

Multimediale Unterstützung zum Lesen von Funktionsgraphen

Grundlagen, Anwendungen und empirische Untersuchung eines theoriegeleiteten Ansatzes zur Arbeit mit multiplen Repräsentationen

von

Markus Vogel, Ludwigsburg

Kurzfassung: In Unterricht und Forschung sind vielfältige Probleme bekannt, die Schüler¹ im Umgang mit Funktionsgraphen haben. Eine Idee der Abhilfe beruht darauf, mentale Operationen, die eine sachgerechte Interpretation erlauben, extern zu nachzustellen. Diese Idee folgt dem Grundgedanken der Supplantation. Der Ansatz multimedialer Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen wird theoriegeleitet entwickelt und empirisch untersucht. Die empirischen Befunde zeigen, dass das sachgerechte Lesen von Funktionsgraphen unterstützt werden kann. Interessante Möglichkeiten weiterer Forschungsarbeit ergeben sich daraus, das Prinzip auf andere mathematische Inhalte zu übertragen und die multimediale Realisierung hinsichtlich des Ausmaßes an Unterstützung weiter zu differenzieren.

Abstract: The difficulties students have when working with graphs are well known by teachers and researchers. An idea to find a remedy is to illustrate essential mental operations externally. This is called supplantation. An approach applying supplantation in the field of graph interpretation is developed on base of theories of multimedia learning. In an empirical study practical and theoretical impacts are investigated. The results indicate that such a supplantation of mental operations on graphs can become a useful tool to support adequate understanding of graphs. Adjusting supplantation to individual abilities in more detail and applying supplantation principle in different mathematical contexts are interesting topics of further research.

1 Einleitung

Funktionen sind eines der zentralen Themen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. In mathematikdidaktischer Hinsicht sind Funktionen einerseits *Gegenstand mathematischen Denkens* und andererseits *mathematisches Werkzeug* zur Umwelterschließung (Vollrath 1982). Da unterschiedliche Repräsentationen

¹ Die Bezeichnung „Schüler“ steht im Folgenden stets für „Schülerinnen und Schüler“.

bestimmte Funktionseigenschaften unterschiedlich deutlich hervortreten lassen, sind ihre zielgerechte Verwendung und der Wechsel zwischen diesen Repräsentationen wesentliche Ziele der unterrichtlichen Behandlung. Dies wurde in der didaktischen Literatur verschiedentlich immer wieder betont (z. B. Janvier 1987, Herget et al. 2000, Leuders & Prediger 2005). Neben der Darstellung in Tabelle, Term und sprachlicher Umschreibung nehmen die Funktionsgraphen eine zentrale Stellung ein. Aus der mathematischen wie auch aus der naturwissenschaftlichen Unterrichtspraxis sind vielfältige Probleme im Umgang mit Funktionsgraphen bekannt. Auch in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung sind solche Schwierigkeiten vielfach empirisch belegt (z. B. Janvier 1978, Kerslake 1982, Clement 1989, Hadjidemetriou & Williams 2002).

Ein wesentliches Problem, das sich in den genannten Forschungsarbeiten wiederfindet, sind Fehlinterpretationen, die sich ergeben, wenn der Funktionsgraph wie eine Fotografie betrachtet wird. In Anlehnung an Clement (1989) kann in diesem Zusammenhang von einem *Graph-als-Bild-Fehler* gesprochen werden.

Ein Beispiel für den *Graph-als-Bild-Fehler* ereignete sich im Mathematikunterricht des Autors: Schüler der sechsten Klassenstufe hatten die Aufgabe, folgendes Optimierungsproblem heuristisch zu lösen („Gehege“-Aufgabe): *Ein Junge möchte für seinen Hasen ein rechtwinklig eingezäuntes Auslaufgehege bauen. Hierzu stehen ihm 18 m Zaunmaterial zur Verfügung. Wie sollte das Gehege gebaut sein, dass dem Hasen eine möglichst große Auslaufläche zur Verfügung steht?* Nach der Darstellung verschiedener Lösungsansätze wurde in einer systematischen Lösungsbetrachtung ein Graph gezeigt, der die funktionale Abhängigkeit der eingezäunten Fläche von einer Seite des Geheges repräsentiert (vgl. Abbildung 1). Von einigen Schülern wurde der gezeigte Graph als Lösung des gestellten Problems zurückgewiesen, da die Bedingung der Rechtwinkligkeit nicht erfüllt sei. Hier wurden offensichtlich graphische Oberflächenmerkmale des Funktionsgraphen in gleicher Weise „gelesen“ wie die auf Karopapier gezeichneten Gehegegrundrisse.

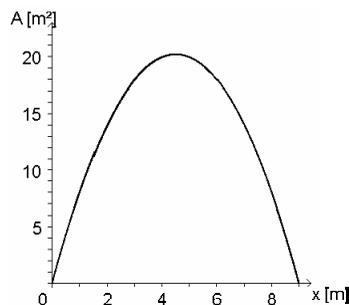


Abbildung 1: Graph zum Optimierungsproblem einer rechteckigen Fläche („Gehege“-Aufgabe)

Ein ebenfalls häufig auftretender Fehler ist darin zu sehen, dass Ordinatenwerte statt Steigungen betrachtet werden. Hadjidemetriou & Williams (2002, S. 4) sprechen in diesem Zusammenhang von „slope-height confusion“. Sie berichten exemplarisch von einer Forschungsarbeit, in deren Untersuchung die Schüler u. a. das in Abbildung 2 gezeigte Diagramm interpretieren mussten. Eine Frage war, ob zum Zeitpunkt $t = 2$ die Geschwindigkeit des Objektes A größer oder kleiner als die Geschwindigkeit von B ist oder ob beide Geschwindigkeiten einander gleichen. Die falsche Antwort einer kleineren Geschwindigkeit lässt sich damit erklären, dass anstelle der entsprechenden Steigungen die y -Werte zum Zeitpunkt $t = 2$ betrachtet werden.

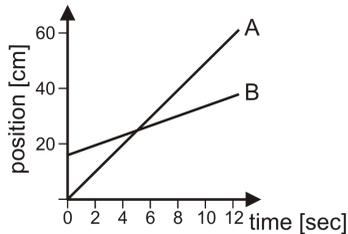


Abbildung 2: Beispiel zum Problem, Steigungen sachgerecht zu interpretieren

Neben dem Graph-als-Bild-Fehler und der Verwechslung von Ordinatenwerten und Steigungen werden in der Literatur weitere Schwierigkeiten benannt, die beim unterrichtlichen Umgang mit Funktionsgraphen auftreten. Auf deren Darstellung wird hier mit Hinweis auf eine übersichtliche Zusammenstellung von Hadjidemetriou & Williams (2002) und mit der Feststellung verzichtet, dass das Lesen von Funktionsgraphen nicht trivial ist und gelernt werden muss, um funktionales Denken (Vollrath 1989) zu ermöglichen.

2 Forschungsfragen

Die Problematik der vorausgehenden Beispiele lässt sich darin beschreiben, dass die betreffenden Schüler nicht verstehen, sachgerecht mit dem Repräsentationsformat von Funktionsgraphen umzugehen. Diagramme und Graphen allgemein haben ein abstrakteres Repräsentationsformat als reale Abbilder² (z. B. Fotografien) und können nicht wie diese gelesen werden. Über die Wahrnehmung des visuellen Rohmaterials hinaus sind zusätzlich mentale Transformationen notwendig, um einen Funktionsgraphen sachgerecht zu interpretieren. Dies lässt sich an dem in Ab-

² Zur Unterscheidung von verschiedenen Bildtypen sei auf Kircher et al. (2001, S. 242ff.) verwiesen.

bildung 2 dargestellten Beispiel eines Geschwindigkeitsvergleichs verdeutlichen: Wird zum Zeitpunkt $t = 2$ ausschließlich die grafische Ausprägung des jeweiligen y -Wertes betrachtet und der Zusammenhang mit den Koordinatenachsen nicht mitbedacht, dann liegt der Fehlschluss „höher als“ bedeutet „schneller als“ nicht fern.

Angesichts der angesprochenen Probleme lassen sich folgende Forschungsfragen formulieren:

- Wie können bei Schülern mit den genannten Schwierigkeiten die mentalen Transformationen aktiviert werden, die für das sachgerechte Lesen von Funktionsgraphen notwendig sind?

Dieser Artikel nimmt die Möglichkeiten multimedialer Unterstützung in den Blick. In dieser Hinsicht lautet die zentrale Frage:

- Wie können multimediaspezifische Eigenschaften das sachgerechte Lesen von Funktionsgraphen unterstützen?

3 Theoretischer Hintergrund

Nachfolgend werden theoretische Grundlagen entfaltet, auf deren Basis den dargelegten Forschungsfragen nachgegangen wird. Tragende Elemente des theoretischen Fundaments sind die Informationsverarbeitung, die Supplantationstheorie und das Lernen mit multiplen Repräsentationen.

3.1 Informationsverarbeitung

Aufgrund der Frage, wie das sachgerechte Lesen von Funktionsgraphen multimedial unterstützt werden kann, basiert ein wesentlicher Teil der theoretischen Überlegungen zur Informationsverarbeitung auf Theorien zum Lernen mit Multimedia. Derzeit weithin rezipierte Informationsverarbeitungsmodelle wurden von Mayer (1997, 2001) und Schnotz & Bannert (1999) vorgestellt.³ Drei wesentliche Elemente sind in beiden Modellen enthalten:

- *Aktive Verarbeitung*: Beiden Ansätzen zufolge sind aktive Verarbeitungsprozesse notwendig, um eine externe Repräsentation in eine interne Repräsentation im Arbeitsgedächtnis zu überführen.
- *Zweikanalige Verarbeitung*: Informationsmaterialien unterschiedlicher Kodierung (Text und Bild) werden im Arbeitsgedächtnis in unterschiedlichen Kanälen verarbeitet.

