

# Rechengraphen

## Eine Darstellungsform für Rechenwege von Schülergruppen

von

**Martin Hennecke, Hildesheim**

**Kurzfassung:** Die zusammenfassende Darstellung der verschiedenen Rechen- und Arbeitswege einer Gruppe von Schülerinnen und Schülern erfolgt bisher meist durch statistische Kennzahlen. Die eigentlichen Rechnungen gehen dabei verloren. Ein Rechengraph ermöglicht einen Kompromiss. Er enthält die wesentlichen Rechenwege einer Gruppe, bleibt aber überschaubar und ermöglicht Fehlerdiagnosen und weiterführende Interpretationen.

**Abstract:** In order to describe how students calculate a given mathematical task in an aggregated way statistical indicators are widely used. The real calculations get lost. In this paper calculation graphs are introduced. They show all essential calculations of a group of persons and remain easily understandable. Calculation graphs still contain enough information for diagnosis and further interpretations.

### 1 Einführung

„Die Mathematik kennt nur richtig und falsch“ – eines von vielen Vorurteilen über die Mathematik im Allgemeinen und über Mathematik als Schulfach im Besonderen. Die Realität sieht bekanntlich differenzierter aus. Schülerinnen und Schüler notieren nicht nur Ergebnisse, sondern auch Rechen- oder Arbeitswege. Für eine angemessene Bewertung der Leistung ist dieser Weg als Ganzes zu berücksichtigen: Wurde nach einem Rechenfehler am Anfang des Arbeitsweges folgerichtig weitergearbeitet? Ist ein Fehler ein kleiner unbedeutender Flüchtigkeitsfehler oder offenbart er eine ernstzunehmende Fehlvorstellung? Erst eine genauere Analyse des gesamten Arbeitsweges kann Antworten auf Fragen wie diese liefern.

Derartige Fragenstellungen sind der Individualdiagnostik zuzuordnen. Ingenkamp und Lissmann (Ingenkamp, Lissmann 2005) nennen aber auch allgemeinere Aufgaben der Diagnostik, z. B. das Planen, Kontrollieren und Optimieren von Lehr- und Lernprozessen oder Aufgaben in der Bildungsberatung. Nicht selten weisen derartige diagnostische Aufgaben den Weg zur Unterrichtsforschung. Diagnostiker werfen also ihren Blick auch auf die Leistung von Gruppen. In einer derartigen Gruppendiagnostik kann eine Gruppe von Lernenden aus einigen wenigen Individuen bestehen oder die Schülerinnen und Schüler einer oder mehrerer Klassen um-

fassen. Im Kontext der Unterrichtsforschung werden Gruppen aus mehreren tausend Versuchspersonen untersucht. So nahmen z. B. an PISA 2003 etwa 250.000 Schülerinnen und Schüler teil (vgl. Prenzel, Baumert et al. 2004, S. 16).

Mit zunehmender Gruppenstärke rückt dabei aus Gründen der Praktikabilität bisher die Erfüllungsquote, d. h. der Anteil der richtig gelösten Aufgaben, in den Mittelpunkt. Auch den z. B. in den PISA-Studien verwendeten Modellen der Item-Response-Theorie (vgl. dazu Adams, Wu 2002; Rost 2004) liegt letztendlich eine Reduktion auf richtig gelöste Aufgaben zugrunde. Erfüllungsquoten (oder die bei PISA gemessene „mathematische Kompetenz“) allein haben wenig Aussagekraft. Derartige Kennzahlen entfalten ihre Bedeutung vor allem im Vergleich verschiedener Teilpopulationen. Den dabei verlorenen Rechen- bzw. Arbeitswegen der Schülerinnen und Schüler hingegen wären auch direkt interessante Informationen entnehmbar, die die Lücke zwischen individual- und gruppendiagnostischen Fragestellungen schließen könnten.

Seit mindestens 80 Jahren kennt die Mathematikdidaktik mit der Fehleranalyse einen alternativen Ansatz, der sich auf die Untersuchung von fehlerhaften Rechen- und Arbeitswegen konzentriert (vgl. Radatz 1979, S. 16 ff.). Wittmann (2007a) nennt die „Klassifizierung von Fehlermustern“ als einen von zwei Idealtypen der Fehleranalyse. Für diese Forschungsrichtung ist der Umgang mit den Arbeitswegen von Schülerinnen und Schüler unumgänglich. Dabei lassen sich die Arbeitswege eines Individuums oder einer kleineren Gruppe noch direkt durch die Angabe der Notationen der Lernenden wiedergeben. Für größere Gruppen sind jedoch zusammenfassende Darstellungsformen vorzuziehen, die es erlauben, schnell die wesentlichen Aspekte des Verhaltens der Gruppe als Ganzes zu erkennen. Zu diesem Zweck wurden erstmals bereits in Hennecke (1999) Rechengraphen eingesetzt. Im Folgenden werden das Konzept der Rechengraphen und ihre Anwendungsmöglichkeiten in einem fachdidaktischen Kontext dargestellt.

## 1.1 Rechengraphen

Ein Rechengraph ist ein gerichteter Graph, dessen Knoten durch die Aufgabe und durch die Notationen der Schülerinnen und Schüler gegeben sind. Zwei Knoten des Graphen werden durch eine Kante verbunden, wenn für mindestens eine Schülerin oder einen Schüler ein Arbeitsschritt vom Ausgangsknoten zum Zielknoten erfasst wurde. Die Kantenbeschriftung gibt die Anzahl derartiger Arbeitsschritte wieder.

Abbildung 1 zeigt ein einfaches Beispiel für einen Rechengraphen. Die Knoten des Graphen sind als Rechtecke gezeichnet und enthalten die Notationen der Schülerinnen und Schüler als Beschriftung. Im Interesse einer guten Lesbarkeit sind Rechengraphen hier so dargestellt, dass sie von links nach rechts lesbar sind. Als zusätzliche Lesehilfe sind an den Knoten des Graphen zwei klein geschriebene Zahlen annotiert. Sie geben die Summe der ein- bzw. der ausgehenden Kantengewichte

an. Bei der Aufgabe  $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$  trat dementsprechend bei 112 von 135 Rechenwegen  $\frac{2}{8}$  als nächste Notation auf. 110 dieser Schülerinnen und Schüler beendeten ihren Rechenweg mit dieser Notation (Differenz der klein geschriebenen Zahlen).

Für den Startknoten ist anzumerken, dass auch hier eingehende Kanten existieren können. Von besonderer Bedeutung sind dabei Rechenwege, bei denen die Aufgabenstellung abgeschrieben wurde. In diesem Fall entsteht am Startknoten eine Schlinge (vgl. Abbildung 9). Sofern derartige Kanten existieren, kann anhand der klein geschriebenen Zahlen nicht die Anzahl der dargestellten Arbeitswege abgelesen bzw. berechnet werden.

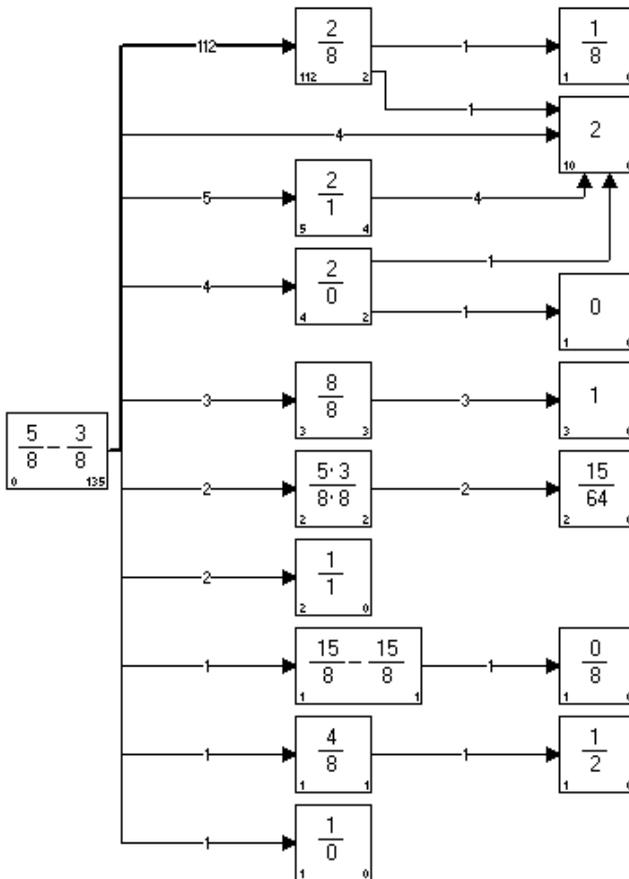


Abbildung 1: Rechengraph mit 135 fehlerhaften oder unvollständigen Arbeitswegen (vgl. Hennecke 1999 und Abschnitt 3.1). 362 weitere korrekte Rechenwege sind nicht dargestellt. 8 Versuchspersonen haben die Aufgabe nicht bearbeitet.

Mit dem Ziel einer formalen Definition des Rechengraphen sei von  $n$  Versuchspersonen ausgegangen, die eine gegebene Aufgabenstellung bearbeiten. Die Arbeitswege der Versuchspersonen müssen beobachtbar sein und in eine Sequenz einzelner Rechen- bzw. Arbeitsschritte zerlegt werden können. Das Verfahren zur Zerlegung eines Arbeitsweges in seine Schritte darf aufgabenabhängig sein.

Ein Arbeitsweg  $w^{(i)}$  einer mit  $i$  indexierten Versuchsperson werde zerlegt in der Form  $w_0^{(i)} \rightarrow w_1^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow w_{c(i)}^{(i)}$  dargestellt, wobei  $w_0^{(i)}$  die Aufgabenstellung ist und  $c(i)$  die Anzahl der Arbeitsschritte der jeweiligen Versuchsperson bezeichnet. Die  $w_j^{(i)}$  sind beliebige Repräsentanten für Ausdrucksweisen von Versuchspersonen. Sofern es sich bei diesen Ausdrucksweisen um mathematische Symbole handelt, kann es zweckmäßig sein, diese als Repräsentanten zu verwenden. In den hier gezeigten Beispielen werden dementsprechend meist Terme verwendet.

Ein Rechengraph ist ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$ , dessen Knotenmenge  $V$  sich aus der Zerlegung aller Arbeitswege als

$$V = \bigcup_{0 < i \leq n, 0 \leq j < c(i)} \{w_j^{(i)}\} \quad (1)$$

ergibt. Zwei dieser Knoten werden durch eine gerichtete Kante verbunden, wenn für mindestens eine Versuchsperson ein Rechen- bzw. Arbeitsschritt vom Ausgangsknoten zum Zielknoten existiert, d. h. die Menge der Kanten ist durch

$$E = \bigcup_{0 < i \leq n, 0 \leq j < c(i)} \{(w_j^{(i)}, w_{j+1}^{(i)})\} \quad (2)$$

gegeben. Mit der Funktion  $h: E \rightarrow \mathbb{N}$  wird jeder dieser Kanten ein Kantengewicht zugeordnet, das die Anzahl aller durch die Kante repräsentierten Rechen- bzw. Arbeitsschritte beschreibt. Diese Funktion ist durch

$$h((a, b)) = \left| \bigcup_{0 < i \leq n, 0 \leq j < c(i)} \{(i, j) \mid w_j^{(i)} = a \wedge w_{j+1}^{(i)} = b\} \right| \quad (3)$$

definiert.

