

Einschätzungen von Hauptschullehrern zu basalen Fähigkeiten ihrer Schüler am Beginn der Sekundarstufe I

von

Anke Wagner, Ludwigsburg

Kurzfassung: In der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur herrscht weitgehend Übereinstimmung darüber, dass im Mathematikunterricht am (Vor-)Wissen der Schüler angeknüpft werden sollte. Allerdings gibt es auch deutliche Hinweise dafür, dass es Lehrern nicht besonders leicht fällt, die Leistungen ihrer Schüler richtig einzuschätzen. Der vorliegende Artikel möchte Einblick geben in eine Studie, die sich mit Einschätzungen von Lehrern befasst zu elementaren Grundfertigkeiten von Schülern – dem Kopfrechnen. Hierzu wurden die Kopfrechenleistungen von Fünftklässlern in Form schriftlicher Tests ($n = 185$) und klinischer Interviews ($n = 90$) erhoben. Zusätzlich wurden 112 Lehrer mit Hilfe eines schriftlichen Fragebogens zu den Kopfrechenleistungen von Fünftklässlern befragt.

Abstract: In the current discussion on teaching mathematics there exists a consensus that it's very important for teachers to have sufficient information about the (pre-)knowledge of their pupils. But there exist clear hints too, that teachers are not always able to do good assessments of pupils' competencies. The study presented here tries to find out more about the assessments of teachers relating to elementary competences of the pupils at the beginning of secondary school. Therefore mental arithmetic competencies of fifth grades pupils are examined with classroom tests ($n = 185$) on the one side and clinical interviews on the other side. Additionally a teacher's questionnaire ($n = 112$) is developed to find out more about how teachers assess pupils' knowledge.

1 Einleitung – Zur aktuellen Ausgangslage

Aktuelle Forschungsergebnisse innerhalb der Mathematikdidaktik weisen immer wieder darauf hin, dass Schüler¹ derselben Jahrgangsstufe unterschiedliche individuelle Ausgangslagen haben. Hierzu existieren insbesondere zu mathematischen Kompetenzen von Kindern am Schulanfang zahlreiche Studien, sowohl im Bereich der Arithmetik (Grassmann 2000, Hasemann 2001, Selter 1995) als auch innerhalb der Geometrie (Grassmann 1996).

¹ In dem vorliegenden Beitrag ist bei der Verwendung der männlichen Form auch das weibliche Geschlecht gemeint.

Möchte man Kinder nun in ihrem individuellen Lernprozess nachhaltig unterstützen, dann ist es notwendig an genau jenem Vorwissen von Lernenden anzuknüpfen. Eine individuelle Diagnostik von Schülern erfordert von Lehrkräften diagnostische Kompetenzen, die sie befähigen, Lern- und Entwicklungspotentiale zu ermitteln, um daran anknüpfend fördermethodische sowie individuelle Fördermaßnahmen zu entwickeln und umzusetzen. Untersuchungsergebnisse zeigen in dem Zusammenhang, dass Lehrer mit hoher diagnostischer Kompetenz höhere Leistungen ihrer Schüler erzielen (Einsiedler 1997, S. 236).

Genau dieses Vorhaben scheint jedoch in der Schule ein schwieriges Unterfangen zu sein. Denn spätestens seit PISA werden eben jene Fähigkeiten der Lehrer in Frage gestellt: Die diagnostischen Kompetenzen von Lehrern lassen zu wünschen übrig, was nach Pangh (2003, S. 92) deutliche Fragen an die Professionalität von Lehrern aufkommen lässt. Das ist eigentlich auch nicht verwunderlich, gilt es doch, jedem Kind in einer Schulklasse mit möglicherweise mehr als 30 Kindern individuell gerecht werden zu wollen. Betrachtet man in diesem Zusammenhang auch noch das Bildungsumfeld einer Hauptschule, dann ist Individualdiagnostik hier um so schwerer zu realisieren, da Hauptschullehrer verständlicherweise häufig ihre Aufmerksamkeit – etwa aufgrund störender Schüler – der gesamten Klasse widmen müssen.

Ein rechtzeitiges Erkennen von Lernrückständen ermöglicht jedoch ein rechtzeitiges Intervenieren und kann möglicherweise verhindern, dass sich Lernrückstände kumulieren und Schüler dadurch in ihrer Lernentwicklung behindert werden. Eine eingehende Diagnostik bezieht sich nicht lediglich auf Schüler mit Lernproblemen, sondern gleichermaßen auch auf Schüler mit besonderen Begabungen. Damit sind insbesondere Schüler gemeint, die häufig aufgrund sprachlicher Defizite die Hauptschule besuchen, im Mathematikunterricht jedoch durchaus gute Leistungen erbringen.

Inhaltlich steht im Fach Mathematik in der Hauptschule vor allem die Aneignung grundlegender Kompetenzen im Fokus des Unterrichts. Hierzu zählen einfache Rechenfertigkeiten wie das Kopfrechnen, die schriftlichen Rechenverfahren, das Rechnen mit Dezimalzahlen, Prozentrechnen, Dreisatz und grundlegende Kenntnisse in der Geometrie. Zahlreiche Studien belegen jedoch, dass ein großer Teil von Schülern bis zum Ende der Schulzeit nicht über jene basalen Fähigkeiten verfügt (List 1998, Bos et al. 2003).

Der vorliegende Beitrag widmet sich einem speziellen Teil jener Grundkenntnisse, dem Kopfrechnen. Ausgehend von Ergebnissen einer Studie zu den Kopfrechenleistungen von Hauptschülern zu Beginn der Sekundarstufe soll im Verlauf des Beitrags folgenden Fragen nachgegangen werden: Wie sieht es aus mit dem diagnostischen Blick von Lehrern in Bezug auf elementares Grundwissen ihrer Schüler? Wie schätzen Hauptschullehrer die Leistungen der Schüler zu Beginn der

Hauptschule im Kopfrechnen ein? Inwieweit stimmen Einschätzungen der Lehrer mit den tatsächlich erbrachten Leistungen der Schüler überein? Gibt es generelle Abweichungen und gibt es insbesondere aufgabenbezogene Abweichungen? Wenn ja, wie lassen sich diese erklären?

