

Kompetenzdiagnostik im Lernprozess – auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung kommt es an

von

Johann Sjuts, Leer

Kurzfassung: Diagnostische Kompetenz bestimmt ganz wesentlich die aktuelle Diskussion über Anforderungen im Lehrerberuf. Damit geht die Erwartung einher, schon im Lernprozess selbst Diagnostizieren und Fördern wirkungsvoll zu verbinden. Von zentraler Bedeutung sind passende Aufgaben. Der Beitrag verdeutlicht, dass es auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung ankommt.

Abstract: Diagnostic competence characterizes the current discussion about standards in the teaching profession. This involves the expectation of already combining diagnostics and support effectively during the learning process itself. Adequate problems are of particular importance. The following article illustrates the relevance of the construction and evaluation of problems which are guided by a profound theory.

1 Vorbemerkungen

Diagnostik ist eine Komponente des professionellen Wissens und Könnens von Lehrkräften mit hohem Stellenwert. Ins Augenmerk ist Diagnostik gerückt, weil sie gerade bei deutschen Lehrkräften nur gering entwickelt ist (Baumert u. a. 2001). Und so erklärt sich wohl auch die Entschiedenheit, mit der die diagnostische Kompetenz nun zu den Kernbereichen des Lehrerberufs gezählt wird (Horstkemper 2006).

Sichere Diagnosen sind unverzichtbar, weil sonst Adaptivität, Prävention, Intervention und Förderung nicht gelingen können (Sjuts 2006c). Diagnosen stehen im Dienst des Lernens, der *Lernprozesse*. Und Diagnosen müssen Wissen und Können von Schülerinnen und Schülern, ihre *Kompetenzen* also, zu erfassen versuchen. *Kompetenzdiagnostik im Lernprozess* ermöglicht es, Diagnostizieren und Fördern wirkungsvoll zu verbinden (Büchter & Leuders 2005, Sjuts 2006a, 2006b, 2006d).

In der Diskussion über diagnostische Kompetenz von Lehrkräften wird häufig ein Aspekt des Diagnoseverhaltens übersehen, der vermutlich große Bedeutung für eine kognitiv herausfordernde, gleichwohl aber das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigende und konstruktiv-unterstützend wirkende Unterrichtsgestaltung hat, nämlich die Bereitschaft und Fähigkeit, das Verständnis von Schülerinnen und Schülern gezielt im Lernprozess selbst und nicht erst in Klassenarbeiten oder Tests zu überprüfen.

Es ist eine große Herausforderung an das *fachdidaktische* Können, Aufgaben auszuwählen und Arbeitsaufträge zu formulieren, die ein besonderes diagnostisches Potenzial in sich selbst tragen. (Baumert & Kunter 2006, S. 489)

Theoretische Konzeptionen mit fachdidaktischer Ausprägung bilden die Grundlage für die Gestaltung diagnostischer Aufgaben. Solche Konzeptionen finden sich einerseits in domänenspezifischen Schulleistungsstudien à la PISA und andererseits in Kompetenzzusammenstellungen der fachbezogenen Bildungsstandards (KMK 2003). Mathematik und Mathematikdidaktik gelten wie nur wenige Fächer und Fachdidaktiken in gewisser Weise als Vorbild: Schulleistungsstudien sind Teil einer empirischen mathematikdidaktischen Forschung, Bildungsstandards sind Teil einer theoriegeleiteten norm- und anspruchsbestimmten Zielsetzung von Mathematikunterricht.

2 Kompetenzorientierte Analyse einer Aufgabe

Am Beispiel einer Aufgabe soll gezeigt werden, dass es bei Kompetenzdiagnostik im Lernprozess auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung ankommt.

Ein Händler kauft eine Ware für 6 Euro, verkauft sie dann für 7 Euro, kauft sie danach für 8 Euro zurück und verkauft sie daraufhin für 9 Euro. Wie groß ist sein Gewinn?

Vor der Präsentation und der Analyse unterschiedlicher Aufgabenbearbeitungen ist zunächst zu fragen, welche Kompetenzen im Sinne der Bildungsstandards (KMK 2003) hier zum Tragen kommen. Auf Anhieb kann das sicher gelten für die Kompetenzen *mathematisches Problemlösen* (K 2) und *mathematisches Modellieren* (K 3), denn es ist ein vorgegebenes Problem zu bearbeiten; dabei sind geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien auszuwählen und anzuwenden. Das gestellte Problem ist also zu erschließen und versuchsweise oder auch gezielt zu lösen. Außerdem ist eine gewisse Mathematisierung nötig. Die auftretenden Vorgänge des Kaufens und Verkaufens sind in mathematische Strukturen zu übersetzen; sodann ist in dem gewählten Modell zu arbeiten.

Geschieht all dies im Kopf, ist sogar ein Multiple-Choice-Format der Aufgabe denkbar.

Kreuze an:

0 Euro 1 Euro 2 Euro 3 Euro

Damit ist auch bei einer hohen Anzahl von teilnehmenden Personen eine rasche Auswertung möglich. Aufgaben in diesem Format werden vielfach unterschätzt. Sie liefern aber nicht nur einen Überblick, sondern können auch Aufschlüsse über Fehlvorstellungen, Fehlschlüsse und Fehllösungen geben (Sjuts 2007b). Eine prinzipielle Geringschätzung ist daher unangebracht. Zu verweisen ist in diesem Zusammenhang auf die PISA-Aufgabe „Hälfte“ (Neubrand 2004, S. 264).