## 1.2 Ein alternativer Ansatz

Ein Rechengraph ist eine zusammenfassende Darstellung für eine Menge von Arbeitswegen, bei dem identische klassifizierte Notationen zu einem Knoten zusammengefasst werden. Ein alternativer Ansatz wäre stattdessen, identisch klassifizierte Anfänge von Arbeitswegen zusammenzufassen. Graphentheoretisch betrachtet würde dieser Ansatz einen Baum erzeugen. Abbildung 2 zeigt einen derartigen Rechenbaum, dessen Datengrundlage der des Rechengraphen aus Abbildung 1 entspricht. Im Unterschied zu Abbildung 1 existieren beim Rechenbaum vier Knoten mit der Notation 2. Dies hat einen interessanten Vorteil: Angenommen, einer der

auf 2 endenden Arbeitswege hätte noch einen weiteren Arbeitsschritt enthalten, z. B.  $2 \rightarrow \frac{1}{2}$ . Dann wäre anhand eines Rechengraphen nicht entscheidbar, zu welchem Anfang dieser Schritt gehört – wohl aber beim Rechenbaum. Im Unterschied zum Rechenbaum liegt dem Rechengraphen eine verlustbehaftete Datenreduktion zugrunde. Diese ermöglicht jedoch eine deutlich kompaktere Darstellung.

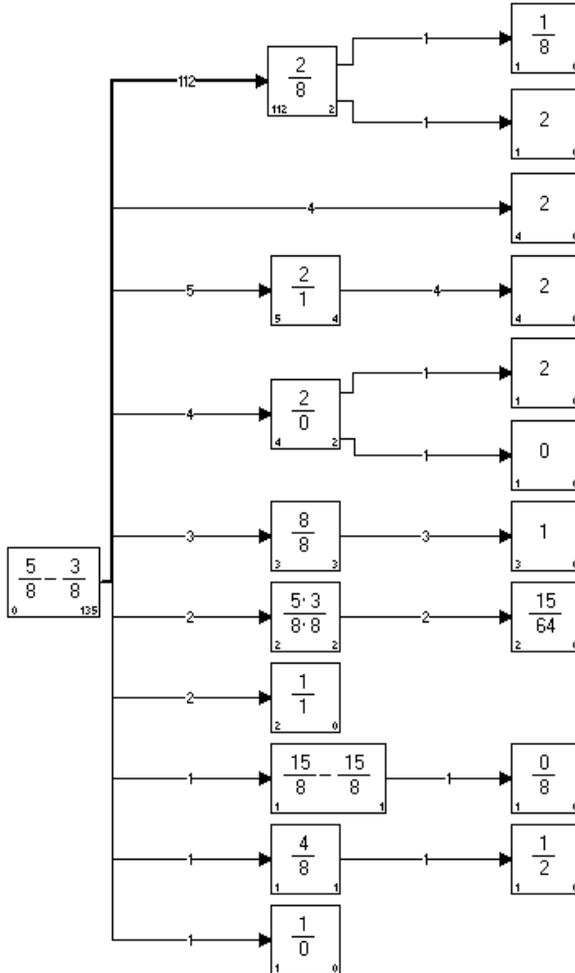


Abbildung 2: Rechenbaum, dessen Arbeitswege denen des in Abbildung 1 gezeigten Rechengraphen entsprechen

## 2 Realisierung

In unserer Datenbank befinden sich zurzeit Rechengraphen aus vier empirischen Studien mit jeweils rund 100, 500, 1.000 bzw. 8.200 Versuchspersonen. Für Abbildung 1 wurde bewusst ein kleiner, für eine Einführung geeigneter Rechengraph ausgewählt. Die Mehrzahl der bisher erzeugten Rechengraphen ist deutlich größer, d. h. sie verfügen über mehr Knoten und Kanten als der gezeigte.

Rechengraphen sind ein Produkt des Einsatzes von computergestützten Werkzeugen bei der Diagnose von Leistungen Lernender. Ohne entsprechend spezialisierte Werkzeuge lassen sie sich mit sinnvollem Aufwand kaum zeichnen. Die in diesem Artikel gezeigten Rechengraphen sind mit dem Computerprogramm *BugPiria* erstellt. *BugPiria* ist eine Software zur fehlerdiagnostischen Auswertung von empirischen Studien (vgl. Hennecke 2007a).

Viele der Funktionalitäten des Programms sind an einer von unserer Arbeitsgruppe durchgeführten Studie zur „Entwicklung von Rechenanwendungen in der Bruchrechnung (ERaB)“<sup>1</sup> ausgerichtet, an der rund 8.200 Schülerinnen und Schüler aus niedersächsischen Gymnasien, Integrierten Gesamtschulen, Realschulen, Hauptschulen und Förderschulen sowie Studierende des Lehramts teilgenommen haben (vgl. Hennecke 2007b; Winter 2007; i. V. und <http://www.erab.de>). Entsprechend sind viele der nachfolgend gezeigten Beispiele aus dem Datenbestand der ERaB-Studie.

Aus der ERaB-Studie stammt auch der bisher größte Rechengraph in unserer Datenbank. Er gehört zu der Aufgabe  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$  und verfügt über 1.031 Knoten und 1.549 Kanten. Entstanden ist er durch die Erfassung von 3.200 Arbeitswegen mit zusammen 8.854 Arbeitsschritten. Die vollständige Abbildung dieses Graphen nähme ca. 20 DIN-A4 Seiten in Anspruch. In Anbetracht einer derartigen Größenordnung wird es in den beiden folgenden Abschnitten darum gehen, wie sich Rechengraphen sinnvoll weiter vereinfachen lassen und welche Faktoren die Größe eines Rechengraphen beeinflussen.

### 2.1 Vereinfachen von Rechengraphen

Wenn Rechengraphen die wesentlichen Rechenwege einer Gruppe sichtbar machen sollen, haben sie jedoch nur einen Wert, solange der Graph überschaubar bleibt. Was „überschaubar“ ist, hängt vom Betrachter ab. Nach persönlicher Einschätzung dürfte die Beschränkung auf eine Seite für die Abbildung eines Rechengraphen für die meisten Zwecke praktikabel sein.

---

<sup>1</sup> Ich bedanke mich bei Kathrin Winter für die gemeinschaftliche Durchführung dieser Studie und bei den studentischen Hilfskräften Maren Behme, Jana Bettels, Kerstin Gurzny, Eva und Julia Heineke für ihre fleißige Erfassungsarbeit.

Rechengraphen lassen sich durch weitere Datenreduktion vereinfachen. Der einfachste Ansatz dazu ist, Kanten und ggf. auch Knoten, die nur einen geringen Anteil der Arbeitswege bzw. Arbeitsschritte repräsentieren, in der Darstellung des Rechengraphen auszublenden. *BugPiria* verwendet zu diesem Zweck verschiedene Verfahren, von denen die wichtigsten im Folgenden dargestellt werden.

### 2.1.1 Reduktion von Knoten zu Kanten

Gerade bei umfangreichen Studien finden sich in Rechengraphen viele Zwischenschritte, die nur von einem oder sehr wenigen Antwortenden explizit notiert wurden. Gleichzeitig nehmen diese Knoten jedoch viel Platz in der Darstellung des Rechengraphen ein. Sofern nicht gerade *diese* Zwischenschritte Gegenstand der Untersuchung sind, ist die Reduktion dieser Knoten zu Kanten ein leistungsfähiger Ansatz zur Vereinfachung der Graphen.

Im einfachsten Fall liegt ein Szenario wie in Abbildung 3 vor: Ausgehend von Knoten A wählen hier die Versuchspersonen entweder den direkten Weg zu Knoten B oder notierten mit dem Knoten X einen zusätzlichen Arbeitsschritt. Reduziert man nun den Rechengraphen durch Weglassen des Knoten X, dann kann diese Vereinfachung geeignet gekennzeichnet werden. Hierzu wird die Zahl der Versuchspersonen, die über den Zwischenschritt tatsächlich bei Knoten B angekommen sind, ergänzend an der Kante zwischen A und B notiert. Für den Sonderfall  $n = 0$  kann die vor der Vereinfachung nicht im Graphen enthaltene Kante zwischen A und B zusätzlich aufgenommen werden.



Abbildung 3: Reduktion von Zwischenschritten (1. Beispiel)

Inhaltlich ist diese Form der Vereinfachung gut vertretbar, da sie Versuchspersonen, die den Zwischenschritt explizit notiert haben, und solche, die diesen (oder einen vermutlich ähnlichen) Zwischenschritt im Kopf berechnet haben, zusammenfasst. Die Repräsentationen von Arbeitswegen, die im Knoten X enden, gehen im Rechengraphen im Allgemeinen nicht gänzlich verloren, da sie zumindest teilweise in vorgelagerten Kantenbeschriftungen enthalten sind.

Führen über den zu entfernenden Zwischenschritt X Arbeitswege zu verschiedenen Knoten, lässt sich die Vereinfachung analog übertragen (vgl. Abbildung 4). Im Interesse der Transparenz der Darstellung wird auch hier die Anzahl der Arbeitsschritte zusätzlich an den direkten Kanten notiert. Derartige Teilgraphen finden sich in Rechengraphen unter anderem dann, wenn die Knoten B und C alternative

Zwischenschritte darstellen, die in nachfolgenden Rechenschritten zusammengeführt werden, oder wenn durch fehlerhafte Rechenschritte eine Aufteilung der Rechenwege erfolgt. Im letzteren Fall kann der Knoten X unter Umständen bei der Fehlerdiagnostik der direkten Kanten hilfreich sein. Abhängig vom Ziel der Untersuchung kann es daher sinnvoll sein, auf derartige Vereinfachungen zu verzichten.

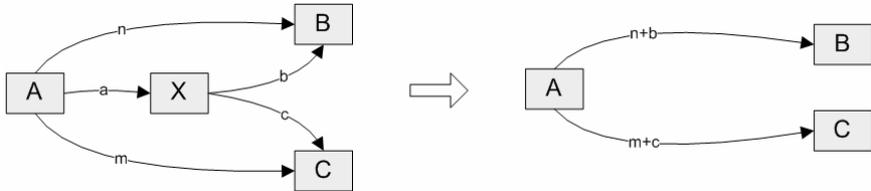


Abbildung 4: Reduktion von Zwischenschritten (2. Beispiel)

Abbildung 5 zeigt ein Szenario, in dem der Knoten X Zwischenschritt ausgehend von verschiedenen Knoten A und B ist. Sofern der Knoten X nicht auch Endnotation eines Arbeitsweges ist (d. h.  $a + b = c$  gilt), kann auch diese Vereinfachung analog durchgeführt und ggf. dargestellt werden.

