Was für ein Zufall!?

Einige Bemerkungen über einen wenig beachteten Kern der Stochastik

von

Wilfried Herget, Halle a. d. Saale
Horst Hischer, Saarbrücken
Karin Richter, Halle a. d. Saale

Kurzfassung: Was ist das eigentlich: *Zufall?* Und warum wird der Begriff des Zufalls in der Stochastik und in der Didaktik der Stochastik so wenig und so selten thematisiert? – In diesem Beitrag wenden wir uns dem im deutschen Sprachraum mit dem schillernden Wort „Zufall" umschriebenen Problemfeld in seinem Facettenreichtum zu, als Anregung zum Weiterdenken: Wir betrachten *sprachliche Spuren im Kontext des Zufalls,* erkunden *historische Spuren zum Umgang mit dem Zufall*, diskutieren *phänomenologische Spuren bei der Begegnung mit dem Zufall* und stellen uns schließlich der Frage, inwieweit *„künstlicher" Zufall* – als ein wichtiges methodisches Werkzeug anwendungsbezogener Forschung, etwa bei Simulationsverfahren – nicht bereits a priori *ein Widerspruch in sich* ist.

Abstract: *Zufall* – this German word describes by no doubt part of the heart of stochastics – a very ambiguous word, shimmering between *coincidence, accident, chance, hazard, random*, … Here, we consider verbal traces in the context of this idea, we follow historical tracks, we discuss phenomenological views, and finally, we explore to what extent random numbers generated for some simulation by a computer algorithm are a contradiction *par excellence*.

Die Wahrscheinlichkeit für
Rot ist auch nach 42 roten Zahlen
noch die gleiche wie für Schwarz [...]
Obwohl wir diese Fakten abstrakt einsehen
und uns beim Spiel vielleicht sogar danach
richten, bleibt doch unsere Intuition unbelehrbar.

An die Unabhängigkeit und Zufälligkeit der Ereignisse
beim Glücksspiel kann sie sich einfach nicht gewöhnen.

Anscheinend ist unser rationaler Verrechnungsapparat,
der vernunftähnlich, aber keineswegs immer vernünftig arbeitet,
nicht in der Lage, sich auf unabhängige Zufallsereignisse einzustellen.
Warum nicht?

Gerhard Vollmer: Was können wir wissen?
Bd. 1: Die Natur der Erkenntnis. 1988, S. 126

1 Einleitung

- Was ist das eigentlich: *Zufall* – dieses Herzstück der Stochastik, des Geflechts aus mathematischer Wahrscheinlichkeitstheorie und beschreibender und beurteilender Statistik?

- Und warum wird der Zufall in der Mathematik (und auch in der Didaktik der Mathematik!) so wenig und so selten thematisiert, obwohl er doch Grundlage einer wichtigen mathematischen Disziplin ist – einer Disziplin, die geradezu par excellence für eine Symbiose aus einerseits spielerischer, nicht auf Nutzen gerichteter Reflexion (im Sinne einer philosophischen Qualität von Mathematik als „Wirklichkeit sui generis“) und andererseits einem durch Anwendung auf den „Rest der Welt“ gerichteten Tun (also durch mathematische Modellierung eines Ausschnitts dieses „Rests“) gekennzeichnet ist?

Da wir über die zweite Frage nur spekulieren können, werden wir uns in diesem Essay nur der ersten Frage zuwenden – getragen von der Überzeugung, dass es für den Erwerb eines Grundverständnisses stochastischer Phänomene und Theorien unerlässlich ist, sich auch dem im deutschen Sprachraum mit dem schillernden Wort „Zufall“ umschriebenen Problemfeld in seinen Facettenreichtum zuzuwenden.

So werden wir schon vom Wort „Zufall“, das ja anzeigt, dass einem etwas „zufällt“, darauf verwiesen, *sprachliche Spuren im Kontext des Zufalls* zu betrachten, zumal wir in anderen Sprachräumen hierfür oft kein direktes Adäquat finden – man denke etwa an die Unterscheidung in „chance“ und „hasard“ im Französischen. Und es wird interessant sein, *historische Spuren zum Umgang mit dem Zufall* zu erkunden, also der Frage nachzugehen, wann und in welchem Zusammenhang der Zufall in der kulturhistorischen Entwicklung welche Rolle spielte.

Bedenkt man weiterhin, dass heute der Zufall mit dem Computer simuliert wird, sogar schon durch Taschenrechner, dass heute also *„künstlicher“ Zufall* ein wichtiges methodisches Werkzeug anwendungsbezogener Forschung ist, etwa bei Simulationsverfahren, so muss man fragen, ob so etwas nicht *ein Widerspruch in sich* ist. Dies führt aber wieder zurück zu der Frage, was denn Zufall „ist“ bzw. was Zufall für uns „sein soll“! Dazu ist es wichtig, *phänomenologische Spuren zum Umgang mit dem Zufall* zu betrachten.

Damit sind vier Aspekte beschrieben, denen wir uns in den nächsten Abschnitten widmen werden. Das kann hier jedoch nur schlaglichtartig geschehen, und natürlich sind diese vier Aspekte nicht trennscharf. Außerdem werden wir uns meist damit begnügen (müssen!), eine subjektive, knapp kommentierte Auswahl von Zitaten zu präsentieren, um damit, unserer Intention folgend, die Vagheit und den inhaltlichen Reichtum des mit dem Wort „Zufall“ gemeinten Begriffs zu erhellen.

2 Sprachliche Spuren zum Umgang mit dem Zufall

Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeit.
Novalis (1772–1801)[1]

Zufall in der Alltagssprache – bereits ein Blick in Wörterbücher einiger Sprachen lässt ahnen, wie vielschichtig, vieldeutig, ja: vielsagend, vielversprechend der mit diesem Wort verbundene schillernde Begriff ist.

Mittelhochdeutsch:	zuoval
lateinisch:	accidentia, casus, fortuna
englisch:	accident, chance, coincidence, hazard, random
französisch:	accident, chance, fortune, hasard
russisch:	случай (slutschai; auch: Geschehen, Vorfall), необходимость (neobchadimost'ch; auch: Nichtnotwendiges), непредвидение (nepredvidenie; auch: Nichtvorhergesehenes)

Dies spiegelt die zahlreichen speziellen, kontextbezogenen, durchaus unterschiedlichen (umgangs-)sprachlichen Belegungen rund um das Wort *Zufall* auch im deutschen Sprachgebrauch wieder. Wer wie selbstverständlich glaubt, auf diesem intuitiven Verständnis ohne weiteres mathematische Auseinandersetzungen mit Zufallserscheinungen aufbauen zu können, baut zwangsläufig auf Treibsand: Unser mathematischer Blickwinkel ist eben nur eine unter den vielen Möglichkeiten, das Wort *Zufall* zu verstehen.

- Türen *fallen* krachend *zu*.
- Einsichten können Menschen zuteil werden, d. h. *zufallen*.
- Ein Vorfall kann unerwartet, also *zufällig* sein.

Schon diese wenigen Beispiele lassen die Vielschichtigkeit der Wortbildung ahnen. Das Grimmsche Wörterbuch erweist sich als profunde Quelle, die Spannweite weiter auszuloten. Aber auch die Beschränkung auf den für die Stochastik interessanten Bereich des Zufallsbegriffs birgt viele unterschiedliche Nuancierungen. Die folgende kurze Liste von uns geläufigen Formulierungen, die um den Zufallsbegriff kreisen, ließe sich unschwer erweitern.

Bekannt ist der Julius Cäsar zugeschriebene Satz: *„Alea iacta est."* Er rückt den Zufall als *Ereignis*, als Vorfall, als *Geschehnis* in den Mittelpunkt, durch das eine von mehreren Möglichkeiten gewählt oder realisiert wurde. Genauer gilt:[2]

> »Iacta est alea — Gefallen ist der Würfel«. Ulrich von Huttens (1488–1523) Wahlspruch enthält keine Spur des Zufalls; denn das Ergebnis liegt ja auf dem Tisch. Er geht zurück auf Sueton (70–140), der Caesar (100/102–44 v. Chr.) anläßlich der Überschreitung des Rubikon (49 v. Chr.) sagen läßt »iacta alea est« (Caes. 32).

---

1 [Novalis 1929, Bd. 2]; [Bauer 1991, VII] stellt dieses Zitat seiner Einleitung voran; (Novalis: eigentlich Friedrich Frhr. von Hardenberg).

2 [Barth & Haller 1994, 9]

Unbestimmtheit, Ungewissheit oder Unsicherheit – als Widerspiegelung einer Schar von Möglichkeiten – werden durch einen Vorgang oder im Laufe eines Vorgangs schließlich abgelöst durch ein bestimmtes *Ergebnis*. Im russischen Sprachgebrauch wird dieses Verständnis besonders deutlich: Das Wort *случилось* (slutschilos'ch; *so geschah es*) hängt ganz unmittelbar mit dem gebräuchlichen russischen Wort *случай* (slutschai) für Zufall (im Sinne von Geschehen) zusammen.

„Wo blinder Zufall wütet ..." – das Eintreten des Unvorhergesehenen (Unsicherheit und Ungewissheit an die Seite gestellt), hier mit unangenehmer, ja negativer Färbung; das nicht deterministisch Vorherbestimmte oder Steuerbare, dem man sich ausgeliefert sieht: Der Zusammenhang zwischen der angesprochenen negativ gefärbten, eben „pessimistischen" Unsicherheit über das Kommende und dem französischen und englischen Wort *accident* (abgeleitet vom lateinischen *accidere*), das neben *Zufall* eben auch mit *Unfall* übersetzt werden kann, liegt nahe: Der Unfall als Ergebnis eines unglücklichen Zufalls.