2 Die Studie

Um Erkenntnisse über die Kopfrechnenleistungen von Hauptschülern zu gewinnen, wurden zunächst 185 Fünftklässlern aus 5 verschiedenen Schulen alle existierenden Aufgaben zum kleinen $1 \cdot 1 / 1 : 1$ gestellt. Die Erhebung dieser Daten erfolgte mit Hilfe zweier Tests, die im Klassenplenum durchgeführt wurden. Die beiden Tests wurden im zeitlichen Abstand von einer Woche in je einer Schulstunde durchgeführt. Der Test zum kleinen $1 \cdot 1$ enthält insgesamt 121 Aufgaben. Die Zahl ergibt sich aus den zehn $1 \cdot 1$ -Reihen mit Berücksichtigung aller Tauschaufgaben und der Reihe 0. Der Test zum kleinen $1 : 1$ umfasst insgesamt 110 Aufgaben, da die Aufgabenstellungen $0 : n$ entfallen (Wagner 2006, S. 80). Die Aufgaben wurden den Schülern mündlich in ungeordneter Reihenfolge gestellt, entgegen dem herkömmlichen Lernprozess in der Grundschule, nach welchem die $1 \cdot 1$ -Reihen strukturiert behandelt werden. Den Schülern wurde zum Ermitteln und zum Notieren des Ergebnisses auf ein vorbereitetes Arbeitsblatt rund 6 Sekunden Zeit gegeben.

Zusätzlich wurden mit etwa der Hälfte dieser Schüler ($n = 90$) klinische Interviews zu Aufgaben aus dem Bereich des großen $1 \cdot 1 / 1 : 1^2$ geführt. Diese Aufgaben bekamen die Schüler ebenfalls mündlich gestellt mit der Bitte, ihren Rechenweg laut vorzurechnen. Alle Interviews wurden videodokumentiert und transkribiert.

Parallel zur Studie zu den Kopfrechnenleistungen von Hauptschülern wurde ein Fragebogen entwickelt und an insgesamt 150 Lehrer aus Baden-Württemberg geschickt, die Mathematik zum Zeitpunkt der Erhebung in den Klassenstufen 5/6 unterrichteten. Die Lehrer, die in den untersuchten Klassen unterrichten, wurden ebenfalls gebeten, den Fragebogen auszufüllen. Eine Eins-zu-eins-Zuordnung von Schülerergebnissen einer Klasse zu den Einschätzungen des in dieser Klasse unterrichtenden Lehrers kann jedoch nicht gemacht werden, da die Fragebögen anonym zugeschickt wurden.

Die hohe Rücklaufquote (112 von 150 Fragebögen) gibt Hinweise dafür, dass offenbar grundsätzlich großes Interesse besteht, und deutet daraufhin, dass diese Thematik den unterrichtenden Lehrern wohl besonders am Herzen liegt.

² Das Zahlenmaterial wurde nach drei Kriterien ausgewählt: Einsatz möglichst vieler Rechenstrategien, Zehnerpotenzaufgaben sowie Größe der einzelnen Faktoren (Wagner 2006, S. 86 ff.).

Der Fragebogen besteht zum größten Teil aus geschlossenen Items, ausgenommen drei offenen. Insgesamt ist der Fragebogen in fünf Blöcke unterteilt. Der erste Block betrifft die Struktur der Schulen als solche, der zweite Block die Klasse der jeweiligen Lehrperson, der dritte Block beleuchtet die Biografie der Befragten, der vierte Block erhebt allgemeine Informationen über den Mathematikunterricht und der letzte Block enthält schließlich Items zum Thema Kopfrechnen. Dieser Beitrag berichtet ausschließlich vom letzten Teil des Fragebogens, dem Kopfrechnen³.

Hierzu wurde ein Teil der Aufgaben zum kleinen 1·1/1:1 wie auch zum großen 1·1/1:1 (aus der Studie zur Erhebung der Kopfrechnleistungen der Schüler) den Lehrern vorgelegt, mit der Bitte einzuschätzen, wie viel Prozent der Schüler ihrer Klasse diese Aufgaben *nicht* richtig lösen können.

3 Zu den Grundkenntnissen von Hauptschülern – Teilergebnisse einer Studie

In den aktuellen Bildungsplänen ist bereits für die Primarstufe sicheres Kopfrechnen als eine wesentliche Kompetenz ausdrücklich aufgeführt. Zahlreiche Veröffentlichungen innerhalb der Fachdidaktik weisen daraufhin, dass Kopfrechnen für einen sicheren Umgang mit Zahlen wesentlich ist (Buys 2001, Krauthausen/Scherer 2003, Lorenz 2003, Selter 2003, Treffers 1997). So sollen demzufolge Grundschüler mit Beendigung der vierten Klasse bereits über sichere Kopfrechnkenntnisse verfügen.

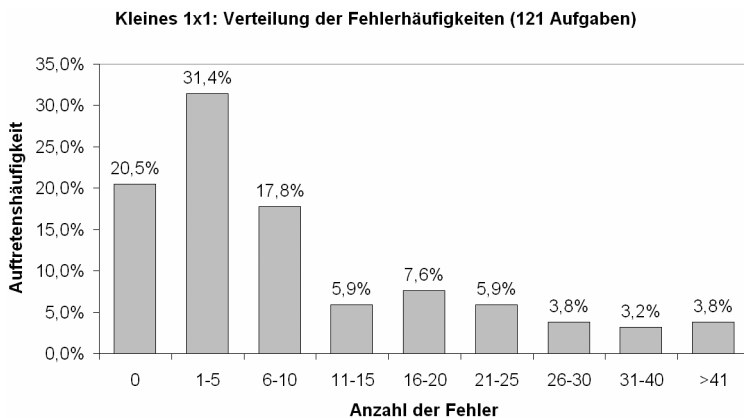


Abbildung 1: Verteilung der Fehlerhäufigkeiten beim kleinen 1·1

³ Weitere Auswertungen zu den restlichen Blocks des Fragebogens sind zur Zeit in Bearbeitung.

