfolgreiche Prüfung verleiht dem vermuteten Satz eine relative Glaubwürdigkeit. Die Art der induktiven Prüfung beeinflusst die Höhe der Glaubwürdigkeit und kann sogar zu einer rein deduktiven Begründung überleiten. Damit wir diese Zusammenhänge direkt darstellen können, werden wir die Prüfungen danach unterscheiden, an welchen Fällen sie stattfinden und wie für die Fälle die Resultate bestimmt werden (vgl. Abschnitt 2.3).

Wenn man Schüler zur Prüfung einer allgemeinen mathematischen Aussage auffordert, sollte man nicht blauäugig erwarten, dass die Schüler subjektiv die Prüfung als Prüfung im logischen Sinne verstehen. Denn die Erfahrung im traditionellen Unterricht lehrt die Schüler, dass zu prüfende Aussagen zumeist wahre Aussagen sind, insbesondere wenn sie vom Lehrer bzw. im Schulbuch präsentiert werden. Die Schüler können dann die Prüfung vielmehr als Prüfung ihrer Kompetenz verstehen, in dem Sinne, dass sie zeigen sollen, ob sie die mathematische Aussage verstanden haben und anwenden können. Erst wenn die allgemeine Aussage für die Schüler tatsächlich fraglich ist, erhält die Prüfung die logische Funktion, die wir ihr im Folgenden zurechnen.

Option 3.1: Prüfung an einem speziellen Fall

Nachdem die Schüler den Satz an einem oder an mehreren Phänomenen entdeckten, ist eine Prüfung nur an einem weiteren, neuen Fall möglich, wenn sich kein logischer Zirkel ergeben soll. Angenommen die Potenzregel sei an dem Resultat

$3^5 \cdot 3^2 = 243 \cdot 9 = 2187 = 3^7$ mit Hilfe des Taschenrechners entdeckt worden. Nun werden die Schüler aufgefordert, die entdeckte Regel an $3^6 \cdot 3^7$ mittels des Taschenrechners zu prüfen. Die erfolgreiche Prüfung kann wie folgt dargestellt werden:

Fall:	In $3^6 \cdot 3^7$ sind die Basiszahlen gleich und $6 + 7 = 13$.
Resultat:	$3^6 \cdot 3^7 = 3^{13}$ (nach Taschenrechner)
Gesetz:	Potenzregel

Abb. 16: Induktion an einem speziellen Fall

Im obigen Beispiel ist die Basiszahl des Falles aus der Induktion identisch mit der Basiszahl des Falles aus der Abduktion. Man kann argwöhnen, dass die vermutete Regel nur für die Basiszahl 3 gelte. Die Prüfung an Potenzen mit derselben Basiszahl erhöht nicht die Glaubwürdigkeit der Regel für andere Basiszahlen. Die Gefahr der Prüfung an einem Fall, der die spezielle Gegebenheit desjenigen Falles wiederholt, an dem der Satz entdeckt wurde, wird beispielsweise im folgenden Szenario deutlich: Die falsche Potenzregel $a^b \cdot a^c = a^{b \cdot c}$ wird für das spezielle Beispiel $b = c = 2$ entdeckt, und sie wird „erfolgreich“ geprüft, indem lediglich die Basiszahl variiert wird.

Allerdings kann die Prüfung an einem speziellen Fall auch einen Vorteil besitzen. Zum Beweis einiger Sätze der Schulmathematik sind Fallunterscheidungen zu treffen. Falls der vermutete Satz für einen Spezialfall relativ leicht zu beweisen ist und die dabei verwendete Beweisidee auf die anderen Fälle übertragbar ist, bietet es sich an, den Spezialfall zur Prüfung zu verwenden. Beispielsweise ist der Umfangswinkelsatz – jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel – relativ leicht für den Spezialfall nachzuweisen, dass ein Schenkel des Umfangswinkels durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Hier kann dem Schüler auffallen, dass statt der Messung von Umfangs- und Mittelpunktswinkel der eine Winkel aus dem anderen Winkel berechenbar ist, indem man z. B. den Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und den Winkelsummensatz für Dreiecke verwendet. Der nachträgliche Beweis für die anderen Fälle kann dann diese Erkenntnis nutzen, auch wenn die Beweisgänge dann komplizierter sind. Die Prüfung eines vermuteten Satzes an einem Spezialfall kann also die Chance bieten, eine Beweisidee für alle Fälle zu gewinnen. Wir werden darauf unter 3.5 zurückkommen.

Option 3.2: Prüfung an einem typisch anderen Fall

Polya betont die Verschiedenheit der Fälle: „Die Verifizierung einer neuen Konsequenz zählt umso mehr, je verschiedener die neue Konsequenz von der bereits verifizierten ist.“ (Polya 1963, S. 18). Für unser Beispiel der Potenzregel kann die Prüfung auch an $2^8 \cdot 2^6$ erfolgen, so dass man der vermeintlichen Gefahr entgeht, einen falschen mathematischen Satz, der nur für den Sonderfall der Basiszahl 3 gelten würde, entdeckt zu haben und induktiv zu bestätigen. Wenn der Winkelsummensatz für Vierecke an Parkettierungen mit speziellen Vierecken (Parallelogramme etc.) entdeckt wurde, so erscheint der Satz sehr viel glaubwürdiger, wenn zur Prüfung auch die Parkettierung mit einem Viereck gelingt, das keine Symmetrien aufweist.