„Versuch' dein Glück!" – auch die hoffnungsvolle Unsicherheit hat in diesem Kontext ihren Platz. *„Gib dem Glück eine Chance!"* – eine Formulierung, die die Ungewissheit über die tatsächlich eintretende (eintreten werdende) Realisierung eines Vorgangs gewissermaßen mit Vorschusslorbeeren bewertet. *„Es könnte ja doch immerhin sein, dass ..."* – Solch eine Formulierung dürfte Credo eines jeden Glücksspielers sein. Die Verbindung zwischen Unsicherheit über das Geschehende einerseits und hoffnungsvoller Erwartung, dem „Ausrechnen einer guten Chance", andererseits zeigt also auch hier eine ausgesprochen emotionale Bewertung und Bewichtung eines ungewiss endenden Vorgangs. (Man denke an das französische und das englische Wort *fortune* für *Zufall*, *Schicksal, Glück*. Die Wurzeln hierfür liegen natürlich im lateinischen *fortuna*, das im 17. Jahrhundert mit der Übertragung durch *(glückhafter) Zufall* auch in den deutschen Sprachgebrauch Einzug hielt.) So wird klar, dass wesentliche Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Bereichen des Glücksspiels und der Vorhersage bzw. der Weissagung liegen.

„Mit des Geschickes Mächten ist nicht zu rechten." – Auf den ersten Blick erscheint die Zufallsproblematik mit diesem Sprichwort nicht verbunden zu sein. Doch auch hier verbirgt sich der Gedanke von Ungewissheit: Auf der Grundlage irgendwelcher „äußerer Bedingungen" ist all das, was auch immer eintreten möge, letztlich hinzunehmen. Die religiöse Interpretation liegt nahe: Göttliche Kräfte oder *das Schicksal* bestimmen das Leben, das vom Menschen in seinem Ablauf niemals bis ins Einzelne vorhersehbar, also stets mit Unsicherheit behaftet ist – so das Sprichwort. Kein Wunder also, dass von den frühesten Zeiten an das Ringen um den Zufallsbegriff mit philosophischen und theologischen Betrachtungen verknüpft war. Und noch etwas scheint hier durch: das von der Philosophie des Determinismus geprägte und getragene Grundverständnis, dass Zufall „nur" Ausdruck bzw. Widerspiegelung nicht vollständiger (nicht ausreichender, nicht erlangbarer) Kenntnisse über die Bedingungen und Gesetzmäßigkeiten des zu betrachtenden Problems sei –

ein Betrachtungsstandpunkt, der sich auch noch im 20. Jahrhundert in manchen (natur-)wissenschaftlichen Erörterungen findet.

Die Reihe ähnlicher Formulierungen rund um den Zufallsbegriff ließe sich fortsetzen (siehe auch [Sill 1993]) – und führt auf immer wieder neue Facetten zum Wortverständnis, die die Vielschichtigkeit und zugleich feinsinnig-diffizile Nuancierung deutlich werden lassen. Mit ein wenig detektivischem Spürsinn können dafür Beispiele in Zeitungsartikeln gefunden werden, ferner in Alltagsgesprächen, in den eigenen Gedankengängen und auch in wissenschaftlichen Disputationen.

3 Historische Spuren zum Umgang mit dem Zufall

„Was für ein Zufall!“ – eine Formulierung, die in unserer Umgangssprache zu Hause ist. Man „weiß“ ganz einfach, was gemeint ist, wenn vom „bösen Zufall“, vom „Zufallserfolg“ oder Ähnlichem gesprochen wird – ohne eine weitere Erläuterung zu erwarten und ohne es gar etymologisch zu hinterfragen.

Im mathematischen Sprachgebrauch dagegen bedarf es – so sollte man meinen – einer eindeutigen, belastbaren Definition des Begriffs *Zufall*[3] im logisch strengen Sinne, d. h. einer wissenschaftlich stichhaltigen Sinnunterlegung des hier zu Grunde gelegten Wortes *Zufall*.

Das uns heute umgangssprachlich geläufige Wort *Zufall* hat seine Wurzeln in der Übertragung unterschiedlicher lateinischer und griechischer Begriffe. Dementsprechend umfasst es unterschiedliche Bedeutungsfacetten.[4]

Zum einen ist es die Belegung des lateinischen Wortes *accidens* (das von außen zum eigentlichen Wesen „Hinzukommende“) mit dem Begriff *Zufall*, wesentlich geprägt durch Mystiker des späten Mittelalters. Zum anderen sind es im 17. Jahrhundert dann die Begriffe *fortuna* (als lateinische Übertragung des griechischen Wortes *tychhe*, in der Bedeutung von Schicksal oder Fügung) und *casus* (als Übersetzung des griechischen *automaton*, im Sinne von Ereignis oder Vorfall im Naturgeschehen), für die im Deutschen das Wort *Zufall* eingeführt und gebraucht wird.

Unsere Spurensuche zum Zufallsbegriff beginnt deshalb mit einem Blick auf die griechische Antike, auf ihr Naturverständnis, ihre Philosophie.

An zentraler Stelle steht hier naturgemäß der Determinismus – insbesondere verbunden mit dem Namen *Demokrit* (um 460 v. Chr.), etwa bei [Tarassow 1993, 11]:

---

3 Diese (durchaus übliche) Formulierung ist sprachphilosophisch nicht streng, da ja „Zufall“ *kein Begriff*, sondern nur ein *Bezeichner für einen Begriff* ist. So müsste es eigentlich heißen: „ ... Definition des mit dem Wort *Zufall* verbundenen Begriffs ... “. Der leichteren Lesbarkeit halber belassen wir es hier und im Folgenden bei den weniger präzisen Formulierungen.

4 Nach [Kluge 2002].

> Demokrit identifizierte das Zufällige mit dem Nichterkennnen und glaubte, die Natur sei in ihrer Grundlage streng determiniert.

Andererseits finden sich aber bereits in der Antike Philosophen, die einen derart kategorischen Determinismus ablehnen – wie etwa Epikur (341–271 v. Chr.):[5]

> […] einiges entsteht infolge der Notwendigkeit, anderes […] infolge des Zufalls und noch anderes durch uns selbst.

Bei Aristoteles (384–322 v. Chr.) stößt man (in seinen Erörterungen zur Physik) ebenfalls auf eine für unsere Frage interessante Analyse des Zufallsbegriffs. Für ihn entstehen zufällige Ereignisse nicht „aus dem Nichts“, sie haben vielmehr Ursachen. Ihr Eintreten ist mithin im Bereich des Möglichen, auch wenn es nicht vorhersehbar oder (verbindet man es mit einer Wertung) „eher unwahrscheinlich“ ist.

Dieses Aristotelische Zufallsverständnis blieb für Jahrhunderte von Bedeutung, ja prägend, und ist es im Alltagsgebrauch oft heute noch – dies zeigen auch Schülerbefragungen, etwa [Sill 1993] und [Döhrmann 2004, 43 ff.].

Im wissenschaftlich-philosophischen Verständnis dagegen änderte sich mit dem ausgehenden 17. Jahrhundert Grundlegendes (vgl. [Stewart 1990, 15]):

> Die Revolution im wissenschaftlichen Gedankengut, die in Newtons Lehre gipfelte, führte zu der Vision, das Universum als gigantischen Mechanismus zu betrachten, der wie ein Uhrwerk funktioniert.

Dieses deterministische Gesamt-Verständnis spiegelt sich auch bei den Mathematikern wider, deren Namen heute untrennbar mit der Wahrscheinlichkeits*theorie* verbunden sind: Pierre Simon Laplace (1749–1827), Jacob Bernoulli (1654–1705).

> Alle Ereignisse, selbst die, die wegen ihrer Kleinheit und ihrer Unregelmäßigkeit nicht in das allgemeine System des Kosmos zu passen scheinen, sind davon eine ebenso notwendige Folge wie die Umläufe der Sonne. Wir schreiben sie dem Zufall zu, weil wir die Ursachen nicht kennen, die sie hervorbringen, und die Gesetze, die sie mit den großen Erscheinungen des Universums verketten; […] Das Wort Zufall drückt also nichts anderes als unser Unwissen über die Ursachen der Erscheinungen aus, die wir ohne eine sichtbare Ordnung eintreten und einander folgen sehen.[6]

> Zufällig sowohl im Sinne von frei, d. h. von der Willensentscheidung eines rationalen Geschöpfes abhängig, als auch im Sinne des aufs Geratewohl, d. h. des von Nebenumständen Bestimmten, ist das, was nicht sein, nicht werden oder nicht gewesen sein könnte, wohlgemerkt auf Grund einer fernliegenden, nicht der nächstliegenden Verwirklichungsmöglichkeit; das Zufällige schließt nämlich nicht immer jede Notwendigkeit hinsichtlich der sekundären Ursachen aus, was ich an Beispielen erklären werde. Ein Würfel kann mit absoluter Sicherheit zu dem Zeitpunkt, zu dem er die Hand des Werfenden verlässt, bei gegebener Lage, Geschwindigkeit und Abstand vom Spielbrett nicht anders fallen, als er tatsächlich fällt […] Zufälligkeit betrifft also […] vor allem unseren Kennt-

---

5 Epikur, Diogenes Laertius, Buch X, Hamburg 1968, S. 133.

6 Aus: P. S. Laplace, Oeuvres complètes, Bd. X, Paris 1894, S. 295. – Zitiert nach [Schneider 1989, 71].

> nisstand, nämlich inwieweit wir im Objekt keinen Widerspruch gegen das gegenwärtige oder künftige Nichtsein sehen, obwohl es hier und jetzt kraft der unmittelbaren, uns aber unbekannten Ursache notwendig ist oder wird.[7]

Dies könnte zu einem schnellen (wie wir sehen werden: zu einem vorschnellen) Urteil verleiten: *Mathematik ist streng deterministisch, in ihr hat Zufall keinen Platz; es kann nur darum gehen, konkrete Eintrittschancen zu bewerten.* Die Glücksspielrechnung, die historisch am Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematischer Theorie stand, scheint dies zu untermauern. Ja, mehr noch: Auch noch bei Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov (1903–1987) und seinem axiomatischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit (vgl. [Kolmogorov 1933]), der vielen als die Geburtsstunde der modernen Stochastik gilt, findet sich keine Erörterung des Begriffs *Zufall*. Nicht im Zufallsbegriff, sondern in dem ihn fassbar machenden mathematischen Instrument *Wahrscheinlichkeit* fixiert Kolmogorov das mathematische Kernproblem.