Allerdings wird eine weitere Kompetenz mit dem Ankreuzverfahren in der Regel nicht sichtbar, die Kompetenz *mathematisches Argumentieren* (K 1). Beschreibung und Begründung des Lösungsweges sind selbstverständlich von hohem Interesse. Argumentieren bedarf der Erläuterung. Erläutern ist eine für den Lehr-Lern-Prozess sehr bedeutsame Aktivität: Erläutern deckt Verborgenes auf, Erläutern macht Unsichtbares sichtbar, Erläutern liefert diagnostische Auskünfte.

2.1 Vielfältige Aufgabenbearbeitungen mit falschen Ergebnissen

Zunächst seien Beispiele mit falschen Ergebnissen betrachtet. Judith (Abbildung 1) addiert die beiden äußeren Zahlen (6 und 9) sowie die beiden inneren Zahlen (7 und 8) im Aufgabentext, sieht in der ersten Summe den Gewinn und in der zweiten den Verlust, was zum Resultat 0 Euro führt.

er macht 15 € Gewinn und 15 € Verlust,
das gleicht sich aus zu 0 €

$$\begin{pmatrix} 6+9=15 \\ 7+8=15 \end{pmatrix}$$

Abbildung 1: Lösung von Judith

Dabei verwendet sie die Begriffe von Gewinn und Verlust nicht in ihrer präzisen Bedeutung. Sie beachtet auch nicht genau genug die Vorgänge des Kaufens und Verkaufens bei der Zuordnung der Beträge. Dies alles ist deshalb leicht festzustellen, weil sie mehr als nur ihr Ergebnis aufschreibt. Das ermöglicht ihr selbst, aber auch einem Leser, Verstehensprobleme zu identifizieren und gegebenenfalls zu beheben.

Er hat 3€ Gewinn gemacht.
Er verkauft die Wave am anfang für 6€
und am Ende verkauft er sie für 9€
das dazwischen gleicht sich aus.

Abbildung 2: Lösung von Lars

Lars (Abbildung 2) hat dagegen eine erkennbare Vorstellung vom Gewinn. Offenbar hat er sich nicht die Mühe gemacht, den ganzen Text und insbesondere den mittleren Teil genau zu lesen. Die Zwischenoperationen („das dazwischen gleicht sich aus“) werden nicht sorgsam genug verarbeitet.

Bei Ansgar (Abbildung 3) liegt ein Fehler vor, der bei dieser Aufgabe recht typisch und auch nicht selten ist. Die vier Vorgänge (zwei des Kaufens und zwei des Verkaufens) werden unzulässigerweise auf drei Vorgänge (von 6 zu 7, von 7 zu 8 und von 8 zu 9) reduziert. In Kurzfassung gedacht, handelt es sich um die Folge 1 Euro mehr, 1 Euro weniger, 1 Euro mehr. Die beiden Teile 1 Euro mehr und 1 Euro weniger verschmelzen zu 0 Euro.

1€ , weil er nach dem 1. Verkauf hat er 1€ Gewinn , beim nach dem 2. Kauf hat er 0€ und bekommt dann beim 1€ mehr , als der Preis , für den er es beim 2. Mal verkauft hat.

Abbildung 3: Lösung von Ansgar

Der Schüler bemüht sich um Nummerierung der Vorgänge („1. Verkauf“, „2. Kauf“); er verliert indes den Überblick, was sich am Überschreiben („1. Mal“, „2. Mal“) zeigt. Sehr deutlich ist, dass die Formulierungen Lücken und Brüche enthalten.

Der bei Laura (Abbildung 4) sichtbare Fehlschluss ist vergleichbar mit jenem in dem zuvor erörterten Beispiel. Man könnte vermuten, dass beide (Ansgar wie Laura) zwar die Zahlenveränderungen im Aufgabentext wahrnehmen, nicht aber die Dynamik aller auftretenden Vorgänge zu bewältigen in der Lage sind.

1€. Er hat erst einen Gewinn von 1€.
Dann hat er einen Verlust von 1€.
Dann hat er nochmal einen Gewinn von 1€, damit gleicht er den Verlust.

Abbildung 4: Lösung von Laura

Beim folgenden Lösungsvorschlag (Angelika, Abbildung 5) scheint eine ähnliche gedankliche Verarbeitung vorzuliegen.

1€, da er die Ware immer für
1€ mehr verkauft, als das er
sie zurückkauft.
Dieses Verfahren könnte sich immer
wieder wiederholen, der Gewinn
wäre immer 1€.

Abbildung 5: Lösung von Angelika

Indes ist hier – wie bei allen Interpretationen – Vorsicht geboten; darauf weist der nachstehende Lösungsvorschlag hin.

Florian (Abbildung 6) versucht die Vorgänge über ihren zeitlichen Ablauf („danach“, „schließlich“) zu erfassen. In seiner Erläuterung lässt sich eine bei dieser Aufgabe typische Fehlvorstellung ausmachen. Sie steckt in der zweiten und in der vorletzten Zeile, wenn er 0 Euro als Gewinn ansieht, der sich aus dem Zusammenrechnen von 1 Euro Gewinn (zutreffend) und 1 Euro Verlust (unzutreffend) ergibt.

Er kauft sie für 6€ verkauft sie für 7€ = 1€ Gewinn
danach ~~er~~ ^{kauft} er sich die Waage zurück für 8€ = 1€ Gewinn
schließlich verkauft er sie für 9€ = 1€ Gewinn

Eigentlich macht der Händler 2€ Gewinn u. 1€ Verlust
hier geht es aber nur um den Gewinn.