Abbildung 1 zeigt die Fehlerhäufigkeiten der untersuchten Schüler beim kleinen 1·1/1:1. Zwar lösten mehr als zwei Drittel (69,7 %) der untersuchten Schüler ($n = 185$) lediglich zehn und weniger der insgesamt 121 Aufgaben fehlerhaft, betrachtet man jedoch das andere Ende des Leistungsspektrums, so ist festzuhalten, dass ungefähr 10 % der Schüler mehr als ein Fünftel aller Aufgaben fehlerhaft lösten.

Die Ergebnisse der Studie zum kleinen 1:1 zeigt Abbildung 2. Nahezu die Hälfte der untersuchten Hauptschüler lösten 10 und weniger Aufgaben (von insgesamt 110) fehlerhaft. Allerdings liegt der Prozentsatz der Schüler mit mehr als 25 Fehlern beim kleinen 1:1 bei ca. 20 %.

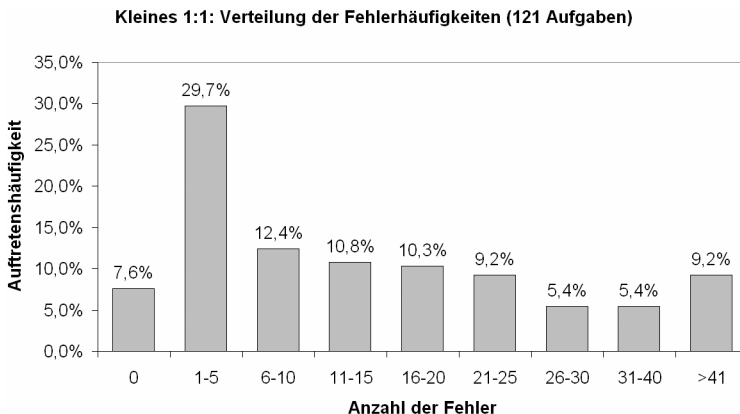


Abbildung 2: Verteilung der Fehlerhäufigkeiten beim kleinen 1:1

Die Ergebnisse der Studie zeigen deutlich, dass in der Orientierungsstufe der Hauptschule nicht wie selbstverständlich davon ausgegangen werden kann, dass grundlegende Kompetenzen im Umgang mit dem kleinen 1·1/1:1 vorhanden sind und somit auf diesen aufgebaut werden kann. Selbst einfachste Aufgaben wie 3·4, 4·4 oder 2·3 konnten nicht von allen Schülern der Klassenstufe 5 fehlerfrei gelöst werden.

Sicheres Kopfrechnen im Bereich des kleinen 1·1/1:1 meint nicht ausschließlich das *Berechnen* eines korrekten Ergebnisses, sondern verlangt vom Lösenden vielmehr einen *Abrufprozess*, bei dem das Ergebnis der gestellten Aufgabe im Gedächtnis zur Verfügung steht und gerade eben nicht einem Prozess des Berechnens unterliegt. Dieser Abrufprozess wird in der Literatur als „mental recall“ bezeichnet (Anghileri 2001, Beizhuizen 1997, Selter 2003).

Weiter gehende Ergebnisse dieser Untersuchung geben klare Hinweise dafür, dass bestimmte Aufgaben aus dem Bereich des kleinen 1·1/1:1 im Verlauf der Grundschule nicht bzw. offensichtlich falsch automatisiert worden sind. Aufgaben, die zu

Beginn der Sekundarstufe noch nicht von allen Hauptschülern im Gedächtnis verfügbar sind, sind bei der Multiplikation Aufgaben mit hohen Faktoren (z. B. $8 \cdot 6$, $6 \cdot 7$ und $8 \cdot 7$) und bei der Division Aufgaben mit hohen Divisoren bzw. Dividenten (z. B. $48 : 6$, $63 : 9$). So wurde beispielsweise die Aufgabe $8 \cdot 6$ von 28 % der untersuchten Schüler nicht korrekt gelöst (Wagner 2006, S.108 ff.), davon konnten mehr als Dreiviertel der Schüler in der vorgegebenen Zeit kein Ergebnis hinschreiben. Dies deutet darauf hin, dass solche Aufgaben nicht binnen kürzester Zeit aus dem Gedächtnis abgerufen werden können, sondern vielmehr ein Prozess des Ausrechnens bzw. Berechnens erfolgen muss. Dies hat zur Folge, dass beim Lösen anspruchsvollerer Aufgaben das Arbeitsgedächtnis der Lösenden enorm beansprucht wird, was zu mehr Fehlern führen kann. Dieser Frage wurde in der Studie ebenfalls nachgegangen. Hierzu wurden die Schüler in Einzelinterviews aufgefordert, zu Aufgaben aus dem Bereich des großen $1 \cdot 1/1 : 1$ ihren Lösungsweg laut vorzurechnen.

Schaut man sich die Erfolgsquoten der untersuchten Hauptschüler in diesem Bereich an, so ergibt sich folgendes Bild: Im Schnitt wurden 42,3 % der Multiplikationsaufgaben nicht richtig gelöst. Bei Divisionsaufgaben liegt dieser Wert bei 46,1 %. Die erheblichen Fehlerquoten aus dem Bereich des großen $1 \cdot 1/1 : 1$ weisen eindeutig auf hohe Defizite im Kopfrechnen hin. Während beim kleinen $1 \cdot 1/1 : 1$ die Schülerleistungen noch als akzeptabel bezeichnet werden können, sind hier deutliche Mängel erkennbar.