Es waren vor allem die – für das ausgehende 19. und das beginnende 20. Jahrhundert charakteristischen – Entwicklungen in den Naturwissenschaften, die hier zu einer Neuorientierung führten. Insbesondere die Entwicklung der Thermodynamik machte es erforderlich, Überlegungen zum Zufall und seinen Gesetzmäßigkeiten einzubeziehen. Quantenprozesse ließen sich nicht mehr deterministisch beschreiben, sie erforderten stochastische Beschreibungsmittel. Niels Bohr (1885–1962) beschreibt dies treffend (vgl. [Bohr 1985, 4]):

> Die Tatsache, daß die Wiederholung ein und desselben Experiments, das nach den obigen Richtlinien beschrieben wird, im allgemeinen verschiedene […] Registrierungen liefert, bedeutet, daß solche Ergebnisse nur mit Hilfe statistischer Gesetze umfassend beschrieben werden können.

Hier wird der enge Zusammenhang zwischen Determinismus und Zufall deutlich, den Henri Poincaré (1854–1912) bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts so formuliert (vgl. [Poincaré 1914, 56–57]):

> Würden wir die Gesetze der Natur und den Zustand des Universums für einen gewissen Zeitpunkt genau kennen, könnten wir den Zustand des Universums für irgendeinen späteren Zeitpunkt genau vorhersagen. Aber […] es kann der Fall eintreten, daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen. […] Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine zufällige Erscheinung.

Der Schritt von dort bis hin zu der heute recht selbstverständlich erscheinenden Chaostheorie scheint auf dieser Basis klein zu sein – jedenfalls kleiner, als er sich dann in der tatsächlichen wissenschaftlichen Entwicklung erweist.

---

[7] Aus: J. Bernoulli, Ars conjectandi, in der Übersetzung von R. Haussner, Oswald’s Klassiker der modernen Wissenschaften Bd. 107, Leipzig 1899. – Zitiert nach [Schneider 1989, 63].

Und dennoch: Der Begriff des Zufalls steht auch in modernen Untersuchungen unvermindert und brandaktuell im Spannungsfeld von Determinismus und Unvorhersagbarkeit und fordert demgemäß immer wieder dazu heraus, konkret hinterfragt zu werden.

4 Mathematische Spuren zum Umgang mit dem Zufall

Ein wesentliches Merkmal des Zufallsversuchs ist die Regellosigkeit des Auftretens der Ausfälle in einer Zufallsversuchsreihe. Der Begriff der Regellosigkeit ist nun keineswegs zur Präzision des Begriffs des Zufalls geeignet, da auch er sich einer strikten mathematischen Definition entzieht.[8]

Der Blick auf die historische Entwicklung macht deutlich: Im Mittelpunkt der sich nach und nach herausbildenden Wahrscheinlichkeitstheorie steht eben *nicht* die mathematische *Definition* des Begriffs *Zufall*. Vielmehr geht es vor allem darum, (konkrete Eintritts-)Chancen zu diskutieren und zu berechnen, und zwar bei Glücksspielen, bei demographischen, wirtschaftlichen, versicherungstechnischen Problemen und für eher mystische Vorhersagen.

Und doch: Der Begriff des Zufalls bildet im eigentlichen Sinne die Grundlage zur mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung – die Frage nach seiner mathematischen Festlegung bleibt, und diese Frage ist nach wie vor aktuell und brennend.

Wie sieht es also heute in mathematischen Standardwerken der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Bezug auf den Zufallsbegriff aus?

Wer erwartet, dass dort der Begriff *Zufall* im mathematisch exakten Sinne reflektiert und analysiert wird, wird enttäuscht. Allenfalls wird an Beispielen verdeutlicht, auf welchen Grundsituationen die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Theorie aufbaut – und Zufall ist dann im Sinne axiomatischer Vorgehensweise noch nicht einmal ein „undefinierter Grundbegriff". Warum ist das so? Aus dem vorangehend Gesagten schimmert eine erste mögliche Antwort hervor: Stochastik als mathematische Theorie setzt sich mit den Gesetzmäßigkeiten auseinander, die dem zentralen Begriff der *Wahrscheinlichkeit* innewohnen, nicht mit dem „nicht greifbaren" Zufall, der inhaltlich vorgelagert ist. – Ist es vielleicht sogar unmöglich, den Zufallsbegriff mathematisch „dingfest" zu machen? Doch wie kann dann eine solche Theorie überhaupt auf reale „zufallsbedingte" Phänomene angewendet werden?

Auf der Suche nach einer Antwort schauen wir zunächst einmal stichprobenartig in wahrscheinlichkeitstheoretische Standardliteratur.

---

[8] Nach [Brockhaus-Enzyklopädie 1994].

Heinz Bauer beginnt sein Lehrbuch „Wahrscheinlichkeitstheorie“ wie folgt (vgl. [Bauer 1991, VII]):

> Die Wahrscheinlichkeitstheorie verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, mathematische Einsichten in vom Zufall gesteuerte Abläufe zu gewinnen […]. So steht die Aufgabe, mathematische Modelle für das Studium von Zufallsexperimenten zu entwickeln, am Beginn […]. Dabei interessierten ursprünglich vor allem solche Zufallsexperimente, die einen Bezug zu Glücksspielen hatten.

Im Kapitel I: *Grundbegriffe der Theorie* führt er weiter aus (vgl. [Bauer 1991, 1]):

> Die Wahrscheinlichkeitstheorie verfolgt das Ziel, Methoden zur Beschreibung und Analyse von Experimenten mit zufälligem Ausgang bereitzustellen […] Beginnen wir mit der Analyse einiger einfacher Zufallsexperimente […].

Die erste Definition des Buches – unter diesem Blickwinkel folgerichtig und konsequent – ist diejenige der *Zufallsvariablen* als einer messbaren Abbildung zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum und einem Messraum (vgl. [Bauer 1991, 14]).

Direktere Formulierungen (eher wohl: Formulierungs*versuche*) zum Zufallsbegriff wie etwa die folgende sind dagegen in (einführenden) Stochastik-Lehrbüchern eher selten zu finden (vgl. [Maibaum 1976, 14]):

> Unter einem zufälligen Versuch verstehen wir einen Versuch, dessen Ausgang im Rahmen verschiedener Möglichkeiten ungewiss ist und der sich unter Einhaltung der den Versuch kennzeichnenden äußeren Bedingungen beliebig oft (zumindest gedanklich) wiederholen lässt.

Bemerkenswert und die Problematik schlaglichtartig verdeutlichend dabei ist: Maibaum schreibt dies (bewusst) nicht in Form einer mathematischen Definition nieder; er steuert nach dieser eher umgangssprachlich-eingängigen Skizzierung auch im Weiteren nicht auf eine mathematische Definition hin, sondern sucht den Begriff *Zufall* an Beispielen zugänglich zu machen.

Diese beiden ausgewählten Belegstellen sind durchaus charakteristisch. Der Schritt vom „realen zufälligen“ (eigentlich: als zufällig im umgangssprachlichen Sinne erkannten oder eingestuften) Phänomen zur mathematisch korrekten Beschreibung stellt auch in der neueren mathematischen Literatur ein *sprachlich-inhaltliches* Problem dar – ein Problem, das zwar *unmittelbar vor* dem mathematischen Untersuchungsgegenstand liegt (sowohl im räumlichen als auch im zeitlichen Sinne gemeint und interpretierbar!), das aber nicht immanent in der mathematischen Theorie selbst liegt.

Bescheiden wir uns daher mit der folgenden vorsichtigen Antwort: Augenscheinlich stoßen wir mit der Frage nach dem mathematischen Verständnis des Zufallsbegriffs auf ein Problem, für das sich in streng mathematischer Sicht und im mathematischen Kontext offenbar nicht so einfach eine wirklich stichhaltige, belastbare Lösung finden lässt.

Jedoch: Wenn man sich auf den Blickwinkel einlässt, an den mathematischen Ausgangspunkt den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu stellen, der Zufallserscheinungen in ihrem Eintrittsverhalten fassbar macht, so entfaltet sich die Stochastik in all ihrer Leistungsfähigkeit und – diese Bewertung sei gestattet – in all ihrer Schönheit.

5 Phänomenologische Spuren zum Umgang mit dem Zufall

Ist der Zufall vermeidbar?

Sollte man danach streben, den Zufall aus der eigenen Lebensgestaltung auszuschließen? Kann man es überhaupt? Diese Fragen hängen natürlich unverbrüchlich damit zusammen, was denn „Zufall“ ist bzw. was er für das Individuum bzw. die Gesellschaft bedeutet. Ja, gibt es denn überhaupt *die* Bedeutung von „Zufall“?

Lew Tarassow geht auf diese Situation in einem fiktiven Gespräch des Autors mit seinem Leser ein (vgl. [Tarassow 1998, 9]):

> **Leser**: [...] Trotzdem habe ich das Gefühl, daß der Zufall im großen und ganzen eine negative Rolle spielt. Sicher, es gibt auch glückliche Zufälle. Doch bekanntlich sollte man sein Glück nicht dem Zufall überlassen. Die Zufälligkeiten stören uns, durchkreuzen unsere Pläne. Besser ist, nicht von ihnen abzuhängen. Wir sollten lieber versuchen, uns von ihnen zu befreien; es ist ratsam, den Zufall nach Möglichkeit auszuschließen.
>
> **Autor**: So ist im allgemeinen unsere Einstellung dem Zufall gegenüber. Heutzutage bedarf sie allerdings einer grundlegenden Revision. Überlegen Sie doch: Ist es wirklich möglich, den Zufall aus unserem Leben auszuschließen?
>
> **Leser**: Ich behaupte nicht, daß es immer möglich ist. Ich empfehle nur, danach zu streben.