³ Aus Platzgründen wird an dieser Stelle unter Hinweis auf Vogel (2006, S. 43ff.) auf eine ausführliche Darstellung und Diskussion dieser Modelle sowie weiterer für die Informationsverarbeitung wichtiger Theorien verzichtet (z. B. Theorien zu mentalen Modellen wie Johnson-Laird 1983 oder *Cognitive-Load*-Theorie nach Chandler & Sweller 1991).

- *Multiple Verarbeitung*: Es ist grundsätzlich möglich, dass im Arbeitsgedächtnis zur selben Zeit mit mehr als einer Repräsentation gearbeitet wird. Mehrere interne Repräsentationen werden aufeinander bezogen und mit Vorwissen verarbeitet. Dabei ist aufgrund seiner Kapazitätsbeschränkung auf eine ökonomische Auslastung des Arbeitsgedächtnisses zu achten.

Sowohl Schnotz & Bannert (1999) als auch Mayer (1997) betonen, dass interne Repräsentationen nicht „Kopien“ externer Repräsentationen sind, sondern individuelle Konstrukte, die aus eigenaktiven Verarbeitungsprozessen hervorgehen (vgl. ebenfalls Salomon 1988). Informationsverarbeitungsprozesse sind durch die individuellen Dispositionen an Kognitionsfähigkeit und Vorwissen bestimmt.

Nach Kerres (2001) sind externe Repräsentationen nicht bloße Stimulanzen interner Prozesse. Sie erfüllen teilweise die Aufgabe, die ansonsten das kognitive System des Lernenden auszuführen hat. Salomon bezeichnet externe Repräsentationen als *Denkwerkzeuge* („tools of thought“; Salomon 1994, S. 115). Der werkzeugliche Gebrauch zeigt sich in dem beständigen Austausch zwischen internen und externen Repräsentationen (angezeigt durch die Pfeile in jeweils beide Richtungen): Externe Repräsentationen werden in interne Repräsentationen des Arbeitsgedächtnisses verarbeitet. Die interne Weiterverarbeitung (z. B. Verknüpfung mit Vorwissen) kann zu einer Neubetrachtung und, wenn die Möglichkeit der Interaktion gegeben ist, Veränderung der externen Repräsentation führen. Die veränderte externe Repräsentation wird wiederum intern verarbeitet, usw. bis der Prozess abgeschlossen wird. Diese Sichtweise entspricht der paradigmatischen Grundauffassung der *Distributed-Cognition*-Forschung (z. B. Zhang & Norman 1994). Als Beispiel kann das Arbeiten mit Freihandskizzen beim Problemlösen dienen: So werden Denkvorgänge ausgelagert (vgl. Dörfler 1991) und Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses frei gemacht.

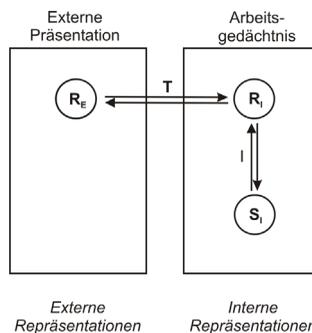


Abbildung 3: Schematische Darstellung von Informationsverarbeitung

Die Vorgänge lassen sich vereinfacht anhand der schematischen Darstellung in Abbildung 3 veranschaulichen: Eine externe mathematische Repräsentation R_E (z. B. der Funktionsgraph zur „Gehege“-Aufgabe) wird über Prozesse der bildhaften Informationsverarbeitung T in eine interne Repräsentation R_I (ein mentales Modell des Funktionsgraphen) überführt. Befindet sich eine weitere interne Repräsentation S_I (z. B. eine Vorstellung zur Gehegeform) im Arbeitsgedächtnis, können beide zueinander und mit vorhandenem Wissen (z. B. Wissen darüber, wie Diagramme zu lesen sind) aus dem Langzeitgedächtnis in Beziehung (Prozess I) treten.

3.2 Supplantation⁴

Fehlinterpretation von Funktionsgraphen lassen sich mit der schematischen Darstellung in Abbildung 3 so beschreiben, dass intern eine Repräsentation (z. B. das mentale Modell des Funktionsgraphen zur „Gehege“-Aufgabe) fälschlicherweise mit einer Repräsentation des zugrunde liegenden Sachverhalts (z. B. einer bildlichen Vorstellung eines Geheges) in Beziehung gesetzt wird. Auf der Basis dieser Überlegungen liegt es nahe, eine sachgerechte Verknüpfung extern zu realisieren und zu präsentieren. Dieser Gedanke folgt der Grundidee der Supplantation, die darin besteht, dass mentale Vorgänge, zu denen Lernende nicht ohne Weiteres in der Lage sind, extern nachgestellt werden.

Wichtige Forschungsarbeiten zur Supplantation wurden von Salomon, dem Begründer der Supplantationstheorie, vorgestellt (z. B. Salomon 1970, 1972, 1994). „A mental process is supplanted when an analogous process is overtly executed in front of the learner’s eyes.“ (Salomon 1970, S. 47) Die externe Darstellung eines Vorgangs kann für eine Person zum Lerngegenstand werden, die über entsprechende Denk- oder Vorstellungsprozesse noch nicht verfügt. „When a code supplants mental operations that learners cannot yet perform on their own, we might expect them to learn the code.“ (Salomon 1994, S. 134) Auf diese Weise soll den Lernenden zu weiter reichenden gedanklichen Leistungen verholfen werden. Die Supplantationsidee findet sich auch bei Vertretern der *Distributed-Cognition*-Forschung implizit wieder: „However, for novel and discovery tasks, whose abstract structures are not known, the format of a representation can determine what information can be perceived, what processes can be activated, and what structures can be discovered from the specific representation.“ (Zhang 1997, S. 213)

Anhand des in Abschnitt 3.1 dargestellten Schemas von Informationsverarbeitung lässt sich der Supplantationsgedanke veranschaulichen: Kommt im Arbeitsge-

⁴ Das Substantiv „supplantation“ ist aus dem Verb „to supplant – ersetzen“ abgeleitet. Der Wortursprung liegt in der Zusammensetzung der lateinischen Präposition „sub – unter“ und des lateinischen „plantare – Setzling, Ableger“.

dächtnis eine fehlerhafte Verknüpfung von internen Repräsentationen zustande, kann eine korrekte Verknüpfung extern als Lerngegenstand angeboten werden (vgl. Abbildung 4). Es werden zwei externe Repräsentationen R_E (z. B. der Funktionsgraph zur „Gehege“-Aufgabe) und S_E (z. B. das reale Abbild eines Geheges) sowie eine Verknüpfung I_E (angedeutet durch die blau gestrichelten Linien) dargestellt. Die Repräsentationen R_E und S_E sowie ihre Verknüpfung I_E werden über Prozesse der Informationsverarbeitung T_1 , T_2 und T_3 in die internen Repräsentationen R_I , S_I und I_I überführt. Die Pfeile in beide Richtungen zeigen an, dass die Supplantation von der Idee des werkzeuglichen Gebrauchs externer Repräsentationen getragen ist (vgl. Abschnitt 3.1).

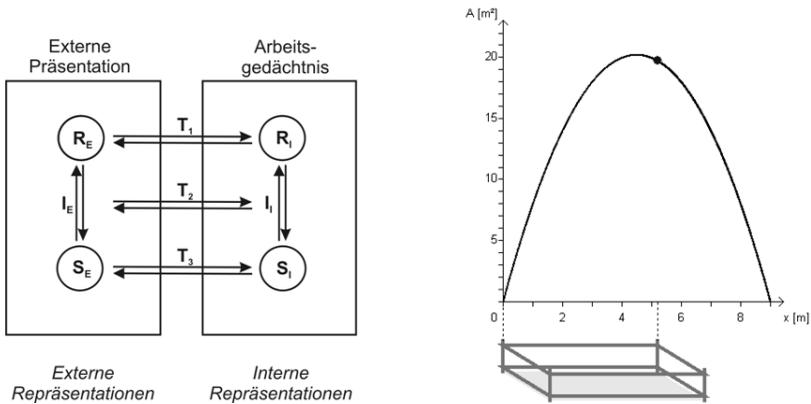


Abbildung 4: Eine Möglichkeit von Supplantation zur „Gehege“-Aufgabe im Zusammenhang mit der schematischen Darstellung von Informationsverarbeitung

In die Planung von Supplantationsunterstützung sind verschiedene Überlegungen miteinzubeziehen. Ausburn und Ausburn (1978, S. 344) formulieren prägnant drei wesentliche Fragen:

- *what* (Um welche Prozesse geht es?),
- *for whom* (Wer sind die Adressaten?),
- *how* (Wie soll die Supplantationshilfe aufbereitet und bereitgestellt werden?).

Das Angebot muss dem Lernenden nützlich und Erfolg versprechend erscheinen, damit dieser es annimmt (vgl. Salomon 1994). Darüber hinaus muss die externe Repräsentation so gestaltet sein, dass das Ergebnis ihrer Internalisierung in ausreichender Weise mit den internen Repräsentationen übereinstimmen kann, welche der Lernende selbst erzeugt hätte, wenn er darüber bereits verfügen würde. Salomon (1994, S. 134) bezeichnet dies als Passung zum „cognitive make-up“. Damit wird deutlich, dass die Wirkungsweise einer Supplantationsmaßnahme nicht fest-

gelegt ist. Sie hängt wesentlich vom Vorwissen zu den dargestellten Objekten und Operationen ab, sowie der Fähigkeit zur Internalisierung und zur Integration in bestehende kognitive Strukturen.