3 · 29	9 · 14	11 · 50	17 · 5	40 · 15	4 · 36	39 · 4	25 · 5	40 · 30	125 · 4
42,2 %	34,4%	44,4%	35,6%	55,6%	62,2%	36,7%	26,7%	38,9%	46,7%

Tabelle 1: Verteilung der Fehlerhäufigkeiten beim großen $1 \cdot 1$

Die mit Abstand leichteste Multiplikationsaufgabe (Tabelle 1) war für die Schüler die Aufgabe $25 \cdot 5$. Etwa ein Viertel der Schüler konnte diese Aufgabe nicht richtig lösen. Die Aufgaben $9 \cdot 14$, $17 \cdot 5$ und $39 \cdot 4$ konnte schon über ein Drittel der Schüler nicht richtig lösen. Nahezu die Hälfte der Schüler zeigte Probleme bei den Aufgaben $3 \cdot 29$, $11 \cdot 50$, $40 \cdot 30$ und $125 \cdot 4$. Die meisten Probleme traten bei den beiden Aufgaben $40 \cdot 15$ und $4 \cdot 36$ auf.

39 : 3	75 : 15	56 : 4	126 : 14	360 : 40	3500 : 100	240 : 4	135 : 15	270 : 30	96 : 2
18,9 %	36,7 %	47,8 %	64,4 %	43,3 %	53,3 %	32,2 %	51,1 %	51,1 %	62,2 %

Tabelle 2: Verteilung der Fehlerhäufigkeiten beim großen $1 : 1$

Bei den Divisionsaufgaben (Tabelle 2) war die mit Abstand leichteste Kopfrechenaufgabe die Aufgabe 39:3. Lediglich ein Fünftel der an der Untersuchung teilnehmenden Schüler konnte diese Aufgabe nicht richtig lösen. Mit den beiden Aufgaben 75:15 und 240:4 hatte ungefähr ein Drittel der Schüler Schwierigkeiten. Nahezu die Hälfte der Schüler konnte die Aufgaben 56:4, 360:40, 3500:100, 135:15 und 270:30 nicht richtig lösen. Mit über 60 % nicht richtiger Lösungen stellten die Aufgaben 126:14 und 96:2 die größten Hürden für die Schüler dar. Insgesamt weisen die Kopfrechenleistungen der Schüler auch bei Divisionsaufgaben enorme Schwächen auf.

4 Zu den Einschätzungen von Hauptschullehrern

Die vorliegenden Untersuchungsergebnisse machen auf deutliche Mängel innerhalb der notwendigen Grundkenntnisse aufmerksam⁴. Vergleicht man die Erfolgsquoten der Schüler beim Kopfrechnen zwischen den an der Untersuchung teilgenommenen Klassen, so existieren signifikante Unterschiede⁵. Das bedeutet, dass es Klassen gibt, deren Schüler im Vergleich zu anderen Klassen weitaus bessere oder aber auch schlechtere Kopfrechenleistungen aufweisen. Somit sind die Ergebnisse der Studie bezogen auf die Leistungen der Schüler als Tendenzen zu interpretieren, die je nach Schulklasse stark differieren können.

Was bedeutet das nun für einen Lehrer, der Mathematik in der Orientierungsstufe der Hauptschule unterrichtet? Zunächst kann nicht grundsätzlich davon ausgegangen werden, dass alle Schüler in den Klassen 5 der Hauptschulen über ausreichende Kopfrechenkenntnisse verfügen. Das bedeutet gleichzeitig, dass jeder Lehrer, der Mathematik in der Orientierungsstufe der Hauptschule unterrichtet, die Leistungsfähigkeit bzw. das Vorwissen seiner Schüler herausfinden muss, um letztendlich daran anknüpfen zu können. Wie schätzen nun Hauptschullehrer die Kopfrechenleistungen ihrer Schüler ein?

4.2 Befragung der Lehrkräfte: Ergebnisse

Entgegen der Erwartung zeigte sich, dass die Einschätzungen der befragten Lehrer mit den vorliegenden Schülerergebnissen bei vielen Aufgaben doch in überraschend hohem Maße übereinstimmen (Tabelle 3). Bei einigen Aufgaben (3·9,

⁴ Um Aussagen machen zu können über die Leistungsfähigkeit der getesteten Probanden, wurde zur Auswertung der Leistungstests grundsätzlich das Modell nach Klauer (1972) herangezogen. Klauer stellt fest, dass andere Faktoren unabhängig vom Wissen des Getesteten Einfluss auf das Testergebnis nehmen können. Er schlägt daher vor, eine Toleranzgrenze zwischen 80 % und 95 % richtig gelöster Aufgaben festzulegen, oberhalb derer ein Schüler als „Könner“ eingestuft werden kann.

⁵ H-Test nach Kruskal-Wallis $p < 0,001$.

125·4, 40·30 und 11·50) waren die Beurteilungen der Lehrer mit den Erfolgsquoten der Schüler nahezu identisch. Lediglich bei drei der zehn Aufgaben (0·3, 8·7 und 9·14) konnten höhere Abweichungen von den tatsächlich erbrachten Leistungen der Schüler festgestellt werden. Während die Befragten die Schülerleistungen bei der Aufgabe 8·7 eher besser einschätzten, beurteilten sie diese bei den Aufgaben 0·3 und 9·14 doch wesentlich schlechter. Dies könnte darauf hindeuten, dass den Lehrern mögliche Schwierigkeiten der Schüler beim Lösen von Aufgaben des großen 1·1/1:1 durchaus bewusst sind, bei Aufgaben des kleinen 1·1 mit hohen Faktoren eher nicht, insbesondere nicht in dieser Ausprägung.