Anhand der Schilderung einer fiktiven Situation in einer Unfallklinik konzediert dann der „Leser“ allerdings, dass man z. T. Zufälligkeiten in Kauf nehmen müsse. Das Gespräch wendet sich dann der Rolle des Zufalls für die Wissenschaft zu, denn aus dieser Position heraus argumentiert Tarassow: [9]

> **Autor**: [...] Jede Entdeckung geht mit der Ausnutzung zufälliger Faktoren einher.
>
> **Leser**: Ich glaube nicht, daß eine nützliche Entdeckung ohne tiefe Fachkenntnisse ganz zufällig gemacht werden kann.
>
> **Autor**: Da stimme ich Ihnen zu. Eine Entdeckung setzt darüber hinaus nicht nur einen hohen Qualifikationsgrad des Forschers, sondern auch einen gewissen Entwicklungsgrad der Wissenschaft insgesamt voraus. Trotzdem spielt der Zufallsfaktor bei einer Entdeckung eine fundamentale Rolle.
>
> **Leser**: Darf man den Begriff *fundamental* wirklich mit dem Zufall in Verbindung bringen? Ich kann mir vorstellen, daß Zufälle nützlich sein können. Wieso jedoch dann grundlegend? Letzten Endes haben wir es mit Zufälligkeiten erst zu tun, wenn wir etwas nicht wissen, etwas nicht berücksichtigen können.

---

9 [Tarassow 1998, 10 f.]

> **Autor**: In festem Glauben, daß sich ein Zufall aus unseren unvollständigen Kenntnissen ergibt, ordnen Sie ihn den *subjektiven* Begriffen zu. Daraus folgt, daß das Zufällige gleichsam an der Oberfläche liegt, während den Erscheinungen nichts Zufälliges zugrunde liegen kann, nicht wahr?
>
> **Leser**: So ist es. Deshalb darf man von der grundlegenden Rolle des Zufälligen auch nicht sprechen. Je nach der Entwicklung der Wissenschaft erweitern sich auch unsere Möglichkeiten, verschiedene Faktoren zu berücksichtigen, im Ergebnis wird der Bereich immer enger werden, in dem der Zufall eine Rolle spielt. Nicht von ungefähr heißt es doch, daß die Wissenschaft ein Feind des Zufälligen ist.
>
> **Autor**: Nicht in allem haben Sie recht. Mit der Entwicklung der Wissenschaft werden die Möglichkeiten für wissenschaftliche Prognosen wirklich größer, die Wissenschaft wirkt also gegen den Zufallsfaktor. Zugleich stellt sich heraus, daß mit der Vertiefung der wissenschaftlichen Kenntnisse, genauer gesagt, beim Übergang auf die molekulare bzw. atomare Ebene der Betrachtung von Erscheinungen der Zufall nicht nur keine geringere, sondern im Gegenteil, eine vorherrschende Rolle zu spielen beginnt. Es zeigt sich, daß seine Existenz vom Grad unserer Kenntnisse nicht mehr abhängt. Gerade in der Ebene der Mikrowelt läßt der Zufall seine grundlegende Rolle *erkennen*.

So steuert der Dialog darauf hin, zwischen einem *subjektiven Zufall* und einem *objektiven Zufall* als grundsätzlich unterschiedlichen Phänomenen unterscheiden zu müssen, wobei das erstgenannte Phänomen mit „subjektiver Unkenntnis“ in Verbindung zu bringen ist. Hierauf gehen wir im Folgenden zuerst ein.

Zufall und Unkenntnis

Der oben wiedergegebene Dialog geht weiter, indem der Leser mehr über diese grundlegende Rolle des Zufalls zu erfahren wünscht und der Autor daraufhin ausführlich auf Epikur und Demokrit eingeht, was der Leser wie folgt kommentiert (vgl. [Tarassow 1998, 11]):

> **Leser**: Mir fällt auf, daß ich Auffassungen ähnlich denen Demokrits über den Zufall vertrat, ohne es zu wissen. [...]

Doch welches sind diese Auffassungen von Demokrit, dem antiken Philosophen? Wir lesen dazu etwa bei dem Philosophen Hermann Glockner:[10]

> Nach der Herkunft des Stoffes fragt Demokrit sowenig wie nach dem Ursprung der Bewegung. Er ist der kritische Empirist, insofern er von der Sinneserfahrung ausgeht, im Laufe der Untersuchung jedoch ihre Grenzen feststellt: „In Wahrheit gibt es nur Atome und Leeres“. Die Atome sind das <u>Wirkliche</u>; was über ihre Beziehungszusammenhänge festgestellt werden kann, ist das <u>Wahre</u>. Die erste Feststellung dieser Art betrifft das Verhältnis des Wirklichen zum Leeren: Wirbel von Atomen, im Leeren umhergeschleudert, teils nach ihrer Gleichartigkeit zusammengeführt, teils ebenso mechanisch wieder voneinander getrennt. Dabei waltet jedoch <u>kein Zufall</u>. „Vom Zufall haben sich die Menschen ein <u>Schaumbild</u> geformt zur Beschönigung ihrer eigenen Unberatenheit.“ [...] Vom Zufall erwartet er nichts, alles von der Weisheit.

---

10 [Glockner 1977, 48 f.]; Hervorhebungen nicht im Original.

„Zufall" tritt hier mit einer negativen Konnotation auf: So neigt der Mensch offenbar dazu, den Zufall für das *nicht Erklärbare* zu bemühen, also den *Mangel an Kenntnis, an Wissen* über gewisse Zusammenhänge durch Heranziehung des Zufalls auszugleichen, womit man dann ein „Erklärungsdefizit" konzediert.

Der Naturwissenschaftsphilosoph Gerhard Vollmer verdeutlich dies am Beispiel der Bedeutung des Zufalls für den Verhaltensforscher Konrad Lorenz:[11]

> Unvoraussagbar sind gar nicht erst die neuen Systemeigenschaften, sondern schon die neuen Systeme selbst.
>
> Sind die Systeme jedoch einmal vorhanden, so kann man sie wenigstens nachträglich zu *erklären* versuchen. Tatsächlich – und eben deshalb – kann die Evolutionsbiologie viel mehr erklären als voraussagen. Soweit allerdings <u>Zufallselemente</u> für das Entstehen eines Systems maßgebend waren, werden auch die *Erklärungen* unvollständig bleiben: <u>Zufällige Ereignisse</u> haben keine <u>Ursache</u>, und wo es keine Ursache gibt, da gibt es auch keine <u>kausale Erklärung</u>. Aber auch dieses Erklärungs-Defizit beruht – wie das Voraussage-Defizit – nicht auf dem Auftreten neuer Systemeigenschaften, sondern auf dem <u>zufallsbedingten Auftreten neuer *Systeme*</u>.
>
> Erstaunlicherweise hat Konrad Lorenz diesen Zusammenhang nicht gesehen. Er betont zwar, am Gang der Evolution müsse vieles unerklärt bleiben (und spricht dabei [...] von einem „nicht rationalisierbaren Rest"), sieht den Grund jedoch allein in der überwältigend großen Zahl der organismischen Merkmale und der zugehörigen <u>Ursachenketten</u>, die wir niemals vollständig verfolgen oder rekonstruieren könnten und deshalb <u>aus Resignation *Zufall*</u> nennten. Lorenz bleibt also letztlich Determinist, und hinter dem Begriff „Zufall" verbirgt sich für ihn nichts weiter als <u>Unkenntnis</u>. In Wahrheit ist aber schon der hier zugrundegelegte Determinismus unhaltbar.

„Subjektiver Zufall" versus „Objektiver Zufall"?

Wenn nun – wie wir gerade exemplarisch gesehen haben – der Zufall in gewissen Situationen als Erklärungsdefizit bemüht wird, dann kann dies durchaus an dem Unvermögen der einzelnen Urteilenden liegen – der Zufall wäre dann ein *subjektives Phänomen*, das in dessen individueller Sichtweise (griechisch: „Theorie") als „Zufall" erscheint, aus einer anderen individuellen Sichtweise hingegen möglicherweise nicht.

Es ist aber auch denkbar, dass es in gewissen Situationen dem menschlichen Erkenntnisvermögen grundsätzlich nicht möglich ist, eine Erklärung für eine bestimmte „zufällige" Erscheinung zu finden – der Zufall wäre dann in dem Fall ein *objektives Phänomen*. Dabei lassen wir es zunächst offen, ob unser Erkenntnisvermögen es zulässt, festzustellen, ob es überhaupt einen solchen objektiven Zufall gibt – es ist zunächst nur eine Denkfigur.

Werfen wir dazu einen weiteren Blick in den bereits betrachteten Dialog bei [Tarassow 1998, 13 f.]:

---

[11] [Vollmer 1995, 86]; unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

> **Leser**: Da muß ich der Behauptung zustimmen, daß die Zufälligkeiten nicht zu bekämpfen sind, daß man ihnen eher entgegenkommen muß.
>
> **Autor**: Dieses sollten wir präzisieren. Die Zufälligkeit, die mit der Unvollständigkeit unserer Kenntnisse zusammenhängt, ist natürlich nicht erwünscht. Während der Mensch die ihn umgebende Welt erforscht, bekämpft er diese Unvollkommenheit und wird immer gegen sie antreten. Zugleich muß er einsehen, daß neben dem *subjektiven* Zufall, der auf den Mangel an Angaben über diese oder jene Erscheinung zurückzuführen ist, ein *objektiver* Zufall existiert, der den Erscheinungen zugrunde liegt. Man beachte auch die positive, schöpfende Rolle des Zufälligen. [...]

Bezüglich der letzten beiden Sätze muss man wissen, dass Tarassow zuvor eine atheistische Position vertritt, indem er den Autor mit Bezug auf Beispiele der Evolutionstheorie und der Quantenmechanik auf S. 13 sagen lässt:

> Da wir die tragende Rolle des Zufälligen belegt haben, können wir die Idee verwerfen, es gäbe einen übernatürlichen Schöpfer. Bei der Antwort auf die Frage, wie Pflanzen, Tiere und der Mensch entstanden sind, verweisen religiöse Lehren auf Gott. Wirkliche Urheber sind hier der *Zufall* und die *Selektion*.

Ohne dass Tarassow es explizit formuliert, meint er hier ersichtlich den zuvor erwähnten *objektiven Zufall*. Inhaltlich werden wir hier aus guten Gründen keine Position beziehen. Wir merken jedoch an, dass Tarassows Schlussfolgerung ebenfalls nur eine „Glaubensfrage" ist – man kann ja auch den Standpunkt einnehmen, dass der Schöpfer, dessen Existenz Tarassow negiert, sich im Zufall geradezu offenbart. Zumindest wird deutlich, dass eine Erörterung des Phänomens „Zufall" auch eine theologische Perspektive aufweist.