Salomon (1970) unterscheidet mehrere Formen unterschiedlich intensiver Supplantationsunterstützung. Anhand der Aufgabe, einen Gegenstand mental rotieren zu lassen, wird dies beispielhaft veranschaulicht:

- Gezeigt werden ein Ausgangszustand (Rotationsgegenstand) und ein Endzustand (Ergebnis der Rotation) sowie die Operation, welche beide Zustände ineinander überführt (Rotationsvorgang).
- Gezeigt werden ein Ausgangszustand (Rotationsgegenstand) und eine Operation auf diesem Ausgangszustand (Rotationsvorgang). Der Betrachter hat den Endzustand (Ergebnis der Rotation) selbst herzustellen.
- Gezeigt werden der Ausgangs- und Endzustand einer Operation (Rotationsgegenstand und Ergebnis der Rotation). Der Betrachter hat die betreffende Operation (Rotationsvorgang) selbst durchzuführen.
- Gezeigt wird lediglich der Ausgangszustand (Rotationsobjekt), wodurch die interne Simulation einer nachfolgenden Operation (Rotationsvorgang) und das Feststellen des Ergebnisses (Ergebnis der Rotation) angestoßen werden.

Salomon (1970) sieht die unterschiedlichen Formen in einem kontinuierlichen Spektrum von der vollen Modellierung (erster Aufzählungspunkt) bis zur bloßen Aktivierung (letzter Aufzählungspunkt) hinreichend. Sie erfordern von den Lernenden jeweils ein unterschiedliches Maß an selbstständiger kognitiver Verarbeitung. Bei der vollen Modellierung wird die kognitive Aktivität noch durch das Medium gelenkt. Diese Lenkung nimmt bei den nachfolgend beschriebenen Formen sukzessive ab. Je nach Person und Aufgabe erfüllen unterschiedliche Grade der Supplantation unterschiedliche Funktionen (vgl. Salomon 1994). So kann sich beispielsweise die volle Supplantation bei Lernenden mit geringen Voraussetzungen zu einer bestimmten Aufgabenstellung vorteilhaft auswirken. Bei fortgeschrittenen Lernern können hingegen Interferenzen mit bereits vorhandenen mentalen Vorstellungen auftreten (Salomon 1972, 1994; Schnotz 2002). In diesem Fall sind weniger intensive Supplantationsformen einzusetzen (Salomon 1994; Kerres 2001). Bei der didaktischen Implementierung ist darauf zu achten, dass die Supplantation nicht auf der Stufe der vollen externen Modellierung verbleibt, sondern über die Übergänge zu weniger intensiven Supplantationsformen schrittweise zurückgenommen wird („*fading out*“, vgl. Ainsworth 1999, S. 147). Fernziel ist, dass die Lernenden schlussendlich ohne Unterstützung zurechtkommen.

3.3 Multiple Repräsentationen

Multiple Repräsentationen sind insbesondere in komplexen Fragestellungen ein tragfähiges Mittel, um bedeutsame Facetten in verschiedenen Perspektiven darzustellen. Auf diese Weise kann verhindert werden, dass inhaltliche Konzepte nur auf der Basis einer bestimmten Darstellungsform verstanden werden (vgl. Spiro et al. 1988). Die Arbeit mit multiplen Repräsentationen kann in didaktischer Hinsicht verschiedene Funktionen erfüllen. Ainsworth (1999, S. 134ff.) unterscheidet drei wesentliche Punkte:

- Multiple Repräsentationen können sich gegenseitig ergänzen („complementary roles“).
- Multiple Repräsentationen können genutzt werden, um eine unbekanntere durch eine bekannte Repräsentation zu erklären („constrain interpretation“).
- Multiple Repräsentationen können tieferes Verstehen unterstützen („construct deeper understanding“).

In mathematikdidaktischer Hinsicht sind diese Punkte von besonderer Bedeutung: Erst durch den kompetenten und flexiblen Umgang mit unterschiedlichen Repräsentationen können mathematische Objekte, Modelle und Situationen auf ihre repräsentationsinvarianten Strukturen hin abstrahiert werden (vgl. Ainsworth 1999). Werden mehrere Repräsentationen (unterschiedlichen oder gleichen Repräsentationsformats) miteinander verknüpft, können durch die Verknüpfung Synergieeffekte beim Wissenserwerb erreicht werden: „The combination of representations that both complement and constrain each other enables learners to deal with the material from different perspectives and different strategies, and therefore can have synergetic effects on the construction of coherent knowledge structures.“ (Seufert 2003, S. 228)

Auf der computerbasierten Ebene spielen dynamisch verknüpfte Repräsentationen eine besondere Rolle: Die Veränderung in einer Repräsentation zieht dabei simultan eine entsprechende Veränderung in der verknüpften Repräsentation nach sich (z. B. Kozma 2003). Die angesprochenen Synergieeffekte ergeben sich jedoch nicht automatisch. Wird der Zusammenhang zwischen verschiedenen Repräsentationen nicht erkannt, können Probleme auftreten: Beispielsweise wurden bei Lernenden mit wenig Vorwissen festgestellt, dass diese Schwierigkeiten haben, multiple Repräsentationen zu koordinieren und zu verknüpfen (z. B. Yerushalmy 1991). Stattdessen konzentrieren sie sich auf eine Repräsentation oder „schalten“ zwischen verschiedenen Repräsentationen hin und her (vgl. Seufert 2003). Deshalb ist es wie bei der Planung von Supplantationshilfe nötig (vgl. vorausgehender Abschnitt 3.2), unterschiedliches Vorwissen der Lernenden in der Planung entsprechender Lernszenarien zu berücksichtigen. Gegebenenfalls sind Hilfen anzubieten,

die es den Lernenden erleichtern, verschiedene Repräsentationen miteinander in Beziehung zu setzen.

4 Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen

Funktionsgraphen repräsentieren funktionale Abhängigkeiten. Diese stellen eines der wichtigsten Themengebiete des Mathematikunterrichts dar. Dass sich der Funktionsbegriff den Schülern voll erschließen kann, setzt voraus, dass eine tragfähige Grundvorstellung zum Funktionsbegriff aufgebaut wird. Dies geschieht weniger durch die Beherrschung einer formalen Definition als vielmehr durch die Arbeit mit den unterschiedlichen Repräsentationen von Funktionen, da diese verschiedene Funktionseigenschaften unterschiedlich hervortreten lassen (vgl. Abschnitt 1). Ein in diesem Zusammenhang wichtiger mathematikdidaktischer Begriff ist der des *funktionalen Denkens* – ein Begriff mit langer Tradition, der stärker die methodologische Seite des Funktionsbegriffs betont als seine formale Begrifflichkeit (vgl. Vollrath 1989, S. 3). Nach Malle (2000) sind zwei Aspekte wesentlich für die Ausbildung funktionalen Denkens: die Zuordnung und die Kovariation. Der Zuordnungsaspekt zielt dem Wortsinn entsprechend auf die Frage, welches Element aus der Wertemenge einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird. Der Kovariationsaspekt beleuchtet das wechselseitige Änderungsverhalten einander zugeordneter Elemente bei Variation eines Elements („Miteinander-Variieren“, Malle 2000, S. 8).

Entsprechend sind für Interpretationen von Funktionsgraphen, welche der Gefahr unterliegen, situativ missverstanden zu werden, zwei Überlegungen von besonderer Bedeutung: Zum einen, für welche Situation bzw. welches Objekt steht ein bestimmter Punkt des Funktionsgraphen? Zum anderen, wie bedingen sich dieser Punkt des Funktionsgraphen und diese Situation bzw. dieses Objekt bei Veränderungen wechselseitig? So ergeben sich unter dem Gesichtspunkt der Supplantation zwei Aspekte:

- *Relationaler Aspekt*: Die externe Repräsentation, wie ein beliebiger Punkt des Funktionsgraphen mit dem situativen bzw. figurativen Hintergrund in Beziehung gesetzt werden kann.
- *Kovariationaler Aspekt*: Die externe Repräsentation, wie sich die entsprechende Situation bzw. das entsprechende Objekt bzw. die zugrunde liegende Situation ändert, wenn der zugeordnete Punkt auf dem Funktionsgraphen wandert oder umgekehrt, wie sich die Position des zugeordneten Punkts auf dem Funktionsgraphen ändert, wenn der situative bzw. figurative Hintergrund verändert wird.

In multimedialen Lernumgebungen eignen sich multiple Repräsentationen, welche dynamisch miteinander verknüpft sind, dazu, diese Aspekte extern nachzustellen.

Entsprechend der Abstufung unterschiedlich intensiver Supplantationsunterstützung (vgl. Abschnitt 2.2) lassen sich zwei Möglichkeiten unterscheiden:

- Die stärkste Form der Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen liegt darin, den relationalen und kovariationalen Aspekt mit multimedialer Unterstützung extern nachzustellen. Diese Form wird hier als *volle Supplantation* bezeichnet.
- Eine abgeschwächte Form der Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen ist darin zu sehen, lediglich den relationalen Aspekt extern nachzustellen. Diese Form wird hier als *reduzierte Supplantation* bezeichnet.