Mit der Prüfung an einem typisch anderen Fall kann man auch den Geltungsbereich des vermuteten Satzes austesten, wenn seine Grenzen noch unklar sind. Beispielsweise stellt das Schulbuch „Elemente der Mathematik 10“ (Griesel u. a. 2004 b, S. 18) auch die Aufgabe, den Term $2^5 \cdot 3^4$ bezüglich der obigen Potenzregel zu untersuchen, die an anderen Termen zuvor entdeckt werden konnte. Dieser Fall erlaubt keine einfache Anwendung der Potenzregel, er lässt also erkennen, dass die Gleichheit der Basiszahlen die entscheidende Voraussetzung der Potenzregel ist. So beugt man einer zu weit gehenden Verallgemeinerung einer Regel vor. Das Austesten des Gültigkeitsbereichs der Potenzregel kann vielmehr erfolgreich an Basiszahlen und Exponenten erfolgen, die rationale Zahlen außerhalb des Bereichs der natürlichen Zahlen sind. Der Bereich, für den die Potenzregel glaubwürdig erscheint, wird auf diese Weise ausgedehnt.

Option 3.3: Prüfung an mehreren Fällen

Statt an einem Fall kann die Prüfung auch an mehreren Fällen erfolgen und damit die Glaubwürdigkeit des Satzes erhöhen. Beispielsweise werden mehrfach die Basiszahlen und die Exponenten variiert. Weil die schulmathematischen Sätze üblicherweise für unendliche Grundgesamtheiten gelten, ist es sinnlos, die Glaubwürdigkeit eines Satzes in Abhängigkeit von der endlichen Anzahl der Fälle zu quantifizieren, an denen der Satz geprüft wird. Subjektiv fühlt man sich aber sicherer, wenn viele verschiedene Fälle zur Prüfung betrachtet werden. Angesichts der Erfahrung, dass in der Schulmathematik selten eine Regel falsch ist, wenn sie sich in vielen verschiedenen Fällen bewährt, ist es auch vernünftig der Regel nach solchen Prüfungen ein relatives Vertrauen entgegen zu bringen. Ein weiterer Grund dafür, Schüler aufzufordern, einen vermuteten Satz an möglichst vielen verschiedenen Fällen zu prüfen, besteht darin, dass sich die Schüler mit dem Satz und seiner Anwendung vertraut machen.

Allerdings birgt diese Option auch eine Gefahr, die besonders für den traditionellen, vom Lehrer gelenkten Unterricht gilt. Die Schüler machen im traditionellen

Unterricht die Erfahrung, dass die vermuteten Sätze, zu deren Prüfung sie aufgefordert sind, sich meist als wahr erweisen. Denjenigen Schülern, die kein Beweisbedürfnis für mathematische Sätze haben (s. Winter 1983), mag dann die umfangreiche Prüfung genügen und der spätere Beweis als ein aufgesetztes, fremdartiges Ritual erscheinen. Schließlich ist die (unvollständige) Induktion ein Verfahren, das in anderen Fächern und im Alltag die ultima ratio der Erkenntnissicherung ist. Die Prüfung an mehreren Fällen kann also einer für das Fach Mathematik falschen erkenntnistheoretischen Einstellung der Schüler Vorschub leisten. Deshalb ist diese Option eher geeignet, wenn die Schüler nicht nur wahre Sätze prüfen sollen, sondern auch falsche Sätze oder Sätze mit eingeschränktem und zunächst unklarem Gültigkeitsbereich. Diese Möglichkeiten ergeben sich eher in einem Unterricht, der die Selbständigkeit der Schüler betont und die Schüler eigene Erkundungen in neuen mathematischen Wissensbereichen machen lässt.

Option 3.4: Prüfung an einer Klasse von Fällen

Man kann statt einem Fall oder mehreren Fällen auch eine Klasse von Fällen betrachten, um die Glaubwürdigkeit durch die Prüfung zu erhöhen. Beispielsweise sollen die Schüler prüfen, ob die hypothetische Potenzregel auch für alle Potenzen zur Basiszahl 10 gelte. Der Schüler mag dann die bekannte Regel zum Anhängen von Nullen verwenden, so dass sich (deduktiv) das Resultat für die Induktion ergibt: $10^b \cdot 10^c = 10^{b+c}$.

Fall:	In $10^b \cdot 10^c$ sind die Basiszahlen gleich.
Resultat:	$10^b \cdot 10^c = 10^{b+c}$ (nach der Regel des Anhängens von Nullen)
Gesetz:	Potenzregel

Abb. 17: Induktion an einer Klasse von Fällen⁵

Die Prüfung an einer Klasse von Fällen kann einen Beweis des vermuteten Satzes vorbereiten, weil z. T. schon auf allgemeiner Ebene argumentiert wird. In der Unterrichtspraxis ist dabei zu überlegen, ob von der Lerngruppe erwartet werden kann, dass sie eine Prüfung für eine Klasse von Fällen vornehmen kann; denn gegenüber den zuvor dargestellten Optionen müssen die Schüler nun auf allgemeinerer Ebene argumentieren.

⁵ Sprachlich exakter wäre es von der Prüfung an einer Klasse von Beispielen zu sprechen, die in der Induktion den logischen Status des Falles erlangen. Um der Lesbarkeit willen verzichten wir auf die sprachliche Präzisierung.

Wenn die Prüfung an mehreren Klassen von Fällen stattfindet und diese Klassen sogar den Geltungsbereich des mathematischen Satzes ausfüllen, dann ist rückblickend eine Begründung mit Fallunterscheidung gelungen. Man denke z. B. an die Potenzregel mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten, an den Satz über die Symmetrie von Potenzfunktionen, in deren Funktionstermen die Exponenten positiv oder negativ sind, oder an den Umfangswinkelsatz mit seinen Fallunterscheidungen.