Wieso aber *muss* der Mensch nun gemäß Tarassow einsehen, dass es einen subjektiven Zufall gibt (egal ob in religiöser oder atheistischer Sicht)?

Zufall und Regelmäßigkeit

Sind „Zufall" und „Regelmäßigkeit" Gegensätze, oder passen sie zusammen, gehören sie gar zusammen? Bereits Aristoteles befasste sich mit dieser Frage:[12]

> Im sechsten Buch seiner „Metaphysik" erklärt Aristoteles, Wissenschaft habe zu ihrem Gegenstande das, was *immer* der Fall ist oder was wenigstens in den meisten Fällen stattfindet. Nur <u>das Regelmäßige</u> könne Gegenstand einer betrachtenden Wissenschaft [...] werden. Außer dem Regelmäßigen gebe es aber in der Welt noch <u>Unregelmäßiges</u>, <u>Kontingentes</u>, <u>Zufälliges</u>, <u>Akzidentelles</u>. (Das deutsche Wort Zu-fall ist eine treue Lehnübersetzung des lateinischen ac-cidens bzw. des griechischen συμ–βεβηκος (von [...] es trifft sich).

[Vollmer 1988 b, 66] verweist in diesem Zusammenhang auf die Tatsache, dass bei einer Sonnenfinsternis die Sonnenscheibe von der Mondscheibe genau verdeckt würde, dass also Sonne und Mond einem irdischen Beobachter „gleich groß"

---

[12] [Vollmer 1988 b, 53]; unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original; man lese συμ–βεβηκος als „sym-bebekós".

erscheinen würden, nämlich unter einen Öffnungswinkel von ca. 0,5°, denn es gelte (vgl. Abb. 1):

$$\frac{\text{Abstand Sonne} - \text{Erde}}{\text{Durchmesser der Sonne}} \approx \frac{\text{Abstand Mond} - \text{Erde}}{\text{Durchmesser des Mondes}},$$

$$\text{numerisch: } \frac{152\,000\,000\,\text{km}}{1\,400\,000\,\text{km}} \approx \frac{380\,000\,\text{km}}{3\,500\,\text{km}} \approx 109$$

Nun stellen wir schnell ungläubig fest, dass die beiden von Vollmer angegebenen Verhältnisse sogar exakt gleich sind (und angenähert 108,6 ergeben). Rechnen wir nun stattdessen mit den derzeit bekannten Werten (indem wir für die mittlere Entfernung zum Mond den Halbmesser der Ellipsenbahn des Mondes um die Erde nehmen), so erhalten wir zwar die Werte

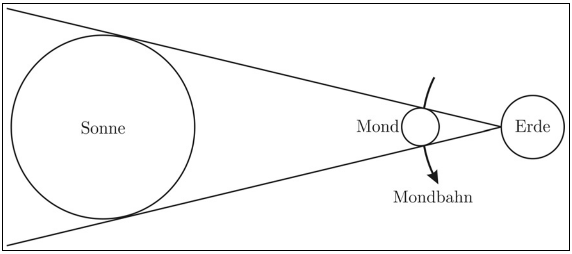

Abb. 1: Mond und Sonne erscheinen von der Erde aus gesehen gleich groß – ein Zufall?

$$\frac{149\,565\,800}{1\,392\,530} \approx 107{,}4 \ \text{(für die Sonne) und } \frac{384\,400}{3\,474{,}8} \approx 110{,}6 \ \text{(für den Mond)},$$

doch auch diese beiden Verhältnisse stimmen bei einer Abweichung von knapp 3 % noch erstaunlich gut überein. Nehmen wir (hier zulässig!) die Kehrwerte der obigen Verhältnisse als Sinus der Öffnungswinkel, so stimmen diese näherungsweise mit diesen Winkeln im Bogenmaß überein, woraus wir im Gradmaß 0,53° für den Öffnungswinkel der Sonnenscheibe und 0,52° für den Öffnungswinkel der Mondscheibe erhalten – ein verblüffend gut übereinstimmendes Ergebnis! Vollmer schreibt hierzu: [13]

> Für diese Übereinstimmung haben wir keine Erklärung. Darüber hinaus nehmen wir an, daß sie *zufällig* ist – Zufall verstanden als Zusammentreffen (Koinzidenz) unabhängiger Kausalketten –, so daß es sogar sinnlos wäre, nach einer Erklärung zu suchen. [14]

---

[13] [Vollmer 1988 b, 67]; unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

[14] Anselm Lambert merkte uns gegenüber an, dass eine entsprechende Aussage auf dem Mars natürlich nicht gelten würde, und er kommentierte diese Bemerkung wie folgt: *„Ich denke, dies ist verständnisfördernd, denn es regt die Frage an: Was ist denn nun der Zufall? Dass Sonne und Mond gleich groß erscheinen? Oder dass wir auf der Erde wohnen? Ob etwas für uns Zufall ist, hängt immer von der eigenen Position, dem eigenen Wissen und den daraus resultierenden Fragestellungen ab.“*

Absoluter Zufall?

War dies jetzt ein Beispiel für *subjektiven Zufall* oder für *objektiven Zufall*?

Wäre es subjektiver Zufall, so läge es ja nur an „unserer" unzureichenden Kenntnis bzw. Erklärungskompetenz dieses Phänomens. Folgen wir aber Vollmers „Annahme", so müssten wir in Verbindung mit den vorherigen Ausführungen einen objektiven Zufall unterstellen. Gleichwohl fehlt uns offenbar ein „objektives" Kriterium, um dies entscheiden zu können. Denn (wie) können wir wissen, ob es für dieses Phänomen eine Erklärung „gibt" (und wir diese dann nur nicht kennen) oder ob es keine Erklärung gibt (bzw. möglicherweise gar nicht geben kann), weil „es eben einfach nur so ist", wie es ist?

Begegnen wir hier möglicherweise dem berühmten *anthropischen Prinzip* des Physikers Stephen Hawking?

> Die Dinge sind, wie sie sind, weil wir sind.

Oder ist dies die *morphische Resonanz* des Biologen Rupert Sheldrake?[15]

> Die Dinge sind so, wie sie sind, weil sie so waren, wie sie waren.

Lehnt Hawking damit einen objektiven Zufall ab? Oder legt Sheldrake seiner Weltdeutung die Existenz eines objektiven Zufalls zugrunde?

Wir können diese Fragen hier nicht vertiefen und skizzieren nur ein Problem der Quantenphysik, indem wir wieder Vollmer zitieren:[16]

> Nach der üblichen Deutung der Quantenphysik gibt es <u>absoluten Zufall</u> (und damit z. B. für den Zeitpunkt eines spontanen Kernzerfalls nicht nur <u>keine Ursache</u>, sondern auch und erst recht <u>keine Erklärung</u>).

Und er schreibt dazu an anderer Stelle:[17]

> Wir lesen, daß der radioaktive Kern „nicht altert", daß es für seinen Zerfall keine <u>Ursache</u> gibt, sondern daß dieser <u>absolut zufällig</u> sei.

Es ist klar, dass der von Vollmer so genannte „absolute Zufall" dasselbe ist wie der von Tarassow beschriebene „objektive Zufall". Allerdings wissen wir nicht, ob der spontane Kernzerfall „wirklich" keine Ursache hat, also ein absoluter Zufall ist; vielmehr müssen wir anerkennen, dass hier nur ein Deutungsversuch vorliegt, ein Modell von Welt.

So geht bekanntlich auf Albert Einstein folgende Aussage zurück:[18]

> Jedenfalls bin ich überzeugt, dass der [Gott] nicht würfelt.

---

15 [Sheldrake 1993, 9]

16 [Vollmer 1995, 14 f.], unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

17 [Vollmer 1988 b, 101] , unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

18 In einem Brief von Einstein an Max Born, 4. Dezember 1926. – Zitiert nach: http://www.zitate.net/de/ (6.5.2005).

Doch was heißt denn hier „würfeln"? Passt das überhaupt in den Zusammenhang mit dem Beispiel des spontanen Kernzerfalls?

Wir sollten bedenken, dass uns der Zufall möglicherweise beim Werfen eines Würfels grundsätzlich ganz anders begegnet als beim radioaktiven Zerfall: *So liegt doch beim Würfeln eine prinzipielle, vollständige Determiniertheit vor*, indem bei seinem Loslassen alles nach (makroskopischen) physikalischen Gesetzen abläuft; *beim radioaktiven Zerfall hingegen liegt ein absoluter Zufall vor.* – Wirklich? Wie bzw. woher wollen wir das eigentlich wissen? Können wird das überhaupt wissen?

Zufall und Kausalität – oder: „propter hoc" vs. „post hoc"

Im Zusammenhang mit dem Zufall sind also „Ursache" und „Wirkung" und damit „Kausalität" wichtig. Hierbei treten zunächst *Probleme bei der Abbildung in unsere Sprache der Logik* auf, wozu Vollmer anmerkt:[19]

> *Kausale Beziehungen der Realität werden dabei durch logische Beziehungen in der Theorie „abgebildet".* Aus „A und *deshalb* B" (propter hoc) wird „wenn A, so B". Regelmäßige zeitliche Abfolgen „immer wenn A, dann auch B" (post hoc) werden *ebenfalls* auf logische Beziehungen „wenn A, so B" abgebildet. Den logischen Beziehungen sieht man es nicht mehr unmittelbar an, ob sie „nur" eine gesetzmäßige Abfolge oder „kausale" Beziehungen beschreiben.

Wir müssen also propter hoc („wegen ... bis hierher") und post hoc („nach ... bis hierher") inhaltlich als *wesentlich verschiedene Formen des Aufeinanderfolgens* ansehen, die dennoch beide, Wesentliches weglassend, im Deutschen oft durch dieselbe Sprachfigur „wenn ... so ..." beschrieben werden: Während propter hoc einen „inneren Zusammenhang" zweier aufeinander folgender Ereignisse im Sinne einer Kausalität, einer „Gesetzmäßigkeit" beschreibt, meint post hoc nur die zeitliche (zufällige?) Aufeinanderfolge.