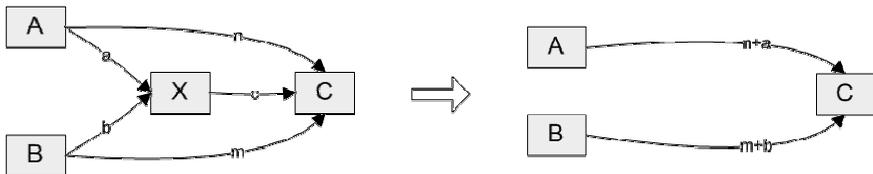


Abbildung 5: Reduktion von Zwischenschritten (3. Beispiel)

Es gehört zu den Entwurfsentscheidungen von *BugPiria*, dass die Vereinfachung von Rechengraphen auf der Grundlage der Rechengraphen selbst, d. h. auf der Basis der bereits aggregierten Daten ausführbar sein muss. Diese Entscheidung bedeutet in erster Linie ein besseres Laufzeitverhalten der Software. Die Konsequenz ist, dass für  $a + b > c$  in Abbildung 5 die Vereinfachung nicht transparent durchgeführt werden kann, da allein aufgrund der aggregierten Daten eine ergänzende Annotation der Kanten unmöglich ist. Gleiches gilt für das allgemeine Szenario, bei dem sowohl mehrere Kanten in den zu reduzierenden Knoten hinein- als auch hinausführen. In *BugPiria* wurde daher auf die Realisierung dieser Vereinfachungen verzichtet.

### 2.1.2 Reduktion von Kanten

Die Reduktion von Knoten zu Kanten hat den Vorteil, dass die Reduktion transparent dargestellt werden kann. Sie verkleinert primär die Menge der Knoten eines Graphen und ist damit ausschlaggebend für die Abbildungsgröße. Die Übersichtlichkeit eines Rechengraphen wird jedoch deutlich von der Anzahl der Kanten eines Graphen beeinflusst. Insbesondere verringern Kanten, die sich in der Darstellung der Graphen schneiden, die Übersichtlichkeit. Als zweite wichtige Vereinfachung ist daher in *BugPiria* die Reduktion von Kanten realisiert. Bei dieser Vereinfachung werden alle Kanten entfernt, deren Gewicht unter einer einstellbaren Schranke liegen. Im Beispiel aus Abbildung 6 ist  $a$  kleiner und  $b$  größer als diese Schranke. Mit der Reduktion der Kanten geht zudem die Reduktion von denjenigen Knoten einher, deren letzte eingehende Kante entfernt wird.

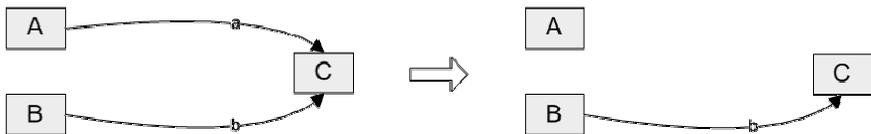


Abbildung 6: Reduktion von Kanten

### 2.1.3 Reduktion von Endknoten

Die Reduktion von Endknoten ist ein weiteres Verfahren zur Reduktion der Abbildungsgröße eines Rechengraphen. Bei diesem Verfahren werden alle Knoten entfernt, die am Ende von Arbeitswegen stehen und nur von wenigen Versuchspersonen erreicht werden. Das Verfahren wird solange angewandt, bis keine Knoten auf diese Weise mehr entfernt werden können. Sinnvoll ist dies dann, wenn Rechengraphen stark „spreizen“ und das Ende der Arbeitswege für das Ziel der Untersuchung eine geringe Bedeutung hat. Dies könnte z. B. bei der Frage, ob Versuchspersonen bei Aufgaben zur Bruchrechnung das Ergebnis vollständig kürzen, der Fall sein. Alle in dieser Arbeit gezeigten Rechengraphen verzichten auf die explizite Reduktion von Endknoten. Jedoch erreicht die in den folgenden Beispielen eingesetzte Reduktion der Kanten einen ähnlichen Effekt.



Abbildung 7: Iterative Reduktion von Endknoten

### 2.1.4 Grad der Vereinfachung

Wie stark und mit welchen Verfahren ein Rechengraph vereinfacht werden soll, ist eine Frage, die nur im Zusammenhang mit dem Untersuchungsziel zu beantworten ist. Zum Beispiel ist es nicht sinnvoll, massiv die Reduktion von Knoten zu Kanten anzuwenden, wenn die Fragestellung untersucht werden soll, welche Zwischenschritte von den Antwortenden verwendet werden.

Abbildung 8 zeigt einen leicht vereinfachten Rechengraphen aus der ERaB-Studie. Angewandt wurden sowohl die Reduktion von Knoten zu Kanten als auch die Reduktion von Kanten. Dabei wurde Knoten bzw. Kanten entfernt, die 5 oder weniger Arbeitsschritte repräsentieren. Durch diese Einstellungen entfallen im konkreten Fall 87 % der Knoten und 89 % der Kanten. Auch wenn so nur rund ein Zehntel des Rechengraphen übrig bleibt, enthält dieses Zehntel doch noch 6.013 von 6.438 erfassten Arbeitsschritten (93 %). Erläuterungen zu den Kürzeln an den Kanten folgen in Abschnitt 3.

In Abbildung 9 wird der gleiche Rechengraph gezeigt, jedoch stärker vereinfacht. Es wurden die gleichen Vereinfachungen durchgeführt, diesmal wurden jedoch nur alle die Knoten bzw. Kanten erhalten, die in mindestens 15 Arbeitsschritten vorkommen. Anders ausgedrückt wurden also Knoten und Kanten entfernt, die weniger als 0,5 % der Antwortenden repräsentieren. Das Ergebnis dieser Vereinfachungen enthält gerade einmal 4 % der Knoten und Kanten des vollständigen Graphen, enthält aber immer noch 89 % der erfassten Arbeitsschritte (5.736 von 6.438). Insgesamt wurden in der ERaB-Studie für diese Aufgabe 2.430 mathematisch korrekte (61 %) und 1.105 fehlerhafte Arbeitswege (28 %) erfasst. 460 Teilnehmende (12 %) haben die gestellte Aufgabe nicht bearbeitet.

## 2.2 Größe eines Rechengraphen

Die Größe eines Rechengraphen, d. h. die Anzahl seiner Knoten und Kanten, kann sowohl eher „technisch“ als auch eher „inhaltlich“ betrachtet werden. Technisch gesehen bedingt die Anzahl der Knoten und Kanten die Abbildungsgröße des gedruckten Rechengraphen und die Übersichtlichkeit der Darstellung. Im Allgemeinen dürften große Rechengraphen daher für Abbildungen stärker zu vereinfachen sein, als Rechengraphen die nur wenige Knoten und Kanten aufweisen.

Inhaltlich bedeutet ein kleiner Rechengraph, dass viele Antwortende die gleichen Arbeitsschritte verwenden. Dies weist in der Regel auf eine geringe Fehlerquote und/oder wenige, aber von vielen Versuchspersonen verwendete, Fehlermuster hin. Die Größe eines Rechengraphen bietet somit eine Orientierungsgröße für die Vielfalt der korrekten und fehlerhaften Antworten zu einer Aufgabenstellung. Daher lohnt sich ein näherer Blick auf die Faktoren, die die Größe eines Rechengraphen bedingen.

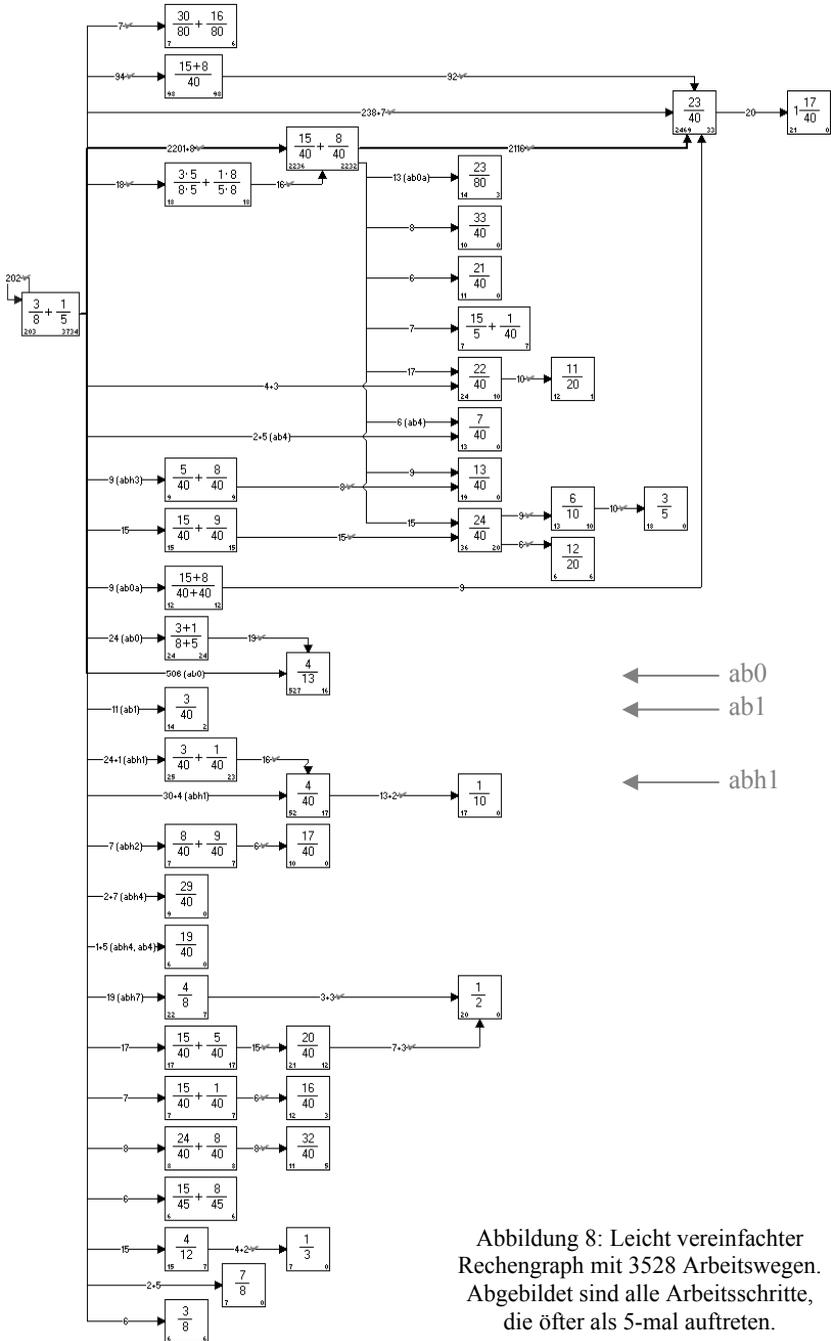


Abbildung 8: Leicht vereinfachter Rechengraph mit 3528 Arbeitswegen. Abgebildet sind alle Arbeitsschritte, die öfter als 5-mal auftreten.