Aufgabe	8·7	0·3	3·9	17·5	25·5	125·4	40·30	11·50	4·36	9·14
Fehlerquote	33 %	17 %	12 %	36 %	27 %	47 %	39 %	44 %	62 %	34 %
Einschätzung	20 %	34 %	12 %	39 %	34 %	47 %	36 %	41 %	55 %	48 %

Tabelle 3: Vergleich der Fehlerquote mit den Einschätzungen der befragten Lehrer

Die eher zu schlechte Einschätzung der Lehrer bei Nullaufgaben könnte zum einen daran liegen, dass Nullaufgaben während Kopfrechenphasen möglicherweise zuweilen vernachlässigt werden und/oder diese weniger häufig in Schulbüchern thematisiert werden. Untersuchungen zeigen in dem Zusammenhang (Ashkraft 1995), dass nicht immer die Aufgaben in Schulbüchern behandelt werden, die die Schüler noch nicht kennen, sondern oftmals gerade die, die bereits gelöst werden können. Der ersten möglichen Erklärung, dass Nullaufgaben im Unterricht doch eher zu kurz kommen, wurde im Fragebogen nachgegangen. So lautete eine Frage: Wie häufig stellen Sie Aufgaben aus dem Bereich des kleinen 1·1/1:1, großen 1·1/1:1 und Nullaufgaben?

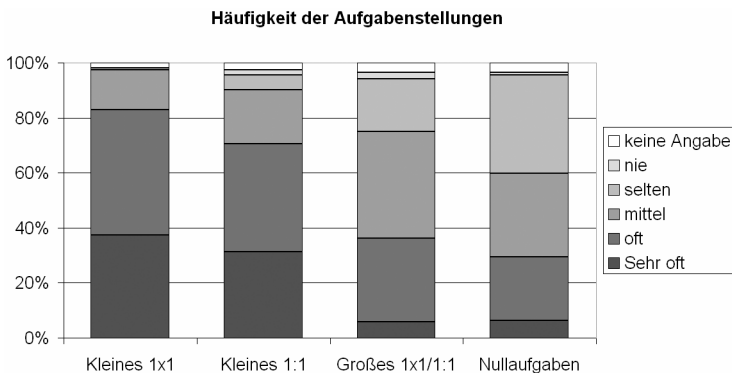


Abbildung 3: Häufigkeit der Aufgabenstellungen

Betrachtet man Abbildung 3, so fällt auf, dass nach Angaben der befragten Lehrer offensichtlich insbesondere Aufgaben aus dem kleinen 1·1 sehr häufig bzw. häufig im Unterricht geübt werden. Keiner der befragten Lehrer gab an, dass die grundlegenden Aufgaben des kleinen 1·1 selten oder nie im Mathematikunterricht wiederholt werden. Aufgaben zum kleinen 1:1 werden nach Aussagen der befragten Lehrer nicht ganz so oft im Unterricht geübt. Möglicherweise gehen Lehrkräfte davon aus, dass beim Üben multiplikativer Aufgabenstellungen zum kleinen 1·1 auch gleichzeitig die Umkehraufgaben bei den Schülern ins Gedächtnis gerufen werden, und sehen von daher keine Notwendigkeit, die zugehörigen Geteiltaufgaben nochmals explizit zu vertiefen. Forschungsergebnisse weisen in dem Zusammenhang immer wieder darauf hin, dass beim Lernen des Einmaleins die Zahlen in der Tat als „Zahlentripel“ (8, 5, 40) abgespeichert werden (Dehaene 1999). Deutliche Hinweise gibt es allerdings aber auch dafür, dass weniger erfolgreiche Schüler den Zusammenhang zwischen der Multiplikation und der Division deutlich weniger nutzen (Wagner 2006, S. 118 f.). Weiterführende Untersuchungen könnten hierüber Klarheit verschaffen.

Betrachtet man im Gegensatz hierzu Aufgaben des großen 1·1/1:1 sowie Nullaufgaben, so gab lediglich ca. ein Drittel der Befragten an, diesen Aufgabentypus häufig bzw. sehr häufig im Unterricht zu üben, während ein weiteres Drittel der Befragten angab, diese eher selten bis nie zu wiederholen. So scheinen also Aufgaben mit Nullen im Gegensatz zum kleinen 1·1/1:1 im Unterricht doch eher eine untergeordnete Rolle zu spielen. Eine mögliche Ursache hierfür vermutet Kornmann (1998) darin, dass Lehrer nicht über eine hinreichende Kompetenz verfügen, wie sie im Unterricht mit Aufgaben mit der Null adäquat umgehen können. Möglichkeiten und Ansätze, wie der Umgang mit der Null im Unterricht auf der Basis eines tiefergreifenden Verständnis thematisiert werden kann, finden sich beispielsweise bei Gerster/Schultz (1998, S. 393 ff.).

Aufgabe	48:6	63:9	0:2	75:15	360:40	56:4	3500:100	96:2	126:14	240:4
Fehlerquote	31 %	29 %	23 %	37 %	43 %	48 %	53 %	62 %	64 %	32 %
Einschätzung	22 %	21 %	46 %	40 %	41 %	34 %	45 %	36 %	61 %	41 %

Tabelle 4: Vergleich der Fehlerquote mit den Einschätzungen der befragten Lehrer

Auch bei den Aufgaben zur Division (Tabelle 4) sind die Einschätzungen der Lehrer zu den Leistungen der Schüler tendenziell durchaus zutreffend. So stimmen diese mit den in der Untersuchung ermittelten Werte bei den Aufgaben 63:9, 75:15, 360:40, 3500:100 und 126:14 gut miteinander überein. Eine etwas höhere Abweichung zwischen den Kompetenzen der Schüler und den Bewertungen der Lehrer konnte lediglich bei den drei Aufgaben 0:2, 56:4 und 96:2 festge-

stellt werden. So beurteilten die befragten Lehrer die Leistungen der Schüler beim Lösen der Aufgabe $0:2$ deutlich schlechter (Fehlerquote 23 %, Einschätzung 46 %), als die Schüler tatsächlich abschnitten, während bei den Aufgaben $56:4$ und $96:2$ die Beurteilungen der Lehrer deutlich besser ausfielen als die tatsächlich erbrachten Leistungen der Schüler.

