

Interaktives geometrisches Konstruieren im virtuellen Raum

von

Heinz Schumann, Weingarten

Prof. Dr. Peter Bender zum 60. Geburtstag gewidmet

Kurzfassung: Das Beherrschen der mit den entsprechenden analogen bzw. digitalen Werkzeugen ausführbaren geometrischen Konstruktionen ist ein wichtiger Bestandteil der Methodenkompetenz, die im Rahmen des allgemein bildenden Mathematikunterrichts angeeignet werden soll. Aber die entsprechenden räumlichen Konstruktionen waren bisher nur in der Vorstellung ausführbar. Im virtuellen Raum lässt sich nun mit dem Werkzeug Cabri 3D, das vor allem für die Schulgeometrie entworfen wurde, raumgeometrisch konstruieren. Mit diesem Werkzeug eröffnet sich ein neuartiger Zugang zur synthetischen Raumgeometrie. In diesem Beitrag werden Elemente einer am prototypischen Werkzeug orientierten Didaktik des interaktiven geometrischen Konstruierens im virtuellen Raum entwickelt.

Abstract: Competences in the generation of geometrical constructions using analog and/or interactive tools are important as part of the competence of methods taught in general mathematical instruction. Adequate three-dimensional constructions were impracticable except as mental constructions. Now, however, the tool Cabri 3D, which was developed primarily for school geometry, opens up the possibility of realizing three-dimensional constructions in a virtual space, which gives us a completely new access to synthetic spatial geometry. This contribution will therefore develop elements of a didactics of interactive geometrical construction in a virtual space in correspondance to the prototypic tool.

1 Einleitung

Raumgeometrisches Konstruieren im Kontext der synthetischen Raumgeometrie, die seit Euklid mathematischer Gegenstand und auch Unterrichtsgegenstand ist, war bisher nur in der Vorstellung möglich. Jede reale Konstruktionsausführung bedurfte einer weiteren Konstruktion, nämlich einer ebenen zeichnerischen Darstellung und Lösung des raumgeometrischen Problems (vgl. Diagramm 1) – meist in einer die Raumvorstellung unterstützenden projizierenden Darstellung.

Es ist deshalb verständlich, dass raumgeometrisches Konstruieren wegen dieses Darstellungsproblems für die Schüler und Schülerinnen nur schwer zugänglich gewesen ist und deshalb wenig Berücksichtigung in den allgemein bildenden Curricula gefunden hat – müssen die Schüler und Schülerinnen doch mehr oder weniger gewisse Methoden der Darstellenden Geometrie (vgl. u. a. Graf/Barner 1964) be-

herrschen lernen, um überhaupt eine raumgeometrische Konstruktionsaufgabe lösen zu können. Abgesehen von den dabei zu erbringenden Raumvorstellungsleistungen behindert das Darstellungsproblem die zeichnerisch-konstruktive Behandlung der synthetischen Raumgeometrie, wie es die Schüler und Schülerinnen von der ebenen synthetischen Geometrie her kennen. – Die aufwändigen dreidimensionalen physischen Modelle von räumlichen Konstruktionsaufgaben und ihren Lösungen bleiben im Allgemeinen auf sehr einfache Beispiele beschränkt. Ihr Vorteil beruht aber in der ganzheitlichen Wahrnehmung.

Die Lösung des Darstellungsproblems besteht im interaktiven Konstruieren in einem dafür geschaffenen virtuellen Raum mit einem geometrisch-inhaltlich und software-ergonomisch geeigneten Tool, das die Raumvorstellung unterstützt (vgl. Diagramm 2). In branchenspezifischen 3D-CAD-Systemen ist diese Art des Konstruierens schon seit einiger Zeit üblich; diese Systeme sind aber nur teilweise kompatibel zur synthetischen Raumgeometrie und deshalb für den Geometrieunterricht an allgemein bildenden Schulen wenig geeignet.

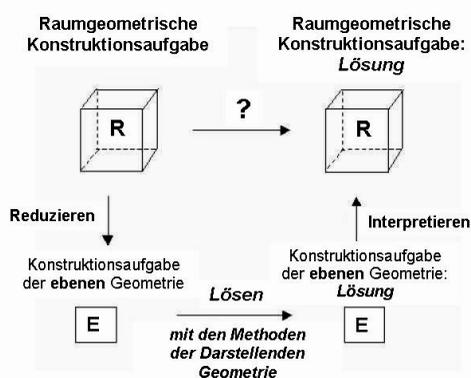


Diagramm 1: Raumgeometrische Konstruktionsaufgaben – traditionell

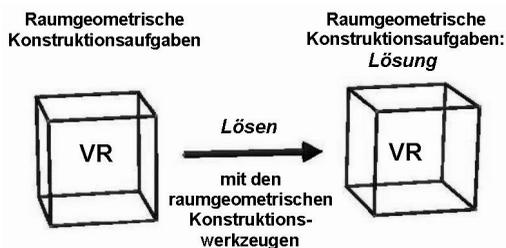


Diagramm 2: Raumgeometrische Konstruktionsaufgaben im virtuellen Raum

Schüler und Schülerinnen, die gewohnt sind in den gegenständlichen virtuellen Räumen von 3D-Computerspielen zu agieren, haben sicherlich keine Berührungsängste, mit einem Tool wie Cabri 3D zu arbeiten. Natürlich müssen zur Nutzung des Tools raumgeometrische Vorkenntnisse verfügbar gemacht werden, z. B. durch erläuternde Demonstrationen mit dem Tool durch eine kompetente Lehrkraft.

Unter dem virtuellen Raum verstehen wir hier eine geeignete Parallel- oder Zentralprojektion des systemintern in „Weltkoordinaten“ repräsentierten dreidimensionalen reell-euklidischen Raumes bzw. eines würfelförmigen Ausschnitts desselben auf die Bildschirmenebene (die Darstellende Geometrie ist also unter der Oberfläche versteckt!). Dieser virtuelle Raum hat räumliche Wahrnehmungsqualität. Mit dem dynamischen Raumgeometrie-System Cabri 3D in der Version 1.2 steht uns ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem wir u. a.

- raumgeometrische Konstruktionen in der „Tiefe“ des Bildschirms ausführen,
- raumgeometrische Konfigurationen visualisieren, indem wir diese mit reichhaltigen Objektattributen gestalten und mit dem *Virtual Sphere Device*, der Einbettung von Konfigurationen in eine direkt referenzierbare Kugel, von allen Seiten anschauen,
- raumgeometrische Konfigurationen durch differenziertes Verziehen variieren, wie wir es im Wesentlichen schon von den ebenen dynamischen Geometrie-Systemen her gewohnt sind.

Im folgenden Abschnitt klären wir, was unter raumgeometrischen Konstruktionen zu verstehen ist. Im 3. Abschnitt werden die wesentlichen Optionen für raumgeometrisches Konstruieren in Cabri 3D vorgestellt und beispielgebend einige Konstruktionsaufgaben mit Cabri 3D gelöst. Mit didaktischen Thesen schließen wir ab.

2 Raumgeometrische Konstruktionen

Im Gegensatz zu den ebenen geometrischen Konstruktionen, die aus mathematischer Sicht u. a. in dem Standardwerk „Theorie der geometrischen Konstruktionen“ (Bieberbach 1952) und in didaktischer Sicht z. B. im „Handbuch der Schulmathematik“ (Wolff u. a. 1966) sowie mit Berücksichtigung der Computernutzung u. a. in „Geometrie für die Sekundarstufe“ (Holland 1996) und in „Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer“ (Schumann 1991) behandelt werden, findet sich nur im Band IV der Enzyklopädie der Elementarmathematik (Alexandroff u. a. 1969) und in „Geometrie in Ebene und Raum“ (Quaisser/Sprengel 1989) eine systematische Darstellung der raumgeometrischen Konstruktionen – soweit der Autor in der deutschsprachigen Literatur fündig geworden ist. Dieser Mangel an mathematischer und didaktischer Theorie-Entwicklung für die raumgeometrischen Konstruktionen erklärt sich wohl aus deren fehlender Praktikabilität.

Wir geben im Folgenden eine redundante Auflistung der so genannten Postulatkonstruktionen, die den Charakter von Axiomen für das raumgeometrische Konstruieren haben. Dabei gehen wir nicht auf die den Konstruktionen zu Grunde liegenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen ein; außerdem diskutieren wir keine Sonderfälle. Cabri 3D kann man bereits hier – dem Abschnitt 3 vorgehend – zur computergrafischen Illustration bzw. zur computergrafischen Modellierung der Konstruktionen verwenden.

Wir denken uns einen „Konstruktionsraum“ als ein Modell des reellen euklidischen Raumes in synthetischer Interpretation. In Cabri 3D ist dieser Raum beschränkt auf einen würfelförmigen Ausschnitt, an dessen Rand die im Würfeläußeren liegenden Objektteile geclippt, d. h. abgeschnitten werden (eine Ebene z. B. kann deswegen erscheinen als besonderes Sechseck, Fünfeck, Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Quadrat oder Dreieck). In diesem Raum können wir endlich viele Punkte auswählen bzw. erzeugen, mit denen die folgenden *räumlichen* Konstruktionen ausführbar sind:

- (1) Konstruktion einer Geraden durch zwei verschiedene Punkte (*Konstruktion einer Verbindungsgeraden mittels Geraden-Lineal*),
- (2) Konstruktion einer Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte (*Konstruktion einer Verbindungsebene mittels Ebenen-Lineal oder Planeal*),
- (3) Konstruktion einer Kugel um einen Punkt als Mittelpunkt durch einen von diesem verschiedenen Punkt als Kugelpunkt (*Konstruktion einer Kugel mittels Kugel-Zirkel*).