Die Abbildung 5 zeigt, wie eine Unterstützung durch *volle Supplantation* bei der eingangs dargestellten „Gehege“-Aufgabe aussehen könnte. Der relationale Aspekt wird dadurch realisiert, dass unterhalb der x-Achse ein rechtwinkliges Gehege perspektivisch abgebildet ist. Die Darstellung des Geheges entspricht dem ausgewählten Punkt des Funktionsgraphen. Wird der Punkt mittels der Computermaus entlang bewegt, verändert sich die Gehegeform simultan gemäß der funktionalen Beziehung. So wird der kovariationale Aspekt dargestellt. Es ist umgekehrt möglich, die Gehegeform zu verändern, in diesem Fall wandert der ausgezeichnete Punkt entsprechend auf dem Funktionsgraphen.

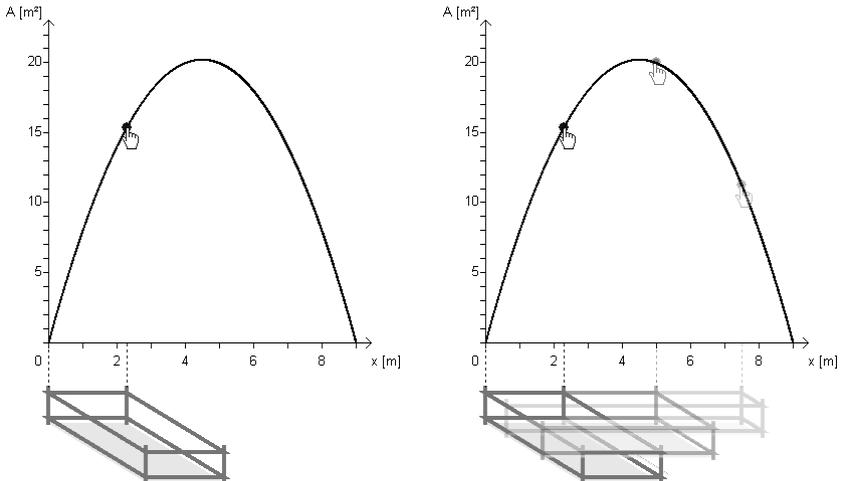


Abbildung 5: Relationaler (links) und kovariationaler Aspekt (rechts) einer Möglichen Unterstützung durch *volle Supplantation* zu unterstützen

Es sei auf einige Charakteristika dieser multimedialen Lernumgebung hingewiesen:

- Die multimediale Gestaltung folgt dem Kontiguitätsprinzip nach Mayer (2001): Zusammengehörendes wird als zusammengehörig erkennbar dargestellt. Die strenge zeitliche Kontiguität der Interaktionswirkung erlaubt, auf kausale Strukturen zu schließen (vgl. Ballstaedt 1997). Dem räumlichen Kontiguitätsprinzip wird dadurch Rechnung getragen, dass der Funktionsgraph und die konkrete Darstellung nicht in zwei verschiedenen Fenstern, sondern integriert in einem Fenster repräsentiert werden.
- Die Grenze zwischen der abstrakten Repräsentation des Funktionsgraphen und der konkreten Repräsentation des Geheges ist gleichzeitig das Bindeglied. Der x -Achsenabschnitt eines Punktes liegt auf dieser Grenze, gleichzeitig entspricht diese Strecke der Länge einer Seite des Geheges. Durch die offensichtliche Parallelisierung korrespondierender Bildelemente soll die Kohärenzbildung (d. h. die interne Verknüpfung zusammengehöriger Repräsentationen, vgl. Seufert 2003) unterstützt werden.
- Mit der bekannten Repräsentation einer Gehegedarstellung wird eine unbekannte (oder nicht ausreichend bekannte) Repräsentation des Funktionsgraphen zugänglich gemacht (vgl. Ainsworth 1999). Es wird eine mentale Modellbildung angeregt, die sich mit einem evtl. bestehenden fehlerbehafteten Modell nicht zur Deckung bringen lässt. Ein tragfähiges mentales Modell ist die Voraussetzung, um mit dem Funktionsgraphen mathematisch arbeiten zu können.
- Die multimediale Gestaltung ist sehr einfach gehalten. Durch die intuitive Bedienbarkeit werden keine nennenswerten kognitiven Ressourcen für die Programmbedienung beansprucht, so dass das Hauptaugenmerk auf der mathematisch-inhaltlichen Ebene verbleibt. Dies entspricht den Grundforderungen der *Cognitive Load*-Theorie (Chandler & Sweller 1991). Im Zentrum dieser Theorie steht die Frage nach einer ökonomischen Auslastung des Arbeitsgedächtnisses.

Ein weiteres Beispiel, das in der multimedialen Gestaltung vergleichbar zur Supplantation im Fall der „Gehege“-Aufgabe (vgl. Abbildung 5) ist, zeigt die Abbildung 6: Es ist der funktionale Zusammenhang zwischen dem Radius und der Oberfläche einer zylindrischen Dose mit konstantem Volumen abgebildet.

Aus den vorstehenden Beispielen ist kein feststehendes Prinzip der multimedialen Gestaltung abzuleiten. Im Gegenteil sollte eine Variation verhindern, dass das Gestaltungsprinzip übergeneralisiert und anstelle des repräsentierten In-Beziehung-Setzens gelernt wird. Auf andere Beispiele und die multimediatheoretische Diskussion ihrer Gestaltung wird an dieser Stelle jedoch unter Hinweis auf Vogel (2006) verzichtet.

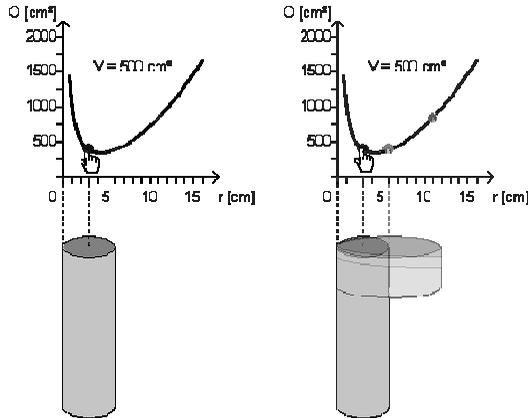


Abbildung 6: Supplantation des funktionalen Zusammenhangs zwischen Radius und Oberfläche einer zylindrischen Dose mit konstantem Volumen

Leitlinie der multimedialen Gestaltung ist jeweils, dass die Unterstützung einer sachgerechten mentalen Modellbildung begründet angenommen werden kann. Nur durch die jeweils erneute Reflexion kann der grundsätzlichen Gefahr begegnet werden, dass Fehlvorstellungen zwar lokal abgebaut werden, jedoch an anderer Stelle neue Probleme entstehen können. Da die Wirkungsweise einer Supplantationsmaßnahme nicht festgelegt ist (vgl. Abschnitt 3.2), muss die Wirksamkeit empirisch geprüft werden.

5 Studie

Im Zentrum der nachfolgend skizzierten Untersuchung stand die Frage, wie sich die *volle* und die *reduzierte Supplantation* (vgl. Abschnitt 4) auf Schüler mit unterschiedlichem Vorwissen auswirken und wie sich deren Verständnis von dem Verständnis der Schüler unterscheidet, welche in „herkömmlicher“ Weise mit Funktionsgraphen zu arbeiten hatten. Die Studie folgte einem experimentellen Kontrollgruppen-Design.

5.1 Hypothesen

Die erste Hypothese H_1 betraf die Lerneffekte der verschiedenen Treatmentgruppen (*volle Supplantation*, *reduzierte Supplantation* und Kontrollgruppe). Im Rahmen des gewählten Untersuchungsdesigns eines Pretest-Posttest-Vergleichs war zu erwarten, dass neben den Treatmentgruppen auch die Kontrollgruppe, die ohne Supplantationsunterstützung arbeitete, im Nachtest besser als im Vortest abschnitt. Jedoch lautete auf den theoretischen Überlegungen begründet die erste Hypothese H_1 :

- Schüler sowohl der *Volle-Supplantation*-Gruppe als auch der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe erreichen höhere Punktdifferenzen zwischen Vortest und Nachtest als ihre Mitschüler der Kontrollgruppe.

Dem Grundgedanken der Supplantation folgend war anzunehmen, dass die *volle Supplantation* insbesondere für die leistungsschwächeren Schüler hilfreich sein würde. Es war nicht auszuschließen, dass diese ohne externe Hilfe überhaupt nicht in der Lage gewesen wären, die erforderlichen mentalen Operationen auf Funktionsgraphen auszuführen.

Damit stellte sich die Frage nach den leistungsstärkeren Schülern, die dazu bereits in der Lage waren oder es zumindest verstanden, ein angemessenes mentales Modell aufzubauen, für das Arbeiten mit diesem Modell jedoch noch aktiviert werden sollten. Nach Salomon (1994) ist in diesem Fall ein geringeres Maß an Supplantation angezeigt (vgl. Abschnitt 3.2). Für die Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen ergab sich daraus der Schluss, dass die *reduzierte Supplantation* der geeignetere Weg ist, die leistungsstärkeren Schüler zu unterstützen. Durch den Verzicht auf die externe Repräsentation des kovariationalen Aspekts sollten diese Schüler dazu angeregt werden, die entsprechende Operation auf ihrem mentalen Modell selbst durchzuführen. Zusammengefasst lautete Hypothese H_2 :

- Leistungsschwächere Schüler profitieren von der *vollen Supplantation* mehr als von der *reduzierten Supplantation*. Leistungsstärkere Schüler werden durch die *reduzierte Supplantation* besser unterstützt.