Option 3.5: Prüfung mit latenter Beweisidee

Zur induktiven Prüfung muss für einen neuen Fall ein neues Resultat bestimmt werden, das mit demjenigen Resultat verglichen wird, das mittels des hypothetischen Satzes vorhergesagt wurde. Die Bestimmung des neuen Resultats erfolgt rein deduktiv mittels bekannter Regeln (z. B. der Regel zum Anhängen von Nullen). Diese deduktive Bestimmung darf nicht mit der deduktiven Begründung des Satzes verwechselt werden, und hat doch eine potentielle Gemeinsamkeit mit ihr. Denn wenn die deduktive Bestimmung des konkreten Resultates schon strukturell die Begründung des Satzes vorwegnimmt, ist der Schritt von der Prüfung zur Begründung wesentlich erleichtert.

Im obigen Beispiel kann das Anhängen der Nullen nicht zur deduktiven Begründung des Satzes verwendet werden, weil die Regel spezifisch für die Basiszahl 10 im dezimalen Stellenwertsystem ist. Deshalb wählen wir ein Beispiel, das nicht die Verwendung dieser Regel nahe legt: Angenommen, die Schüler hätten die Potenzregel an dem Resultat $3^5 \cdot 3^2 = 3^7$ entdeckt, das sie unter Verwendung des Taschenrechners bestimmten. Nun sollen die Schüler zur Überprüfung des Satzes das Produkt $7^4 \cdot 7^5$ ohne Taschenrechner bestimmen und algebraische Regeln der Termumformung verwenden. Die einzelnen Potenzen werden zunächst in Produkte umgewandelt, und das Ergebnis wird als eine Potenz geschrieben:

$$7^4 \cdot 7^5 = 7^4 \cdot 7^5 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^9 .$$

Fall:	In $7^4 \cdot 7^5$ sind die Basiszahlen gleich und $4 + 5 = 9$.
Resultat:	$7^4 \cdot 7^5 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^9$
Gesetz:	Potenzregel

Abb. 18: Induktion mit latenter Beweisidee

Diese Option hat besondere Eigenschaften, analog der Option 2.5 „Entdeckung mit latenter Beweisidee“: Die Beweisidee kann in Reflexion über die Prüfung erkennbar werden, die Prüfung verschafft dem vermuteten Satz relativ hohe Glaubwürdigkeit, und die Lenkung des Schülers ist relativ stark.

Weitere Beispiele zur Prüfung mit latenter Beweisidee kann man von der Option 2.5 „Entdeckung mit latenter Beweisidee“ analog übernehmen. Der Prüfung mit Beweisidee kann dabei eine Entdeckung vorausgehen, die keine latente Beweisidee enthält (Optionen 2.1 bis 2.4). Somit kann man den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben an die Schüler stufen. Die Entdeckungsaufgabe ohne Beweisidee fordert neben der Kreativität zur Hypothesenbildung nur die Fähigkeit zur Durchführung eines Algorithmus. Die Aufgabe zur Prüfung mit latenter Beweisidee verlangt dann die Kompetenz, mathematische Sätze bzw. Definitionen bewusst auf einen konkreten Fall anzuwenden zu können. Der Beweis erfordert schließlich die Anwendung der Sätze bzw. Definitionen auf den allgemeinen Fall.

Option 3.6: Prüfung durch Vernetzung

Die bisher dargestellten Prüfungsarten 3.1 bis 3.5 für entdeckte Sätze sind Beispiele für einen Ansatz der empirischen Erkenntnissicherung, der in der Literatur als „Bootstrap-Modell“ bezeichnet wird (s. Meyer 2007 a, S. 65 ff.). Der andere Ansatz, der „hypothetisch-deduktive Ansatz“ (ebenda), der nicht mit der rein deduktiven Begründung des Satzes verwechselt werden darf, konnte in unseren Schulbuchanalysen kaum rekonstruiert werden.

Um den hypothetisch-deduktiven Ansatz der Vollständigkeit halber darzustellen, konkretisieren wir ihn auch am Beispiel der Potenzregel. Unter der Annahme, die Potenzregel wäre gültig, schließt der Prüfende deduktiv darauf, dass sich die Potenzregel auch in der Schulgeometrie bestätigen lassen müsste, wo z. B. Potenzen bei Flächeninhalten und Rauminhalten betrachtet werden. Im anschaulichen dreidimensionalen Raum kann die Verkörperung der Potenzen a^b , a^c und a^{b+c} nur für $b+c \leq 3$ gelingen. Für $a^1 \cdot a^2$ gelingt die Prüfung am Würfel, indem man zunächst bedenkt, dass der Rauminhalt eines Würfels durch „Höhe mal Grundfläche“, $a \cdot a^2$, bestimmt ist und $a = a^1$ gilt. Die erfolgreiche Prüfung sei schematisch wie folgt dargestellt:

Fall:	a^1 und a^2 sind Länge der Höhe bzw. der Flächeninhalt der Grundfläche eines Würfels. In den Termen für die Höhe und die Grundfläche, a^1 und a^2 , sind die Basiszahlen gleich, und $1+2=3$.
Resultat:	$a^1 \cdot a^2 = a^3$ ist der Rauminhalt des Würfels.
Gesetz:	Potenzregel

Abb. 19: Induktion durch Vernetzung mit einem anderen Wissensbereich

Ein ähnliches Beispiel zu einer anderen Potenzregel bietet das Schulbuch „Mathematik – Neue Wege 10“ (Lergemüller und Schmidt 2004, S. 9).

Der hypothetisch-deduktive Ansatz stellt nur eine Möglichkeit der Vernetzung mathematischen Wissens dar. So ermöglichen Analogieschlüsse (s. Abschnitt 5) vielfältige Möglichkeiten, die hier nicht weiter dargestellt werden können.