Zufall als post-hoc-Ereignis ohne Energieübertrag?

Vollmer vertieft diesen Aspekt am Beispiel des absoluten Zufalls wie folgt, indem er insbesondere die *Bedeutung des Energieübertrags* hervorhebt:[20]

> Wann immer wir sinnvoll von Kausalität, von Ursache und Wirkung, von kausaler Beziehung sprechen, da werden wir auch den zugehörigen Energieübertrag nachweisen können.
>
> [...] Es gibt dann drei Klassen von wahren, allgemeingültigen Sätzen: zufällig wahre (alle Kugeln in dieser Kiste sind rot), gesetzmäßig wahre (ohne Energieübertrag: $\text{Schwingungsdauer} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\text{Pendellänge}}{\text{Erdbeschleunigung}}}$) und Kausalgesetze (mit Energieübertrag: Erwärmung führt zur Ausdehnung).

---

[19] [Vollmer 1988 b, 51]; unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

[20] [Vollmer 1988 b, 46 f.], unterstreichende Hervorhebungen nicht im Original.

> Damit kann auch der Begriff der *kausalen Notwendigkeit* teilweise rehabilitiert werden. Kausale Notwendigkeit bedeutet offenbar mehr als logische Notwendigkeit. Wenn ein Stein gegen eine Fensterscheibe fliegt, dann sehen und sagen wir ihre Zerstörung nicht *nur* deshalb voraus, weil dies allen unseren bisherigen Erfahrungen entspricht („das war schon immer so"), sondern weil wir den physikalischen Vorgang, insbesondere den Energieübertrag kennen, der die Zerstörung verursacht, auslöst („es muß so sein"). [...]
>
> Analog wird *„Zufall"* ontologisch definierbar als ein post-hoc-Ereignis ohne Energieübertrag. Daß ein Ereignis zufällig sei, wird so zu einer sinnvollen, empirisch nachprüfbaren Hypothese, die sich nicht nur auf das *Fehlen einer Erklärung* beruft. Ob diese Charakterisierung auch für den absoluten Zufall der Mikrophysik brauchbar ist, bleibe dahingestellt. Sollte „die Kausalität" im Mikrobereich nicht gelten, sollte es also regelmäßige post-hoc-Ereignisse *ohne* Energieübertrag geben (z. B. Kernzerfall), so würde das eine Widerlegung unseres Ursache-Wirkungs-Denkens, unseres naiven Kausalprinzips, bedeuten. [...] Was wir mesokosmisch zu erwarten gelernt haben, braucht mikro- oder megakosmisch nicht zuzutreffen.

Können wir uns einer solchen *Definition von Zufall* anschließen?

6 „Künstlicher" Zufall — ein Widerspruch in sich!?

Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.

John von Neumann (1951) [21]

Computerspiele wären schnell langweilig, wenn nicht durch „eingebauten Zufall" der Ablauf innerhalb des Spiels bzw. von Spiel zu Spiel variiert würde. Auch viele Taschenrechner bieten auf Knopfdruck derartige „Zufallszahlen". Wie funktioniert aber eigentlich dieser „eingebaute Zufall"? – Eine interessante Frage, die sich zu interessanten Unterrichtseinheiten ausbauen lässt (vgl. etwa [Gundel & et al. 1983], [Führer 1985], [Herget 1989], [Herget & Schmidt 1990], [Herget & Richter 1997], [Malitte 2000], [Strick 2003, 38 f., 256 f.], [Döhrmann 2004, 128 ff.] und [Büchter & Henn 2005, 293 ff.]).

Der einfachste Würfelzahlen-Generator ist ein Zählschleifen-Programm, das unablässig von 1 bis 6 zählt. Durch geeignet zufälliges Anhalten wird es zu einem Zufallszahlen-Generator. Aber wie kann man „geeignet anhalten"? Eine erste, wenn auch etwas ungehobelte Methode: die Unterbrechungs-Taste des Computers. Doch die Frage bleibt, wann eine auf diese Weise „handgreiflich" erzeugte Folge von Zahlen wirklich als „zufällig" gelten kann – was ist eigentlich Zufall?

Die *programmierten Zufallszahlen-Generatoren*, wie z. B. [Zieliński 1978, 13] sie beschreibt und wie sie heute von Computern verwendet werden, lassen sich erfreulicherweise sogar meist ohne große mathematische Hilfsmittel studieren.

---

[21] Zit. nach [Knuth 1998, 1].

Mittenquadrat-Generatoren

3572
7591
6232
8378
1908
6404
112
125
156
243
590
3481
1173
3759
1300
6900
6100
2100
4100
8100
⋮

Abb. 2: Mittenquadrat-Generator

Die sog. *Mittenquadrat-Generatoren*[22] gehen zurück auf John von Neumann, Nicholas Constantine Metropolis und Stanislaw Ulam, die diese Idee um 1946 im Rahmen des Los-Alamos-Projekts zur Entwicklung der Wasserstoffbombe für Computer-Simulationen einsetzten. Dass Mathematik durchaus auch heute von militärischer Bedeutung ist, zeigt etwa die automatische Geländeerkennung bei unbemannten Flugkörpern (den *cruise missiles*).

Ein Mittenquadrat-Generator beginnt mit irgendeiner Ausgangszahl x_0, die eine gerade Anzahl k von Ziffern hat. Quadrieren liefert eine Zahl mit maximal $2k$ Ziffern. Die letzten $k/2$ Ziffern werden gestrichen, und aus den verbleibenden Ziffern wird von rechts beginnend die neue k-ziffrige Zahl x_1 der Folge gebildet usw. Für $k = 4$ und $x_0 = 3572$ ergibt sich z. B. $x_0^{\,2} = 12\underline{7591}84$, also $x_1 = 7591$ (vgl. [Lehn 2002, 36]). Den Anfang einer so erzeugten Zahlenfolge zeigt Abb. 2. Durch $u_i := x_i/10^k$ ergibt sich daraus eine standardisierte Zahlenfolge in [0; 1[. Auf den ersten Blick sieht es nach „richtigem“ Zufall aus – erst der zweite Blick zeigt $u_{20} = u_{16}$, d. h., schon bald landet diese Folge in einem sehr kurzen Zyklus! Liegt das vielleicht nur an einer ungeschickten Wahl von u_0? Eine gute Frage …

Lineare-Kongruenz-Generatoren

Die sog. *Lineare-Kongruenz-Generatoren* (LKG; Derrick Henry Lehmer, um 1949) sind immer noch so etwas wie die „Volkswagen“ unter den Zufallszahlen-Generatoren – sie werden wohl am häufigsten verwendet.

Sie erzeugen mit $m \in \mathbb{N}^*$ und $x_0, a, b \in \{0, \ldots, m-1\}$ rekursiv eine Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ mittels $x_i \equiv a \cdot x_{i-1} + b \pmod{m}$. Durch $u_i := x_i/m$ ergibt sich daraus eine standardisierte Zahlenfolge in [0; 1[. Den Anfang einer auf diese Weise mit $a = 2654435721$, $b = 1$, $m = 2^{32}$, $x_0 = 12345$ erzeugten Folge $\langle x_n \rangle$ zeigt Abb. 3 (einen solchen LKG verwendet übrigens DERIVE™): Die Zahlenflut scheint ohne jede Regelmäßigkeiten zu sein, keine erkennbare Konvergenz, keine beobachtbaren Zyklen, keine Symmetrien – es sieht ganz so aus, als hätten wir hier den gesuchten „programmierten Zufall“!

12345
3701585702
850410095
1145130340
2553028373
2238854994
2072924075
3642857584
1779399089
2235342910
3836995239
303458876
4147108877
3680034282
966458211
3141045960
3930759721
56859734
1793804767
3924005396
4021348357
2968143746
2302037531
1329709088
1365477793
3956738926
1500726295
1234707692
1928274685
4187804698
4282066899
⋮

Abb. 3: Lineare-Kongruenz-Generator

[22] Auch: *Quadratmitten*-Generatoren, vgl. z. B. [Gundel et al. 1983] und [Zieliński 1978, 17]; im Englischen *midsquare generator*.

Wann ist der künstliche Zufall zufällig genug?

Random numbers should not be generated with a method chosen at random.
Donald E. Knuth

Tatsächlich aber erzeugt keiner dieser Zahlengeneratoren wirklich „Zufallszahlen", denn stets steckt ja irgendein Mechanismus, ein Algorithmus dahinter. Deswegen spricht man in solchen Fällen auch von *Pseudo-Zufallszahlen*[23]. Allerdings: Diese Regelmäßigkeit ist mehr oder weniger geschickt versteckt!

Wie lässt sich nun die Güte der „Zufälligkeit" einer Zahlenfolge testen? Zumindest sollen die algorithmisch erzeugten Zahlenfolgen „möglichst ähnliche" (was soll das bedeuten?) Eigenschaften wie „wirkliche" (was ist das?) Zufallszahlenfolgen aufweisen. Einen Versuch, diese Anforderungen zu präzisieren, unternimmt Fisz:[24]

> Folgen ganzer Zahlen aus dem Bereich $[0;\, m[$ werden *Pseudo-Zufallszahlenfolgen* genannt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:
> 1. In jedem hinreichend langen Abschnitt der Zahlenfolge treten alle Zahlen aus dem Bereich $[0;\, m[$ mit jeweils annähernd der gleichen relativen Häufigkeit $1/m$ auf.
> 2. Analoges gilt für die Zahlenpaare, -tripel usw. einer Pseudo-Zufallszahlenfolge.
> 3. Die aufeinander folgenden Zahlen einer Pseudo-Zufallszahlenfolge, als Zufallsvariable betrachtet, sollen unabhängig voneinander sein.

Die Beurteilende Statistik bietet – neben den nahe liegenden einfachen Häufigkeitstests (Entropie, siehe etwa [Malitte 2000]) – eine ganze Reihe von mathematischen Testverfahren dazu an. Geeignet sind z. B. der χ^2-Test (etwa [Strick 2003, 258 ff.]), ein Run-Test (etwa [Strick 2003, 256 f.]) oder der Poker-Test (etwa [Strick 2003, 257]). Dass und wie die Frage nach der Güte von Zufälligkeit sogar bei einer medizinischen Diagnose bedeutsam sein kann, zeigt [Richter 2000].