Wie lassen sich diese Ergebnisse deuten? Analog zu den Ausführungen zu Multiplikationsaufgaben zeigt sich auch bei Divisionsaufgaben in Bezug auf die Einschätzungen der Lehrer eine deutliche Abweichung bei einer Nullaufgabe.

Doch wie verhält es sich bei den beiden übrigen Aufgaben? Möglicherweise gehen die befragten Hauptschullehrer davon aus, dass Aufgaben zur Halbierung wie $96:2$ den Schülern keine größeren Schwierigkeiten bereiten. Allerdings haben immerhin mehr als 60 % der Schüler diese Aufgabe nicht korrekt gelöst.

Um herauszubekommen, wie Schüler tatsächlich beim Lösen der Aufgaben vorgegangen sind, lohnt es sich, die Rechenwege der Schüler genauer unter die Lupe zu nehmen. Möglicherweise kommen Vorgehensweisen zutage, mit denen Lehrer nicht rechnen, weshalb sie bessere Leistungen der Schüler erwarten.

4.2 Interviews mit Schülern

Beim Lösen der Aufgabe $56:4$ wendeten 32 % der Hauptschüler das Distributivgesetz an, wobei einige folgerichtig die 56 in 40 und 16 zerlegten und schließlich das korrekte Ergebnis 14 ermitteln konnten. Andere wiederum zerlegten die Zahl 56 in 50 und 6. Das nachstehende Rechenbeispiel von Ozan zeigt auf, wie einige Schüler (6,7 %) mit dieser Vorgehensweise letztendlich scheiterten:

- I: Die nächste Aufgabe heißt $56:4$.
 S: $56:4$, da rechne ich zuerst $50:4$! Das geht nicht!
 I: Wieso geht das nicht?
 S: Da kommt Rest raus?
 I: ... und jetzt?
 S: die Aufgabe kann man nur mit Rest lösen!
 I: na, dann lös' sie doch mal!
 S: also 50,, nee ,.... ich glaube die kann man nicht lösen!

Vergleicht man die Aufgabe $56:4$ beispielsweise mit der Aufgabe $39:3$, dann leuchtet ein, dass bei der zweitgenannten Aufgabe der Rechenprozess über das Distributivgesetz unmittelbar erfolgen kann, in dem man $30:3$ rechnet und $9:3$. Betrachtet man dagegen die Aufgabe $56:4$, so ist diese Strategie nicht direkt möglich, sondern es muss zunächst ein geeigneter Summand des Dividenden gesucht werden. Diese Hürde konnten nicht alle Schüler erfolgreich bewältigen. Hinzu kommen Vorgehensweisen, wie beispielsweise Manuels Rechenweg zeigt:

- I: $56:4$
 S: $56:4$, da rechne ich zuerst $5:4$! Da kommt Rest raus!
 I: Und jetzt?

S: mmhhh, ... da kommt Rest raus!

I: ... und was machen wir jetzt?

S: die Aufgabe kann man nicht lösen, weil da Rest raus kommt!

I: Vielleicht gibt es noch eine andere Möglichkeit die Aufgabe zu lösen?

S: Weiß ich nicht. Wir rechnen die Aufgaben immer so!

Bei der Aufgabe $56 : 4$ rechneten insgesamt 11 % der untersuchten Schüler wie Manuel. Sie zerlegten den Dividenten nicht in die jeweiligen Stellenwerte, sondern rechneten mit Ziffern, ohne zu berücksichtigen, was eigentlich hinter den jeweiligen Ziffern steckt.

Weitere 13 % der Schüler kannten überhaupt keine Strategie, wie sie die Aufgabe möglicherweise lösen könnten, und brachten dies während des Interviews unmittelbar nach der Aufgabenstellung mit Floskeln wie „die Aufgabe kann ich nicht lösen“ oder „solche Aufgaben hatten wir noch nicht“ zum Ausdruck. Vermutlich sind diese Denk- und Vorgehensweisen den Lehrern nicht genügend im Bewusstsein, so dass sie letztendlich in ihrer Einschätzung die Schüler um einiges besser bewerteten, als diese tatsächlich abschnitten.

Die Aufgabe $96 : 2$ konnten 62,2 % der untersuchten Schüler nicht richtig lösen – ein erschreckend hoher Anteil, bedenkt man, dass in der Primarstufe insbesondere Aufgaben zur Halbierung bzw. Verdopplung explizit im Bildungsplan aufgeführt sind.

Schaut man sich die Einschätzungen der Lehrer an, so vermuteten diese, dass etwas mehr als ein Drittel der Hauptschüler nicht in der Lage ist, diese Aufgabe zu lösen (36 %). Betrachtet man die Vorgehensweisen der Schüler, die die Aufgabe nicht korrekt lösen konnten, dann ist man als geübter Rechner durchaus verwundert, wie Kinder nach vier Jahren Grundschule diese Art von Aufgaben lösen.

Von den insgesamt 62,2 % der Schüler, die diese Aufgaben fehlerhaft lösten, rechneten nicht weniger als 16,7 % der Schüler mit Ziffern, wie das Beispiel von Pasquale exemplarisch zeigt:

I: Die nächste Aufgabe lautet $96 : 2$.

S: $96 : 2$! Da rechne ich 9 geteilt durch 2, das ist 4 und Rest 1! Und dann noch die 6 ..., das ist 3! Aber da kommt Rest raus!

I: ...und jetzt?

S: ... das weiß ich nicht!