Option 4: Begründungen (Beweise) des Satzes

In Abschnitt 2 wurde die Begründung (der Beweis, die Herleitung) als eine Kette von Deduktionen definiert. Der Aufsatz lässt keinen Raum, auch nur ansatzweise die verschiedenen Typen und Kombinationen von Deduktionen bei Begründungen zu diskutieren. Eine schultypische Problematik sei aber diskutiert. Man mag einwenden, die Option der Entdeckung bzw. Prüfung mit latenter Beweisidee interferiere mit dem beispielgebundenen Beweisen. Wir treffen eine klare Unterscheidung, indem wir nur dann von einem beispielgebundenen Beweis sprechen, wenn davon ausgegangen werden kann, dass derjenige, der den Beweis führt oder ihn als Beweis akzeptiert, in dem besonderen Beispiel das Allgemeine sieht (s. z. B. die „prämathematischen Beweise“, Kirsch 1979). Nur bei dieser Voraussetzung, die auch nur interpretativ erschlossen werden kann, ist folgende Deduktion zwingend (formal gesehen wird der Fall hier verkürzt dargestellt):

Fall:	$\forall b, c \in \mathbb{N} : 3^b \cdot 3^c = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_b \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_c = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{b+c}$
Gesetz:	$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_y = x^y$ (Definition der Potenz)
Resultat:	Potenzregel

Abb. 20: Beispielgebundene Deduktion bei einer bestimmten Voraussetzung

Wenn ein Schüler an der Darstellung von $3^b \cdot 3^c$ als Produkt von $b+c$ Faktoren die Potenzregel entdeckt oder überprüft, muss er die Zahl 3 noch nicht als stellvertretend für beliebige Zahlen betrachten. Er muss den Schluss von Fall und Gesetz auf das Resultat in Abbildung 20 noch nicht als unabhängig von der besonderen Beispielzahl 3 verstehen. Wenn der Schüler aber rückblickend das Allgemeine im Besonderen erkennt, ist es ihm möglich, die Schlüsse aus seiner Entdeckung und/oder Prüfung so umzugestalten, dass er die Begründung als eine rein deduktive Kette sieht. Das Zeichen 3 wird als Zeichen für eine Variable uminterpretiert. Kurz gesagt: Die Entdeckung oder Prüfung mit latenter Beweisidee ist kein beispiegebundener Beweis, sie kann es erst nachträglich werden.

Umgekehrt bleibt fraglich, ob ein Schüler einen vorgeführten beispielgebundenen Beweis, wie er vom Lehrer/Schulbuchautor gemeint ist, als Begründung des vermuteten Satzes nachvollzieht. Wenn nicht, mag dieser Schüler das in Abbildung 20 dargestellte Argument nur als die verkürzte Darstellung einer induktiven Prüfung sehen, die in Abbildung 21 ungekürzt dargestellt wird:

Fall:	$\forall b, c \in \mathbb{N} : 3^b \cdot 3^c = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_b \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_c = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{b+c}$
Gesetz:	$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_y = x^y$ (Definition der Potenz)
Resultat:	$3^b \cdot 3^c = 3^{b+c}$
Fall:	In $3^b \cdot 3^c$ sind die Basiszahlen gleich.
Gesetz:	$3^b \cdot 3^c = 3^{b+c}$
Resultat:	Potenzregel

Abb. 21: Vorausgehende Deduktion, die das Resultat der Induktion erzeugt, und nachfolgende Induktion zur Prüfung des Satzes, in der das Resultat verwendet wird

Die Verkürzung besteht darin, von den sechs Aussagen in Abbildung 21 die dritte bis fünfte Aussage zu streichen. Man erhält dann das deduktive Schema der Begründung in Abbildung 20.

Schwarzkopf (2000) und Meyer (2007 a) stellen in ihren empirischen Analysen fest, dass Schüler häufig derart argumentieren, dass der Beobachter Lücken erkennt, wenn er die Argumente mit vollständigen Ketten von logischen Schlüssen vergleicht. Auch die Darstellungen in Schulbüchern sind so betrachtet unvollständig. Eine vollständige Darstellung würde oft auch pedantisch erscheinen und das Erkennen und das Verstehen der wesentlichen Schritte erschweren. Die aus logischer Sicht verkürzte Darstellung erleichtert das Verstehen – ebenso wie das Missverstehen. Das gilt gerade für beispielgebundene Beweise.

Für die mathematikdidaktische Forschung wäre es ein praktisch relevantes, wenn auch methodisch schwieriges Unterfangen (Krumsdorf 2009), empirisch zu untersuchen,

- ob Schüler in eigenen oder präsentierten Prüfungen mit latenter Beweisidee diese erkennen und im späteren Beweis auch nutzen können und
- wie dieses methodisch durch geschickte Aufgabenstellungen oder unterrichtliche Maßnahmen erleichtert werden kann.

Das Prüfen mit latenter Beweisidee kann im Prinzip leicht in einen beispielgebundenen Beweis und dieser wiederum in einen formalen Beweis übergehen.

4 Offenere Aufgaben

Zur Konkretisierung unseres Systems von Optionen verwendeten wir im vorliegenden Text bisher eher geschlossene Aufgabenbeispiele, weil wir diese relativ leicht einzelnen Optionen zuordnen können. Jedoch werden gegenwärtig in den Schulbüchern auch offenere Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze genutzt, die jeweils nicht allein einer Option zugeordnet werden können. Trotzdem ist das System von Optionen auch für solche Aufgaben nutzbar, wenn auch nicht in dem Sinne, dass es die Gestaltung der Aufgaben orientiert. Das System kann die Lehrperson darin orientieren, wie sie im Unterrichtsprozess die offeneren Aufgaben einsetzt und wie sie auf die verschiedenen Lösungswege der Schüler differenziert reagiert.