Visueller Zufallszahlentest

Es gibt aber auch ganz andere, sehr anschauliche Zugangsweisen zum Testen auf Zufälligkeit. Diese sind zwar weniger mathematikhaltig, aber dennoch durchaus leistungsfähig und überzeugend Ein*sicht* vermittelnd.

Wir lassen dazu mit dem Computer einen „Zufallsregen" erzeugen, indem mit einem unserer Zahlengeneratoren nacheinander je zwei Zahlen x, y „zufällig" zwischen 0 und 1 erzeugt und jeweils die Punkte (x, y) im Einheitsquadrat gezeichnet werden. Abb. 4 zeigt einige solcher Ergebnisse. Analog lassen sich die Tripel aufeinander folgender Zahlen (x, y, z) im Einheitswürfel zeichnen (Abb. 5). Die Zahlenkolonnen der viel genutzten Lineare-Kongruenz-Generatoren hätten unsere kritische Inspektion bislang tadellos passiert – jetzt entlarvt sie jedoch die Nagelprobe dieser „Sichtkontrolle"!

---

[23] Auch: *Quasi-Zufallszahlen*, vgl. etwa [Zieliński 1978, 30].

[24] Vgl. [Fisz 1989, 589].

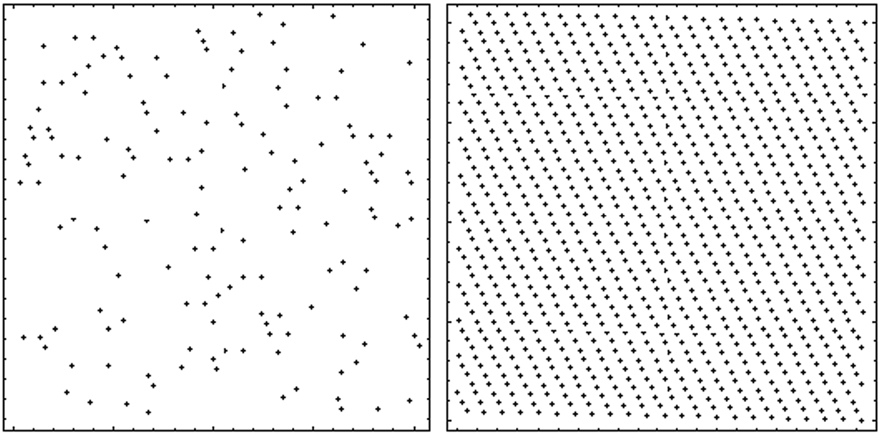

Abb. 4: Zahlenpaare eines LKG mit $a = 91$, $b = 1$, $m = 4096$, $x_0 = 987$
im Einheitsquadrat: links 300 Punkte, rechts 3000 Punkte

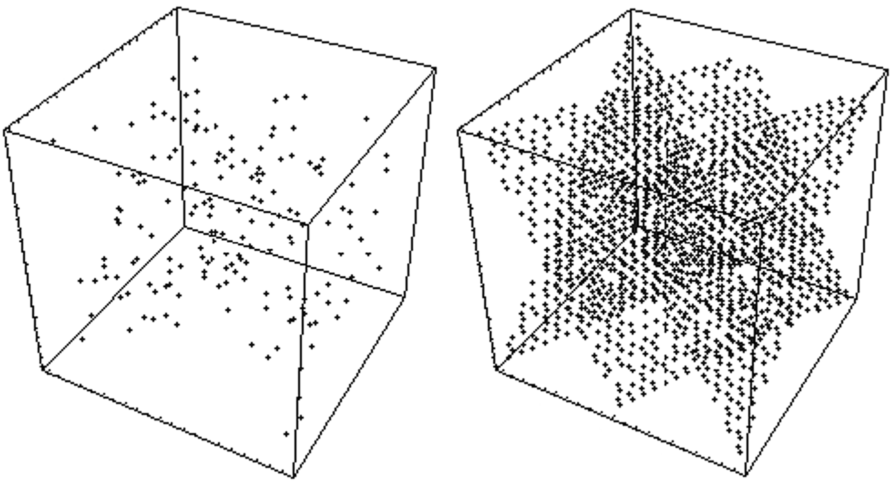

Abb. 5: Zahlentripel eines LKG mit $a = 91$, $b = 1$, $m = 4096$, $x_0 = 987$
im Einheitswürfel: links 500 Punkte, rechts 5000 Punkte

Zwar sieht der „Regen" anfangs noch recht zufällig aus, bald jedoch wird ein Muster bei den LKG sichtbar – hier wird erkennbar, dass sie eben linear erzeugt werden –, und es zeigt sich, dass schließlich keine neuen Punkte mehr hinzukommen: Da bei den LKG nur m verschiedene x_i auftreten können, muss die Zahlenfolge zwangsläufig periodisch werden, und die Periodenlänge ist höchstens m. Wegen $x_{n+1} = f(x_n)$ kommt jedes Element der Periode innerhalb einer Periode genau einmal vor. Das alles gilt auch für den von DERIVE™ verwendeten LKG (vgl. Abb. 3), der mit $m = 2^{32}$ allerdings eine so große Periodenlänge hat, dass bei dieser Sichtkontrolle zumindest zunächst nichts verdächtig erscheinen würde. Tatsächlich ist ein solches periodisches Verhalten sogar bei *jeder* mit dem Rechner rekursiv erzeugten Folge *prinzipiell* unvermeidbar, weil die Rechner-Arithmetik grundsätzlich nur auf *endlich* viele Rechnerzahlen zurückgreifen kann.

Vorteil der Lineare-Kongruenz-Generatoren aber ist, dass diese Periodizität dank erschöpfender zahlentheoretischer Sätze (vgl. etwa [Gundel et al. 1983], [Knuth 1998] und [Malitte 2000]) weitgehend kontrollierbar ist – gerade bei vielen anderen Zufallszahlen-Generatoren, die auf den ersten Blick wegen ihrer „Unregelmäßigkeit“ sehr verlockend erscheinen, ist eben dies nicht der Fall. Hierzu gehört auch die durchaus kontrovers geführte Diskussion, ob denn die Ziffernfolge von π die beste Zufallszahlenfolge ist.

Wohlgemerkt: Aus einem musterbehaftet-ungleichmäßigem Erscheinungsbild kann man zwar schließen, dass der Zufallsgenerator nicht besonders gut ist; aus einem auf den ersten Blick „schönen“ Zufallsregen kann man aber noch lange nicht schließen, dass der verwendete Zufallsgenerator wirklich „gut“ ist!

Eine andere Möglichkeit für einen visuellen Test besteht darin, die mit dem Computer erzeugten Zahlen umzurechnen in Winkel im Einheitskreis. Abb. 6 zeigt ein solches Ergebnis.[25] Was sagt unser kritisch prüfender Blick? Ist dies „zufällig genug“?

> Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeit.[26]

Verdächtig wäre jedenfalls, wenn die Strahlen ausgesprochen gleichmäßig verteilt wären und bzw. oder sie in einer sehr augenfällig geordneten Reihenfolge erscheinen würden. Aber sind die größeren freien Lücken nicht auch verdächtig? Sind sie vielleicht doch *zu groß*, sind es vielleicht doch *zu viele* größere Lücken? Wie groß sollten sie mindestens sein, wie groß sollten sie höchstens sein? Und wie viele davon sollten es dann höchstens bzw. mindestens sein? Andererseits: Liegen vielleicht (zu) viele der Strahlen *zu dicht* oder sogar genau (fast) übereinander?

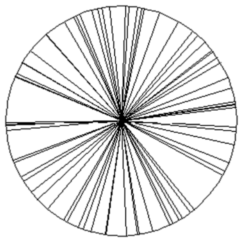

Abb. 6: Der Strahlentest

Und auch hier: Wie viele davon sollten es dann höchstens bzw. mindestens sein? Oder will man sogar, dass jede Zahl einer bestimmten Teilmenge auch tatsächlich angenommen wird? Viele gute Fragen – die daraus resultierenden spannenden mathematischen Herausforderungen beschäftigen ganze Forschergruppen seit Jahrzehnten!

Einen fachmathematischen Überblick, auch zu weiterführender Literatur, bieten etwa [Knuth 1998], [Hellekalek & Larcher 1998] und [Lehn 2002].

[25] Für den von DERIVE™ verwendeten LKG, 70 Strahlen; vgl. hierzu auch Abb. 3.

[26] Aus [Novalis 1929, Bd. 2] (wie bereits auf Seite 144 zitiert).

Deutlich wird hier das Dilemma:

Einerseits ist eine möglichst „unregelmäßige“ Zahlenfolge gewünscht, andererseits muss diese Unregelmäßigkeit doch hinreichend „gleichmäßig-ordentlich“ sein!

Algorithmus vs. Zufall

Es gibt keine wirklich echten *algorithmischen* Zufallszahlen-Generatoren für den Computer, denn Algorithmus und Zufall sind unvereinbar gegensätzlich. Mit ein wenig Phantasie, etwas Probieren und dem notwendigen mathematischen Überblick lassen sich aber doch ganz brauchbare Pseudo-Zufallszahlenfolgen sogar per Algorithmus erzeugen.

Die visuelle Aufbereitung von umfangreichen Daten[27] ist ungemein wichtig und ausgesprochen wirksam – „Hinsehen“ kann manchmal aussagekräftiger sein als ein mathematisch aufwändiger Statistik-Test! Eigentlich ist das auch gar nicht so verwunderlich: Unser optisches Aufnahme- und Auswertevermögen hat sich im Verlauf der biologischen Evolution ausgesprochen feinsinnig entwickelt und ist von Geburt an tüchtig trainiert.

7 Zufall – eine faszinierende Herausforderung

Der Zufall ist auch ein spannendes Thema der Literatur, so etwa bei Goethe im Faust I in der Szene im Studierzimmer, bei der es um die mystische Bedeutung des Pentagramms zur Abwehr böser Geister geht:[28]

Mephistopheles
Gesteh' ich's nur! daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle –

Faust
Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei sage mir, du Sohn der Hölle,
Wenn das dich bannt, wie kamst du denn herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?