5.2 Stichprobe und Untersuchungsdesign

An der Untersuchung nahmen insgesamt 133 Schüler der 9. Jahrgangsstufe aus acht verschiedenen Realschulklassen mit unterschiedlichen Mathematiklehrkräften teil. Die Schüler wurden zufällig einer der drei Treatmentgruppen *Volle-Supplantation*-Gruppe ($n = 48$), *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe ($n = 44$) und Kontrollgruppe ($n = 41$) zugeteilt. Während die beiden Treatmentgruppen entsprechend ihrer Bezeichnung unterstützt wurden, arbeiteten die Schüler der Kontrollgruppe mit Funktionsgraphen ohne weitere Unterstützung. Bevor die Schüler die Aufgaben erhielten, wurden sie über den Untersuchungsablauf unterrichtet. Das gewählte Pretest-Posttest-Design gewährleistete die Kontrolle des eingehenden Vorwissens und ermöglichte, die Einwirkungen der unterschiedlichen Treatments auf die Aufgabenlösungen in Punktdifferenzen zu quantifizieren. In jeder Gruppe hatten die Schüler jeweils fünf mehrteilige Aufgaben zu bearbeiten. Die erste und die letzte Aufgabe waren für alle ohne Supplantationsunterstützung und ohne Computer als Paper-Pencil-Test zu bearbeiten. Sie fungierten als Vortest (VT) bzw. Nachtest (NT). Die zweite, dritte und vierte Aufgabe waren Lernaufgaben, welche die Schüler mit der unterschiedlichen Unterstützung ihres jeweiligen Treatments bearbeiteten. Die Aufgaben waren in der vorgegebenen Reihenfolge zu bearbeiten. Dabei

gab es keine Zeitbeschränkungen. Über die gesamte Untersuchung hinweg betrachtet, benötigte jedoch niemand länger als eine Unterrichtsstunde (45 min). Die einzelnen Datenerhebungen fanden jeweils während der regulären Unterrichtszeit am Vormittag statt.

Um Langzeiteffekte feststellen zu können, wurde ein Follow-up-Test in das Untersuchungsdesign miteinbezogen. Dieser Test bestand in der nicht gekennzeichneten Wiedervorlage des Nachttests (Aufgabe 5) zehn Wochen nach der Hauptuntersuchung. Im Zeitraum der zehn Wochen lagen mit dem Schuljahreswechsel die großen Sommerferien. So konnte gewährleistet werden, dass kein weiterführender Unterricht zu Funktionsgraphen Einfluss auf den Nachttest nehmen sollte. An dem Nachttest beteiligten sich 28 Schüler der *Volle-Supplantation*-Gruppe, 29 Schüler der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe und 29 Schüler der Kontrollgruppe.

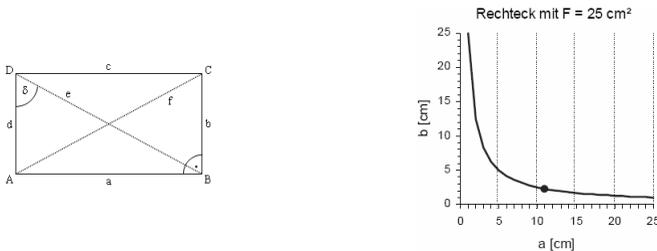
5.3 Erhebungsinstrumente

Die Schüler hatten fünf Aufgaben zu funktionalen Abhängigkeiten in verschiedenen geometrischen Figuren zu lösen. Im Vortest (Aufgabe 1) ging es um die funktionale Abhängigkeit zwischen den Seiten eines flächenkonstanten Rechtecks bei variablem Umfang. Inhaltlich analog dazu fragte der Nachttest (Aufgabe 5) bzgl. eines Rechtecks mit konstantem Umfang bei variablem Flächeninhalt. In den Lernaufgaben 2 und 4 wurde nach dem Verhältnis zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gefragt (im Fall der Aufgabe 2 mit einem konstanten Flächeninhalt bei variablem Umfang, im Fall von Aufgabe 4 mit einem konstanten Umfang bei variabler Fläche). Aufgabe 3 fragte nach der funktionalen Beziehung zwischen Grundseite und Höhe eines umfangskonstanten, gleichschenkligen Dreiecks, dessen Flächeninhalt je nach Verhältnis von Grundseite und Höhe variierte.

Alle Teilfragen der gestellten Aufgaben bezogen sich darauf, relationale und kovariationale Zusammenhangsaspekte von Funktionsgraph und geometrischer Figur abzufragen. Die Fragerichtung bezog sich einerseits von der geometrischen Figur ausgehend auf den Funktionsgraphen und umgekehrt vom Funktionsgraphen ausgehend auf die geometrische Figur andererseits. Eine Frage zu der in Abbildung 7 dargestellten Beispielaufgabe lautete: „Wie verändert sich der Winkel δ , wenn der Punkt P auf dem Funktionsgraphen nach rechts bewegt wird?“

Die Schüler bearbeiteten die Aufgaben anhand von Multiple-Choice-Fragebogen, deren Items fünf- bis sechsstufige Antwortoptionen bereitstellten. Die Vor- und die Nachttestaufgabe enthielten jeweils acht Frage-Items, die Lernaufgaben 2, 3 und 4 jeweils fünf. Die Supplantationsunterstützung in den Lernaufgaben 2, 3 und 4 wurde durch javaprogrammierte interaktive Lernumgebungen bereitgestellt. Die Schüler arbeiteten mit Laptops, so konnte in herkömmlichen Klassenzimmern gearbeitet werden. Die Versuchsgruppen wurden dabei so platziert, dass die Unterschiedlichkeit der Treatments für sie nicht erkennbar war.

In der folgenden Aufgabe geht es um ein Rechteck mit Flächeninhalt $F = 25\text{cm}^2$. Das Rechteck ist in seinen Größen veränderbar. Nur die rechten Winkel und der Flächeninhalt bleiben fest. Das heißt, wenn eine Seite verändert wird, ändern sich die übrigen Seiten ebenfalls. Außerdem verändern sich auch andere Rechtecksgößen.



Das Schaubild rechts zeigt dir, wie sich b in Abhängigkeit von a verändert.

Abbildung 7: Beispielaufgabe aus der Studie

5.4 Erhebungsdaten

Im Mittelpunkt des Interesses stand als abhängige Variable die Punktedifferenz zwischen Vortest und Nachtest (Variable *diff*). Entsprechend war für den Follow-up-Test die Punktedifferenz zwischen Vortest (Aufgabe 1) und der Wiedervorlage von Aufgabe 5 (Variable *diff follow-up*) die Hauptvariable. Die Zugehörigkeit zu den unterschiedlichen Treatmentgruppen *volle Supplantation*, *reduzierte Supplantation* und Kontrollgruppe (Variable *treat*) ergab sich aus einer randomisierten Zuweisung vor dem jeweiligen Untersuchungsbeginn. Da angenommen wurde, dass neben der Art der Supplantationsunterstützung die mathematische Leistungsfähigkeit Einfluss auf die Hauptvariable *diff* nehmen würde, wurde die zum Schuljahresende aktuelle Mathematiknote (auf eine Nachkommastelle genau) als Kovariable *note* erhoben. Des Weiteren wurde mit dem Capture&Replay-Tool *Clever PHL* (Spannagel 2003) die Interaktionsintensität über die Zeitdauer von Mausbewegungen mit der jeweiligen multimedialen Supplantationsumgebung gemessen.

5.5 Ergebnisse

5.5.1 Hypothese H_1

Ein erster, explorativer Datenzugang zu den Ergebnissen bzgl. Hypothese H_1 ergab sich aus einem Boxplotvergleich. Die Boxplots in Abbildung 8 zeigen für die Supplantationsgruppen („voll“ steht für *Volle-Supplantation*-Gruppe, „red“ steht für *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe) jeweils Punktedifferenzen, die über einen relativ weiten Punktraum streuen. Im Vergleich dazu ist die Variable *diff*, d. h. die Punktedifferenz zwischen Vor- und Nachtest, in der Kontrollgruppe („ohne“) weniger weit gestreut. Dies konnte als Hinweis auf die Reliabilität der Fragen interpre-

tiert werden: In der Kontrollgruppe veränderte sich der Lösungsfolg ohne Supplantationsunterstützung nur wenig durch die Arbeit mit den Lernaufgaben.

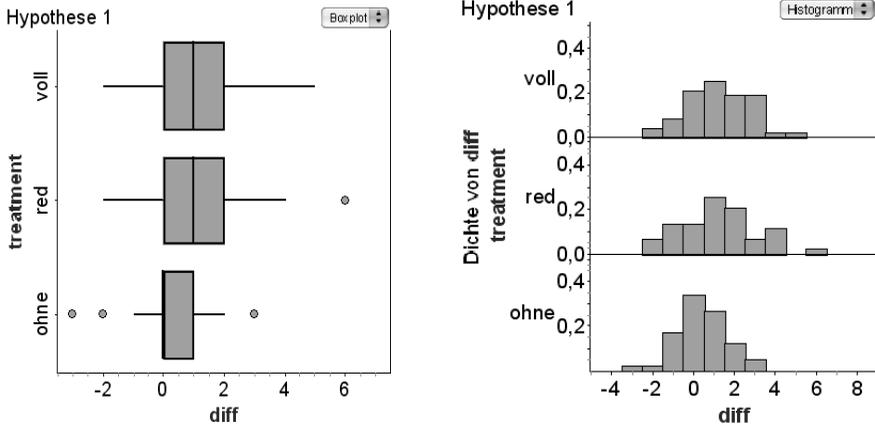


Abbildung 8: Boxplot- und Histogrammvergleich zum Punktezuwachs bzgl. Hypothese 1

Daher erzielten die Schüler der Kontrollgruppe in Vor- und Nachtest annähernd die gleiche Punktzahl. Die größere Variabilität in den beiden Supplantationsgruppen zeigte dagegen den Einfluss von Kovariablen an, insbesondere – wie angenommen – den Einfluss der Supplantationsmaßnahmen. Der Median erreichte in den Supplantationsgruppen jeweils einen Wert von einem Punkt, wohingegen die Kontrollgruppe mit null Punkten keinen Zugewinn im Medianmaß verzeichnen konnte.