Das Merkmal der Offenheit gilt in der Mathematikdidaktik auch als Gütekriterium für Aufgaben: „Viele Ansätze zur Weiterentwicklung der Aufgabenkultur fordern eine größere Offenheit von Aufgaben im Unterricht.“ (Büchter und Leuders 2005, S. 88)

In der mathematikdidaktischen Diskussion ist „Offenheit“ kein Begriff, der mittels anderer Begriffe innerhalb einer Theorie klar definierbar wäre. Es ist ein normatives didaktisches Prinzip, das wie jedes andere Prinzip ohne ausreichende theoretische Stützung nur in der Konkretisierung „(be-)greifbar“ wird. Ob eine Aufgabe offen ist, hängt z. B. vom Unterrichtskontext ab. Die Aufgabe, den fehlenden Winkel in einem konkreten Dreieck zu berechnen, von dem nur zwei Winkelgrößen angegeben sind, wäre vor der Behandlung des Winkelsummensatzes für Dreiecke eine offene, danach eine geschlossene Aufgabe. Im ersten Fall ist die Aufgabe gemäß der Kategorien von Büchter und Leuders (2005, S. 93) eine offene Aufgabe, weil für den Schüler die Lösung nicht absehbar ist und weil der Lösungsweg ihm nicht bekannt ist. Insofern sind alle Entdeckungsaufgaben aus den vorangegangenen Abschnitten offene Aufgaben. Jedoch sind diese Aufgaben insofern auch geschlossen, dass mit ihnen nur die Entdeckung eines bestimmten mathematischen Satzes durch die Schüler beabsichtigt ist.

Offene Aufgaben können auch Aufgaben sein, die verschiedene Lösungen zulassen oder sogar provozieren. In diese Kategorie fallen auch folgende zwei Aufgaben, die jeweils vor der Thematisierung der entsprechenden Sätze gestellt werden (s. Abb. 22 und 23).

- b) Die folgenden Terme lassen sich im Kopf ausrechnen: $2^6 \cdot 5^6$; $13^{19} : 13^{18}$; $14^3 : 7^3$.
Stellt möglichst viele Regeln zur Vereinfachung von Potenzausdrücken auf.

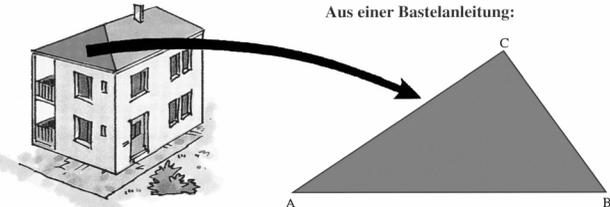
Abb. 22: Aufgabenteil b der Aufgabe E2 aus dem Schulbuch „MatheNetz 10“
(Cukrowicz, u. a. 2004, S. 47)

Im vorangegangenen Aufgabenteil a) wurden die Schüler aufgefordert, die Funktion der Potenztaste an ihren Taschenrechner zu erkunden, indem sie angegebene Potenzen mit dem Taschenrechner berechnen. Gemäß dem Aufgabenteil b) sollen die Schüler verschiedene Potenzregeln entdecken.

6.2 Dreieckskonstruktionen – Kongruenzsätze

Einstieg  Das Haus ist aus einem Bastelbogen entstanden und soll aus Holz nachgebaut werden. Der gefärbte Teil des Daches ist ein Dreieck. Um es aus einer dünnen Holzplatte auszusägen, muss es zunächst auf der Platte genau nachgezeichnet werden. Es muss also ein zum Dreieck ABC in der Bastelanleitung kongruentes Dreieck konstruiert werden. Welche und wie viele Stücke (Seitenlängen, Innenwinkel) des Dreiecks ABC müssen gemessen werden, damit man ein dazu kongruentes Dreieck konstruieren kann?

Aus einer Bastelanleitung:



Das Messen *eines* Stückes (z. B. der Seite a), aber auch *zweier* Stückes (z. B. der Seite c und des Winkels α) reicht nicht aus. Hierzu kann man jeweils viele Dreiecke zeichnen, die *nicht* kongruent zueinander sind. Probiert das aus und vergleicht. Wir versuchen es jetzt mit dem Messen bzw. der Vorgabe der Größe von *drei* Stückes. Welche Fälle sind möglich? Wählt selbst Beispiele und probiert.

Bezeichnungen im Dreieck:

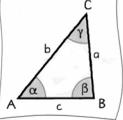


Abb. 23: Auszug aus dem Schulbuch Elemente der Mathematik 7
(Griesel u.a. 2007, S. 197)⁶

Die beiden Aufgaben sind offen hinsichtlich der Lösungen. Dahinter verbirgt sich aber ein weiterer Aspekt der Offenheit, der für unser Thema „Entdecken, Prüfen und Begründen“ interessanter ist. Es ist offen, ob der Schüler die Entdeckungen mit oder ohne Beweisidee vornimmt. Im Beispiel zu den Potenzregeln bleibt die Aufgabenlösung ohne Beweisidee, wenn der Schüler den Taschenrechner benutzt, um $2^6 \cdot 5^6$ zu berechnen, das Ergebnis 1000000 in 10^6 umformt und so die Potenz-

⁶ Zur Verbesserung der Lesbarkeit erforderte die Reduktion des Farbspektrums eine grafische Überarbeitung der Abbildung.