Mit den folgenden Konstruktionen werden neue Punkte als Schnittobjekte im Konstruktionsraum erzeugt:

- (4) Konstruktion des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene, zu der die Gerade nicht parallel ist (*Konstruktion Durchstoßpunkt Gerade mit Ebene*),
- (5) Konstruktion der Schnittpunkte von einer Gerade mit einer Kugel (*Konstruktion Durchstoßpunkte Gerade mit Kugel*),
- (6) Konstruktionen der Schnittgeraden zweier nichtparalleler Ebenen (*Konstruktion Schnittgerade Ebene mit Ebene*),
- (7) Konstruktion des Schnittkreises von einer Ebene mit einer Kugel (*Konstruktion Schnittkreis Ebene mit Kugel*),
- (8) Konstruktion des Schnittkreises von einer Kugel mit einer Kugel (*Konstruktion Schnittkreis Kugel mit Kugel*).

Auf den konstruierten Objekten können endlich viele Punkte als Hilfspunkte für weitere Konstruktionen ausgewählt bzw. erzeugt werden.

In jeder vorgegebenen oder konstruierten Ebene des Raumes können endlich viele Punkte erzeugt oder ausgewählt werden, um die üblichen *ebenen* „Geradenzirkel- und Geradenlineal-Konstruktionen“ auszuführen.

Das Lösen einer mit Zirkel (Kreis- bzw. Kugel-Zirkel) und Lineal (Geraden- bzw. Ebenen-Lineal) ausführbaren Konstruktionsaufgabe besteht in der Anwendung endlich vieler der räumlichen und ebenen Postulatkonstruktionen auf die in der Aufgabe gegebenen Objekte, um gesuchte Punkte als Schnittpunkte geometrischer Örter (Geraden, Ebenen, Kugeln) zu konstruieren. Diese Lösungsmethode wird deshalb als *Methode der raumgeometrischen Örter* bezeichnet.

Anmerkung: Neben dem vor allem heuristischen Problem, wie eine bestimmte Konstruktionsaufgabe mit den hier vorgegebenen Konstruktionswerkzeugen gelöst werden kann, stellt sich die Frage nach der Charakterisierung solcher Aufgaben, die sich mit diesen Konstruktionsinstrumenten (theoretisch) lösen lassen. Durch analytisch-geometrische Beschreibung der Lösung einer betreffenden Konstruktionsaufgabe mittels der zugelassenen Werkzeuge in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem gewinnt man die analytische Abhängigkeit der Koordinaten der gesuchten von den Koordinaten der gegebenen Punkte, durch die auch andere gegebene Objekte analytisch beschrieben werden können. Die Terme für die Koordinaten der gesuchten Punkte bestehen möglicherweise wegen des Schneidens von Objekten mit Kreisen bzw. Kugeln aus Quadratwurzeltermen der Koordinaten der gegebenen Punkte. Man versteht darunter Terme, die aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen gebildet werden. Nur für solche raumgeometrischen Aufgabenstellungen, bei denen diese Art der Koordinatendarstellung nachweisbar ist, existiert eine Lösung mit dem zulässigen Werkzeugsatz.

Zur Vereinfachung des Lösens von Konstruktionsaufgaben im Raum dienen die räumlichen *Grundkonstruktionen*, die zu den entsprechenden ebenen Grundkonstruktionen hinzukommen. Diese lassen sich u. a. auf die Postulatkonstruktionen (1) bis (8) zurückführen und teilweise in Analogie zu ebenen Grundkonstruktionen entwickeln:

- Ebene aus Punkt und Gerade konstruieren
- Ebene aus zwei nicht windschiefen Geraden konstruieren
- Schnittpunkt dreier Ebenen konstruieren
- Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten konstruieren
- Mittelpunkt zweier Punkte konstruieren
- Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene konstruieren (Loterrichten)

- Lotgerade von einem Punkt aus zu einer Ebene konstruieren (Lotfällen)
- Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene konstruieren
- Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden konstruieren
- Kreis um eine Achse durch einen Kreispunkt konstruieren
- Winkelhalbierende Ebene zwischen zwei (Halb-)Ebenen konstruieren
- Kugel aus vier Punkten konstruieren
- Schnittpunkte zweier Kreise in räumlicher Lage konstruieren
- Schnittpunkte dreier Kugeln konstruieren
- ...

Im Folgenden illustrieren und erklären wir nur einige wenige räumliche Grundkonstruktionen (die im Original farbigen Abbildungen erleiden in der Wiedergabe als Graustufenbilder einen gewissen Verlust an Anschauungsqualität!); dabei kommt, wie schon die Mittelsenkrechte in der Ebene, der mittelsenkrechten Ebene eine zentrale Rolle beim Konstruieren zu.

- *Konstruktion Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten:* Gegeben sind zwei Punkte. Wir konstruieren nach (3) zwei Kugeln, jeweils um einen der Punkte durch den anderen. Zu den beiden Kugeln konstruieren wir nach (8) den Schnittkreis, zu dem nach (2) die gesuchte Ebene konstruiert werden kann. Der Schnittpunkt von Ebene und Verbindungsgerade der zwei Punkte ist ihr Mittelpunkt M (Abb. 1).
- *Konstruktion Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene (Loterrichten):* Wir konstruieren nach (3) um den gegebenen Punkt durch einen weiteren beliebig gewählten Punkt eine Kugel. Der Schnittkreis dieser Kugel mit der Ebene wird nach (7) konstruiert. Die Schnittgerade zweier mittelsenkrechter Ebenen zu Kreispunkten liefert nach (6) das gesuchte Lot (Abb. 2).
- *Konstruktion Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene (Lotfällen):* Wir konstruieren nach (3) eine Kugel um den gegebenen Punkt durch einen Punkt der gegebenen Ebene. Aus Punkten auf dem nach (7) konstruierten Schnittkreis werden zwei mittelsenkrechte Ebenen konstruiert, deren Schnittgerade nach (6) das gesuchte Lot ist (Abb. 3).
- *Konstruktion Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene:* Wir fällen das Lot vom gegebenen Punkt auf die Ebene. Den Lotfußpunkt erhält man nach (5). Die nach (3) um den gegebenen Punkt durch den Lotfußpunkt konstruierte Kugel wird nach (5) vom Lot in einem weiteren Punkt geschnitten. Die gesuchte parallele Ebene erhält man als mittelsenkrechte Ebene aus diesem Punkt und dem Lotfußpunkt (Abb. 4).

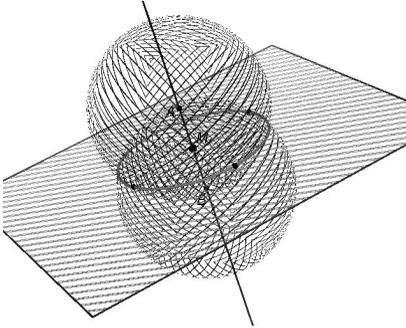


Abbildung 1:
Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten

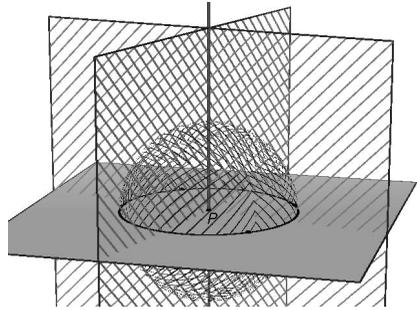


Abbildung 2: Lotgerade
in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene

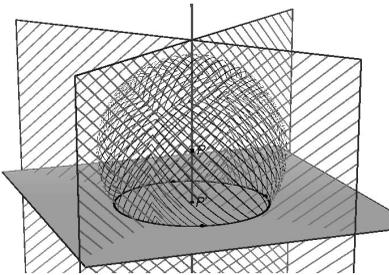


Abbildung 3:
Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene

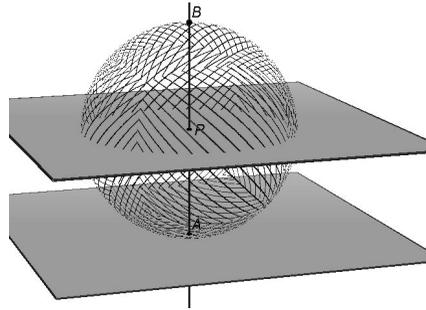


Abbildung 4: Parallele Ebene
durch einen Punkt zu einer Ebene

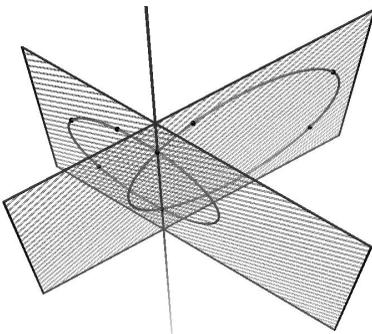


Abbildung 5:
Schnittpunkte zweier Kreise

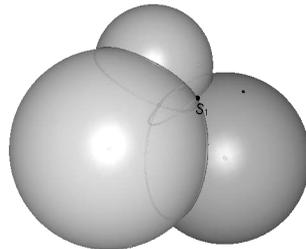


Abbildung 6:
Schnittpunkte dreier Kugeln

- *Konstruktion Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden:* Zuerst wird die Verbindungsebene aus dem gegebenen Punkt und der gegebenen Geraden konstruiert. Dann fallen wir in dieser Ebene das Lot von dem gegebenen Punkt auf die Gerade. Die Lotebene ergibt sich als mittelsenkrechte Ebene der Schnittpunkte des Kreises um den Lotfußpunkt mit der gegebenen Geraden (Abb. 5).
- *Konstruktion Kreis um eine Achse durch einen Punkt:* Wir ergänzen die vorstehende Grundkonstruktion, indem wir in der mittelsenkrechten Ebene einen Kreis um den Lotfußpunkt durch den gegebenen Punkt konstruieren.
- *Konstruktion Schnittpunkte zweier Kreise in räumlicher Lage:* Jeder der Kreise bestimmt eine Ebene. Die Schnittgerade der beiden Kreisebenen geht durch die den Kreisen gemeinsamen Punkte.
- *Konstruktion Schnittpunkte dreier Kugeln:* Zu je zwei der Kugeln konstruiert man den Schnittkreis. Je zwei der drei Schnittkreise schneiden einander in zwei Punkten. Diese Kreisschnittpunkte fallen mit den Punkten zusammen, die diesen drei Kugeln gemein sind (Abb. 6).