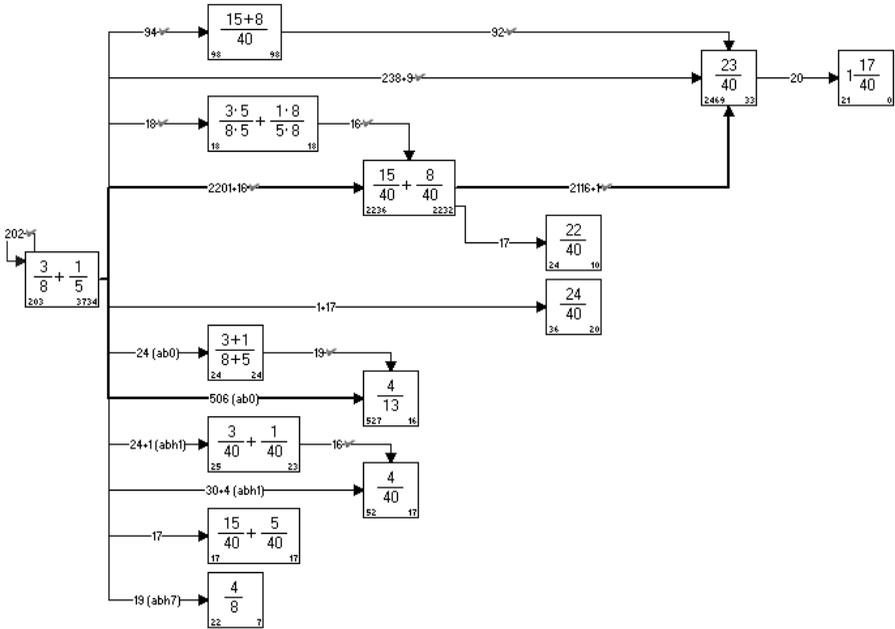


Abbildung 9: Rechengraph aus Abbildung 8, jedoch stärker vereinfacht. Abgebildet sind alle Arbeitsschritte, die öfter als 15-mal (0,5 %) auftreten.

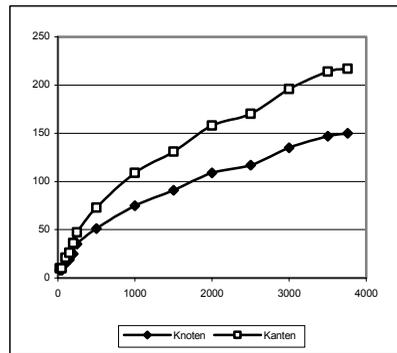
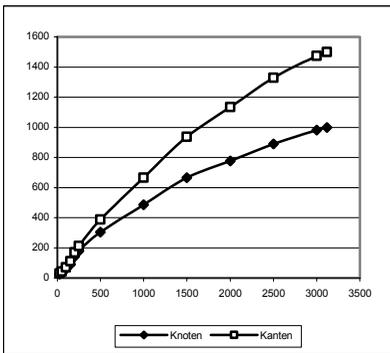


Abbildung 10: Größe des Rechengraphen in Abhängigkeit von der Anzahl der zugrundeliegenden Arbeitswege für die Aufgaben  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$  (links) und  $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$  (rechts).

Abbildung 10 zeigt das Ergebnis einer Simulation, bei der für die Aufgaben  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$  und  $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$  je eine Serie von Rechengraphen erzeugt wurde. Den einzelnen Rechengraphen der Serie liegen dabei eine zunehmende Menge von Arbeitswegen der ERaB-Studie zugrunde. In beiden Beispielen nimmt die Größe des Rechengraphen anfangs rasch zu. Mit steigender Anzahl der dem Rechengraphen zugrundeliegenden Arbeitswege wird diese Zunahme jedoch immer langsamer. Eine Erklärung für diesen Verlauf ist naheliegend: Während man anfangs viele noch unbekannte Rechnungen beobachtet, werden mit zunehmender Anzahl erfasster Arbeitswege immer häufiger bekannte Arbeitswege aufgenommen. Diese haben nur höhere Kantengewichte, aber nicht neue Knoten oder Kanten zur Folge.

Die Beispiele aus Abbildung 10 demonstrieren nicht nur, dass die Größe eines Rechengraphen *derselben* Aufgabe stark von der Anzahl der zugrundeliegenden Arbeitswege abhängt, sondern auch, dass die Arbeitswege *verschiedener* Aufgaben Rechengraphen in stark unterschiedlicher Größe erzeugen. Besonders deutlich stellt sich hierbei der Zusammenhang zwischen Aufgaben mit verschiedener Erfüllungsquote und der Größe des Graphen dar. Abbildung 11 zeigt diesen Zusammenhang am Beispiel der ERaB-Studie. Um vergleichbare Werte zu erzielen, wurde die Anzahl der den Rechengraphen zugrundeliegenden Arbeitswege konstant bei 2.800 gehalten. Die Erfüllungsquote und die Anzahl der Knoten sind stark korreliert ( $r \approx -0,89$ ).

Die Schwierigkeit einer Aufgabenstellung kann rein quantitativ aufgefasst werden. In diesem Fall beschreibt die von den Probanden erreichte Erfüllungsquote die Schwierigkeit einer Aufgabe. Mit Hilfe von Schwierigkeitsfaktoren wird versucht, die Ursachen zu beschreiben, warum eine Aufgabe schwierig ist. Bei der Addition von Brüchen können Schwierigkeitsfaktoren z. B. das Verhältnis der Nenner zueinander oder die Kürzbarkeit des Ergebnisses sein (vgl. Lörcher 1982; Padberg 2002, S. 99 f.). Aufgaben, die identische Schwierigkeitsfaktoren besitzen, lassen in diesem Erklärungsmodell ähnliche Erfüllungsquoten erwarten.

In der ERaB-Studie wurden zwei Testbögen mit paarweise vergleichbaren Aufgaben eingesetzt. Die Aufgabenpaare sind so konstruiert, dass sie bzgl. der Bruchrechnung identische Schwierigkeitsfaktoren aufweisen. In Abbildung 11 sind diese Aufgabenpaare durch eine Verbindungslinie gekennzeichnet. Die gestrichelte Linie kennzeichnet ein Aufgabenpaar, bei dem leicht anders verfahren wurde. Die Modellannahme, dass gleiche Schwierigkeitsfaktoren ähnliche Erfüllungsquoten erwarten lassen, erfüllt sich erfreulich gut: Die Erfüllungsquoten einzelner Aufgabenpaare variieren im Schnitt um nur 2 Prozentpunkte. Über alle Aufgaben betrachtet sind beide Testbögen gleich schwer, d. h. für beide Testbögen liegt die Erfüllungsquote jeweils bei 55,7 %.

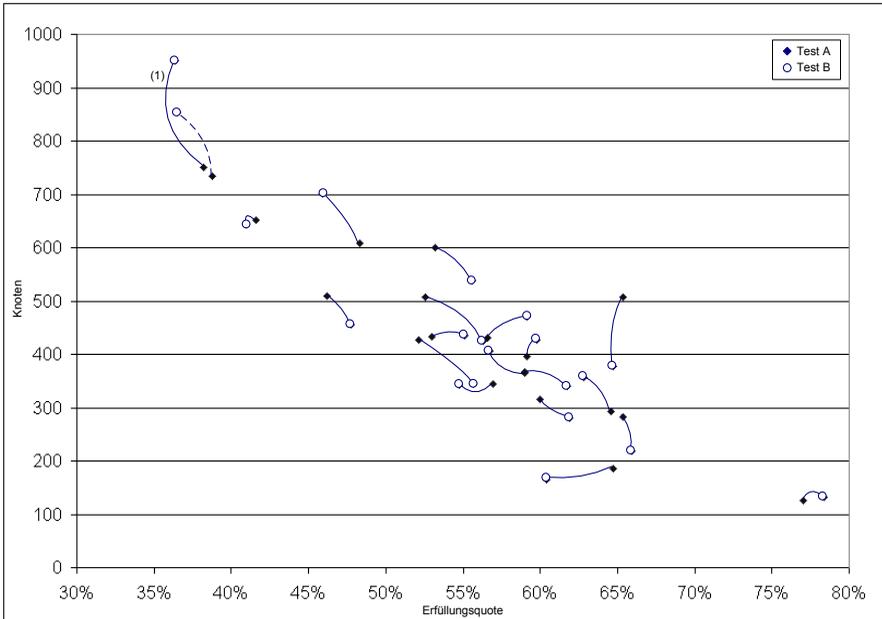


Abbildung 11: Anzahl der Knoten der Rechengraphen für die Aufgabenpaare der ERaB-Studie auf der Basis von 2.800 Arbeitswegen

Die Daten der ERaB-Studie legen zudem nahe, dass Aufgaben, die identische Schwierigkeitsfaktoren besitzen, Rechengraphen ähnlicher Größe erwarten lassen. Der Einfluss konkreter Zahlen ist hier jedoch größer als bei der Erfüllungsquote. Deutlich wird dies am Beispiel des Aufgabenpaars „Berechne  $2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$ “ und „Berechne  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$ “ (in Abbildung 11 mit (1) gekennzeichnet). Da sowohl  $2 \cdot 2 = 4$  als auch  $2 + 2 = 4$  ist, trennt die erste Aufgabe einige geläufige Fehler beim Umgang mit den gemischten Schreibweisen nicht, die von der zweiten Aufgabe getrennt werden. So fallen etwa die  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \rightarrow 7\frac{2}{6}$  und  $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \rightarrow 12\frac{2}{6}$  zugrundeliegenden Fehler bei der ersten Aufgabe in  $2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} \rightarrow 4\frac{1}{12}$  zusammen. Entsprechend wird der Rechengraph weniger Knoten und Kanten aufweisen.

Ein derartiges Zusammenfallen verschiedener geläufiger Fehler hat negative Auswirkungen auf die Fehleranalyse, da allein anhand der Notation nicht mehr auf das eigentliche Fehlermuster geschlossen werden kann. Rechengraphen können derartige Probleme aufzeigen und lassen sich daher als Werkzeug bei der Entwicklung von Aufgaben für diagnostische Tests einsetzen.

### 3 Anwendungen von Rechengraphen

#### 3.1 Entwicklung von Fehlerbibliotheken

Die Kanten eines Rechengraphen repräsentieren sowohl richtige als auch fehlerhafte Rechen- bzw. Arbeitsschritte. Ihnen liegen damit zumeist Rechenregeln oder fehlerhafte Anwendungen derselben zugrunde. Treten letztere gehäuft auf, spricht man meist von typischen oder charakteristischen Fehlern (vgl. z. B. Padberg 2002, S. 101). Rechengraphen sind geeignet, derartige typische Fehler aufzuspüren, da sie von Kanten mit relativ hohem Kantengewicht repräsentiert werden, die leicht erkennbar sind.