Abbildung 6: Lösung von Florian

Hat schon das mathematische Argumentieren die Einsichten über mathematisches Problemlösen und mathematisches Modellieren ergänzt, so gilt das in einem erweiterten Sinn für das *Kommunizieren* (K 6). Die bisher gezeigten Lösungsversuche führten, oberflächlich betrachtet, nicht zum richtigen Resultat. Im letztgenannten

Beispiel lässt sich die Fehlvorstellung zwar besonders gut entlarven, dennoch wäre es nötig, mit Florian zu kommunizieren. In gewisser Weise sind nämlich Rückfragen nötig: Was versteht er unter Gewinn und Verlust? Hat das Wort „Gewinn“ in der vorletzten Zeile und in der letzten Zeile die gleiche Bedeutung? Beträgt für ihn der Gewinn also 1 Euro oder 2 Euro? Möchte er eventuell Gewinn und Gesamtgewinn unterscheiden?

Was bedeutet dieser unausgesprochene Unterschied nun für die Bewertung von Angelikas Lösung (Abbildung 5)? Wenn sie nämlich den Gewinn pro Kauf/Verkauf meint, dann ist ihre Antwort richtig, dann ist sie gerade nicht von der Dynamik vereinnahmt, sondern sogar in der Lage, die Aneinanderreihung der Vorgänge per Abstraktion zu beherrschen.

Sicherzustellen ist, dass der Empfänger das auffasst, was der Sender meint. Allzu häufig ist das Gesagte nicht das Gemeinte, das Gehörte nicht das Gesagte und das Aufgefasste nicht das Gehörte. Rückkopplungen sind nötig. Sie können durch passende Aufgabenstellungen veranlasst werden. Darauf wird noch einzugehen sein.

2.2 Vielfältige Aufgabenbearbeitungen mit richtigem Ergebnis

Jan (Abbildung 7) findet einen eigenen Zugang, die Aufgabe zu lösen. Dadurch, dass er ein fiktives Startkapital wählt, umgeht er das Problem, mit negativen Zahlen rechnen zu müssen. Auffällig ist, dass er durch Kommentierung („Rechenweg“, „fiktiv“) Übersicht zeigt und durch abgleichende Doppeldarstellung (Rechnung und Text) Selbstüberwachung praktiziert. Wortwahl und Satzbau sind recht elaborient.

Rechenweg:

Startkapital = 20€ (fiktiv)

$$20 - 6 = 14$$

$$14 + 7 = 21$$

$$21 - 8 = 13$$

$$13 + 9 = 22$$

er hat 2 Euro Gewinn gemacht, da er ein (fiktives) Startkapital von 20€ hat. Davon kauft er für 6€ Ware (übrig: 14€), verkauft diese für 7€ (übrig: 21€), kauft sie für 8€ zurück (übrig: 13€) und verkauft sie wieder für 9€ (übrig: 22€)

Abbildung 7: Lösung von Jan

Das Vorgehen, mit einem (plausiblen) Geld-Startwert zu beginnen, die Ware zu kaufen, sie dann zu verkaufen, sie erneut zu kaufen und sie dann wieder zu verkaufen, dabei die zugehörigen Bewegungen im Kontostand zu verwalten, deutet auf ein funktionales Denken hin (Schwank 2003).

Hierbei handelt es sich um eine Präferenz in der kognitiven Struktur, die die Art und Weise des Zurechtlegens von in Aufgabenstellungen gegebenen Situationen bestimmt. Man unterscheidet prädikativ-logisches Zurechtlegen und funktional-logisches Zurechtlegen. Prädikatives Denken lässt sich an der Beziehungsstrukturiertheit, funktionales Denken an der Prozesshaftigkeit von Vorstellungen erkennen.

Die Prozesshaftigkeit lässt sich ebenso in den folgenden drei Beispielen ausmachen.

Offensichtlich gelingt es Olaf (Abbildung 8), Vorgänge in den Griff zu bekommen. Dies drückt sich auch in seinen Formulierungen ganz treffend aus („Schulden bezahlen“, „Schulden haben“).

Wenn er 0€ hätte und sich die 6€ Ware kauft, hat er 6€ Schulden. Verkauft er sie für 7€ bezahlt er seine Schulden und hat 1€ über. Kauft er sich die 8€ Ware hat er 7€ Schulden. Verkauft er sie für 9€ und bezahlt die Schulden, hat er noch 2€ über

Abbildung 8: Lösung von Olaf

Auch Nils (Abbildung 9) geht so vor. Er hebt die Zwischenstände (-6, 1, -7, 2) als besonderes Merkmal seiner Überlegungen hervor. Auf diese Weise kann er die vier Vorgänge des Kaufens und Verkaufens kontrollieren.

-6, 1, -7, 2

Der Händler hat insgesamt 2 Euro Gewinn gemacht. Zuerst kauft er die Ware für 6 Euro. Da hat er 6 Euro Verlust. Dann verkauft er die Ware für 7 Euro. Da hat er schon 1 Euro Gewinn. Dann kauft er die Ware für 8 Euro und hat 7 Euro Verlust. Zum Schluss verkauft er die Ware für 9 Euro und hat dadurch 2 Euro Gewinn gemacht.

Abbildung 9: Lösung von Nils

Jakob (Abbildung 10) notiert seine Lösung auf drei Arten. Hier zeigen sich die besonderen Vorzüge, über verschiedene Darstellungsformen (Term, Text, Tabelle) zu verfügen. Eine tabellarische Darstellung ist etwas anderes als eine sprachlich ausformulierte Darstellung und ein Term wiederum etwas anderes. Mit mehreren Darstellungen umgehen, die Darstellungen wechseln zu können, ist eine ganz wichtige Kompetenz, die einen ausgesprochen lernfördernden Charakter hat. Der Mathematik wohnt als besonderes Merkmal die Multimodalität inne. Multimodalität bietet eine Chance für ein recht verstandenes Üben, ein kognitives Üben, um zur Klärung in der Sache zu verhelfen. Das ist, nebenbei bemerkt, etwas anderes als das Automatisieren von Verhalten. Wie sollte man auch Argumentieren durch drillmäßiges und stures Üben lernen?