3 Konstruktive Optionen und ihre Anwendungen in Cabri 3D

Folgende konstruktiven Optionen sind in Cabri 3D 1.2 verfügbar:

- In der Werkzeugbox *Punkte* die Optionen *Punkt* und *Schnittpunkt*,
- in der Werkzeugbox *Linien* die Optionen *Gerade*, *Strecke*, *Strahl*, *Vektor*, *Kreis*, *Kegelschnitt* und *Schnittgerade/Schnittebene*,
- in der Werkzeugbox *Flächen* die Optionen *Ebene*, *Dreieck*, *Polygon*, *Halbebene*, *Winkelfeld*, *Zylindermantel*, *Kegelmantel* und *Kugel*,
- in der Werkzeugbox *Grundkonstruktionen* die Optionen *Lotgerade/Lotebene*, *Parallele Ebene*, *Mittelsenkrechte Ebene*, *Mittelpunkt* und *Vektorsumme*,
- in der Werkzeugbox *Kongruenzabbildungen* die Optionen *Punktspiegelung*, *Geradenspiegelung*, *Ebenenspiegelung*, *Verschiebung* und *Drehung*,
- in der Werkzeugbox *Regelmäßige Polygone* die Optionen *Gleichseitiges Dreieck*, *Quadrat*, *Regelmäßiges Fünfeck*, *Regelmäßiges Sechseck*, *Regelmäßiges Achteck*, *Regelmäßiges Zehneck*, *Regelmäßiges Zwölfeck* und *Pentagramm*,
- in der Werkzeugbox *Polyeder-Operationen* die Optionen *Tetraeder*, *Quader*, *Prisma*, *Pyramide*, *Konvexes Polyeder*, *Polyeder abfalten* und *Schnittpolyeder*,
- in der Werkzeugbox *Regelmäßige Polyeder* die Optionen *Regelmäßiges Tetraeder*, *Würfel*, *Regelmäßiges Oktaeder*, *Regelmäßiges Dodekaeder* und *Regelmäßiges Ikosaeder*.

Cabri 3D repräsentiert durch seine Werkzeuge einen beachtlichen Umfang an systematisiertem raumgeometrischen Wissen. Die Entwicklung einer Didaktik des interaktiven raumgeometrischen Konstruierens orientiert sich zweckmäßig am prototypischen Werkzeug, dessen Designer neben der adäquaten Software-ergonomischen Gestaltung bereits eine an der Sache orientierte didaktische Konzeption der synthetischen Raumgeometrie implementiert haben.

Cabri 3D 1.2 ist beim jetzigen Entwicklungsstand ein reines Konstruktions-, Manipulations- und Visualisierungswerkzeug. In ihm gibt es noch keine Mess- und Berechnungswerkzeuge; zwar ist das Objekt *Vektor* als Pfeil (gerichtete Strecke) generierbar, aber es fehlt eine Schnittstelle zur analytischen Geometrie. Es soll jedoch in naher Zukunft nach dem Vorbild von Cabri II Plus erweitert werden. Eine Eingabe von Punkten über Koordinaten ist nicht möglich.

Das Verziehen von freien Raumpunkten ist gegenüber den 2-dimensionalen Dynamischen Geometriesystemen zu differenzieren in das horizontale Verziehen parallel zur Basisebene (Abb. 7) und das vertikale Verziehen (Abb. 8), da kein räumliches Eingabegerät, wie z. B. eine „räumliche Maus“, zur Verfügung steht.

Im Folgenden geben wir einen Überblick über die wesentlichen konstruktiven Optionen von Cabri 3D und konkretisieren einige der sich ergebenden Möglichkeiten an ausgewählten Konstruktionen. Dabei wollen wir einen ersten Eindruck von der Reichhaltigkeit des Konstruierens im virtuellen Raum vermitteln. Es wird sich zeigen, dass diese Konstruktionsmöglichkeiten die bisherigen händischen mit der unumgänglichen Nutzung der Methoden der Darstellenden Geometrie bei weitem übersteigen.

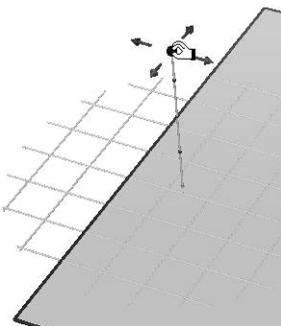


Abbildung 7: Horizontales Verziehen

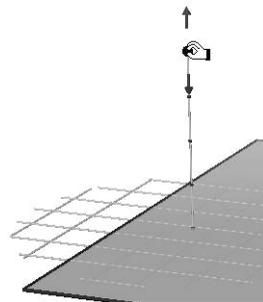


Abbildung 8: Vertikales Verziehen

3.1 Postulat- und Grundkonstruktionen in Cabri 3D

Die entsprechenden Postulat- und Grundkonstruktionen befinden sich in den Boxen *Punkte*, *Linien*, *Flächen*, *Grundkonstruktionen*. Die Optionen sind „polymorph“, d. h., es wird das entsprechende Objekt konstruiert je nach Auswahl der es bestimmenden Objekte. Zum Beispiel kann bei der Option *Ebene* diese erzeugt werden aus drei Punkten oder einem Punkt und einer Geraden oder aus zwei nicht windschiefen Geraden; dabei kommt es jeweils auf die Reihenfolge der Auswahl der Objekte nicht an.

Um einfache ebene Objekte wie Winkel und (auch überschlagene) Polygone zu konstruieren, bedarf es der Erzeugung von *Halbgeraden* (Strahlen) und *Strecken*, die Teilobjekte entsprechender Geraden (Trägergeraden) sind. Im konstruktiven Raum kommen folgende Objekte hinzu, die Teilobjekte von Ebenen (Trägerebenen) sind: die Halbebenen z. B. zur Konstruktion eines Kantenwinkels, die *Polygone* z. B. als Seitenflächen von Polyedern, die *Winkelfelder* z. B. zur Konstruktion räumlicher Ecken. Cabri 3D verfügt über die entsprechenden Werkzeuge (das Objekt *Kreisbogen* ist in der Version 1.2 leider noch nicht verfügbar). Der Schnitt von *Zylinder- und Kegelmantelflächen* mit einer Ebene erzeugt Kegelschnitte. Diese sind in Cabri 3D referenzierbare Objekte. Damit können die Kegelschnitte ihrem Namen gemäß im virtuellen Raum behandelt werden (vgl. Schumann 2005c). In Cabri 3D sind auch *Kegelschnitte* aus fünf in einer Ebene liegenden Punkte erzeugbar (Option *Kegelschnitte*).

Wir wenden nun die vorstehenden Konstruktionswerkzeuge aus den Werkzeugboxen *Punkte*, *Linien*, *Flächen*, *Grundkonstruktionen* auf Beispiele an, die die Potentialität gegenüber bisherigen raumgeometrischen Konstruktionen im virtuellen Raum (vgl. u. a. Schumann 2001) verdeutlichen. Dabei geben wir keine Begründungen für die einzelnen Konstruktionsschritte; uns kommt es hier auf die phänomenologische Konstruktionsausführung im virtuellen Raum an.

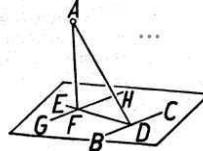
Bei der Erzeugung von ersten Punkten bzw. von ersten Objekten, die von Punkten abhängen, geht man immer von einer Referenzebene aus. Konstruktionen, die aus der Referenzebene herausführen, kann man „verräumlichend“ nennen; solche Konstruktionen sind das Erzeugen von Punkten außerhalb dieser Ebene, das Lot-Errichten in einem Punkt der Ebene, die Konstruktion einer Lotebene zu einer Geraden bzw. eines Geradenobjekts in der Ebene und die Konstruktion eines Kreises um eine in der Ebene gelegene Achse.

Beispiel 1 (Euklids Lotkonstruktion): Mit einem Werkzeug wie Cabri 3D können alle bei Euklid beschriebenen raumgeometrischen Konstruktionen ohne Zuhilfenahme der Darstellenden Geometrie ausgeführt werden. Als Beispiel haben wir die erste raumgeometrische Konstruktion Euklids im ersten seiner raumgeometrischen Bücher XI–XIII, der kugelfreien Konstruktion der Lotgeraden von einem Punkt auf eine Ebene, ausgewählt (Abb. 9). Die Konstruktionsbeschreibung lautet mit den

Auf eine gegebene Ebene von einem oberhalb gegebenen Punkte aus das Lot zu fällen.

Der oberhalb gegebene Punkt sei A und die gegebene Ebene die Grundebene. Man soll vom Punkte A auf die Grundebene das Lot fällen.