In Abbildung 8 findet sich als deutlichstes Beispiel für einen solchen typischen Fehler die mit „ab0“ markierte Kante (siehe Markierung). Sie repräsentiert den fehlerhaften Arbeitsschritt  $\frac{3}{8} + \frac{1}{5} \rightarrow \frac{4}{13}$ , dem die Fehlerstrategie „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“ zugrunde liegt. Diese Fehlerstrategie dominiert bei der Addition von Brüchen. Padberg nennt ferner die Addition der ursprünglichen Zähler bei korrekter Hauptnennerbildung bzw. die Verwechslung mit der Multiplikation als weitere Fehlerstrategien bei der Addition von Brüchen. In den Abbildungen sind die entsprechenden Kanten mit „ab1“ bzw. „abh1“ markiert, wobei die Kante „ab1“ in Abbildung 9 bereits von der Vereinfachung betroffen ist.

*BugPiria* analysiert automatisch die durch die Kanten repräsentierten Rechen- bzw. Arbeitsschritte. Kanten, die mathematisch korrekte Arbeitsschritte repräsentieren, werden mit einem kleinen Häkchen gekennzeichnet. Für Kanten, die mathematisch fehlerhafte Arbeitsschritte darstellen, werden typische Fehler durch an die Kanten annotierte Kürzel erläutert. Hierzu greift *BugPiria* auf die Funktionen von *BugFix*, einem Computerprogramm zur automatischen Diagnose von Rechenwegen, zu (vgl. Hennecke 1999). Tabelle 1 zeigt einen Auszug mit den für Abbildung 8 relevanten typischen Fehlern.

Die in *BugFix* realisierte computergestützte Fehlerdiagnostik arbeitet als eine spezielle Form eines Termersetzungssystems (vgl. auch Baader, Nipkow 1998). Dazu kommt eine feste Bibliothek von Ersetzungsregeln, mit denen erfahrungsgemäß Schülerinnen und Schüler fehlerhaft arbeiten, zum Einsatz. Die Ersetzungsregel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d}$$

beschreibt beispielsweise die fehlerhafte Addition von zwei Brüchen durch getrennte Addition im Zähler und im Nenner. Viele vergleichbare Systeme basieren auf Ersetzungssystemen. Für den Bau derartiger Systeme bietet die fachdidaktische Forschung für viele mathematische Bereiche bereits Vorarbeiten an. In derartigen Arbeiten sind meist die dominierenden typischen Fehler von Schülerinnen und Schülern dargestellt, da besonders diese für eine praktikable und durchführbare Diagnostik durch Lehrkräfte wichtig sind (vgl. Radatz 1979, S. 4).

ab0	Getrennte Addition im Zähler und im Nenner (Nenner verschieden)
ab0a	Getrennte Addition im Zähler und im Nenner bei gem. Nenner
ab1	Addition ersetzt durch Multiplikation
ab4	Addition ersetzt durch Subtraktion
abh1	Hauptnenner korrekt, jedoch Zähler nicht erweitert
abh2	Hauptnenner korrekt, jedoch Zähler additiv erweitert
abh3	Hauptnenner korrekt, jedoch Zähler durch Erweiterungszahlen ersetzt
abh4	Hauptnenner korrekt, jedoch Erweiterungszahlen vertauscht
abh7	Hauptnenner ersetzt durch größten Nenner

Tabelle 1: Von *BugFix* in Abbildung 8 erkannte typische Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung.

Im Fall der hier verwendeten Fehlerbibliothek zur Bruchrechnung wurde im Wesentlichen auf Arbeiten von Lörcher (1982), Gerster und Grevsmühl (1983) sowie Padberg (1995; 1996) aufgebaut. Mit dieser anfänglichen Fehlerbibliothek und einem Satz korrekter Regeln lässt sich bereits ein großer Teil der Fehler von Schülerinnen und Schülern automatisch diagnostizieren.

Der Hintergrund für die Arbeit an *BugFix* ist die Entwicklung von diagnostischen Lernprogrammen. Diese sollen einerseits Schülerinnen und Schülern ein differenziertes Fehlerfeedback geben und andererseits Lehrkräften wesentlich bei der Aufgabe der Individual- und Gruppendiagnostik unterstützen (vgl. Hennecke 2003; Hennecke, Winter 2005 und <http://www.lehr-lern-systeme.de>). Gesucht ist dazu eine möglichst differenzierte Fehlererkennung, die in einer derart starken Differenzierung nur selten Zielstellung der didaktischen Vorarbeiten sein dürfte. Es stellt sich daher die Frage, wo bzw. ob die anfängliche Fehlerbibliothek im Sinne dieser Zielstellung Lücken oder Verbesserungspotential aufweist. In der Bearbeitung dieser Fragenstellung liegt die ursprüngliche Motivation für die Entwicklung von Rechengraphen.

Anfang des Schuljahrs 1997/98 bearbeiteten rund 500 Schülerinnen und Schüler des siebten Schuljahrgangs aus der Region Hildesheim bis zu drei diagnostische Testbögen. Fehlerhafte und unvollständige Arbeitswege wurden erfasst und in Form von Rechengraphen dargestellt. Der in Abbildung 1 gezeigte (sehr einfache) Rechengraph ist ein Beispiel aus dieser Studie. Zahlreiche weitere Rechengraphen sind in leicht abweichender Darstellung in Hennecke (1999) veröffentlicht.

Ein mit diagnostischen Informationen versehener Rechengraph ist ein optimaler Ausgangspunkt für die Erweiterung einer Fehlerbibliothek. Überall, wo eine Kante

mit relativ hohem Gewicht unerklärt bleibt, liegt eine typische Verhaltensweise von Schülerinnen und Schülern vor, die von der bisherigen Fehlerbibliothek nicht erklärt wird. Dies ist dann ein Ansatzpunkt für die Erweiterung der Regeln. Ausgehend von dieser Form der Schwachstellensuche ist für die Bruchrechnung inzwischen ein Satz von ca. 350 Regeln entstanden, die korrekte bzw. fehlerhafte Verhaltensweisen von Schülerinnen und Schülern erklären. Der größte Teil dieser Regeln ist ebenfalls in Hennecke (1999) dokumentiert.

Auch jenseits der Erweiterung von Fehlerbibliotheken für den Einsatz in der computergestützten Diagnose von Rechenwegen können Rechengraphen in analoger Weise zur fachdidaktischen Erforschung typischer Fehler in bis dato wenig oder gar nicht erforschten mathematischen Teilgebieten dienen.

### 3.2 Rechengraphen als Werkzeug in empirischen Studien

Der konzeptionelle Grundgedanke von Rechengraphen ist es, die verschiedenen Rechen- und Arbeitswege einer Gruppe von Lernenden überschaubar zu aggregieren, ohne die Arbeitswege als Informationsquelle zu verlieren. Arbeitswege sind in allen Forschungskontexten interessant, in denen es um das Verständnis der Lösungsprozesse der Antwortenden geht.

Es folgen nun einige Beispiele für den Einsatz von Rechengraphen in derartigen Kontexten. Dabei geht es *nicht* um eine geschlossene Theorie, sondern darum, die Möglichkeiten des Ansatzes in diesen Kontexten aufzuzeigen.

Die Beispiele basieren auf Daten der ERaB-Studie. Entsprechend dem Design der Studie wurden zwei möglichst gleichwertige Testbögen eingesetzt. Abhängig von der Bearbeitungsquote stehen damit für jede Rechenaufgabe zwischen 2.883 und 3.860 Arbeitswege als Grundlage für die Erstellung von Rechengraphen zur Verfügung.

Die nachfolgend gezeigten Rechengraphen basieren jeweils auf den Rechenwegen *aller* Antwortenden und sind auf dieser Grundlage vereinfacht. Der Rechengraph für eine bestimmte Teilpopulation, z. B. für die Schülerinnen des sechsten Schuljahrgangs des Gymnasiums, ist durch die entsprechende Beschriftung der verbliebenen Kanten erzeugt. Knoten bzw. Kanten, die in der jeweiligen Teilpopulation keine Arbeitswege mehr repräsentieren, sind entfernt und der restliche Rechengraph optisch zu einer kompakteren Form zusammengeschoben.

Im Interesse der Vergleichbarkeit sind die Kantenbeschriftungen auf prozentuale Angaben umgestellt. Alle Angaben beziehen sich dabei jeweils auf die Anzahl der Antwortenden. Knoten, die einen mathematisch korrekten Zwischenschritt oder eine richtige Lösung repräsentieren, wurden zur leichteren Orientierung grau hinterlegt.

### 3.2.1 Rechenwege in verschiedenen Schuljahren

Zu den Leitfragen der ERaB-Studie gehört die Frage, wie sich die Rechenwege der Schülerinnen und Schüler verschiedener Schuljahrgänge unterscheiden (vgl. Winter i. V.). Deshalb sei mit einem entsprechenden Beispiel begonnen. Anzumerken ist, dass die Studie als Pseudo-Längsschnitt konzipiert wurde. Dargestellt werden also nicht Entwicklungen einzelner, über die Schuljahre verfolgter Schülerinnen und Schüler, sondern die Unterschiede, die zum Erfassungszeitpunkt zwischen Schülergruppen verschiedener Schuljahrgänge existierten.

Padberg (2002, S. 140) gibt für die Multiplikation von Bruch und natürlicher Zahl eine Erfüllungsquote von ca. 58 % an. Für die Multiplikation von Brüchen ergeben sich höhere Erfüllungsquoten von ca. 64 % (gleichnamig) bzw. 74 % (ungleichnamig). Padberg weist darauf hin, dass dieser Ausfall eigentlich widersprüchlich ist, da die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl nur die „grundlegende Vorstellung des Vervielfachen von Bruchteilen benötigt“ und vermutet die Erklärung darin, dass „nicht die semantische Ebene, sondern rein die syntaktische Ebene [...] entscheidend ist.“

Die von Padberg genannten Erfüllungsquoten werden in der ERaB-Studie nur von Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums erreicht. Abbildung 12<sup>2</sup> zeigt die Erfüllungsquoten für die Aufgabe  $\frac{5}{12} \cdot 4$ . Die durchschnittlichen Werte liegen hier zwischen 63 % am Ende des sechsten Schuljahrs und 91 % im Leistungskurs am Ende des zwölften Schuljahrs. Die mit steigendem Schuljahrgang steigenden Erfüllungsquoten sind zwar nicht selbstverständlich – aber auch nicht überraschend.