Mephistopheles
Beschaut es recht! Es ist nicht gut gezogen;
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.

Faust
Das hat der Zufall gut getroffen!
Und mein Gefangner wärst denn du?
Das ist von ungefähr gelungen!

Und in den Aphorismen von Friedrich von Schiller lesen wir:

> Der Forscher sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
> sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht.

---

[27] Siehe auch die *Explorative Datenanalyse (EDA)*, ein relativ junges Teilgebiet der Beschreibenden Statistik; siehe etwa [Biehler 1999] und [Vogel & Wintermantel 2003].

[28] Vgl. auch die Erörterung der Bedeutung des Pentagramms in [Hischer 2000, 97 ff.].

Der Zufall vermag auch in historischen Abläufen Entscheidendes zu bewirken, wie wir etwa exemplarisch bei [Scheid 1996, 28] lesen, indem er „Einfall“ und „Zufall“ in Beziehung setzt, und zwar unter der Überschrift „Zufall und Kreativität“:

> Keine Wissenschaft würde sich von der Stelle bewegen, gäbe es nicht die Phantasie, den Einfallsreichtum, die Kreativität der Forscher. Aber hat der „Einfall“ nicht auch den Beigeschmack des „Zufalls“, eines Zufalls freilich, der auf einen wohlvorbereiteten Boden fallen muß? Bei vielen Erfindungen und Entdeckungen stand der Zufall offensichtlich Pate, etwa bei der Erfindung des Schießpulvers durch Berthold Schwartz, wenn man der Legende glauben darf. Selbst eine für Außenstehende so staubige Wissenschaft wie die Mathematik lebt — nicht anders als die schönen Künste — mehr von der Phantasie als von einem „streng-logischen Arbeiten“, was immer dies auch sein soll.

Ungewissheit, *Unsicherheit*, *Unbestimmtheit*, *Unvorhersagbarkeit*, *Glück* und *Unglück*, *Chance* oder *Möglichkeit* … gehören zu den wesentlichen Facetten, aus denen das Verständnis des Zufallsbegriffs erwächst – bedeutsam auch für die Stochastik als mathematischer Theorie.

Diese und weitere Facetten zu entdecken, kann eine faszinierende Herausforderung werden. Ein Abenteuer, auf das man sich einlassen sollte. Auch und gerade im Mathematikunterricht – wenngleich [Schupp 1979, 34 f.] bei seiner Evaluation eines Stochastik-Curriculums auf das *„Ausmaß an Zeit und Energie“* hinweist, *„welches offensichtlich erforderlich ist, um beim Schüler einen genügend weiten Zufallsbegriff aufzubauen“*, und er stellt – bezogen auf die betr. Unterrichtskonzeption – insbesondere fest:

> So brauchte der Schüler den mitgebrachten Zufallsbegriff (Zufall als Willkür) kaum zu korrigieren.

Staunen ist, wie wir seit Aristoteles wissen, nicht das Ende,
sondern der Anfang vieler tieferreichender Bemühungen.

Hans Schupp [29]

Literatur

Barth, Friedrich & Haller, Rudolf [1994]: Stochastik Leistungskurs. München: Ehrenwirth.

Bauer, Heinz [1991]: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: de Gruyter (4., völlig überarbeitete und neugestaltete Auflage).

Bernoulli, Jacobus [1713]: Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit tractatus de seriebus infinitis et epistola Gallice scripta de ludo pilae reticularis. Basel.

Biehler, Rolf [1999]: Daten und Modell. *mathematik lehren*, Heft 97.

Bohr, Niels [1985]: Atomphysik und menschliche Erkenntnis. Braunschweig: Vieweg.

Brockhaus-Enzyklopädie [1994]: Mannheim: Brockhaus, 24 Bände, 19. Auflage.

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang [2005] Elementare Stochastik – Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Berlin: Springer.

[29] [Schupp 2004, 12].

Döhrmann, Martina [2004]: Zufall, Aktien und Mathematik – Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Epikur, Diogenes Laertius [1968]: Buch X. Hamburg.

Fisz, Marek [1989]: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Führer, Lutz [1985]: „BASICs" – Ein Schülerarbeitsheft für den Mathematikunterricht ab Klasse 9. *mathematik lehren*, Heft 13, 24–38, Abschnitt 1.

Glockner, Hermann [1977]: Die europäische Philosophie von den Anfängen bis zur Gegenwart. Stuttgart: Reclam, 4. Auflage.

Grimm, Jacob & Wilhelm [2004]: Deutsches Wörterbuch. Elektronische Ausgabe der Erstbearbeitung. Frankfurt/Main: Zweitausendeins.

Gundel, Horst & Schupp, Peter & Schweizer, Udo [1983]: Zufallszahlen, Monte-Carlo-Methode und Simulation – Mathematik, SR2 – Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik unter Einbeziehung von elektronischen Rechnern (Materialien zur Lehrerfort- und -weiterbildung). Deutsches Institut für Fernstudien (DIFF) an der Universität Tübingen. Weinheim, Basel: Beltz.

Hellekalek, Peter & Larcher, Gerhard (eds.) [1998]: Random and Quasi-Random Point Sets. Springer Lecture Notes in Statistics, vol. 138. New York: Springer.

Herget, Wilfried [1989]: Computer und Mathematikunterricht. – In: Kwiran, M.; Wiater, W. (Hrsg.): Schule im Bannkreis der Computertechnologie. Pädagogische und didaktische Überlegungen zur Rezeption der Neuen Technologien in den allgemeinbildenden Schulen. Wuppertal: Brockhaus Verlag; Paderborn: Deutsches Institut für Bildung und Wissen, 149–195.

Herget, Wilfried & Richter, Karin [1997]: Zufallszahlen. Mathe-Welt. In: *mathematik lehren*, Heft 85, 23–46.

Herget, Wilfried & Schmidt, Rainer [1990]: Zufallszahlen und stochastische Simulation. – In: Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.): Neue Technologien und Allgemeinbildung. Bd. 11. Mathematik: Anregungen für den Unterricht. Hannover: Berenberg, 160–176.

Hischer, Horst [2000]: Klassische Probleme der Antike — Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, Jürgen & Spiegel, Wolfgang (Hrsg.): Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik — Festschrift für Harald Scheid. Stuttgart / Düsseldorf / Leipzig: Klett, 97–118.

Kluge, Friedrich [2002]: Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. Berlin, New York: de Gruyter, 24. Auflage.

Knuth, Donald Erwin [1998]: The Art of Computer Programming. Vol. 2 / Seminumerical Algorithms. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 3rd Edition.

Kolmogorov, Andrej Nikolajewitsch [1933]: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer.

Lehn, Jürgen [2002]: Random Number Generators. In: *GAMM-Mitteilungen* 2002, Heft 1/2, 35–45.

Leopoldina (Hrsg.) [1999]: Der Zufall. Leopoldina-Meeting vom 17. bis 18. April 1998 in Halle (Saale) / Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, Halle (Saale). Heidelberg: Barth.

Maibaum, Gert [1976]: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Malitte, Elvira [2000]: Zufall mit dem Computer — geht das überhaupt? In: Hischer, Horst (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 63–69.

Novalis [1929]: Fragmente. Hrsg. von Ernst Kamnitzer & Gertrud von Helmstatt. 1. vollst. geordnete Ausgabe. Dresden: Jess.

Poincaré, Henri [1914]: Wissenschaft und Methode. Leipzig: Teubner.

Richter, Karin [2000]: Zur Modellierung eines medizinischen Diagnose-Problems im Stochastikunterricht. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 70–76.

Scheid, Harald [1996]. Zufall. Kausaliät und Chaos in Alltag und Wissenschaft. Mannheim / Leipzig / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Schneider, Ivo [1989]: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Berlin: Akademie-Verlag.

Schupp, Hans [1979]: Evaluation eines Curriculums. In: *Der Mathematikunterricht*, **21** (1979)5, 22–42.

Schupp, Hans [2004]: Allgemeinbildender Stochastikunterricht. In: *Stochastik in der Schule*, **24**(2004)3, 4–13.

Sheldrake, Rupert [1993]: Das Gedächtnis der Natur — Das Geheimnis der Entstehung der Formen in der Natur. München: Piper.

Sill, Hans-Dieter [1993]: Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **25**(1993)2, 84–88.

Stewart, Ian [1990]: Spielt Gott Roulett? Berlin: Birkhäuser, Basel, Boston.

Strick, Heinz Klaus [2003]: Elemente der Mathematik – Leistungskurs Stochastik mit Orientierungswissen Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Hannover: Schroedel.

Tarassow, Lew [1993]: Wie der Zufall will? Heidelberg: Spektrum Akademie Verlag.

Vogel, Dankwart & Wintermantel, Gertrud: Explorative Datenanalyse — Statistik aktiv lernen. Mathe — offener Unterricht. Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig: Klett.

Vollmer, Gerhard [1988 a]: Was können wir wissen? Band 1: Die Natur der Erkenntnis. Stuttgart: S. Hirzel, 2. Auflage.

Vollmer, Gerhard [1988 b]: Was können wir wissen? Band 2: Die Erkenntnis der Natur. Stuttgart: S. Hirzel, 2. Auflage.

Vollmer, Gerhard [1995]: Auf der Suche nach Ordnung. Beiträge zu einem naturalistischen Welt- und Menschenbild. Stuttgart: S. Hirzel.

Zieliński, Ryszard [1978]: Erzeugung von Zufallszahlen. Programmierung und Test auf Digitalrechnern. Frankfurt: Deutsch; Leipzig: Fachbuchverlag.

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. Wilfried Herget & Prof. Dr. Karin Richter
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, FB Mathematik und Informatik
06099 Halle (Saale)
E-Mail: wilfried.herget@mathematik.uni-halle.de, karin.richter@mathematik.uni-halle.de

Prof. Dr. Horst Hischer
Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken
E-Mail: contact.horst@hischer.de, Web: http://hischer.de/horst/