Man ziehe beliebig in der Grundebene eine Gerade BC und fälle vom Punkte A auf BC das Lot $AD \dots$. Sollte AD auch Lot auf die Grundebene sein, so wäre die Aufgabe schon ausgeführt. Anderenfalls ziehe man vom Punkte D aus in der Grundebene $DE \perp BC$



und fälle aus A auf DE das Lot $AF \dots$. Ferner ziehe man $GH \parallel BC$ durch $F \dots$

Da $BC \perp$ sowohl DA als DE , steht BC auf der Ebene EDA senkrecht \dots . Nun ist GH ihm parallel. Hat man aber zwei parallele Geraden, von denen die eine auf irgendeiner Ebene senkrecht steht, dann muß auch die andere auf derselben Ebene senkrecht stehen \dots ; also steht auch GH auf der Ebene durch ED, DA senkrecht.

Abbildung 9: Konstruktionsbeschreibung bei Euklid (Thaer 1980, S. 324)

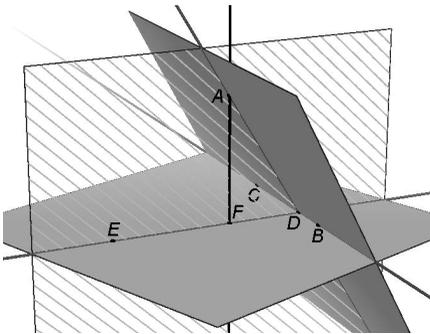


Abbildung 10: Konstruktion

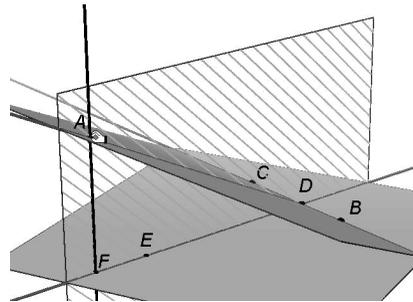


Abbildung 11: Variation der Konfiguration

Cabri 3D-Optionen wie folgt (eine Abkürzung ist mit der Option *Ebene aus Punkt und Gerade* möglich):

- Punkt im Raum: A (*Punkt*)
- Punkt in Ebene: B (*Punkt*)
- Punkt in Ebene: C (*Punkt*)
- Gerade: BC (*Gerade*)
- Ebene: ABC (*Ebene*)
- Lotgerade von A auf BC (*Lotgerade*)

- Schnittpunkt der Lotgerade mit BC : D (*Schnittpunkt*)
- Lotgerade in D auf BC (*Lotgerade*)
- Punkt auf Lotgerade: E (*Punkt*)
- Ebene: ADE (*Ebene*)
- Lotgerade von A auf DE (*Lotgerade*)
- Schnittpunkt der Lotgerade mit DE : F (*Schnittpunkt*)

Die nach dieser Beschreibung ausgeführte Konstruktion (Abb. 10) kann man von allen Seiten betrachten. Durch Verziehen von Parameterobjekten, hier z. B. des Punktes A , kann man experimentell die Richtigkeit einer Konstruktion überprüfen (Abb. 11). Die Phasenfolge „Konstruieren – Visualisieren – Variieren“ ist quasi für alle Konstruktionen anzustreben. Im Folgenden beschränken wir uns aber auf das Konstruieren, das nur in wenigen Ergebnisbildern von Konstruktionsschritten dokumentiert werden soll.

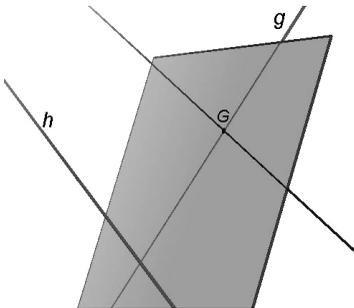


Abbildung 12: Ebene

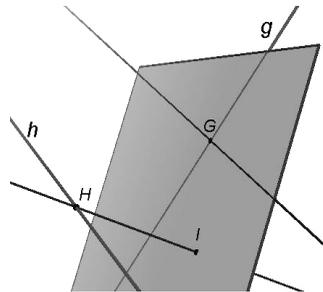
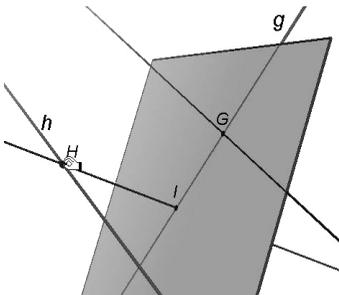
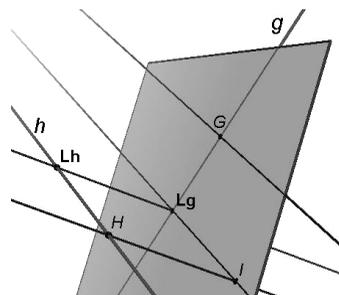


Abbildung 13: Lotfußpunkt I

Abbildung 14: Verziehen von H Abbildung 15: Parallele zu h durch I

Beispiel 2 (Lotabstand zweier windschiefer Geraden): Als Beispiel für eine Lageaufgabe haben wir die Konstruktion der Lotgerade zu zwei windschiefen Geraden g und h gewählt. – Eine der möglichen Konstruktionen: Durch einen beliebigen Punkt G auf g konstruieren wir die Parallele zu h und die Ebene aus dieser Parallelen und h (Abb. 12). Von einem beliebigen Punkt H auf der Geraden h fallen wir das Lot auf diese Ebene und erhalten den Lotfußpunkt I (Abb. 13).

Durch Verziehen von H kann man die Lage von I auf die Gerade hinmanipulieren und so eine experimentelle Lösung für die auf g und h gesuchten Punkte erhalten (Abb. 14). Zur Konstruktion dieser Punkte wird eine Parallele durch I zu h gelegt, die g in Lg schneidet (Abb. 15). Das Lot in Lg auf die Ebene trifft h in Lh . Die Verbindungsgerade beider Punkte ist die Gerade, die sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Die Verbindungsstrecke $LgLh$ ist die kürzeste, die zwischen zwei Punkten beider Geraden möglich ist.

Beispiel 3 (Höhenschnittpunkt-Ersatz im Tetraeder): In der Didaktik der Geometrie wird auch die Analogisierung besonderer Punkte und Linien des Dreiecks zu entsprechenden des Tetraeders behandelt. Mit einem Werkzeug wie Cabri 3D können wir diese Analogisierung im virtuellen Raum konstruierend erfahren.

Wir konstruieren aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten ein Tetraeder (dreiseitige Pyramide), von dem wir nur drei Seitenflächen einzeichnen, damit man sein Inneres sehen kann. Wir fällen nun das Lot von jedem der vier Eckpunkte auf die jeweilige Gegenfläche und errichten außerdem in den Orthozentren, d. h. in den Höhenschnittpunkten der Seitenflächendreiecke, die Lote auf diese Flächen (Abb. 17). Wir erhalten so vier Paare aus parallelen Geraden. Jetzt konstruieren wir zu jedem dieser Paare die „Mittelparallele“ und erkennen, dass sich die vier Mittelparallelen in einem Punkt schneiden. Diese Schnittpunkteigenschaft ist invariant bei

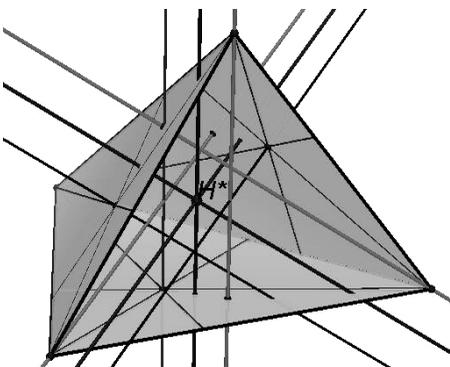


Abbildung 16:
Konstruktion Punkt von Monge

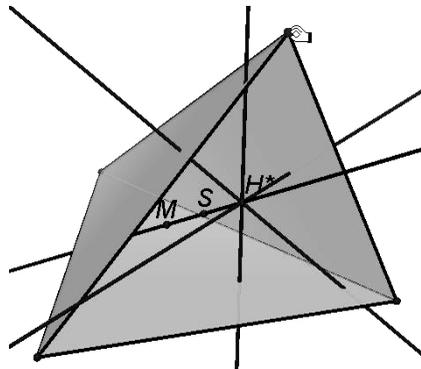


Abbildung 17:
Eulersche Gerade des Tetraeders

Formvariation des Tetraeders. Der Schnittpunkt H^* dient als Ersatz für den nicht existierenden Höhenschnittpunkt; er wird Punkt von Monge genannt. Der Punkt von Monge liegt zusammen mit dem Umkugelmittelpunkt M und dem Schwerpunkt S des Tetraeders auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden des Tetraeders (Abb. 16), usw. Dieses Beispiel soll die Methode der Satzfindung durch Konstruieren und Variieren repräsentieren (für weitere Beispiele vgl. Schumann 2004a).

Die Platonischen Körper sind ein beliebtes extra-curriculares Thema. Mit Cabri 3D können diese Körper jetzt konstruierend behandelt werden.