Dass die Mediane jeweils mit den Modalwerten übereinstimmen, ergibt sich aus den Histogrammen. Hier zeigt sich die vergleichsweise höhere Datenhomogenität in der Kontrollgruppe darin, dass sich (bei gleichen Zellenbreiten) die Zellenhöhen im mittleren Bereich stärker von den Zellenhöhen an den Randbereichen unterscheiden als dies bei den Supplantationsgruppen der Fall ist. In den Histogrammen ist ebenfalls erkennbar, dass die Variable *diff* bei den Supplantationsgruppen in einem größeren Bereich streut. Die Steigerung der Supplantationsgruppen zeigt sich hier darin, dass die Punktverteilungen erkennbar in den positiven Bereich verschoben sind, wohingegen in der Kontrollgruppe eine Verteilung um den Modalwert von null Punkten festzustellen ist. Für weitergehende explorative Analysen über Dichtekurven (nicht-parametrische Kernschätzer) sei an dieser Stelle auf Vogel et al. (2006) verwiesen.

Analytische Berechnungen stützen die Ergebnisse der explorativen Datenanalyse bzgl. der Hypothese H_1 . Da in der Untersuchung Fragebögen eingesetzt wurden, welche die Variable *diff* in diskreten, nicht-normalverteilten Punktstufen quantifi-

zierten, wurde die Datenauswertung mit nicht-parametrischen statistischen Verfahren vorgenommen. Um die Vergleichbarkeit der Ausgangsbedingungen zu überprüfen, wurden die Vortestergebnisse der einzelnen Gruppen gegeneinander getestet. Da sich kein signifikanter Unterschied ergab (Kruskal-Wallis chi-square = 3,414; $df = 2$; $p = 0,181$), war die Ausgangslage gegeben, die Versuchsgruppen hinsichtlich des Punktzuwachses vergleichen zu können.

Um den Einfluss der Supplantationsunterstützung auf den Punktzuwachs zu testen, wurde die Variable *diff* über den Kruskal-Wallis-Rangsummentest mit *treat* als Gruppierungsvariable auf Unterschiede hinsichtlich der einzelnen Versuchsgruppen getestet. Das Ergebnis zeigte die Variable *treat* der Gruppenzugehörigkeit als signifikanten Einflussfaktor an (Kruskal-Wallis chi-square = 7,609; $df = 2$; $p = 0,022$). Mit dem Wilcoxon-Rangsummentest wurden die Unterschiede zwischen den Untersuchungsgruppen spezifiziert. Die Punktdifferenzen *diff* der *Volle-Supplantation*-Gruppe ($M = 1,21$; $SD = 1,54$) lagen signifikant ($p = 0,004$; $Z = 2,636$) höher als die der Kontrollgruppe ($M = 0,37$; $SD = 1,26$). Ebenso unterschied sich die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe signifikant von der Kontrollgruppe hinsichtlich der Variablen *diff* ($M = 1,18$; $SD = 1,85$; $Z = 2,144$; $p = 0,016$). Die Ergebnisse stützten die Vermutungen der Hypothese H_1 .

5.5.2 Hypothese H_2

Um die Hypothese H_2 zu untersuchen, wurden die Supplantationsgruppen und die Kontrollgruppe bzgl. der Variablen *note* über das 33. bzw. 67. Perzentil aufgeteilt. Es wurden die jeweils mittleren Subgruppen herausgenommen und das obere Drittel (Gruppen der leistungsstärkeren Schüler) mit dem unteren Drittel (Gruppen der leistungsschwächeren Schüler) verglichen. Auf diese Weise entstand ein 3×2 -faktorielles Design mit den Subgruppenstärken, die in Tabelle 1 dargestellt sind.

	volle Supplantation	reduzierte Supplantation	ohne Supplantation
Oberes Notendrittel	17	15	14
Unteres Notendrittel	16	15	14

Tabelle 1: Hypothese 2: Subgruppen \times Treatment

Im Boxplotvergleich der verschiedenen Treatment-Gruppen ergibt sich das in Abbildung 9 dargestellte Bild. Sehr auffällig war die weite Interquartilsspanne für die Schüler des oberen Notendrittels der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe. Die Hälfte dieser Gruppe erreichte eine Punktdifferenz (Variable *diff*) zwischen -1 und 3

Punkten und streute damit in einer Spannweite von vier Punkten. Diese Spannweite erreichte höchstens zwei Punkte in den übrigen Subgruppen, auch innerhalb der Gruppe der Leistungsschwächeren. Augenscheinlich übertrafen die Schüler der *Volle-Supplantation*-Gruppe (Median zwei Punkte) im oberen Notendrittel ihre Mitschüler der Kontrollgruppe (Median ein Punkt) erwartungsgemäß. Dies war für die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe (Median ein Punkt) nicht in gleicher Weise aus den Boxplots zu ersehen. Ebenfalls dem Boxplot zu entnehmen war, dass im Vergleich beider Supplantationsgruppen des oberen Notendrittels die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe nicht wie angenommen besser, sondern im Gegenteil mit dem niedrigeren Median und dem weiter und tiefer reichenden Boxplot vergleichsweise schlechter abschnitt.

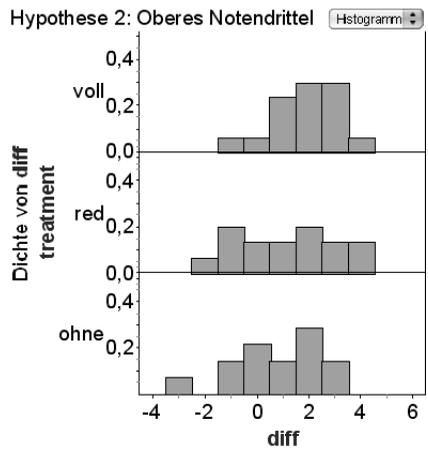
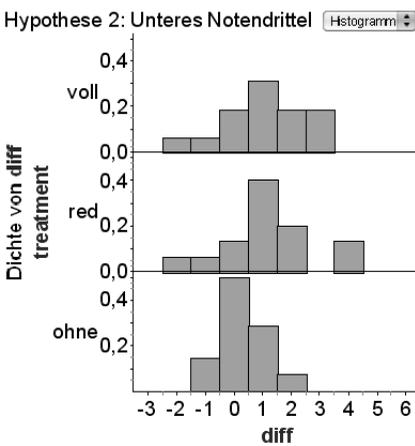
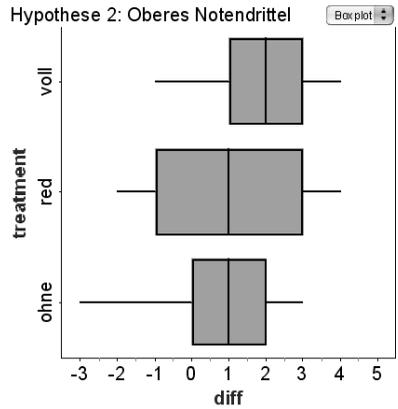
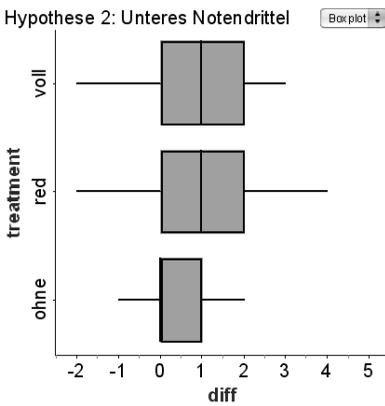


Abbildung 9: Boxplot- und Histogrammvergleiche zum Punktezuwachs bzgl. Hypothese 2

Die Boxen für die Schüler des unteren Notendrittels lagen in ihrer absoluten und relativen Positionierung ähnlich zu denen für die gesamte Gruppe (vgl. Abbildung 8). Im unteren Notendrittel erzielten die Schüler der Supplantationsgruppen jeweils größere Zugewinne (Median jeweils ein Punkt) als ihre Mitschüler der Kontrollgruppe (Median null Punkte). Dies entsprach den Erwartungen der Hypothese H_2 . Ein Unterschied zwischen *voller* und *reduzierter Supplantation* war hier dagegen nicht sichtbar.

Beim Blick auf die Histogramme des oberen Notendrittels tritt die Punkteverteilung der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe ebenfalls deutlich hervor: Der weiten Interquartilsspanne entspricht ein breites und flaches Plateau der Zellenhöhen (bei gleichen Zellenbreiten) ohne eindeutigen Modalwert. Eine vergleichsweise hohe Datenvariabilität ergibt sich ebenfalls aus dem Histogramm der Kontrollgruppe des oberen Notendrittels. Hier liegt der Modalwert mit zwei Punkten um einen Punkt höher als der Median. Die Punkteverteilung der *Volle-Supplantation*-Gruppe des oberen Notendrittels ist durch eine geringere Variabilität gekennzeichnet: Sie ist deutlich in den positiven Bereich verschoben und streut näherungsweise symmetrisch um den Median von zwei Punkten.