Rechnung:

- 6€	Verlust	6€	$(-6 + 7) + (-8 + 9)$
+ 7€	Gewinn	7€	
- 8€	Verlust	7€	
+ 9€	Gewinn	7€	

Am Anfang verliert er 6€. Indem er die Ware für 7€ verkauft, macht er 1€ Gewinn. Wenn er sie für 8€ wieder kauft, hat er 1€ Verlust. Verkauft er jedoch für 9€, hat er insgesamt 2€ Gewinn.

Abbildung 10: Lösung von Jakob

Die vorstehende Schülerlösung enthält unterschiedliche Darstellungen. Das *Verwenden mathematischer Darstellungen* (K 4) ist eine Kompetenz im Sinne der Bildungsstandards. Dazu gehört, verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anzuwenden, zu interpretieren und zu unterscheiden, Beziehungen zwischen Darstellungsformen zu erkennen sowie unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln.

Jochen (Abbildung 11) sortiert nach Kaufen und Verkaufen. Er kann strukturieren; dabei spielt die Reihenfolge der Vorgänge gar keine Rolle. Seine Schreibweise (14 Euro – 16 Euro) lässt zwei Deutungen zu. Einerseits: Er subtrahiert 14 Euro von 16 Euro richtig, schreibt das aber (offenbar durch diese Reihenfolge verführt) falsch

hin. Andererseits: Das Zeichen „-“ bedeutet „bis“, gemeint ist: „Wenn man dann von 14 Euro bis 16 Euro rechnet, kriegt man 2 Euro.“

Wenn man die Summe ausrechnet wie viele er insgesamt ausgibt dann kriegt man 14 € raus.
Wenn man mit dem gleichen Prinzip das ausrechnet wie viel er kriegt der kommt der 16 € heraus
Wenn man das 14 € - 16 € rechnet kriegt man 2 €.

Abbildung 11: Lösung von Jochen

Erst recht strukturiert und die jeweiligen Beziehungen im Blick („ $1 + 1 = 2$ “), löst Amelie (Abbildung 12) das Problem.

2€, weil er zweimal 1€ Gewinn macht und da $1+1=2$ ist hat er 2€ Gewinn.

Abbildung 12: Lösung von Amelie

Das eben Gesagte findet sich in noch prägnanterer Weise in Silkes Lösung (Abbildung 13). Hinzu kommt: Der hingeschriebene Term ist das unmittelbare Abbild des Textes. Und die Überprüfung der Richtigkeit steckt gewissermaßen in der Notation. Wer eine solche Notation beherrscht und benutzt, überwacht sich selbst. So gesehen muss man gar keine mehrfachen Kontrollüberlegungen anstellen.

$$\begin{aligned} & [(+6€) + (+7€)] + [(-8€) + (+9€)] && \text{Der Gewinn beträgt} \\ = & 1€ + 1€ && 2€. \\ = & \underline{\underline{2€}} \end{aligned}$$

Abbildung 13: Lösung von Silke

Dieses Beispiel führt zugleich zur noch fehlenden Kompetenz im Sinne der Bildungsstandards, zum *Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Ele-*

menten der Mathematik (K 5). Dazu zählt, natürliche, ausformulierte und symbolische, formale Sprache wechseln zu können. Im gegebenen Beispiel geht es um Formalisierung (Cohors-Fresenborg u. a. 2004). Formalisieren ist in der Mathematikdidaktik häufig mit der Zuschreibung verbunden, unverständlich und schwer zu sein, und zugleich mit dem Hinweis versehen, es möglichst lange hinauszuschieben.

Formal und abstrakt sind Begriffe, die hinsichtlich Mathematiklernen selbst innerhalb der Mathematikdidaktik mit Vorurteilen behaftet sind. Wichtig ist es zunächst, die Begriffe zu unterscheiden. Die von der Schülerin notierte Gleichung ist formal. Aber nichts ist abstrakt, sondern alles ist konkret: die Ziffern, die Plus- und Minuszeichen, die Klammern, das Euro-Zeichen. Alles hat eine klare Bedeutung. Mit Bezug auf die bereits erwähnte Multimodalität ist es didaktisch höchst ratsam, die Fähigkeit zum Wechsel in die formale Darstellung zu lernen. Formalisierung kann entlasten. Formalisierung kann helfen, Probleme zu meistern. Geradezu unsinnig wäre es, Formalisierung aus falschem Verständnis nicht vermitteln zu wollen. Bewältigung statt Vermeidung muss die Devise sein (Sjuts 2003b).

2.3 Systematische Zusammenstellung der Aufgabenbearbeitungen

Die Betrachtung verschiedenartiger Schülerlösungen zu einer einzigen Aufgabe hat beinahe selbstverständlich alle Kompetenzen der Bildungsstandards vor Augen geführt.

- Mathematisches Argumentieren (K 1)
- Mathematisches Problemlösen (K 2)
- Mathematisches Modellieren (K3)
- Verwenden mathematischer Darstellungen (K4)
- Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik (K 5)
- Kommunizieren (K 6)

Aber damit sind sie noch nicht expliziter Bestandteil des Mathematikunterrichts. Wäre das Explizitmachen mit dieser Aufgabe durchführbar? Könnte man sie so gestalten, dass sie Diagnostizieren und Fördern zugleich ermöglicht?