I: Kannst du die Aufgabe vielleicht anders ausrechnen?

S: Nö!

18,9 % dieser Schüler kamen analog zur Aufgabe $56 : 4$ mit der Zerlegung des Dividenten in 2 Summanden nicht weiter und scheiterten, wie auch Ozan, bei $90 : 2$. Zwar ist die Zahl 90 durch 2 teilbar, doch gaben die Schüler während des Interviews an, dass auch bei dieser Aufgabe ein Rest übrig bleiben würde. Möglicherweise schlussfolgern Schüler aufgrund der Tatsache, dass 9 nicht durch 2 teilbar

ist, dass auch die Zahl 90 nicht durch 2 teilbar ist. 19 % der Schüler, die die Aufgaben nicht korrekt lösen konnten, kannten keine Strategie.

Diese Ergebnisse überraschen insofern, dass scheinbar einfachste Kopfrechenaufgaben für diese Kinder sich aufgrund fehlender und insbesondere eigenartiger und ineffizienter Vorgehensweisen als unüberbrückbare Hindernisse entpuppen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Abbildung 4 fasst die Einschätzungen der Lehrer und die tatsächlich erbrachten Leistungen der untersuchten Fünftklässler in einer Übersicht zusammen. Zwar lassen sich Aussagen aufgrund der unterschiedlichen Population von Lehrern und Schülern nur unter Vorbehalt machen, dennoch können durchaus Tendenzen aufgezeigt werden.

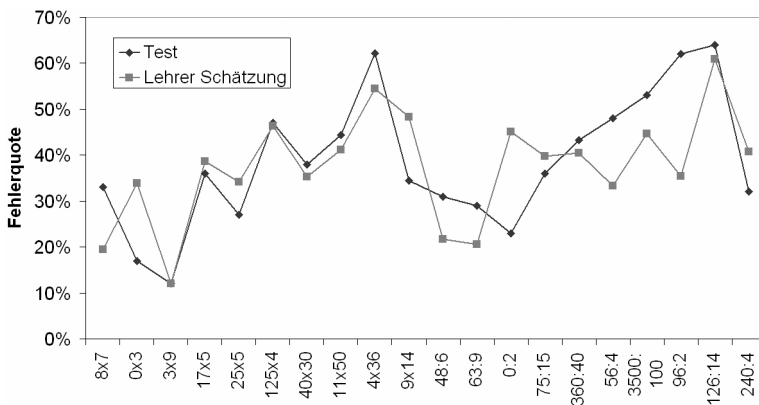


Abbildung 4: Einschätzung der Lehrer und Testergebnisse im Überblick

Insgesamt scheinen Lehrer, die zum Zeitpunkt der Erhebung in den untersuchten Klassenstufen unterrichten, durchaus in der Lage zu sein, die Leistungen von Schülern – misst man diese rein quantitativ am Erfolg – überwiegend gut einschätzen zu können. Es existieren allerdings bestimmte Aufgaben bzw. Aufgabengruppen, bei denen die Lösungshäufigkeiten der Schüler von den Einschätzungen der Lehrer deutlich abweichen.

Ergebnisse aus den erhobenen qualitativen Daten der Interviews zeigen in dem Zusammenhang, dass insbesondere bei gerade eben jenen Aufgaben spezielle Denkprozesse bei Schülern beobachtet werden konnten. Bei den im Beitrag beschriebenen Lösungswegen der untersuchten Schüler handelt es sich nicht, wie möglicher-

weise vermutet werden könnte, um Einzelfälle, sondern diese Vorgehensweisen traten gehäuft auf (Wagner 2006).

Offen hingegen bleibt die Frage, inwieweit sich Lehrer über die Denk- und Lösungswege ihrer Schüler bewusst sind. Können diese, abgesehen vom Einschätzen von Lösungshäufigkeiten ihrer Schüler bezüglich des Erfolgs, auch etwas über die Art und Weise sagen, wie Schüler solche Aufgaben rechnen? Hier könnte beispielsweise eine Anschlussstudie weitere Aufschlüsse bringen.

In diversen Fortbildungsveranstaltungen wurde die obige Grafik Lehrern vorgelegt mit der Bitte, sich zu überlegen, wie Schüler beispielsweise die Aufgaben $96:2$ und $54:4$ gelöst haben könnten. In interessanten und überaus spannenden Diskussionen wurde immer wieder deutlich, dass Lehrern die Rekonstruktion möglicher Denkprozesse von Schülern mehr Probleme bereitet als das reine Einschätzen des Erfolgs. Nicht selten waren Lehrer überrascht, wie Schüler zu ihren Lösungen, insbesondere auch zu fehlerhaften Ergebnissen, gekommen waren.

Auch das Sich-Bewusstmachen der Existenz und insbesondere der Vielfalt an unterschiedlichen Strategien (fortgesetzte Addition, approximatives Verfahren, Halbieren, Verdoppeln etc.), die das Lösen scheinbar einfachster Kopfrechenaufgaben erfordert, wurde andiskutiert.

Kopfrechenaufgabe ist eben nicht gleich Kopfrechenaufgabe! Vielmehr kommt es auf die Art der Aufgabenstellung an. So sind manche Aufgabentypen durchaus geeigneter als andere, um Schülern alternative Strategien aufzuzeigen. Die Aufgabe $135:15$ beispielsweise lässt sich nicht in der Art lösen, dass der erste Faktor in seine einzelnen Stellenwerte zerlegt wird und diese schließlich jeweils durch den Divisor geteilt werden, was zur Folge hat, dass die Schüler somit gezwungen sind, andere, für sie eher ungewohnte Strategien zu verwenden. Dass aber genau hierbei Hauptschüler Probleme haben, zeigen Untersuchungsergebnisse (Wagner 2006).