Beispiel 4 (Regelmäßiges Oktaeder mit Um- und Inkugel): Frei nach der Oktaeder-Konstruktion Euklids im 13. Buch seiner Elemente konstruieren wir in einer Bezugsebene den Durchmesserkreis einer Kugel und dazu zwei orthogonal stehende Durchmessergeraden mit den entsprechenden Schnittpunkten (Abb. 18). Darüber konstruiert man die Kugel und in ihrem Mittelpunkt M das Lot auf die Ebene. Dieses schneidet die Kugel in den zwei noch fehlenden Eckpunkten des Oktaeders. Wir zeichnen sechs der acht Seitenflächendreiecke ein, um von M aus das Lot auf eine der Seitenflächen zu konstruieren. Die Kugel um M durch den Lotfußpunkt ist die Inkugel des Oktaeders (Abb. 19). Durch Verziehen des den Kreisradius bestimmenden Punktes kann man die Größe der Figur variieren.

Auch dem Raumgeometrie-Unterricht wenig bekannte Aufgaben, weil mit den bisherigen Mitteln nicht zu bearbeiten, wie z. B. die Konstruktion des Umkugel-Hexaeder aus Vierecken, können jetzt behandelt werden

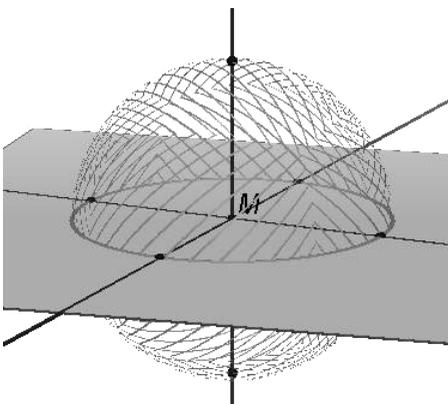


Abbildung 18:
Konstruktion der Oktaeder-Eckpunkte

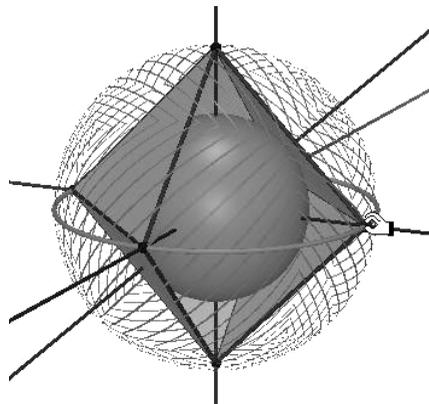


Abbildung 19:
Inkugel des Oktaeders

Beispiel 5 (Umkugel-Hexaeder aus Vierecken): Auf eine Kugel legen wir vier Punkte A, B, C, F wie in Abbildung 20. Durch A, B, C und A, B, F sowie B, C, F konstruieren wir jeweils einen Kreis. Auf den Kreis ABC legen wir den Punkt D , auf den Kreis ABF den Punkt E und auf den Kreis BCF den Punkt G . Die Kreise AED , CDG und EFG schneiden einander(!) im noch fehlenden achten Eckpunkt H des Hexaeders (Abb. 21), dessen Vierecksseitenflächen nun eingezeichnet werden können (Abb. 22 mit einem offenen „Seitenflächenfenster“). Folgerung aus der Konstruktion: Ein Umkugel-Sechsfächer aus Vierecken ist festgelegt durch eine räumliche Ecke aus drei Schnenvierecken.

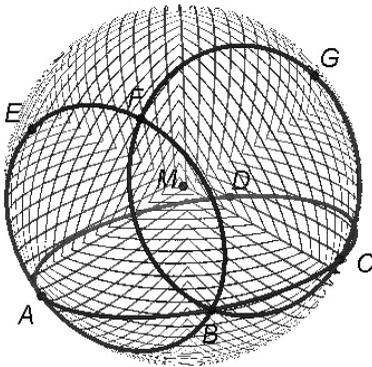


Abbildung 20: Konstruktion der Kreise

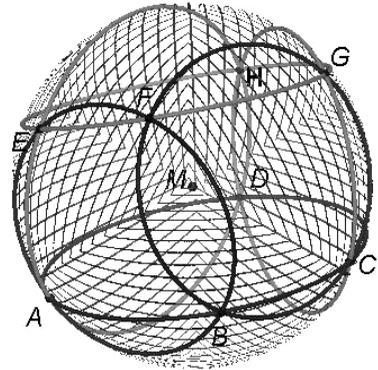


Abbildung 21: Eckpunkt H des Hexaeders

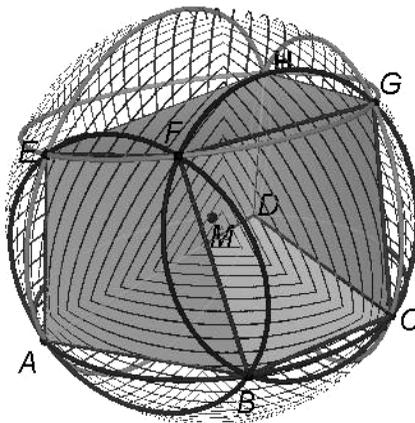


Abbildung 22: Hexaeder

3.2 Konstruktionen mit Kongruenzabbildungen

Das Duplizieren von Objekten ist eine effektive Konstruktionshilfe in Grafikwerkzeugen. In Cabri 3D sind folgende Kongruenzabbildungen implementiert, die das konditionierte Verdoppeln von Objekten gestatten (Werkzeugbox *Kongruenzabbildungen*): Punktspiegelung (im Raum keine die Orientierung erhaltende Abbildung!), Geradenspiegelung (Halbdrehung um eine Achse), Ebenenspiegelung, Parallelverschiebung und Drehung (um eine Achse mit einem Winkel). Mit diesen Abbildungen kann man entsprechende Konstruktionsaufgaben auf elegante Art lösen, indem man Objekte wie Punkte, Geraden, Ebenen, Polygone und Polyeder punkt-, achsen-, ebenen- und verschiebungssymmetrisch dupliziert. Mit Achsendreihungen um Winkel der Größe $360^\circ/n$ für $n = 2, 3, \dots$ lassen sich drehsymmetrische (Teil-)Figuren erzeugen. Die Hintereinanderausführung solcher Abbildungen erhöht die flexible Ausführung von Konstruktionen. Für Schub- und Drehspiegelungen sowie für Schraubungen gibt es keine eigenen Optionen; in der erweiterten Version von Cabri 3D können entsprechende Abbildungsmakros für punktweises Abbilden definiert werden. Die Theorie der räumlichen Kongruenzabbildungen kann nunmehr konstruierend in Analogie zu der der ebenen Kongruenzabbildungen entwickelt werden.

Für punktweises Abbilden sind auch andere Abbildungen, z. B. Ähnlichkeitsabbildungen (u. a. die Zentralprojektion), affine Abbildungen (u. a. die Parallelprojektion), die stereografische Projektion, die Kugelspiegelung usw. durch entsprechende Konstruktionen ausführbar. Abbildung 23 illustriert die Anwendung einer Drehung in Cabri 3D am Beispiel einer gleichkantigen Pyramide mit regelmäßiger fünfseitiger Grundfläche (konvexe Polyeder können in Cabri 3D als Kanten- oder als Flächenmodelle dargestellt und auf vielfältige Weise gestaltet werden).

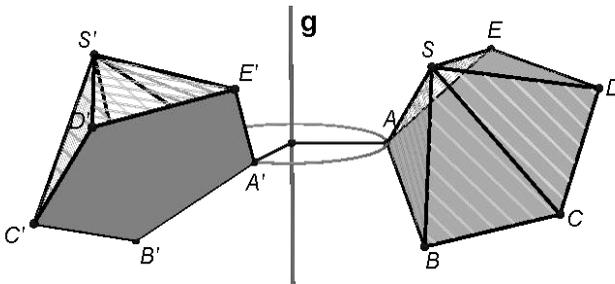


Abbildung 23: Drehung um eine Achse

3.3 Konstruktionen mit regelmäßigen Polygonen

Die Bereitstellung ebener Formmodule, hier die für spezielle regelmäßige Polygone, zielt auf die Konstruktion von Polyedern mit regelmäßigen Polygonen als Seitenflächen (Werkzeugbox *Regelmäßige Polygone*). Solche Polyeder können im konvexen Falle nur gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke und Zwölfecke besitzen. Damit lassen sich unter Zuhilfenahme von Kongruenzabbildungen die so genannten Johnsonschen Körper erzeugen (vgl. u. a. <http://home.aanet.com.au/robertw/Glossary.html>). Der in der Raumgeometrie wenig bewanderte Nutzer kann aber nicht wissen, dass es keine solchen Körper mit regelmäßigem 7-Eck oder 9-Eck oder 11-Eck usw. als Seitenfläche gibt; hier stellt sich die Frage nach der Geometrie-inhaltlichen Selbsterklärung des Werkzeugs. Für die Erzeugung von Sternpolyedern, insbesondere von regelmäßigen Sternpolyedern nach Kepler-Poinsot (s. o.), kann man u. a. den implementierten Sternfünfeck-Modul benutzen.

Wie mit ebenen Formmodulen und mit Kongruenzabbildungen ein referenzierbarer Körper konstruiert werden kann, zeigen wir am Beispiel der Konstruktion des Iko-saeders frei nach Euklids Konstruktion im 13. Buch seiner „Elemente“.