regel $a^n \cdot b^n$ für das Rechnen „im Kopf“ entdeckt. Dagegen konstituiert der Schüler eine latente Beweisidee, wenn er die Potenzen in Produkte umwandelt und diese wieder zu einer Potenz zusammenfasst. Im Beispiel zu den Kongruenzsätzen bleibt dem Schüler die Beweisidee verborgen, wenn er beim Zeichnen des Dreiecks nur darauf achtet, dass er das besondere Dreieck mit seinen vorgegebenen Maßen erhält. Wenn der Schüler dagegen auf das Konstruktionsprinzip achtet, das unabhängig von den vorgegebenen Maßen die Eindeutigkeit des gezeichneten Dreiecks (bis auf Kongruenz) gewährleistet, gewinnt er eine Beweisidee. Auf den folgenden Schulbuchseiten des zweiten Beispiels werden dann solche Konstruktionsprinzipien in den Beweisen der Kongruenzsätze expliziert. Z. B. wird im Beweis des SWS-Satzes beachtet, dass sich zwei Dreiecke konstruieren lassen, die nach Konstruktion Teile einer achsensymmetrischen Figur sind, also kongruent sein müssen (Griesel u. a. 2003, S. 158).⁷

Die Offenheit beider Aufgaben hinsichtlich der Lösungen stellt die Lehrperson nicht vor so große Probleme der Unterrichtsführung wie die Offenheit hinsichtlich der Lösungswege. Denn die Schüler äußern ihre Lösungen, und die Lösungen lassen sich als verschiedene Sätze relativ klar voneinander unterscheiden, während die Lösungswege nicht so offensichtlich sind. Im Mathematikunterricht, der im Kontrast zum naturwissenschaftlichen Unterricht nicht auf das induktive Prüfen als ultima ratio der Erkenntnissicherung, sondern auf das Beweisen Wert legt, sind Lösungswege mit Beweisidee den anderen Lösungswegen vorzuziehen. Die Lehrperson ist also gefordert, in den Darstellungen der Schüler latente oder bewusste Beweisansätze zu erkennen und sie gegebenenfalls im Unterrichtsgespräch öffentlich zur Geltung zu bringen.

Die Lehrperson kann sich auf diese Aufgabe vorbereiten, indem sie bei der Wahl offener Aufgaben nicht nur überlegt, mit welchen unterschiedlichen Lösungen sie zu rechnen hat, sondern auch bedenkt, welche Lösungswege die Schüler nutzen könnten und welche Lösungswege Übergänge zum expliziten Beweisen der Sätze erlauben. Deshalb stimmen wir keineswegs der Aussage zu, dass die Lehrperson bei Wahl offener Aufgaben diese nicht vorweg gründlich durchdenken sollte. Jahnke (2000, S. 12) befürchtet, dass das gründliche Durchdenken die Lehrperson dazu verleiten könnte, „dass sie vorsätzlich oder unbewusst auf spezielle Arbeitsergebnisse wartet oder drängt.“ Wir befürchten viel eher, dass die unvorbereitete Lehrperson auf das wartet oder drängt, bzw. das in den Schüleräußerungen zu erkennen meint, was ihr ad hoc in den Sinn kommt, zumal Schüler an der Front ihres Wissens und in Unkenntnis der mathematischen Sprache des für sie neuen Stoffes nicht stringent argumentieren und sich nicht klar ausdrücken. Der Einsatz offener

⁷ Die beiden Aufgabenbeispiele könnten sogar dahingehend geöffnet werden, dass man die Schüler auch anregt, an (weiteren) eigenen Beispielen von Potenztermen bzw. von Dreiecken mathematische Sätze zu entdecken oder zu prüfen.

Aufgaben erfordert eine aufwendige Vorbereitung, damit der Unterricht nicht in das alte fragend-entwickelnde Verfahren abrutscht. Und zur Vorbereitung auf das Durchdenken von Aufgaben soll unser Text dienen, auch wenn er vordergründig die Konstruktion von weniger offenen Aufgaben thematisiert.

5 Rückblick und Ausblick

Die Verwendung von Begriffen aus der philosophischen Logik ermöglichte in den vorangegangenen Abschnitten

- die mathematikdidaktischen Begriffe „Entdecken“, „Prüfen“ und „Begründen“ zu präzisieren und voneinander abzugrenzen,
- die Zusammenhänge zwischen diesen Aktivitäten als aufeinander folgende Schritte in verschiedenen Kombinationen darzustellen, und
- die Konstruktion und Analyse von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze durch ein System von Optionen zu orientieren. Wir unterschieden verschiedene Arten von Entdeckungen und Prüfungen, bewerteten sie vergleichend und erörterten ihre Funktionen zur Vorbereitung von Beweisen.

Weil das Verständnis und die Verwendung der grundlegenden philosophischen Begriffe aufwendig sind, ist nach ihrem Nutzen zu fragen. Der Wissenschaftler mag schon einen ausreichenden Erkenntnisgewinn darin sehen, die Vielfalt der Erarbeitungen von mathematischen Sätzen auf wenige Schlussformen zurückführen zu können (s. Abschnitt 3). Man kann an den Chemiker denken, der die Vielfalt der Stoffe auf Elemente zurückführen kann.