Dazu ist es hilfreich, das für eine Diagnostik Bedeutsame der Aufgabe herauszuarbeiten sowie zu prüfen, inwieweit die dokumentierten Aufgabenbearbeitungen Befunde zulassen (Tabelle 1). Mehrere Merkmale scheinen von Bedeutung zu sein: das Begriffsverständnis von Gewinn und Verlust, die Übersetzungsleistung vom Kaufen und Verkaufen in mathematische Strukturen, der Einsatz des Werkzeugs Formalisierung, der Sprachgebrauch (Cohors-Fresenborg u. a. 2004), die Nutzung

der Multimodalität, das prädikative oder funktionale Denken (Schwank 2003) sowie die metakognitive Selbstkontrolle (Sjuts 2003a).

	Begriffsverständnis von Gewinn und Verlust	Übersetzung von Kaufen und Verkaufen	Formalisierung von Wissen	Sprachgebrauch	Nutzung von Multimodalität	Prädikatives oder funktionales Denken	Metakognition
Judith (1)	nicht erkennbar	falsch	falsch	wenig entwickelt	geringfügig	nicht erkennbar	nicht erkennbar
Lars (2)	richtig	unklar	nicht vorhanden	wenig entwickelt	nicht	eher prädikativ	nicht erkennbar
Ansgar (3)	vage	falsch	nicht vorhanden	fehlerhaft	nicht	eher prädikativ	nicht erkennbar
Laura (4)	vage	falsch	nicht vorhanden	nicht genau feststellbar	nicht	eher prädikativ	nicht erkennbar
Angelika (5)	offen	offen	nicht vorhanden	nicht genau feststellbar	nicht	prädikativ	versuchs- weise
Florian (6)	offen	offen	nicht vorhanden	unsorgfältig	nicht	funktional	versuchs- weise
Jan (7)	richtig	richtig	erkennbar	entwickelt	vorhanden	funktional	erkennbar
Olaf (8)	richtig	richtig	nicht vorhanden	präzise	nicht	funktional	erkennbar
Nils (9)	richtig	richtig	erkennbar	präzise	vorhanden	funktional	erkennbar
Jakob (10)	richtig	richtig	richtig	entwickelt	ausgeprägt vorhanden	funktional	erkennbar
Jochen (11)	richtig	richtig	ungenau	ausführlich, fehlerhaft	nicht	prädikativ	erkennbar
Amelie (12)	richtig	richtig	erkennbar	korrekt, knapp	nicht	prädikativ	erkennbar
Silke (13)	richtig	richtig	richtig	korrekt, knapp	nicht	eher prädikativ	erkennbar

Tabelle 1: Aufgabenbearbeitungen im Überblick

3 Kompetenzorientierte Gestaltung einer Aufgabe

Die Gestaltung einer Aufgabe soll zweierlei bewirken. Einerseits soll sie Denkprozesse aufdecken, andererseits soll sie Verstehensprozesse fördern. Wie lässt sich das bewerkstelligen? Die folgende Staffelung von Aufgabenteilen stellt einen Versuch dar, den genannten Ansprüchen gerecht zu werden. Dabei sollen die oben genannten Merkmale alle Berücksichtigung finden: das Begriffsverständnis von Gewinn und Verlust, die Übersetzung vom Kaufen und Verkaufen in mathematische Strukturen, der Einsatz des Werkzeugs Formalisierung, der Sprachgebrauch, die Multimodalität, das Denken in strukturierten Beziehungen oder dynamischen Prozessen sowie die Metakognition.

Ein Händler kauft eine Ware für 6 Euro, verkauft sie dann für 7 Euro, kauft sie danach für 8 Euro zurück und verkauft sie daraufhin für 9 Euro.

a) Wie groß ist sein Gewinn? Kreuze an:

0 Euro 1 Euro 2 Euro 3 Euro

b) Daniel geht davon aus, dass der Händler ganz zu Beginn 20 Euro besitzt. Notiere in einer Tabelle, wie viel Geld er nach jedem Kauf und nach jedem Verkauf hat! Begründe so den Gewinn!

c) Ingrid berechnet einerseits alle Ausgaben und andererseits alle Einnahmen des Händlers und daraus den Gewinn. Schreibe die zugehörigen Rechnungen auf!

d) Julius hat das Ergebnis 1 Euro angekreuzt und dazu erklärt: *„Zuerst hat er einen Gewinn von 1 Euro, danach einen Verlust von 1 Euro und daraufhin einen Gewinn von 1 Euro. Also hat er insgesamt einen Gewinn von 1 Euro.“*

Du erkennst, dass Julius sich die Situation falsch vorstellt. Verdeutliche ihm seine Fehlvorstellung! Schreibe einen Text für ihn!

e) Kirsten und Susanne finden die Vorgehensweise des Händlers interessant, den Gewinn durch fortlaufendes Kaufen und Verkaufen zu steigern.

Kirsten sagt: *„Bei gleichem Anfangskaufpreis und gleicher Vorgehensweise müsste ich die Ware zum Schluss für ... Euro verkaufen, um einen Gesamtgewinn von 15 Euro zu erzielen.“*

Susanne hält dagegen: *„Du musst 15-mal kaufen und verkaufen, um einen Gesamtgewinn von 15 Euro zu erzielen, ich schaffe das in drei Schritten des Kaufens und Verkaufens. Ich kaufe die Ware für 6 Euro, dann verkaufe ich sie für ...Euro, dann, und schließlich verkaufe ich sie für ... Euro.“*

Vervollständige Kirstens und Susannes Äußerungen! Stelle Susannes Gewinnmachen als Term dar und setze zur Verdeutlichung Klammern!