Beispiel 6 (Ikosaeder-Konstruktion): Bei diesem Beispiel wird zuerst das *gleichkantige 5-eckige Antiprisma* konstruiert und danach werden die *gleichkantigen 5-seitigen Pyramiden* passend aufgesetzt. Den sequentiellen Konstruktionsalgorithmus beschreiben wir hier relativ kleinschrittig (Varianten sind möglich):

Konstruktion des gleichkantigen 5-eckigen Antiprismas:

- Konstruktion eines Kreises aus Mittelpunkt und Kreispunkt (*Kreis*) in der Bezugsebene
- Konstruktion eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen 5-Ecks (*Regelmäßiges Fünfeck*): Grundfläche des Antiprismas
- Punktspiegelung des regelmäßigen 5-Ecks am Kreismittelpunkt (*Punktspiegelung*; Abb. 24)
- Konstruktion der Lotgeraden im Kreismittelpunkt auf die Bezugsebene (*Lotgerade*; Abb. 25)
- Konstruktion einer Hilfsebene durch Kreismittelpunkt und Lotgerade (*Ebene*)
- Konstruktion des Kreises um den Kreismittelpunkt durch einen der Eckpunkte, um den Kreisradius auf dem Lot abzutragen (*Kreis*)
- Konstruktion des Schnittpunkts aus Lot und Kreis (*Schnittpunkt*; Abb. 25)
- Konstruktion des Verschiebungsvektors vom Lotfußpunkt zum Schnittpunkt
- Verschiebung des gedrehten 5-Ecks mit diesem Vektor (*Parallelverschiebung*): Deckfläche des Antiprismas (Abb. 26)

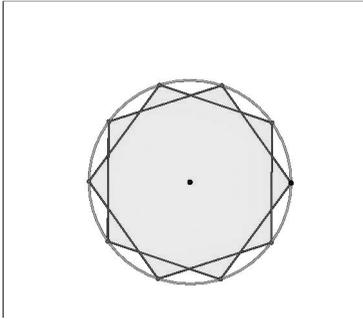


Abbildung 24:
Punktspiegelung des regelmäßigen 5-Ecks

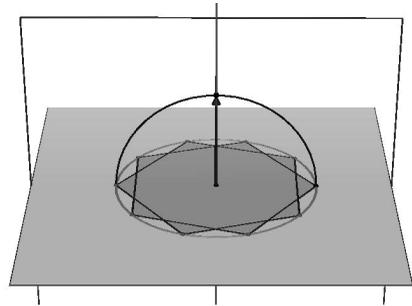


Abbildung 25:
Hilfsebene und Kreis

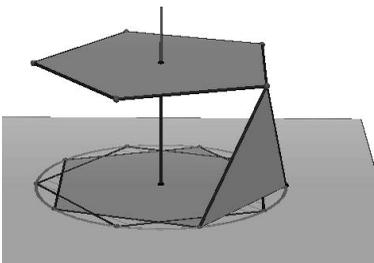


Abbildung 26:
Seitenflächen des Antiprismas

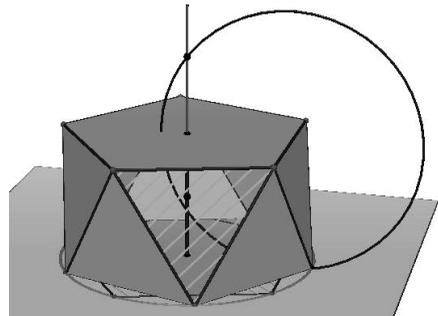


Abbildung 27:
Kreis um eine der Kanten der Deckfläche

- Konstruktion von fünf Dreiecken als Seitenflächen durch jeweiliges Verbinden eines verschobenen Eckpunktes mit den seiner ursprünglichen Lage benachbarten Eckpunkten (*Dreieck*; Abb. 26)
- Konstruktion der restlichen fünf dreieckigen Seitenflächen durch Punktspiegelung (*Punktspiegelung*) am Mittelpunkt (*Mittelpunkt*) der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche bzw. des Verschiebungsvektors (Abb. 27 mit schraffierter Seitenfläche zur Innenansicht).

Konstruktion der aufgesetzten gleichkantigen Pyramiden:

- Konstruktion eines Kreises um eine der Kanten der Deckfläche als Achse durch den gegenüberliegenden Eckpunkt der Grundfläche (*Kreis*; Abb. 27)
- Konstruktion des Schnittpunkts aus diesem Kreis mit der Lotgeraden durch den Mittelpunkt der Grund- bzw. Deckfläche (*Schnittpunkt*): Pyramidenspitze

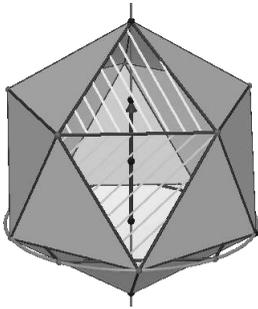


Abbildung 28:
Konstruktion der Pyramide

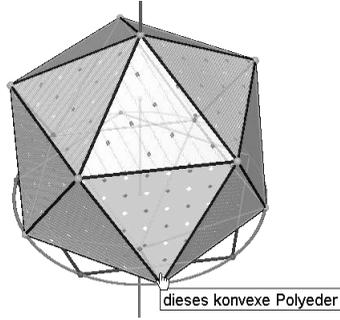


Abbildung 29:
Definition des Iksaeders als konvexe Hülle

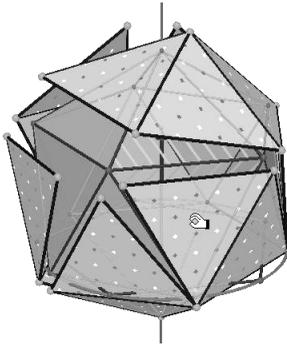


Abbildung 30:
Interaktives Abfalten des Iksaeders

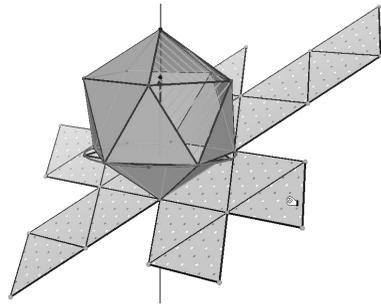


Abbildung 31:
Interaktives Abfalten des Iksaeders

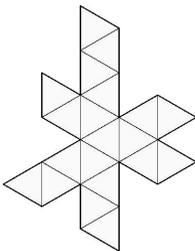


Abbildung 32:
Netz des Iksaeders

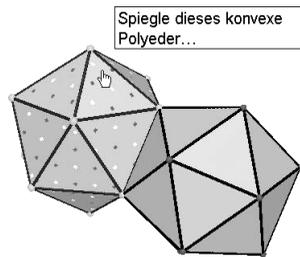


Abbildung 33:
Operationen mit dem Iksaeder-Formmodul

- Konstruktion von fünf Dreiecken als Seitenflächen der Pyramide mit der Deckfläche als Basis durch jeweiliges Verbinden der Spitze mit entsprechenden Eckpunkten (*Dreieck*). Die Pyramide kann auch mit dem Werkzeug *Konvexe Pyramide* konstruiert werden.
- Konstruktion der anderen Pyramide durch Punktspiegelung der betreffenden Objekte am Mittelpunkt der entsprechenden Lotstrecke (Abb. 28 mit zur Innenansicht schraffierten Seitenflächen und ausgeblendeten 5-Ecken).

Die Konstruktion kann abgeschlossen werden, indem man das Ikosaeder als referenzierbares Objekt mit dem Werkzeug *Konvexes Polyeder* (Werkzeugbox *Polyeder-Operationen*) als konvexe Hülle seiner Eckpunkte bzw. Seitenflächen definiert (Abb. 29). Die Bildung einer konvexen Hülle kann man sich dabei physisch vorstellen wie das Umspannen von Punkten durch eine Gummihaut. Nun kann das Polyeder zu einem seiner Netze mit dem Werkzeug *Polyedernetz* (Werkzeugbox *Polyeder-Operationen*) interaktiv abgefaltet werden (Abb. 30 und 31). Durch Ausdrucken des auf einer besonderen Seite ausgegebenen Netzes (Abb. 32) und anschließendes Ausschneiden und Auffalten können wir den Körper physisch verfügbar machen. – Mit dem Ikosaeder-Formmodul können dann entsprechende Operationen bzw. Abbildungen ausgeführt werden (Abb. 33).

Die bereits in Cabri 3D verfügbaren räumlichen Formmodule für die Platonischen Körper (Werkzeugbox *Regelmäßige Polyeder*) sind mittels regelmäßiger Polygone und entsprechender Abbildungen rekonstruierbar – wie vorstehend am Beispiel des Ikosaeders gezeigt. Damit werden diese „Black-Box“-Module transparent bzw. einsichtig gemacht.

3.4 Konstruktion von und mit Polyedern

Als räumliche Formmodule lassen sich Tetraeder, Quader, konvexes Prisma, konvexe Pyramide und beliebiges konvexes Polyeder (als konvexe Hülle endlich vieler Eckpunkte bzw. Kanten bzw. Seitenflächen) erzeugen (Werkzeugbox *Polyeder-Operationen*). Diese referenzierbaren Körper sind als Flächen- und Kantenmodelle, aber nicht als „Vollkörper“ verfügbar. – Die Option *Schnittpolyeder* ermöglicht ein konvexes Polyeder mit einer Ebene zu zerschneiden. Durch diese Option gewinnt man Teilpolyeder als referenzierbare Objekte (vgl. Schumann 2001). Die Booleschen Operationen für konvexe Polyeder, die in Cabri 3D dynamisch sein müssten, sind nicht implementiert.

Als Anwendung räumlicher Formmodule kann man vereinfachte Modelle von Objekten wie Castel del Monte, hier vor allem mit dem Formmodul *Konvexes Prisma*, konstruieren und von allen Seiten anschauen – und auch hineinschauen (Abb. 34). Weitere Beispiele für das Modellieren im virtuellen Raum finden sich in Schumann (2005b).