Ein insgesamt augenscheinlich homogeneres Datenbild ergeben die Histogramme des unteren Notendrittels: Hier streuen die Verteilungen jeweils relativ symmetrisch um den entsprechenden Modalwert. Die vergleichsweise geringste Datenvariabilität der Kontrollgruppe zeigt sich darin, dass die Zelle des Modalwerts bei gleicher Zellenbreite deutlich höher ist als die übrigen Zellen, die Abnahme zu den Enden der Punkteverteilung am stärksten ausgeprägt ist und die Punkteverteilung insgesamt im geringsten Bereich von vier Punkten (-1 bis $+2$) streut. Die Modalwerte stimmen hier jeweils mit den Medianen überein.

Um den Zusammenhang zwischen den Variablen des Lernfortschritts *diff*, des Treatments *treat* und der Mathematiknote *note* zu untersuchen, wurden die Daten zunächst mit dem linearen Regressionsmodell

$$diff = treat + note + treat \times note$$

analysiert, welches einen Interaktionseffekt zwischen den unabhängigen Variablen mitberücksichtigt (vgl. Chambers & Hastie 1992). Berechnungen mit der Software *S-Plus* ergaben, dass in diesem Fall keine der relevanten Variablen auf dem 5%-Signifikanzniveau statistisch bedeutsam wurde (Intercept = 2,76; $p = 0,046$; *treat* = $-0,62$; $p = 0,315$; *note* = $-0,28$; $p = 0,456$; *treat* \times *note* = 0,06; $p = 0,748$). Insbesondere der Interaktionsfaktor war fernab von statistischer Bedeutsamkeit und als nicht von Null verschieden zu betrachten. Zur weiteren Untersuchung der Hypothese H_2 wurden die Daten daher mit dem entsprechenden Haupteffektmodell $diff = treat + note$ analysiert, welches die Interaktionseffekte unberücksichtigt ließ. Die Berechnungen zu diesem Regressionsmodell (Intercept = 2,37; $p < 0,001$; *treat* =

-0,43; $p = 0,011$; *note* = -0,17; $p = 0,235$) wiesen den Einfluss der Variablen *treat* als statistisch bedeutsam aus.

Die angenommenen Subgruppenunterschiede der Hypothese H_2 wurden im Detail mit dem Wilcoxon-Rangsummentest betrachtet: In der Gruppe des unteren Notendrittels lagen die Punktzugewinne der Kontrollgruppe ($M = 0,29$; $SD = 0,83$) jeweils signifikant unter denen ihrer Mitschüler, egal ob diese zuvor mit *voller Supplantation* ($M = 1,06$; $SD = 1,44$; $Z = 1,830$; $p = 0,034$) oder mit *reduzierter Supplantation* ($M = 1,13$; $SD = 1,60$; $Z = 1,859$; $p = 0,032$) gearbeitet hatten. Der Unterschied zwischen diesen beiden Supplantationsgruppen war sehr gering und statistisch nicht signifikant bedeutsam ($Z = -0,041$; $p = 0,516$). In der Gruppe der leistungsstärkeren Schüler war ebenfalls ein statistisch signifikanter Vorteil für die *Volle-Supplantation*-Gruppe ($M = 1,88$; $SD = 1,27$) gegenüber der entsprechenden Kontrollgruppe ($M = 0,79$; $SD = 1,72$) zu verzeichnen ($Z = 1,788$; $p = 0,037$). Dagegen war für die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe ($M = 1,13$; $SD = 1,92$) gegenüber den anderen Gruppen kein statistisch bedeutsamer Unterschied auszumachen, weder gegenüber der *Volle-Supplantation*-Gruppe ($Z = -1,154$; $p = 0,876$) noch gegenüber der Kontrollgruppe ($Z = 0,376$; $p = 0,353$).

Um mögliche weitere Hinweise für das unerwartete Abschneiden der Leistungsstärkeren in der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe zu erhalten, wurde die Variable *Interaktionszeit mit der Lernumgebung* mit in Betracht gezogen. Verglich man hinsichtlich dieser Variablen die Gruppen des oberen Notendrittels miteinander, war festzustellen, dass in beiden Supplantationsgruppen (*volle Supplantation*: $M = 207$ [sec]; $SD = 130$ [sec]; $Z = 2,839$; $p = 0,005$, *reduzierte Supplantation*: $M = 168$; $SD = 126$; $Z = 2,815$; $p = 0,005$) in einem signifikant höheren Zeitmaß interagiert wurde als in der entsprechenden Kontrollsubgruppe ($M = 48$; $SD = 50$). Der Unterschied zwischen beiden Supplantationsgruppen war nicht signifikant ($Z = 1,013$; $p = 0,311$). Betrachtete man in diesen Subgruppen jeweils einen gleich gerichteten Zusammenhang zwischen der Interaktionszeit und dem Punktzugewinn *diff*, erhielt man für die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe eine bemerkenswert niedrige Korrelation ($r = 0,031$; $p = 0,457$). Dagegen erreicht der entsprechende Korrelationskoeffizient in der *Volle-Supplantation*-Gruppe des oberen Notendrittels einen signifikanten Wert ($r = 0,642$; $p = 0,013$). In der Kontrollgruppe war eine schwache negative Korrelation festzustellen ($r = -0,267$; $p = 0,166$). Neben dem Vergleich der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe des oberen Notendrittels mit den übrigen Gruppen dieser Leistungsstufe, wurde zusätzlich die Interaktionszeit der beiden *Reduzierte-Supplantation*-Untergruppen miteinander verglichen, da sich diese bzgl. der Variablen *diff* wider Erwarten nicht unterschieden. Der Unterschied zur Gruppe der Leistungsschwächeren ($M = 97$; $SD = 79$) war allerdings nicht statistisch bedeutsam ($Z = 1,506$; $p = 0,132$), jedoch ergab sich für die Leistungsschwächeren eine signifikante Korrelation zwischen der Variablen *diff* und der vergleichsweise geringeren Interaktionszeit ($r = 0,465$; $p = 0,048$).

5.6 Follow-up-Test

Der Follow-up-Test fand nach den großen Sommerferien, insgesamt zehn Wochen nach der Hauptuntersuchung, statt. Daran beteiligten sich 28 Schüler der *Volle-Supplantation*-Gruppe, 29 Schüler der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe und 29 Schüler der Kontrollgruppe. Der Follow-up-Test bestand aus der (nicht gekennzeichneten) Wiedervorlage des Nachtests der Hauptuntersuchung (Aufgabe 5). Im Mittelpunkt des Interesses stand mit der Variablen *diff follow-up* der jeweilige treatmentgruppeninterne Vergleich mit dem Ergebnis des zehn Wochen zurückliegenden Vortests (Aufgabe 1).

Die analytischen Berechnungen zum Vergleich der jeweiligen abhängigen Stichproben erfolgten mittels des Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtests. Für die *Volle-Supplantation*-Gruppe ergab sich ein signifikanter Unterschied ($Z = 2,963$; $p = 0,003$) zwischen dem Vortestergebnis ($M = 2,17$; $SD = 1,42$) und dem Follow-up-Testergebnis ($M = 3,33$; $SD = 1,24$). Auch für die Gruppe der *reduzierten Supplantation* war ein signifikanter Unterschied ($Z = 2,653$; $p = 0,008$) zwischen Vortest ($M = 1,73$; $SD = 1,15$) und Follow-up-Test ($M = 2,89$; $SD = 1,62$) zu verzeichnen. Die Kontrollgruppe erreichte ebenfalls eine positive Punktedifferenz zwischen beiden Testergebnissen (Vortest: $M = 2,27$; $SD = 1,34$; Follow-up-Test: $M = 2,76$; $SD = 1,64$), allerdings unterschied sich diese Differenz nicht signifikant von einem Nullzuwachs.

5.7 Diskussion

Hypothese 1 und Follow-up-Test: Die erhobenen Daten stützten die Hypothese H_1 . Die *volle Supplantation* wie die *reduzierte Supplantation* versetzte die betreffenden Schüler in die Lage, die erforderlichen mentalen Operationen auf Funktionsgraphen vergleichsweise erfolgreicher durchzuführen. Die beiden Supplantationsgruppen unterschieden sich nicht. Diese Befunde entsprachen den Erwartungen der Hypothese H_1 . Die Ergebnisse des Follow-up-Tests gaben Hinweise darauf, in welchem Maß die Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen nachgewirkt hatte. Nach zehn Wochen erzielten die Schüler, die mit *voller Supplantation* oder mit *reduzierter Supplantation* gearbeitet hatten, noch immer signifikant bessere Ergebnisse im Follow-up-Test als im Vortest. Dies war bei der Kontrollgruppe nicht der Fall.

Hypothese 2 – unteres Notendrittel: Es zeigte sich, dass die leistungsschwächeren Schüler sowohl von der *vollen Supplantation* als auch von der *reduzierten Supplantation* mentaler Operationen profitierten. Sie erzielten höhere Lernfortschritte (angezeigt in der Variablen *diff*) als ihre Mitschüler der Kontrollgruppe. Verglichen miteinander ergab sich kein statistisch bedeutsamer Unterschied zwischen den Supplantationsformen in dieser Leistungsgruppe.