Die Rechengraphen erlauben ein differenzierteres Bild: Am Ende des sechsten Schuljahrs (Abbildung 14) verwenden 21 % der Schülerinnen und Schüler  $\frac{5}{12} \cdot 4 \rightarrow \frac{20}{12}$  als ersten Arbeitsschritt. Am Ende des zehnten Schuljahrs liegt dieser Wert bei 57 % (Abbildung 16) – ein Unterschied von 36 Prozentpunkten. Dieser Unterschied liegt mit großem Abstand über vergleichbaren Werten anderer Aufgabentypen der ERaB-Studie und ist am Ende des zwölften Schuljahrs noch ausgeprägter (vgl. Abbildung 17 und Abbildung 13).

---

<sup>2</sup> Die verwendete Liniendarstellung dient lediglich der besseren Lesbarkeit (besonders in Abbildung 15). Sie soll keine entsprechende Entwicklung in dem Zeitraum zwischen den Erfassungspunkten suggerieren. Im zwölften Schuljahr ist eine Differenzierung zwischen Grundkursen (ausgefüllt) und Leistungskursen (nicht ausgefüllt) vorgenommen.

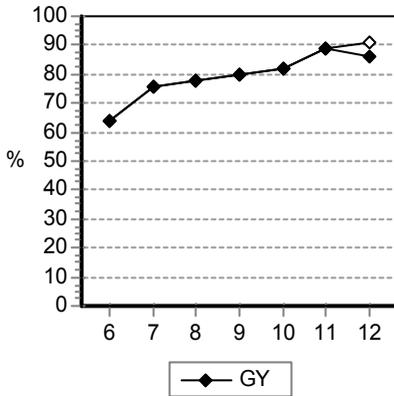


Abbildung 12: Erfüllungsquote:  
Anteil der gestellten Aufgaben mit  
richtigem Arbeitsweg und Erreichen der  
Lösung (Gesamtumfang: 1.681)

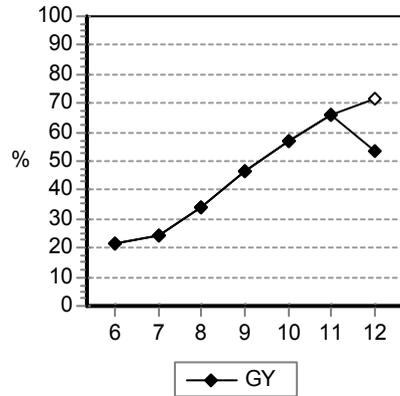


Abbildung 13: Anteil der Antwortenden  
mit  $\frac{5}{12} \cdot 4 \rightarrow \frac{20}{12}$  als erstem Arbeitsschritt (Ge-  
samtumfang: 1.619)

Rechengraphen helfen nicht nur ein neues Phänomen zu entdecken – sondern auch bei der Generierung von Erklärungsansätzen: 37 % der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten verwenden am Ende des sechsten Schuljahrs den Arbeitsschritt  $\frac{5}{12} \cdot 4 \rightarrow \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{1}$  als Anfang ihres Arbeitsweges. In höheren Schuljahrgängen liegt dieser Wert niedriger, z. B. bei 4 % im Schuljahrgang 10 (vgl. Abbildung 15). Zusammen mit der geringeren Fehlerquote kann dies als Erklärung für die deutlich höhere Verwendung des Arbeitsschritts  $\frac{5}{12} \cdot 4 \rightarrow \frac{20}{12}$  dienen. Offenbar wird der Sonderfall der Multiplikation mit einer natürlichen Zahl dadurch umgangen, die Aufgabe in einen Standardfall umzuwandeln, und diesen dann zu lösen. Auch wenn diese Argumentation von jener oben aus Padberg zitierten abweicht, stützt sie im Ergebnis seine Hypothese, dass die Schülerinnen und Schüler „in diesem Stadium rein formal durch Rückgriff auf die Regeln – und nicht durch Rückgriff auf anschauliche Grundvorstellungen – diese Aufgaben lösen“. Interessant ist in diesem Zusammenhang übrigens auch der Blick in die anderen Schulformen (vgl. Abbildung 15): Sowohl in der Realschule als auch in der Hauptschule nimmt die Bedeutung der explizit ausformulierten Umwandlung in eine Standardaufgabe in den höheren Schuljahrgängen zu – ganz im Gegensatz zum Gymnasium.

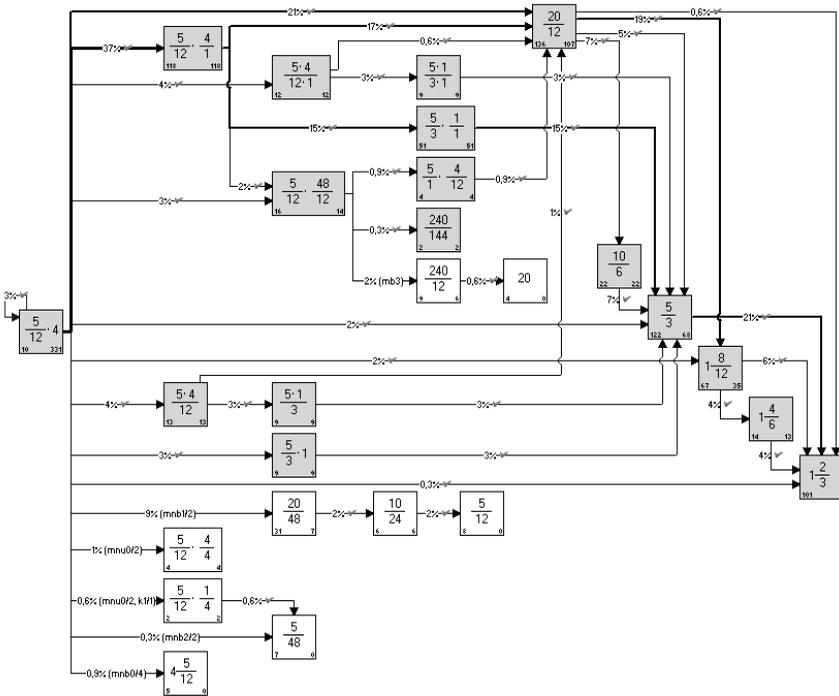


Abbildung 14: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{5}{12} \cdot 4$  für 321 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums, Schuljahrgang 6

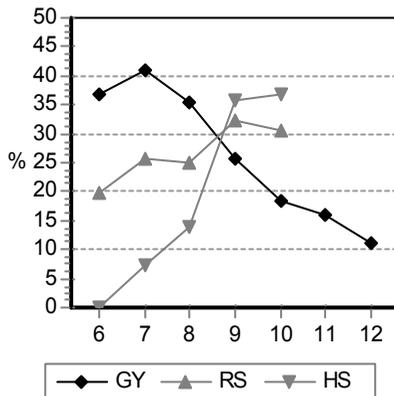


Abbildung 15: Anteil der Antworten mit  $\frac{5}{12} \cdot 4 \rightarrow \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{1}$  als erstem Arbeitsschritt, nach Schulformen differenziert

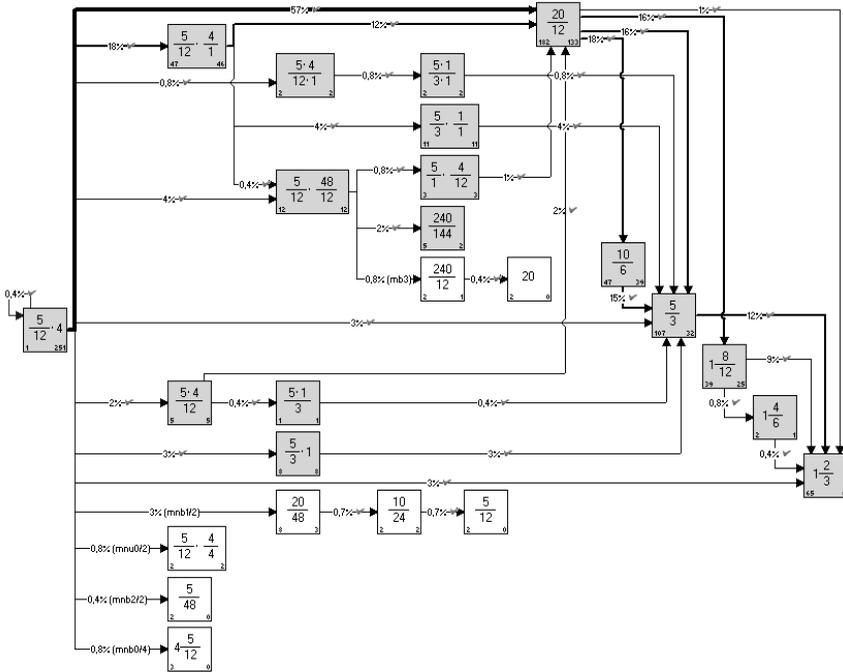


Abbildung 16: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{5}{12} \cdot 4$  für 250 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums, Schuljahrgang 10

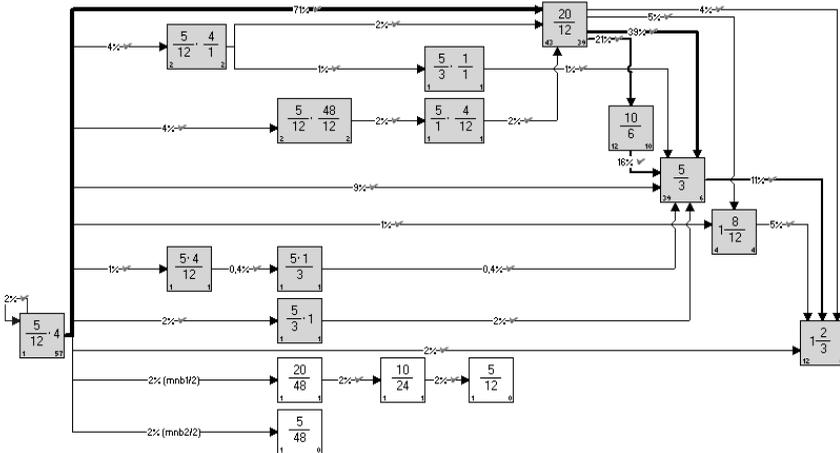


Abbildung 17: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{5}{12} \cdot 4$  für 56 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums, Schuljahrgang 12, Leistungskurs

### 3.2.2 Rechenwege in verschiedenen Schulformen

Nach Schulformen differenzierte Rechengraphen sind aus fehlerdiagnostischer Sicht von besonderem Interesse. Abbildung 18 (Gymnasium), Abbildung 19 (Realschule) und Abbildung 20 (Hauptschule) zeigen Rechengraphen für die Aufgabe  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  für Schülerinnen und Schüler des jeweiligen sechsten Schuljahrgangs. Analog zur Addition (vgl. Abschnitt 3.1) ist der Fehler „Zähler minus Zähler, Nenner minus Nenner“ dominierender Fehler bei der Subtraktion von Brüchen. In den Rechengraphen ist dieser Fehler mit „sb0“ markiert.