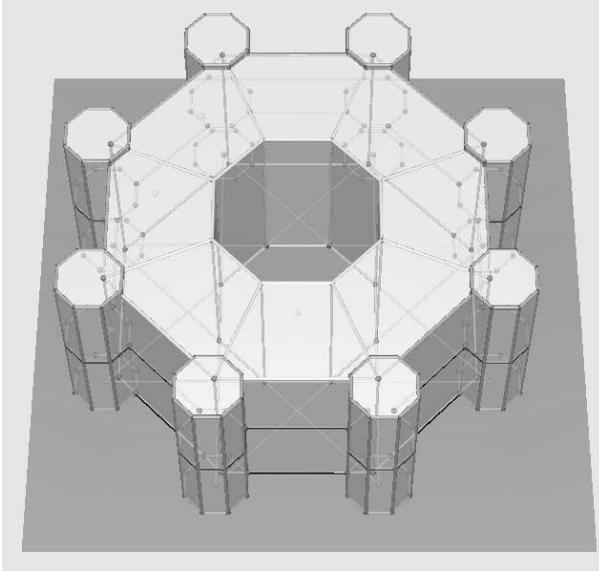


Abbildung 34: Castel del Monte (Modellierungsergebnis)

Als besondere räumliche Formmodule dürfen die platonischen Körper nicht fehlen (Werkzeugbox *Regelmäßige Polyeder*). Sie sind Träger reichhaltiger geometrischer Informationen; sie dienen auf vielfältige Weise als Ausgangskörper für die Erzeugung von Derivaten oder Agglomeraten. Das kann hier nur angedeutet werden (vgl. Schumann 2004b).

Beispiel 7 (Vom Würfelschnitt zum gestumpften Oktaeder): Wir legen in den Würfel ein regelmäßiges Sechseck und führen einen Schnitt mit der durch dieses Sechseck gehenden Ebene (Abb. 35). Die referenzierbare Würfelhälfte spiegeln wir mehrfach an einer ihrer Dreiecksflächen, bis wir einen würfelförmigen Hohlkörper erhalten (Abb. 36). Dieser Körper umschließt ein gestumpftes Oktaeder, einem der archimedischen Körper, wie eine Gussform bzw. ein Negativ. Das gestumpfte Oktaeder kann nun als konvexe Hülle seiner Eckpunkte konstruiert werden (Abb. 37). Natürlich hätten wir das gestumpfte Oktaeder auch namensgemäß durch entsprechendes kantenhalbierendes Abschneiden der Ecken eines Oktaeders erhalten können.

Cabri 3D verfügt, neben der handgeführten Animation, über eine Option für das automatische Animieren von geometrischen Konfigurationen, also auch der von Polyeder-Metamorphosen, z. B. der Metamorphose vom Würfel zum regelmäßigen Oktaeder durch Eckenstumpfen. Damit kann das Training beweglichen räumlichen Denkens unterstützt werden.

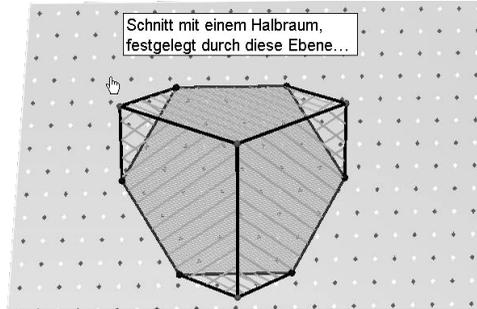
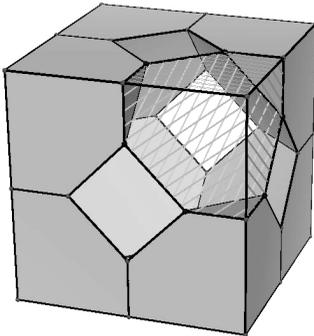
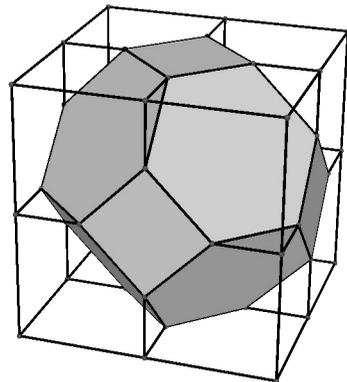


Abbildung 35: Würfelschnitt

Abbildung 36:
Gestumpftes Oktaeder als HohlformAbbildung 37:
Gestumpftes Oktaeder

Die Erzeugung neuer Körper aus bekannten durch verschiedene Operationen führt auf offene Aufgabenstellungen, die Raum geben für explorierendes und kreatives raumgeometrisches Arbeiten.

Beispiel 8 (Ein Würfel-Verbund): Wir konstruieren alle Flächenmittenachsen eines Würfels (Abb. 38) und drehen den Würfel duplizierend zuerst um die vertikale Achse mit einem halben rechten Winkel als Drehwinkel (Abb. 39). Für die beiden anderen Achsen führen wir ebenfalls die entsprechenden Drehungen aus und erhalten einen Körper aus insgesamt vier einander durchdringenden Würfeln (Abb. 40). Welche Symmetrie-Eigenschaften hat dieser im Vergleich zu dem ursprünglichen Würfel? – Um diesen Körper physisch zu bauen, schneiden wir eines der überstehenden dreiseitigen Prismen ab und entfalten es (Abb. 41); das machen wir auch

für das abgeschrägte Prisma. Das ausgedruckte Netz des Prismas (Abb. 42) benötigen wir sechsmal, das des abgeschrägten Prismas zwölfmal (Abb. 43), um durch Auffalten und Aufkleben auf den Würfel, den wir durch Auffalten eines entsprechenden Netzes erhalten, das Verbundpolyeder physisch zu modellieren.

Als Durchdringungskörper, der allen vier Würfeln gemein ist, bekommt man mittels konvexer Hülle das so genannte Rhombenkuboktaeder, das man sich auch als besonders abgekanteten Würfel vorstellen kann (Abb. 44). Das Rhombenkuboktaeder lässt sich interaktiv abfalten (Abb. 45) und eines seiner Netze ausdrucken (Abb. 46). Durch Rotation des Würfels um seine Symmetrieachsen anderen Typs lassen sich andere Verbundpolyeder generieren. Auf ähnliche Weise können auch für die anderen Platonischen Körper solche Verbundpolyeder erzeugt werden (vgl. Cromwell 1997).