Wichtig erscheint demnach für die Lehreraus- bzw. Fortbildung zu sein, nicht ausschließlich Ansätze zu entwickeln, wie der diagnostische Blick von Lehrern geschult werden kann, sondern vielmehr auch bewusst darüber nachzudenken, über welches Potenzial Aufgaben verfügen (Wagner 2006a). Hierin unterscheidet sich deutlich das Wissen eines Lehrers von dem eines gut ausgebildeten Erwachsenen: Für einen Erwachsenen reicht es völlig aus, beim Lösen einer Kopfrechenaufgabe automatisch je nach Aufgabentyp seine Rechenstrategie jeweils der zu lösenden Aufgabe anzupassen. Ein Lehrer jedoch muss tiefere Einsichten in die Strukturen von Aufgaben haben, um diese bewusst und adäquat im Unterricht einsetzen zu können. Insbesondere bei Ad-hoc-Erklärungen, die häufig unmittelbar auf Schülerfehler folgen, muss der Lehrer spontan und aus dem Stegreif gezielte Aufgabenbeispiele parat haben. Und das klingt einfacher, als es ist. Somit sollte dem Nachdenken über die Struktur von selbst simplen Kopfrechenaufgaben in der Ausbildung mehr Zeit gewidmet werden. Denn genau hier, beim Lösen *bestimmter* Aufgaben-

gruppen bzw. -typen, so zeigen Ergebnisse dieser Studie, liegt die Diskrepanz zwischen den beobachteten Schülerleistungen und den Einschätzungen der Lehrer.

Literatur

- Anghileri, Julia (2001): Issues in teaching multiplication and division. In: Thompson, Ian (2001) (Hrsg): Issues in teaching numeracy in primary school, Open University Press, Philadelphia, S. 184–194
- Ashkraft, Marc H. (1995): Cognitive psychology and simple arithmetic. A review and summary of new directions. In: *Mathematical Cognition* 1 (1), S. 3–34
- Beishuizen, Meindert (1997): Mental arithmetic: Mental recall or mental strategies. In: *Mathematics teacher* 160, S.16–19
- Bos, Wilfried et al. (2003): Erste Ergebnisse aus IGLU. Waxmann, Münster
- Buys, Kees (2001): Mental arithmetic. In: van den Heuvel-Panhuizen, Marja (2001) (Hrsg): *Children learn mathematics*. Freudenthal Institute, Utrecht University, S. 121–146
- Dehaene, Stanislas (1999): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Birkhäuser, Basel
- Einsiedler, Wolfgang (1997): Unterrichtsqualität und Leistungsentwicklung: Literaturüberblick. In: Weinert, Franz E./Helmke Andreas (1997) (Hrsg): *Entwicklung im Grundschulalter*. PVU, Weinheim, S.225–240
- Gerster, Hans-Dieter/Schulz, Rita (1998): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Projektbericht, Pädagogische Hochschule Freiburg
- Grassmann, Marianne et al. (1996): Geometrische Fähigkeiten der Schulanfänger. In *Grundschulunterricht* 43 (5), S. 25–27
- Grassmann, Marianne (2000): Kinder wissen viel – zusammenfassende Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung zu mathematischen Vorkenntnissen von Grundschulkindern. Schroedel, Hannover
- Hasemann, Klaus (2001): „Zähl’ doch mal!“ – Die numerische Kompetenz von Schulanfängern. In: *Sache – Wort – Zahl* 29 (35), S. 53–58
- Klauer, Karl Josef (1973): Einführung in die Theorie lehrzielorientierter Tests. In: Klauer, Karl Josef et al. (1973) (Hrsg.): *Lehrzielorientierte Tests*. Beiträge zur Theorie, Konstruktion und Anwendung. Schwann, Düsseldorf, S. 13–43
- Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (2003): *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Spektrum, Heidelberg
- Kornmann, Reimer et al. (1998): *Probleme beim Rechnen mit der Null*. Erklärungsansätze und pädagogische Hilfen. Deutscher Studien Verlag, Weinheim
- List, Juliane (1998): *TIMSS: Mathematisch-naturwissenschaftliche Kenntnisse deutscher Schüler auf dem Prüfstand*. Deutscher Instituts-Verlag, Köln
- Lorenz, Jens Holger (2003): *Lernschwache Rechner fördern*. Cornelsen, Berlin
- Pangh, Claudia (2003): Diagnosekompetenz – den Blick für das Lernen schärfen. In: *Lernende in der Hauptschule – ein Blick auf die Hauptschule nach Pisa*. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler
- Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut (1997): *Wie Kinder rechnen*. Klett, Leipzig/Stuttgart
- Selter, Christoph (1995): Zur Fiktivität der Stunde Null im arithmetischen Anfangsunterricht. In: *Mathematische Unterrichtspraxis* 16 (2), S.11–19
- Selter, Christoph (2003): Rechnen – im Kopf und mit Köpfchen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*, S. 33–40

- Treffers, Adri (1997): Angewandtes Rechnen. Realistischer Mathematikunterricht in den Niederlanden. In: Grundschule 3/1997, S. 19–21
- Wagner, Anke (2006): Zum Kopfrechnen in der Hauptschule – eine empirische Untersuchung zu den Kopfrechenleistungen von Hauptschülern der Orientierungsstufe bei Aufgaben zur Multiplikation und Division mit evaluierter Unterrichtspraxis. Franzbecker, Hildesheim/Berlin
- Wagner, Anke (2006a): „Die 39er-Reihe haben wir noch nicht gelernt ...“ – fehlerhafte Rechenwege und Denkweisen von Hauptschülern der Orientierungsstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006 (CD-ROM)

Anschrift der Verfasserin

Dr. Anke Wagner
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Institut für Mathematik und Informatik
Reuteallee 46
71634 Ludwigsburg
wagner02@ph-ludwigsburg.de

Eingang Manuskript: 06.08.2006 (überarbeitetes Manuskript: 11.09.2007)