Man mag hier einwenden, dass der Analogieschluss fehle, den z. B. Polya (1963, S. 23 ff. und 46 ff.) und Winter (1991, S. 45 ff.) anführen. Der Analogieschluss ist kein weiterer Schluss, neben den Schlüssen Abduktion, Induktion und Deduktion. Jeder Analogieschluss kann auf die drei genannten Schlüsse bzw. auf Kombinationen dieser zurückgeführt werden. Ein weiterer Grund dafür, dass wir Analogieschlüsse nicht thematisierten, liegt darin, dass seine Erörterung sehr kompliziert ist. Denn die Rede vom Analogieschluss ist mehrdeutig. Man spricht sowohl von einem Analogieschluss, wenn die zuvor nicht bekannte Analogie zwischen zwei Wissensbereichen überhaupt erstmal abduktiv gebildet wird, als auch dann, wenn die nun schon bekannte Analogie für den Schluss auf eine Aussage in einem der beiden Wissensbereiche deduktiv angewandt wird (Minnameier 2005, S. 236). In der Schulmathematik werden zum einen Analogien zwischen mathematischen Wissensbereichen im engeren Sinne genutzt, z. B. zwischen der Arithmetik und der Geometrie, wo Isomorphismen bestehen (s. etwa die Deutung der binomischen Formeln als Aussagen über Rechtecke, eingeschränkt auf positive Zahlen). Zum anderen werden Analogien genutzt, wenn ein mathematischer Satz aus Sachkontexten heraus erarbeitet werden soll. Die Beziehungen zwischen der Mathematik

im engeren Sinne und den Sachbereichen sind sehr vielfältig.⁸ Wir behaupten also nicht, dass unser System von Optionen in seinen Feinstrukturen vollständig sei, jedoch ist seine Grobstruktur vollständig (s. die Übersicht zu Beginn des Abschnitts 3).

Wir erwarten nicht, dass der Praktiker logische Analysen vornimmt, um die Feinstrukturen möglicher Erarbeitungen von mathematischen Sätzen gemäß unserem System vollständig zu erkennen. Wir halten es jedoch für sinnvoll, dass in der Lehrerbildung solche Analysen an ausgewählten mathematischen Sätzen exemplarisch und ohne Anspruch auf Vollständigkeit des Optionensystems in seinen Details durchgeführt werden. Wir praktizieren es in der Ausbildung künftiger Lehrer, indem wir diese in Seminaren zu folgenden Aktivitäten auffordern:

- Zunächst werden zu einem ausgewählten mathematischen Satz verschiedene kontrastreiche und idealtypische Erarbeitungswege vorgestellt. Die Studierenden sollen die logischen Schlussformen in ihnen identifizieren und die Wege vergleichend bewerten. Natürlich gehen in den Vergleich und in die Bewertung auch logikferne Gesichtspunkte mit ein.
- An Schulbuchauszügen sollen dann mögliche Erarbeitungswege identifiziert werden, die Schülern auf Grund der Aufgabenstellungen „nahe liegen“.
- Gruppen von Studierenden sollen zu anderen mathematischen Sätzen eigene Arbeitsblätter entwerfen, die Teilaufgaben zum Entdecken, Prüfen und Begründen enthalten. Die erstellten Arbeitsblätter werden im Plenum diskutiert und verbessert.
- Die Studentengruppen erproben ihre Arbeitsblätter mit einzelnen Schülern. Die Erfahrungen aus diesen Erkundungen werden mit Blick auf die logische Theorie und mit Blick auf andere mathematikdidaktische und fachliche Theorien reflektiert. Weil reale Schüler nicht unbedingt „nahe liegende“ Erarbeitungswege beschreiten, kommt der logischen Analyse realer Schülerwege eine eigene Bedeutung zu. Jedoch ist es nicht immer einfach, die Wege der Schüler in ihren logischen Schritten nachzuvollziehen.

Der Schulbuchautor oder der Lehrer, der in Muße ein Arbeitsblatt für seine Klasse erstellt, mag das gesamte Optionensystem nutzen, um eigene Aufgabenentwürfe zu reflektieren oder um Anregungen zu alternativen Aufgaben zu gewinnen. Welche Optionen im Einzelfall praktikabel sind, hängt nicht nur von den Besonderheiten des mathematischen Satzes ab, sondern auch von dem stofflichen Kontext, in dem

⁸ Es würde sich u. E. lohnen, diese Beziehungen auch unter logischem Blickwinkel zu betrachten. Es hätte nur den Rahmen des vorliegenden Aufsatzes gesprengt, wenn wir die Erarbeitung mathematischer Sätze ausgehend von außermathematischen Sachverhalten systematisch erörtert hätten.

der Satz eingebettet ist, von den Kompetenzen der Schüler und von den Unterrichtszielen.

Wir bemerkten, dass es manchmal schwierig ist, die logischen Schritte in realen Erarbeitungswegen von Schülern zu identifizieren. Das gilt insbesondere dann, wenn die Aufgaben offen gestellt sind (s. Abschnitt 4). Einerseits mindert diese Erfahrung den Wert des Optionensystems als Analysefolie für Schüleraktivitäten. Andererseits gewinnt es als Orientierung für den Lehrer an Bedeutung, der auf Erarbeitungswege der Schüler reagiert. Denn die Probleme des Nachvollzugs der „Schülerlogik“ sind auch darin begründet, dass die Schüler sich selbst im Unklaren über den logischen Status ihrer Überlegungen sind oder dass sie wegen mangelnder sprachlicher Erfahrung an der Front ihres Wissens nur schlecht kommunizieren können. Haben sie einen Satz entdeckt, und rechtfertigen sie seine Gültigkeit nur im Sinne der Plausibilität einer Abduktion? Oder haben sie den Satz geprüft, so dass er ihnen subjektiv glaubwürdiger wird? Oder haben sie eine Beweisidee für den Satz gewonnen, auch wenn es ihnen noch nicht gelingt, den Beweis stringent darzustellen? Ohne dass es auf logische Termini ankommt, kann man in der Sprache des mathematischen Themas darüber mit den Schülern reflektieren: „Ihr habt die Regel für $3^5 \cdot 3^2$ geprüft und bestätigt. Habt ihr in der Prüfung mit der konkreten Zahl 3 gerechnet? Oder habt ihr Terme umgeformt?“ Indem der Lehrer die Aufmerksamkeit der Schüler auf verschiedene Optionen der Erarbeitung lenkt, kann den Schülern bewusster werden, welche Tätigkeiten das Beweisen vorbereiten und welche noch nicht den fachspezifischen Ansprüchen der Erkenntnissicherung in der Mathematik genügen.