Aufgabenteile und Lösungen seien der Reihe nach betrachtet. Die Lösung zu Aufgabenteil a) ergibt sich aus der Bearbeitung der Frage nach dem Gewinn. Aufgabenteil b) lässt sich beispielsweise wie folgt lösen (Marco, Abbildung 14).

Ausgaben	Einnahmen	gesamt
		20€
6€		14€
	7€	21€
8€		13€
	9€	22€

Er gewinnt ~~zwei~~ 2€!

Abbildung 14: Lösung von Marco

Nicht allen Schülerinnen und Schülern fällt es leicht, explikative Texte zu verfassen. Umso mehr ist es geboten, textähnliche Darstellungen zuzulassen, die dennoch erläuternden Charakter haben: Tabellen, Diagramme, Skizzen. Eventuell ist eine Legende erforderlich. Auf jeden Fall bieten solche Darstellungsformen dreierlei: Sie geben erstens durchaus Auskünfte über das, was sich der Verfasser gedacht hat. Sie erlauben zweitens eine Ausdrucksmöglichkeit, die den Lernvoraussetzungen des Verfassers gerecht wird. Und sie legen drittens eine Selbstüberwachung des Verfassers nahe. Hier zeigen sich die Schlüsselbegriffe Diagnostik, Adaptivität und Metakognition (Sjuts 2006c).

Die Analyse einer Lösung zu Aufgabenteil c) greift das eben Gesagte auf. Auch hier bietet eine textähnliche Notation Diagnose, Passung (Helmke 2006) und Selbstkontrolle (Ramona, Abbildung 15).

c)

$$6 + 8 = 14 \rightarrow \text{Ausgaben}$$

$$7 + 8 = 16 \rightarrow \text{Einnahmen}$$

$$16 - 14 = 2 \underline{=} \text{Gewinn}$$

Also:

Einnahmen minus Ausgaben gleich: Gewinn.

Abbildung 15: Lösung von Ramona

Anders ist das sicher bei den nachstehenden Lösungen zu Aufgabenteil d). Hinzu kommt, dass es nun um die Kompetenz des Kommunizierens geht.

Du, Julius, hast dir das so vorgestellt, dass die beiden ^{und} ~~Vor~~-Inhalte zusammengelesen. Aber du musst sehen, dass es egal ist für wie viel € er sie das zweite mal erwirbt. Man muss das als zwei verschiedene Vorgänge sehen:

Als erstes macht er ~~bei~~ 1 € Gewinn.
Dann macht er bei einem
sowasagen anderen Vorgang auch
1 € Gewinn.

Abbildung 16: Lösung von Jonas

Bei Jonas (Abbildung 16) zeigt sich, dass das Schreiben adressatenbezogener Überlegungen eine hohe Anforderung ist. Der Verfasser spricht die Person Julius in der zweiten Person Singular an („Du“). Und er findet auch eine überzeugende Darlegung, wie Julius sich das korrekt hätte vorstellen können. Indes ist die Beschreibung der Fehlvorstellung nicht klar genug. Gemeint sind nicht die beiden

Ver- und Ankäufe, sondern die beiden „Käufe“ Verkauf und Ankauf. Ob Julius das versteht?

Jürgens Lösung (Abbildung 17) ist sprachlich klar, aber nicht an Julius gerichtet.

Julius stellt einen Zusammenhang zwischen der 7€ beim ersten Verkauf und der 8€ beim zweiten Kauf her, woraus er den Verlust von 1€ berechnet. Da aber der 1. Kauf/Verkauf unabhängig vom 2. Kauf/Verkauf ist, macht er erst einen Gewinn von 1€ und daraufhin wieder einen Gewinn von 1€. Das ist ein Gewinn von 2€.

Abbildung 17: Lösung von Jürgen

Kognitiv noch schwieriger sind die Anforderungen im Aufgabenteil e). Nötig ist es, einen vorgelegten (Lücken-)Text zu erfassen, nötig ist es weiterhin, einen mehrschrittigen dynamischen Prozess geistig zu bewältigen (Silke, Abbildungen 18, 19 und 20).

Verkauf Nr.	Gewinn in €	Verkaufspreis in €	
1	1	7	Kirsten muss für 35€ verkaufen.
2	2	8	
3	3	11	
4	4	13	
5	5	15	
6	6	17	
7	7	19	
8	8	21	
9	9	23	
10	10	25	
11	11	27	
12	12	29	
13	13	31	
14	14	33	
15	15	35	

Abbildung 18: Lösung von Silke

Susanne kauft für	6 €	und verkauft für	11 €
	13 €		18 €
	20 €		25 €

Abbildung 19: Lösung von Silke

$$\begin{aligned}
 & [(-6) + (+11)] + [(-13) + (+18)] + [(-20) + (+25)] \\
 = & (+5) \quad + (+5) \quad + (+5) \\
 = & \underline{\underline{+15}}
 \end{aligned}$$

Abbildung 20: Lösung von Silke

Die Dynamik des Prozesses wird in eine strukturierte Beschreibung transformiert (Abbildung 18); für den zweiten Teil werden – was keineswegs erforderlich ist – gleich große Schritte gewählt.

Um es zu wiederholen: Die theoriegeleitet erweiterte Aufgabenstellung sollte illustrieren, dass man Diagnose und Fördern, dass man das Aufdecken von Denkprozessen und das Anregen von Verstehensprozessen verbinden kann.