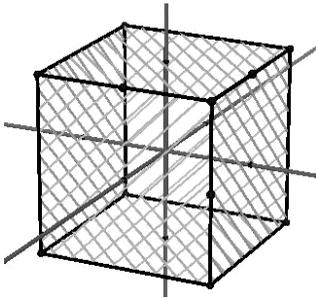


Abbildung 38:
Flächenachsen eines Würfels

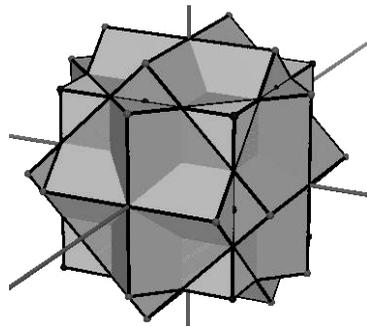


Abbildung 39:
Dreifach duplizierter Würfel

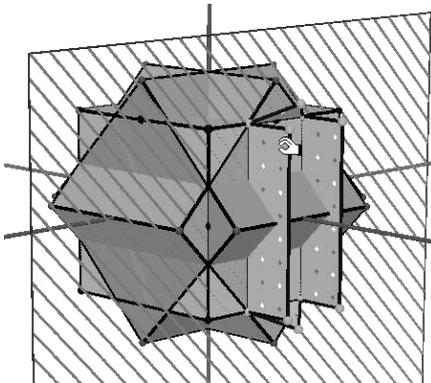


Abbildung 40:
Teilprisma abschneiden und abfalten

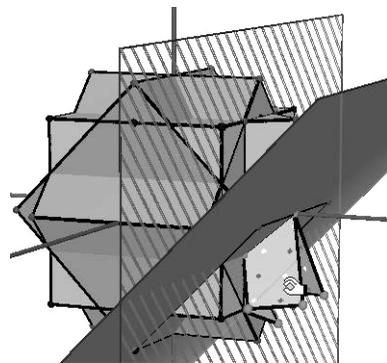


Abbildung 41: Abgeschrägtes Teilprisma
abschneiden und abfalten

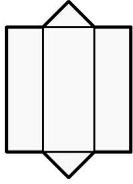


Abbildung 42:
Netz des Prismas

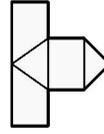


Abbildung 43:
Netz des abgeschrägten Prismas

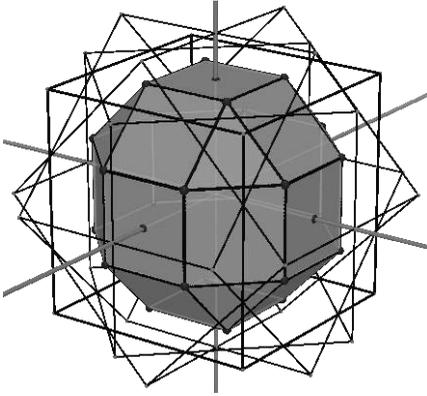


Abbildung 44: Rhombenkuboktaeder
als Durchdringungskörper

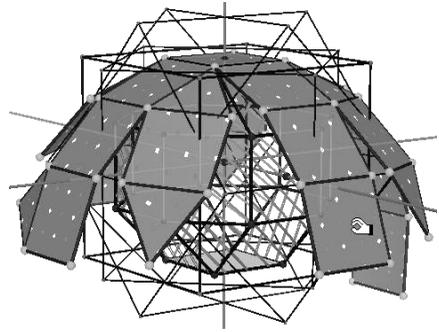


Abbildung 45:
Interaktives Abfalten

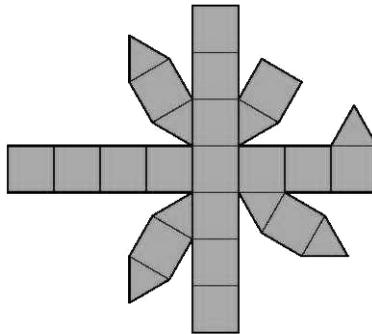


Abbildung 46:
Abgefaltetes Netz des Rhombenkuboktaeders

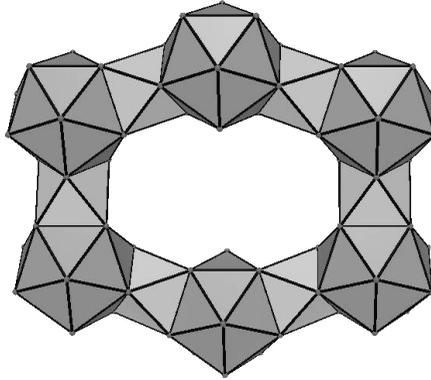


Abbildung 47: Polyederring

Beispiel 9 (Polyeder-Ringe oder Toroide): Eine Lösung der offenen Aufgabe, aus platonischen oder archimedischen Körpern Polyeder-Ringe zu konstruieren, ist das aus regelmäßigen Oktaedern und Ikosaedern bestehende punktsymmetrische Polyeder mit einem „Loch“ (Abb. 47). Es gibt noch weitere solche Ringe (Toroide) aus Oktaedern und Ikosaedern. Das systematische Probieren, um zu Lösungen zu gelangen, wird durch das interaktive Konstruieren mit den räumlichen Formmodulen unterstützt. So ist auch das Herausfinden von unterschiedlichen Polyedermehrlingen, z. B. der Mehrlinge platonischer Körper, eine reizvolle Aufgabe.

4 Didaktische Thesen für das interaktive raumgeometrische Konstruieren

Welchen Einfluss nehmen die Neuen bzw. die Digitalen Medien auf den Mathematikunterricht, insbesondere auf seine Themen, Methoden und Intentionen (s. Diagramm 3)? In unserem Fall muss gefragt werden: Welchen Einfluss kann ein raumgeometrisches Konstruktionswerkzeug wie Cabri 3D auf den Geometrie-Unterricht nehmen?

Wir können hier nur eine erste Antwort in der Art von Thesen geben:

Das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum kann eine neue Bewertung und Behandlung folgender traditioneller raumgeometrischer Themen im Geometrie-Unterricht induzieren (Schumann 2005a):

- Körpergeometrie, insbesondere die Geometrie der Polyeder (z. B. der Platonischen Körper und ihrer Derivate)
- Begriffsbildung und Lagebeziehungen geometrischer Objekte (z. B. von Punkten, Geraden, Ebenen)

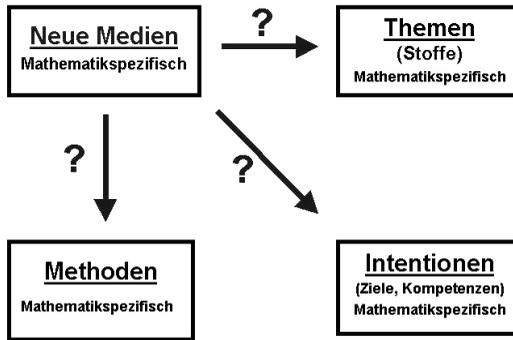


Diagramm 3: Neue Medien – Themen – Intentionen – Methoden

- Räumliche Analogisierung von Begriffen, Sätzen und Verfahren der ebenen Geometrie (z. B. die Analogisierung der Dreiecks- zur Tetraedergeometrie)
- Kegelschnitte (z. B. ihrem Namen entsprechend oder als zentralprojektive Kreisbilder)
- Darstellende Geometrie (z. B. bei der Erarbeitung der üblichen Abbildungsverfahren)
- Kugelgeometrie (z. B. bei der Kugelvieleck-Lehre)
- Anwendungsorientiertes Modellieren (z. B. von Bauwerken).

Außerdem kann die interaktive Nutzung der Raumgeometrie im virtuellen Raum als „dienende Magd“ die Darstellung innermathematischer Sachverhalte bereichern (z. B. zur Vorbereitung der räumlichen analytischen Geometrie).

Sowohl das interaktive raumgeometrische Konstruieren selbst als auch seine Anwendungen können helfen, die Leitidee „Raum und Form“ (vgl. KMK 2003, unter: <http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm>) auf attraktive Weise zu konkretisieren und die unter dieser Idee nicht explizit formulierte Raumvorstellungsfähigkeit zu entwickeln.

Beim Einsatz von Cabri 3D für das interaktive Konstruieren im virtuellen Raum sollten u. a. folgende allgemeine geometrische Lernziele angestrebt werden:

- Geometrisches Sehen bzw. das „geometrische Auge“ schulen und den virtuellen Raum als Handlungsraum erfahren (*wahrnehmungsphänomenologische Lernziele*).
- Die Nützlichkeit der Raumgeometrie schätzen (*affektives Lernziel*).
- Raumgeometrisches Wissen (Begriffe, Aussagen und Verfahren) erwerben, anwenden und erweitern; die Raumvorstellung üben (*kognitive Lernziele*).

- Geometrisierbare räumliche Phänomene experimentell explorieren und mittels heuristischer Strategien analysieren (*metakognitive Lernziele*).
- Geläufigkeit in der Nutzung eines 3D-Grafikwerkzeugs erlangen (*technisches Lernziel*).

Das Arbeiten mit Cabri 3D kann die allgemeinen Methoden bzw. Arbeitsformen unterstützen, wie sie schon bei der Nutzung von Dynamischen 2D-Geometriensystemen zur Anwendung kommen. Insbesondere können folgende allgemeine Methoden der Erkenntnisfindung eine Verstärkung erfahren:

- die *Visualisierung* statischer und dynamischer raumgeometrischer Informationen (z. B. zur Erfassung raumgeometrischer Phänomene),
- die *induktive Methode* (etwa durch Erzeugung einer Vielzahl von Beispielen durch Variation einer Figur),
- die *Analogiemethode* (z. B. zur Analogisierung zwischen ebener und räumlicher Geometrie),
- die *Vernetzung bzw. Fusionierung* ebener und räumlicher Geometrie (z. B. bei Beweisen),
- die *operative Methode* (z. B. durch Invarianzuntersuchungen),
- das *experimentelle Arbeiten* (als eine propädeutische Arbeitsweise in der Geometrie – Vive le bricoleur!),
- die *Komplexitätsreduktion* (z. B. durch Ausblenden von Objekten),
- das *modulare Arbeiten* (etwa durch Verwenden von Formmodulen),
- das *Rückwärtsarbeiten* (z. B. durch Benutzung der Undo- und Redo-Funktion).

Das Beherrschen der mit den entsprechenden Computerwerkzeugen ausführbaren ebenen geometrischen Konstruktionen sollte auf die raumgeometrischen ausgedehnt werden, um eine zeitgemäße Methodenkompetenz im Rahmen des allgemein bildenden Mathematikunterrichts zu sichern.

Unseres Erachtens ist das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum ein Meilenstein auf dem Wege der Nutzung des Computers beim Lehren und Lernen von Raumgeometrie. Der virtuelle Raum wird zu einem neuen phänomenologischen Handlungs- und Erfahrungsraum im Geometrieunterricht.

Literatur

- Alexandrov, P. S. u. a. (Hrsg.) (1969): Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band IV Geometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- Bainville, E./Laborde, J.-M. (2004–2006): Cabri 3D 1.2 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitet von H. Schumann) zu beziehen über www.cotec.de
- Bieberbach, L. (1952): Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel: Birkhäuser
- Cromwell, P. R. (1997): Polyhedra. Cambridge: University Press

- Graf, U. (1964): Darstellende Geometrie. Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer
- Götze, H. (1991): Die Baugeometrie von Castel del Monte. München: Prestel
- Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum (2. Auflage)
- Quaisser, E./Sprenkel, H.-J. (1989): Geometrie in Ebene und Raum. Berlin: DVW
- Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik. Hannover: Schroedel (2. Auflage)
- Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler-Teubner
- Schumann, H. (2001): Raumgeometrie-Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen
- Schumann, H. (2004a): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“. In: *mathematica didactica* 27(1), S. 82–99
- Schumann, H. (2004b): Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3D im Umfeld der platonischen Körper. In: *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule* 18(2), S. 3–48
- Schumann, H. (2005a): Dynamische Raumgeometrie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*. Hildesheim: Franzbecker. S. 533–536
- Schumann, H. (2005b): Interaktives geometrisches Modellieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D. In: *LOG IN – Informatische Bildung und Computer in der Schule* 133, S. 55–61
- Schumann, H. (2005c): Eine dynamische Behandlung der Kegelschnitte mit Cabri 3D. In: *MNU* 58(6), S. 336–339
- Thaer, C. (Hrsg.) (1980): *Euklid. Die Elemente*. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. habil. Heinz Schumann
PH Weingarten, Fakultät III, Mathematik/Informatik
Institut für Mediendidaktik und Bildungsinformatik
Kirchplatz 2
D-88250 Weingarten
Email: schumann@ph-weingarten.de
Homepage: <http://www.mathe-schumann.de>

Eingang Manuskript: 14.01.2006 (überarbeitete Fassung: 16.06.2006)