Literatur

- Bruner, J. S. (1981): Der Akt der Entdeckung. In: Neber, H. (Hrsg.): Entdeckendes Lernen. 3. Auflage. Weinheim: Beltz, S. 15–29.
- Büchter, A. und Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen.
- Cukrowicz, J. u. a. (Hrsg.) (2004): MatheNetz 10. Gymnasium. NRW. Braunschweig: Westermann.
- Eco, U. (1985): Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In: Eco, U. und Sebeok, T. A. (Hg.): Der Zirkel oder im Zeichen der Drei – Dupin, Holmes, Peirce. München: Fink, S. 288–320.
- Griesel, H. u. a. (Hrsg., 2007): Elemente der Mathematik 7. Gymnasium. NRW. Braunschweig: Schöningh.
- Griesel, H. u. a. (Hrsg., 2004a): Elemente der Mathematik 9. Gymnasium. NRW. Braunschweig: Schroedel.
- Griesel, H. u. a. (Hrsg., 2004b): Elemente der Mathematik 10. Gymnasium. NRW. Braunschweig: Schroedel.
- Heinze, A. und Reiss, K. (2005): Argumentieren, Begründen und Beweisen als Ziele des Mathematikunterrichts. In: Henn, H.-W. und Kaiser, G. (Hrsg.): Mathematikunter-

- richt im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Hildesheim, Franzbecker, S. 184–192.
- Hoffmann, M. (2001): Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 22(3/4), S. 231–251.
- Hoffmann, M. (2002): Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. Dresden: Philosophische Fakultät der Technischen Universität.
- Holland, G. (2007): *Geometrie in der Sekundarstufe*. 3. Auflage. Hildesheim: Franzbecker.
- Jahnke, T. (2000): Zur Klassifizierung von Aufgaben im Mathematikunterricht: Kleines Aufgabenbrevier. Potsdam (Online: http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/Arbeitsgruppen/PLIB/AG-BLK-Brandenburg/material/mathe/Aufgaben_im_MU.pdf; 15.08.2008).
- Kahle, D. und Lörcher, G.A. (Hrsg.) (1996): *Querschnitt Mathematik 10*. Realschule. NRW. Braunschweig: Westermann.
- Kirsch, A. (1979): Beispiele für prämathematische Beweise. In: Dörfler, W. und Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. S. 261–273
- Krumsdorf, J. (2009): Beispielgebundenes Beweisen. Erscheint in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM.
- Leppig, M. (Hrsg.) (2000) *Lernstufen Mathematik 7*. Hauptschule. NRW. Berlin: Cornelsen.
- Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (Hrsg.) (2003): *Mathematik – Neue Wege 9*. Gymnasium. NRW. Hannover: Schroedel.
- Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (Hrsg.) (2004): *Mathematik – Neue Wege 10*. Gymnasium. NRW. Hannover: Schroedel.
- Luhmann, N. und Schorr, K. E. (1982): Das Technologiedefizit der Erziehung. In: Ebd. (Hrsg.): *Zwischen Technologie und Selbstreferenz. Fragen an die Pädagogik*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, S. 11–40.
- MSJK (2004) – Ministerium für Schule, Jugend und Kinder: *Kernlehrplan Mathematik für das Gymnasium – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.
- Meyer, M. (2007 a): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim: Franzbecker.
- Meyer, M. (2007 b): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Zur Rolle der Abduktion und des Arguments*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28(3/4), S. 286–310.
- Meyer, M. und Voigt, J. (2008): *Entdecken mit latenter Beweisidee*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(2), S. 124–152.
- Minnameier, G. (2005): *Wissen und inferentielles Denken*. Frankfurt a. M.: Lang.
- Olander, H.T. & Robertson, H.C. (1973): The effectiveness of discovery and expository methods in the teaching of fourth-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4(1), 33–44.
- Pedemonte, B. (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, 66, 23–41.
- Peirce, Ch. S., CP: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Band I–VI 1931–1935 hg. von Hartshorne, C. und Weiß, P.; Band VII–VIII 1985 hg. von Burks, A. W.). Cambridge: Harvard University Press (zitiert in der Form w.xyz – w gibt dabei die Bandnummer, xyz die Nummer des Paragraphen an).
- Polya, G. (1963): *Mathematik und plausibles Schließen*. Band 2: Typen und Strukturen plausibler Folgerung. Basel: Birkhäuser.

- Rezat, S. (2008): Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 29(1), S. 46–67.
- Schmid, A. und Weidig, I. (Hrsg.) (1996 a): LambacherSchweizer 9. Gymnasium. NRW. Stuttgart: Klett.
- Schmid, A. und Weidig, I. (Hrsg.) (1996 b): LambacherSchweizer 10. Gymnasium. NRW. Stuttgart: Klett.
- Schwarzkopf, R. (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim: Franzbecker.
- Voigt, J. (2000): Abduktion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, S. 694–697.
- Winch, W. A. (1913): Inductive versus deductive methods of teaching. Baltimore: Warwick.
- Winter, H. (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: Journal für Mathematikdidaktik, 4(1), S. 59–95.
- Winter, H. (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Anschrift der Verfasser

Dr. Michael Meyer
Technische Universität Dortmund
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
44221 Dortmund
mmeyer@math.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Jörg Voigt
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
48149 Münster
jvoigt@math.uni-muenster.de

Eingang Manuskript: 02.09.2008 (überarbeitetes Manuskript: 04.08.2009)