4 Gestaltungshinweise für Aufgaben zur Kompetenzdiagnostik

Aufgaben sind vielfältig einsetzbar. Sie dienen der Überprüfung des Lernerfolgs. Sie dienen aber auch der Gestaltung des Lernprozesses. Sie erlauben stets einen Einblick in die individuellen Lernwege und Lernergebnisse. Will man all dies nutzen, ist es unerlässlich, die gedankliche Auseinandersetzung mit Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen zum Gegenstand des Unterrichts zu machen. Kognition und Metakognition stehen dann im Mittelpunkt. Folglich ist es nötig, Aufgaben und ihre Bearbeitungen (so genannte Schülereigenproduktionen) der Lerngruppe zugänglich zu machen. Dies kann auf vielfache Weise geschehen, als Fotokopie einer Lösung auf Arbeitsblättern, als von Schülerhand gefertigte Folie auf dem Tageslichtprojektor, als an der Wandtafel notierte Lösung. Hinzu kommt der Vorteil, dass derjenige, der die Lösung angefertigt hat, darüber weitere Auskünfte geben kann (Sjuts 2006b).

Wie lassen sich also Aufgaben konstruieren, damit man ihren Bearbeitungen eine Diagnose entnehmen kann, die Stärken und Schwächen verdeutlicht? Vier Formen seien genannt, nämlich „Erläuterungen in einem Begleittext“, „Stellungnahme und Reflexion“, „Analyse von Fehlvorstellungen“, „Aufnahme von Ideen“ (Blum u. a. 2006).

Erläutere ...

Die Aufforderung zum Erläutern ist geeignet, Unsichtbares aufzudecken, Gedanken offen zu legen. Mögliche Aufgabenstellungen wären: „*Schreibe auf, wie du das herausfindest.*“ „*Erläutere dein Vorgehen.*“ „*Erläutere deine Überlegungen.*“ Einen erläuternden Text zu verfassen bedeutet, sich seines eigenen Denkens bewusst zu werden, sich also selbst zu überwachen.

Nimm Stellung ...

Aufgaben im „Nimm-Stellung-Format“ (Kaune 2005) verlangen – etwa zu vorgelegten Lösungsvorschlägen – Kommentierungen, Gegenüberstellungen, Vergleiche, Unterscheidungen, Einordnungen und Systematisierungen. Sie rücken insbesondere Formulierungen und Schreibweisen ins Augenmerk. So lassen sich individuelle Unterschiede bei Begriffsbildungs- und Verstehensprozessen ausmachen und individuelle Vorstellungen rekonstruieren.

Analysiere ...

Die Vorlage von Unterrichtsszenen, Schülerdialogen, Fehlern, Lücken, Fehlvorstellungen und kognitiven Dissonanzen ist ein besonderes Gestaltungsprinzip diagnostischer Aufgaben. Die Anlage einer solchen Aufgabe basiert häufig auf unterschiedlichen Vorstellungen, die mit Verweis auf namentlich erwähnte Personen die Aufgabe einleiten und zum Gegenstand einer Analyse werden. Auf diese Weise sollen sich Schülerinnen und Schüler in eine Situation, vor allem in die Gedankenwelt anderer Personen hineinversetzen. Bei der Auseinandersetzung mit den Vorstellungen anderer Personen erkennen sie auch den Stand ihrer eigenen kognitiven Struktur (Schwank 2003), was zu Veränderungen, Erweiterungen oder Festigungen Anlass geben kann. Fehlvorstellungen aufzuspüren und zu beheben, ist eine besonders lernwirksame Vorgehensweise.

Dieses Merkmal hat die Mathematikdidaktik mehrfach dargelegt und an Beispielen erörtert. Erinnerung sei an folgende Aufgabe:

Ein üblicher Schülerfehler besteht in der Vorstellung : „ $-a$ ist negativ“. Wie würdest du helfen?

Aufgaben, die fehlerhafte Notationen (etwa zur Klammersetzung) thematisieren, sowie Aufgaben mit Überschlags- und Kontrollüberlegungen gehören in diese Kategorie und ebenso solche, die eine Auseinandersetzung mit Argumentationsfeh-

lern oder -lücken verlangen. Stets geht es darum, Unvollständigkeiten, Fehlvorstellungen und Fehlerhaftigkeiten (womöglich auch Ursachen und Gründe) herauszupräparieren und zu korrigieren.

Setze fort ...

Aufgaben dienen nicht nur der Überprüfung von Lernergebnissen und der Überwachung von Lernprozessen; sie können auch den Lernzuwachs initiieren und unterstützen. Sie können neue Ideen evozieren, neues Wissen aufzubauen helfen. Indem man etwa Lösungsideen oder Lösungsansätze vorlegt, die es weiterzuentwickeln gilt, erweitert man auch die Lernkompetenz. Die Aufgabe, Vorgelegtes fortzusetzen, regt zur Produktivität in einem überschaubaren Kontext an.

Schriftliche Erläuterungen, Stellungnahmen, Analysen und Fortsetzungen sind Arten von Aufgaben, die Lernaktivitäten zur Überprüfung und Überwachung auslösen und somit Denk- und Verstehensprozesse gleichermaßen aufdecken wie anregen.

5 Nachbemerkingen

Bildungsstandards bieten eine Chance, die Nachhaltigkeit von Lernprozessen zu verbessern. Sie liefern eine Orientierung für Sinn und Bedeutung schulischen Lernens. Wer die Mühen des Lernens auf sich nimmt, erweitert seine Handlungsmöglichkeiten, erwirbt Bildung, erhöht seine Lebensqualität (Rihm & Häcker 2007). Aber: *Teaching to the test* wird stattfinden (Sjuts 2007a). Sind die Testaufgaben einfallslos, dann besteht die Gefahr, dass es nicht zu der gewünschten Änderung kommt. Sind die Aufgaben hinsichtlich der Orientierung an Kompetenzen und Prozessen (Schlömerkemper 2006) jedoch einfallsreich, ist die Chance für die gewünschte Änderung groß.