Hypothese 2 – oberes Notendrittel: In den Subgruppen des oberen Notendrittels erzielte die *volle Supplantation*-Gruppe ebenfalls signifikant höhere Lernfortschritte als die Kontrollgruppe. Dies bedeutete, dass die theoriegeleitete Vermutung, leistungsstärkere Schüler könnten durch *volle Supplantation* in ihren Leistungen gehemmt werden, nach der Datenlage dieser Untersuchung nicht gestützt wurde. Die mathematisch Leistungsstärkeren der *reduzierten Supplantation* erzielten zwar gering höhere Lernfortschritte als diejenigen der Kontrollgruppe, hier wurde der Unterschied jedoch nicht statistisch bedeutsam. Darüber hinaus streuten die Ergebnisse in dieser Subgruppe erheblich. Dies lässt darauf schließen, dass nur einige der Schüler dieser Gruppe von der *reduzierten Supplantation* profitierten, was bei einigen anderen offensichtlich nicht der Fall war. Der Vergleich zwischen den Supplantationsgruppen der leistungsstärkeren Schüler mündete in ein Ergebnis, das im Gegensatz zur angenommenen Richtung der Hypothese H_2 stand: Die leistungsstärkeren Schüler wurden durch die *reduzierte Supplantation* nicht besser unterstützt als ihre Mitschüler, die mit der Unterstützung *voller Supplantation* arbeiteten. Im Gegenteil erzielten sie durchschnittlich weniger gute Ergebnisse im Lernfortschritt. Eine mögliche Erklärung ist darin zu sehen, dass die beabsichtigte mentale Eigenkonstruktion des fehlenden Kovariationsprozesses zu anspruchsvoll war. Es wäre von daher interessant, die Auswirkungen der unterschiedlichen Supplantationsformen auf einem mathematisch-inhaltlich weniger komplexen Anforderungsgebiet zu studieren. Ebenfalls interessant wäre eine Vergleichsstudie mit Schülern einer höheren Klassenstufe.

Interaktionszeit: Hinsichtlich der Interaktionszeit war festzustellen, dass die Leistungsstärkeren in jedem Fall von Supplantationsunterstützung in signifikant größerem Ausmaß mit der computergestützten Lernumgebung interagierten als ihre Mitschüler der Kontrollgruppe. Angesichts der geringeren zur Verfügung stehenden Interaktionsmöglichkeiten überraschte dies nicht. Während jedoch die *Volle-Supplantation*-Gruppe signifikant bessere Lernfortschritte als die Kontrollgruppe erzielte, war dies für die *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe nicht der Fall. Die Korrelationen, die in den Subgruppen des oberen Notendrittels festgestellt wurden, stützen in diesem Fall die Vermutung, dass die zeitintensive Interaktion mit einer *Reduzierte-Supplantation*-Lernumgebung nicht in dem Maße hilfreich war wie erwartet. In diese Richtung weist auch die Tatsache, dass die Leistungsstärkeren der *Reduzierte-Supplantation*-Gruppe ihre Mitschüler des unteren Notendrittels nicht im Lernerfolg überboten, jedoch in einem zwar nicht signifikant unterschiedlichen, doch vergleichsweise höheren Zeitmaß mit der computergestützten Lernumgebung interagierten. Ebenso ist die signifikante Korrelation zwischen der vergleichsweise geringeren Interaktionszeit und dem Punktzugewinn in der *Reduzierte-Supplantation*-Subgruppe der leistungsschwächeren Schüler in dieser Richtung lesbar. Obwohl diese Befunde keine kausalen Schlüsse über eine Beziehung zwischen Lernerfolg und Interaktionszeit zulassen, weisen sie in die für eine Folgestudie in-

teressante Richtung, neben der reinen Interaktionszeit die Aufmerksamkeitsrichtung der Interaktionsprozesse zu quantifizieren.

5.8 Zusammenfassung

Die dargelegte Untersuchung zur Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen setzte an theoriegeleiteten Forschungsfragen an. Zusammengefasst lässt sich aus den Untersuchungsergebnissen ableiten, dass diese Form der Supplantation zur sachgerechten Lesefähigkeit von Funktionsgraphen beitragen kann. Auf der Erfahrungsbasis dreier Lernaufgaben leisteten die Schüler den Transfer in vergleichbaren Aufgabenkontexten. Nach zehn Wochen erzielten diese Schüler noch nachweisbar bessere Ergebnisse bei einer entsprechenden Aufgabe. Insbesondere hinsichtlich der *reduzierten Supplantation* stellen sich interessante weiterführende Forschungsfragen: Welche alternative Formen der reduzierten Supplantation gibt es und wie wirken sie sich aus? Auf dem Hintergrund der Ergebnisse der dargestellten Untersuchung ist in mathematisch-inhaltlicher Hinsicht von Interesse, ob sich die Wirksamkeit der Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen ebenfalls in Anwendungskontexten von z. B. Füllgraphen und Bewegungsdiagrammen empirisch belegen lässt. Die Frage der Differenzierung über die Interaktionszeit hinaus wurde bereits im vorangehenden Abschnitt angesprochen. Insgesamt sind somit drei Entwicklungsfelder umrissen, die auf dem Hintergrund der empirischen Befunde interessante Möglichkeiten zur Weiterentwicklung der Supplantation mentaler Operationen auf Funktionsgraphen aufzeigen.

Literatur

- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33, S. 131–152
- Ausburn, L. J. & Ausburn, F. B. (1978). Cognitive styles: Some information and implications for instructional design. *Educational Communication & Technology*, 26(4), S. 337–354
- Ballstaedt, S.-P. (1997). *Wissensvermittlung: Die Gestaltung von Lernmaterial*. Weinheim: Psychologie Verlags Union
- Chambers, J. M. & Hastie, T. J. (Hrsg.) (1992). *Statistical models in S*. Pacific Grove, California: Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software
- Chandler, P. & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction*, 8(4), S. 293–332
- Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), S. 77–87
- Dörfler, W. (1991). Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: W. Dörfler, W. Peschek, E. Schneider & K. Wegenkittl (Hrsg.). *Computer – Mensch – Mathematik: Beiträge zum 6. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik*, Universität Klagenfurt, 23.–27.09.1990
- Hadjidemetriou, C. & Williams, J. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education*, 4, S. 69–87

- Herget, W., Malitte, E. & Richter, K. (2000). Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht. In: L. Flade & W. Herget (Hrsg.). *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*. Berlin: Volk und Wissen, S. 115–124
- Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs representing situations – studies and teaching experiments. Nottingham: University of Nottingham
- Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. In: C. Janvier (Hrsg.). *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 67–71
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge: University Press
- Kerres, M. (2001). *Multimediale und telemediale Lernumgebungen: Konzeption und Entwicklung*. München: Oldenbourg
- Kerslake, D. (1982). Graphs. In: K. Hart (Hrsg.). *Children's understanding of mathematics* 11–16. London: John Murray, S. 120–136
- Kircher, E., Girwidz, R. & Häußler, P. (2001). *Physikdidaktik*. Berlin: Springer.
- Kozma, R. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction*, 13, S. 205–226
- Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert's? – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 2, S. 1–7
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*(103), S. 8–11
- Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: Are we asking the right questions? *Educational Psychologist*, 32(1), S. 1–19
- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press
- Salomon, G. (1970). What does it do to Johnny? *Viewpoints: Bulletin of the School of Education*, 46(5), S. 33–62
- Salomon, G. (1972). Can we affect cognitive skills through visual media? An hypothesis and initial findings. *AV Communication Review*, 20(4), S. 401–422
- Salomon, G. (1988). AI in reverse: computer tools that turn cognitive. *Journal of Educational Computing Research*, 4(2), S. 123–139
- Salomon, G. (1994). *Interaction of media, cognition, and learning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Schnotz, W. (2002). Enabling, facilitating, and inhibiting effects in learning from animated pictures. In: R. Ploetzner (Hrsg.). *Online-proceedings of the international workshop on dynamic visualizations and learning*. Tübingen: Knowledge Media Research Center, S. 1–9
- Schnotz, W. & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie*, 46(3), S. 217–236
- Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, 13, S. 227–237
- Spannagel, C. (2003). Computergestützte Erfassung und Analyse von Benutzerverhalten im Umgang mit Lehr/Lernsystemen. In: V. Nordmeier (Hrsg.). *Beiträge zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. Tagungs-CD: *Didaktik der Physik – Augsburg 2003*. Berlin: Lehmanns Media.

- Spiro, R. J., Coulson, R., Feltovich, P. J. & Anderson, D. K. (1988). Cognitive flexibility theory: Advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. In: V. Patel (Hrsg.). Tenth annual conference of the cognitive science society. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 375–383
- Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedibasierter Supplantation. Hildesheim: Franzbecker
- Vogel, M., Girwidz, R. & Engel, J. (2006). Supplantation of Mental Operations on Graphs. Computers & Education, in press, doi:10.1016/j.compedu.2006.02.009
- Vollrath, H.-J. (1982). Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra. Der Mathematikunterricht, 28(3), S. 5–27
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik, 10, S. 3–37
- Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. Journal of Computer Assisted Learning, 7, S. 42–57
- Zhang, J. & Norman, D. A. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. Cognitive Science, 18, 87–122.
- Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. Cognitive Science, 21(2), S. 179–217

Anschrift des Verfassers

Dr. Markus Vogel
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Institut für Mathematik und Informatik
71634 Ludwigsburg
E-Mail: vogel02@ph-ludwigsburg.de

Eingang Manuskript: 29.04.2007 (überarbeitetes Manuskript: 11.07.2007)