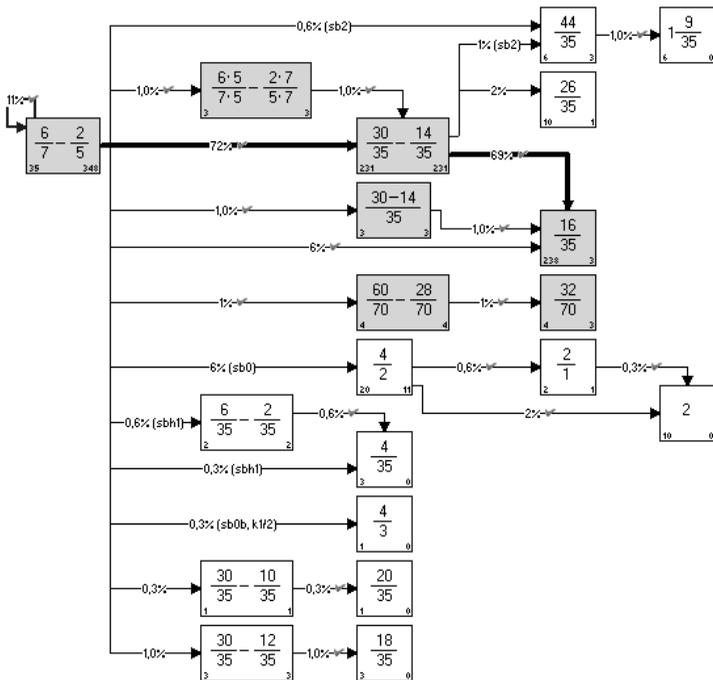


Abbildung 18: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  für 313 Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums, Schuljahrgang 6

Im Vergleich der drei Rechengraphen fällt der steigende Anteil des dominierenden Fehlers „sb0“ vom Gymnasium über die Realschule bis zur Hauptschule ins Auge. Für sich allein genommen, ist dies nicht wirklich erstaunlich. Setzt man den Anteil des Fehlers „sb0“ jedoch in Beziehung zur Fehlerquote, zeigt sich, dass nicht nur die Menge der Fehler, sondern auch die Fehlerstruktur eine andere ist. Während im Gymnasium nur 26 % der Fehler auf den Fehler „sb0“ entfallen, sind es in der Hauptschule ganze 60 % (vgl. Tabelle 2).

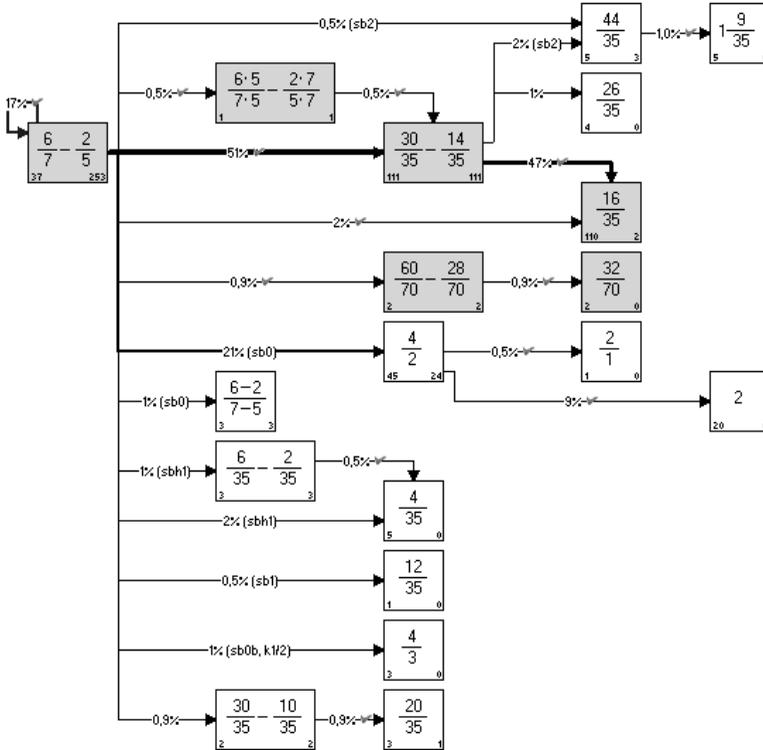


Abbildung 19: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  für 217 Schülerinnen und Schüler der Realschule, Schuljahrgang 6

An diese Beobachtung für die Subtraktion von Brüchen (vgl. auch Hennecke 2007a) knüpfen sich bei der weiteren Auswertung der ERaB-Daten damit u. a. die folgenden Fragen an:

- Werden in der Hauptschule viele typische Fehler von den Schülerinnen und Schülern und im Gymnasium wenige, dafür aber untypische Fehler begangen?
- Handelt es sich ggf. dabei eher um ein schulformspezifisches oder leistungsbedingtes Phänomen?
- Welche Konsequenzen hat das ggf. für den praktischen Umgang mit fehlerhaften Rechnungen in den verschiedenen Schulformen?

Entsprechende Auswertungen der vorliegenden Daten sind in Vorbereitung. In diesem Kontext sei insbesondere auf Winter (i. V.) verwiesen.

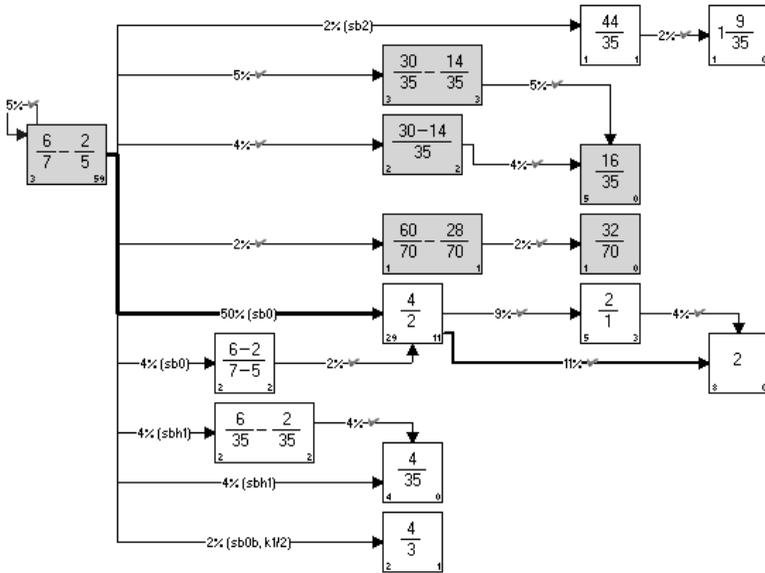


Abbildung 20: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $\frac{6}{7} - \frac{2}{5}$  für 56 Schülerinnen und Schüler der Hauptschule, Schuljahrgang 6

	Fehlerquote der Antwortenden	„sb0“-Anteil <sup>3</sup> der Antwortenden	„sb0“-Anteil der Fehler
Gymnasium	26 %	7 %	27 %
Realschule	51 %	22 %	43 %
Hauptschule	89 %	54 %	60 %

Tabelle 2: Anteil des dominierenden Fehlers „sb0“ an der Fehlerquote bei der Subtraktion von Brüchen, nach Schulformen

### 3.2.3 Rechenwege bei Schülerinnen und Schülern

Die gezeigten Beispiele basieren beide auf der Idee, eine Population anhand von Merkmalen (z. B. Schuljahrgang, Schulform) in Teilpopulationen zu unterteilen und diese zu vergleichen. Ein weiteres Merkmal für eine derartige Unterscheidung ist das Geschlecht. Die Abbildung 21 (Mädchen) und Abbildung 22 (Jungen) zeigen zwei Rechengraphen für die Aufgabe  $5\frac{4}{6} - \frac{1}{3}$  für Schülerinnen bzw. Schüler

<sup>3</sup> Angaben basieren auf dem vollständigen Rechengraphen. Daher ergeben sich teilweise höhere Werte, als der gezeigten Vereinfachung zu entnehmen sind.

des Gymnasiums am Ende des sechsten Schuljahrgangs. Der reine Vergleich der Erfüllungsquoten offenbart nur geringe Unterschiede (70 % bei den Schülerinnen und 74 % bei den Schülern) – anders die Rechengraphen.

Ein Rechenweg zur Lösung der Aufgabe  $5\frac{4}{6} - \frac{1}{3}$  geht über die Umwandlung der Bruchzahl in gemischter Schreibweise in einen unechten Bruch. Die Rechengraphen zeigen, dass ca. 70 % der Schülerinnen, die diesen Ansatz richtig verfolgen,  $\frac{34}{6} - \frac{1}{3}$  als Zwischenschritt notieren, bevor sie im zweiten Schritt die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Bei den Jungen sind es hingegen nur 27 %.

Die Schülerinnen haben ihre Rechnung aber nicht nur ausführlicher notiert – sie verwenden auch andere Rechenwege als ihre männlichen Mitschüler. So wandelten ca. 60 % der Mädchen, aber nur ca. 37 % der Jungen die gemischte Schreibweise in einen unechten Bruch um. Entsprechend nutzten die Jungen häufiger den alternativen, auf der gemischten Schreibweise basierenden, Rechenweg.

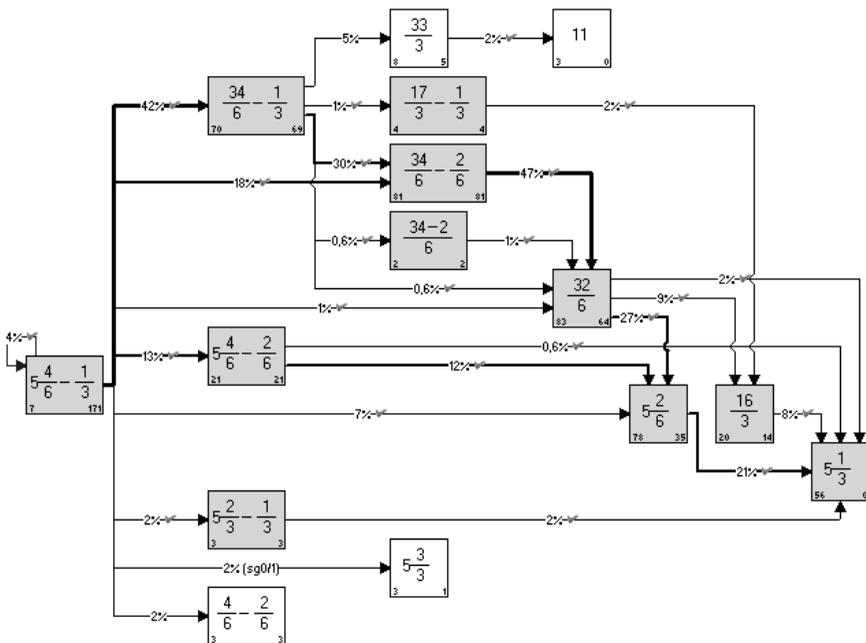


Abbildung 21: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $5\frac{4}{6} - \frac{1}{3}$  für 165 Schülerinnen des Gymnasiums, Schuljahrgang 6