Wer die Gefahr benennt, dass durch Testaufgaben der Unterricht zu verarmen, dass Unterricht sich auf Testvorbereitung zu beschränken droht, kann ihr begegnen. Die Chance besteht darin, passende Testaufgaben zu entwickeln. Wohlüberlegte Aufgaben sind es, die den Unterricht zu bereichern vermögen, die Gelegenheiten bieten zum Diagnostizieren und zum Fördern, die die Wirksamkeit von Lehren und Lernen verbessern können (Sjuts 2007a).

Es genügt nicht

[...] die hehren Ziele immer nur zu proklamieren und die Schule nach deren Maßstäben zu kritisieren – *es kommt darauf an, sie zu verändern!* (Schlömerkemper 2006, S. 269)

Entscheidend ist dies: Aus einem genauen Verstehen mathematischer Lehr-Lern-Prozesse lassen sich Erkenntnisse gewinnen, die ein erfolgreiches Lehren und Lernen von Mathematik ermöglichen. Ein diagnostisch und didaktisch professionelles Unterrichtshandeln bedarf der theoriegeleiteten Auseinandersetzung mit Prozessen,

Äußerungen und Produkten des Denkens und Verstehens. Professionalität kann nur auf der Basis von Fachdidaktik, also bewusster Fachspezifität entstehen (Neubrand 2006).

Literatur

- Baumert, Jürgen u. a. (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen 2001
- Baumert, Jürgen & Kunter, Mareike (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9. Jahrgang, Heft 4, 2006, S. 469–520
- Blum, Werner & Drüke-Noe, Christina & Hartung, Ralph & Köller, Olaf (Hrsg.) (2006): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen. Berlin 2006
- Büchter, Andreas & Leuders, Timo (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen überprüfen. Berlin 2005
- Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann & Sommer, Norbert (2004): Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.) (2004), S. 109–144
- Helmke, Andreas (2006): Was wissen wir über guten Unterricht? Über die Notwendigkeit einer Rückbesinnung auf den Unterricht als dem „Kerngeschäft“ der Schule. In: Pädagogik, 58. Jahrgang, Heft 2, 2006 S. 42–45
- Horstkemper, Marianne (2006): Fördern heißt diagnostizieren. Pädagogische Diagnostik als wichtige Voraussetzung für individuellen Lernerfolg. In: Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken – Können entwickeln. Friedrich Jahresheft XXIV 2006, S. 4–7
- Kaune, Christa (2005): Schreiben als Anregung zum Nachdenken über eigene Lernprozesse. Nimm-Stellung!-Aufgaben und diskursive Unterrichtsprotokolle. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 47. Jahrgang, Heft 5, 2005, S. 7–11
- KMK (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4. Dezember 2003)
- Neubrand, Michael (Hrsg.) (2004): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden 2004
- Neubrand, Michael (2006): Professionalität von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern: Konzeptualisierungen und Ergebnisse aus der COCTIV- und der PISA-Studie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, S. 5–12
- Rihm, Thomas & Häcker, Thomas (2007): Nachhaltig Lernen angesichts normierender Standards und faktischer Vielfalt. In: Pädagogische Rundschau, Heft 2, 2007, S. 199–210
- Schlömerkemper, Jörg (2006): Wie kultiviere ich die Bildung bei dem Standard? Zur Organisation kompetenz- und prozessintensiven Lernens. In: Die Deutsche Schule, 98. Jahrgang, Heft 3, 2006, S. 264–269
- Schwank, Inge (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 35, Heft 3, 2003, S. 70–78
- Sjuts, Johann (2003a): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 24, Heft 1, 2003, S. 18–40

- Sjuts, Johann (2003b): Formalisierung von Wissen – ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen. In: *mathematica didactica*. 26. Jahrgang, Band 2, 2003, S. 73–90
- Sjuts, Johann (2006a): Beim Denken gedacht, das Denken überwacht. Ideen der Metakognition beim Umgang mit Termen. In: *mathematik lehren* 136, 2006, S. 47–49
- Sjuts, Johann (2006b): Unterrichtsliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht. In: Blum, Werner & Drüke-Noe, Christina & Hartung, Ralph & Köller, Olaf (Hrsg.) (2006), S. 96–112
- Sjuts, Johann (2006c): Mathematikdidaktik im Wandel. Diagnostik, Adaptivität und Metakognition als Schlüsselbegriffe zur Steigerung von Lernqualität. In: *SEMINAR – Lehrerbildung und Schule*. Heft 3, 2006, S. 122–130. Ebenso in: Kretzer, Hartmut (Hrsg.): *Lehrerbildung in der Wissensgesellschaft angesichts aktueller Aufgaben*. Oldenburg 2006, S. 13–22
- Sjuts, Johann (2006d): Wie gestaltet man Aufgaben, um Denkprozesse aufzudecken und Verstehensprozesse zu fördern? In: *Beiträge vom 20. DASU-Symposium*. Hannover 2006
- Sjuts, Johann (2007a): Teaching to the test: Gefahr oder Chance? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, S. 507–510
- Sjuts, Johann (2007b): Mini-Forschung im Berufsfeld Schule. Steigerung von Unterrichtsqualität und Verbesserung von Lehrerbildung, dargestellt am Beispiel des Grundschulprojekts „Metakognition beim mathematischen Denken“. Leer 2007

Anschrift des Verfassers

Dr. Johann Sjuts
Studienseminar Leer
Evenburg – Am Schloßpark 25
26789 Leer
E-Mail: sjuts-leer@t-online.de

Eingang Manuskript: 15.07.2007 (überarbeitetes Manuskript: 29.01.2008)