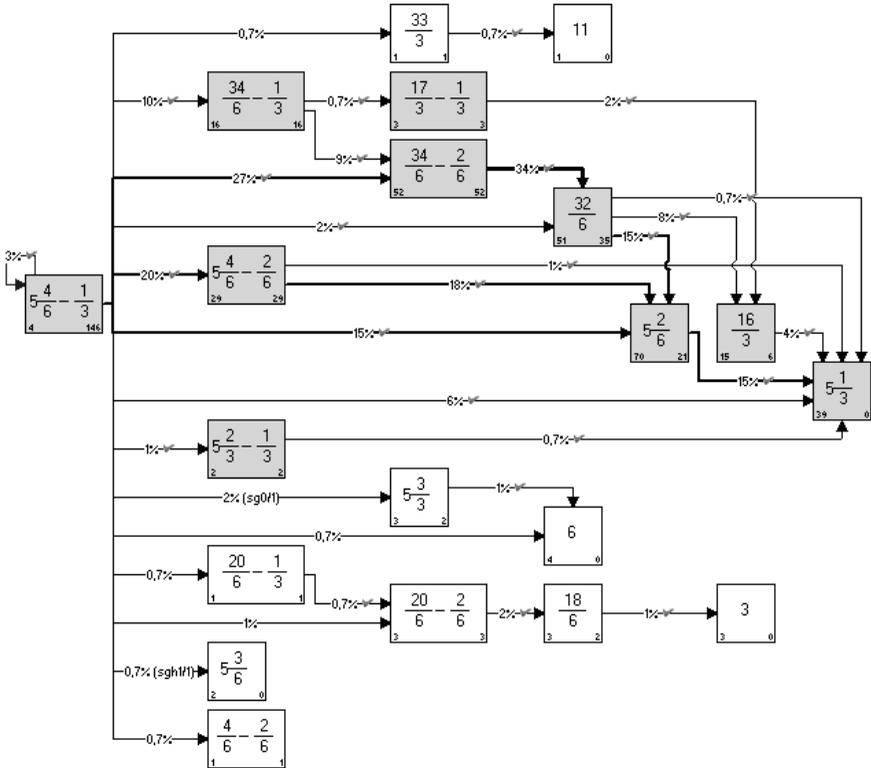


Abbildung 22: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe  $5\frac{4}{6} - \frac{1}{3}$  für 142 Schüler des Gymnasiums, Schuljahrgang 6

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Rechengraphen sind eine Möglichkeit, die Rechen- bzw. Arbeitswege von Gruppen von Schülerinnen, Schülern, Studierenden oder sonstigen Versuchspersonen sinnvoll zu aggregieren. Im Unterschied zu statistischen Kennzahlen, die z. B. die Erfüllungsquote beschreiben, bleiben dabei Informationen über die eigentlichen Rechnungen auf der Ebene der Population weitestgehend erhalten. In dieser Veröffentlichung wurden vor allem Anwendungen von Rechengraphen in Forschungskontexten gezeigt. Rechengraphen eignen sich jedoch auch für den Einsatz in der Lehramtsausbildung und mittelfristig als Grundlage für die tägliche Arbeit von Lehrkräften.

### 4.1 Rechengraphen in der Lehramtsausbildung

Rechengraphen zeigen Studierenden die Vielfalt der Rechen- und Arbeitswege und demonstrieren in der Regel recht eindrucksvoll die dominierenden Fehlermuster. Die Kenntnis derartiger systematischer Fehler wird allgemein als der Schlüssel zum Umgang mit Schülerfehler gesehen. Wittmann (2007b) fasst dies wie folgt zusammen:

„Erst das Wissen darüber und das Bewusstsein dafür, welche Fehlermuster in einem bestimmten Bereich auftreten und welche Fehlerursachen dahinter stehen können, welche Rolle Fehler im Lernprozess spielen und welche Voraussetzungen für einen produktiven Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht gelten, ermöglicht die Ausbildung einer Fehlerkultur. Dies gilt [...] für den individuellen Lern- und Professionalisierungsprozess einer jeden Lehrkraft.“

Rechengraphen können als Grundsteine für die Vermittlung dieses Wissens dienen. Sie ermöglichen den Studierenden einen konstruktivistischen Zugang, da sie zwar empirische Daten handhabbar aufbereiten, aber genügend Spielraum für einen erkundenden Zugang lassen.

### 4.2 Rechengraphen in der Unterrichtspraxis

Wie in der Lehramtsausbildung können Rechengraphen in der Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften eingesetzt werden. Durch Kombination mit den persönlichen Erfahrungen der Lehrkräfte bieten sich hier zudem Möglichkeiten zur Selbstreflexion an.

Etwas visionärer gedacht, mag man sich mittelfristig eine Software vorstellen, die die Schülerinnen und Schüler einer Klasse diagnostisch aussagekräftige Aufgaben berechnen lässt, die Rechen- bzw. Arbeitswege automatisch in Rechengraphen umsetzt, Fehler diagnostiziert und die Ergebnisse den Lehrkräften präsentiert. Ohne Aufwand ließen sich so Fehlerschwerpunkte einer Klasse aufspüren. Falls notwendig können dann geeignete, ggf. differenzierte, Gegenmaßnahmen (Therapie) eingeleitet werden. Der Vergleich mit Rechengraphen aus größeren Studien lässt dabei zudem erkennen, wo eine Klasse „ungewöhnliche“ Fehlerschwerpunkte aufweist.

### 4.3 Rechengraphen in Forschungskontexten

Die gezeigten Anwendungen von Rechengraphen entstammen Forschungskontexten. Wie auch bei der Arbeit mit statistischen Kennzahlen, ist hier der Vergleich von Teilpopulationen ein aufschlussreicher Ansatz zum Verständnis des Verhaltens der Versuchspersonen. Als Merkmale zur Differenzierung werden in Abschnitt 3.2 Beispiele zum Schuljahrgang, zur Schulform und zum Geschlecht der Versuchspersonen gezeigt. Weitere Merkmale sind leicht vorstellbar, z. B. die Zugehörigkeit zu einer Schulklasse, die Mitgliedschaft in einer Test- oder Vergleichsgruppe in einer Evaluationsstudie, das Antwortverhalten bei einer anderen Aufgabe, die Erfül-

lungsquote einer Versuchsperson bei allen Aufgaben eines Tests. Um bei einer derartigen Differenzierung aussagekräftige Rechengraphen zu erhalten, sind große Stichproben notwendig. Die vollständige Erfassung der Arbeits- bzw. Rechenwege der Teilnehmenden mag dabei als enormer Aufwand erscheinen. Die Erfahrungen aus der ERA-B-Studie haben jedoch gezeigt, dass dieser Aufwand bei geeigneter Softwareunterstützung erstaunlich gering ausfällt (vgl. Hennecke 2007a).

Im Rahmen dieser Veröffentlichung sollten Rechengraphen als ein neuer Zugang zu den Rechen- bzw. Arbeitswegen von Schülerinnen und Schüler vorgestellt werden. Selbstverständlich ist der Mehrwert dieses Zugangs mittelfristig nicht nur mit einzelnen Beispielen, sondern auch mit zusammenhängen Untersuchungen nachzuweisen. Mit Winter (i. V.) befindet sich zurzeit eine größere Veröffentlichung zur ERA-B-Studie in Arbeit. Diese Dissertation wird in wesentlichen Teilen auf Rechengraphen basieren. In einem eigenen Skript (2007b) wird anhand von Rechengraphen gezeigt, wie Schülerinnen und Schüler auf Aufgaben reagieren, die neben dem üblichen Standardweg flexible Alternativen zulassen. Weitere Analysen der vorhandenen Daten sollen folgen.

### Literatur

- Adams, R. und M. Wu (2002) (Hrsg.). PISA 2000 technical report. Paris: OECD.
- Baader, F. und T. Nipkow (1998). Term Rewriting and All That. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gerster, H. D. und U. Grevsmühl (1983). Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. Päd. Welt 37 (11), S. 654–660.
- Hennecke, M. (1999). Online Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Hennecke, M. (2003). Fehlerdiagnose in intelligenten Lehr-Lern-Systemen. In: P. Bender, W. Herget, H.-G. Weigand und T. Weth (Hrsg.): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht, Tagungsband der 20. Arbeitstagung des Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik“ der GDM, 27. bis 29.9.2002, Hildesheim: Franzbecker.
- Hennecke, M. (2007a). Fehlerdiagnostische Auswertung empirischer Studien in der Bruchrechnung. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.
- Hennecke, M. (2007b). Schema F vs. Flexibilität: Zur Handhabung der Bruchrechnung im Laufe der Schulzeit. In: T. Weth (Hrsg.): Tagungsband des Nürnberger Kolloquiums zur Didaktik der Mathematik 2007, 21.03.2007, Nürnberg: Universität Erlangen-Nürnberg.
- Hennecke, M. und K. Winter (2005). Lernsoftware und Lehrwerke: Adaptierte Lernsoftware. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, S. 255–258.
- Ingenkamp, K. und U. Lissmann (2005). Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik. Basel: Beltz UTB.
- Lörcher, G. A. (1982). Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. Päd. Welt 36 (3), S. 172–180.
- Padberg, F. (1995). Didaktik der Bruchrechnung, Gemeine Brüche, Dezimalbrüche. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum (2. Auflage).

- Padberg, F. (1996). Über Schülerschwierigkeiten im Umgang mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996. S. 36–43.
- Padberg, F. (2002). Didaktik der Bruchrechnung, Gemeine Brüche, Dezimalbrüche. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum (3. Auflage).
- Prenzel, M., J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, et al. (2004). PISA 2003, Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland, Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann.
- Radatz, H. (1979). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Rost, J. (2004). Lehrbuch Testtheorie/Testkonstruktion. Bern: Huber.
- Winter, K. (2007). Rechenfertigkeiten in der Bruchrechnung: Unterschiede in Schulformen und Klassenstufen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.
- Winter, K. (i. V.). Rechenwegdiagnostik in der Bruchrechnung: Theoretische und Empirische Analysen in verschiedenen Jahrgangsstufen unterschiedlicher Schulformen (Arbeitstitel). Institut für Mathematik und Angewandte Informatik. Hildesheim: Universität Hildesheim.
- Wittmann, G. (2007a). Fehleranalysen in der Bruchrechnung. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.
- Wittmann, G. (2007b). Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.

### **Anschrift des Verfassers**

Dr. Martin Hennecke  
Universität Hildesheim, Institut für Mathematik und Angewandte Informatik  
31141 Hildesheim  
E-Mail: [hennecke@imai.uni-hildesheim.de](mailto:hennecke@imai.uni-hildesheim.de)

Eingang Manuskript: 21.06.2007 (überarbeitetes Manuskript 10.09.2007)