Was heißt eigentlich „zufällig“?

Das Bertrand’sche „Sehnen-Paradoxon“ als Ausgangspunkt für stochastische Begriffsbildung

von

Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn, Dortmund

Kurzfassung: Das Bertrand’sche Sehnenproblem wird unter verschiedenen Aspekten diskutiert: seine mathematikhistorische Bedeutung zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, sein Potential für individuelle Begriffsbildung und seine Möglichkeiten, verschiedene Gebiete der Mathematik zu vernetzen.

Summary: The Bertrand chord problem is discussed from various perspectives: its importance for the development of the probability concept in the history of mathematics, its potential for individual concept formation and its possibilities to connect different fields of mathematics.

1 Bertrand und der Wahrscheinlichkeitsbegriff um 1900

Der französische Mathematiker Joseph Louis François Bertrand (Abb. 1[1]) wurde am 11. März 1822 in Paris geboren und starb dort am 5. April 1900. Schon als Schüler wurde er in die École Polytechnique aufgenommen und promovierte dort im Alter von 17 Jahren mit einer Arbeit zur mathematischen Theorie der Elektrizität. Nach einer Lehrtätigkeit am Lycée St. Louis wurde er ab 1856 Nachfolger von Jacques Sturm und lehrte als Professor an der École Polytechnique, bevor er 1862 als Professor an das Collège de France berufen wurde. Bertrand leistete wichtige Beiträge zu verschiedenen Gebieten der Mathematik, insbesondere zur Differentialgeometrie und zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Im Alter von 23 Jahren entdeckte er den zahlentheoretisch bedeutenden Satz, dass es für jede natürliche Zahl n eine Primzahl zwischen n und $2 \cdot n$ geben muss. Dieser Satz wurde fünf Jahre später durch Pafnutij Tschebyscheff bewiesen. 1855, im Todesjahr von Carl-Friedrich Gauß, übersetzte Bertrand dessen Werk zur Fehlertheorie und zur Methode der kleinsten Quadrate unter dem Titel „Méthode des moindres carrés“ ins Französi-

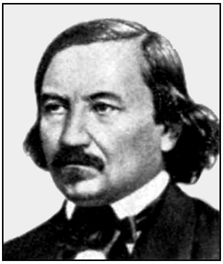

Abb. 1: Joseph Bertrand

[1] Aus http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Bertrand.html, 18. 03. 05).

sche. Eigene Arbeiten zur Stochastik erschienen ab 1875 (vgl. auch [Sheynin 1994]). Am bekanntesten ist sein 1888 erschienenes Werk „Calcul des Probabilités“. Bereits ein Jahr später musste das Buch nachgedruckt werden; eine zweite Auflage erschien 1907. Oscar Sheynin (1994) kritisiert zwar die vielen kleinen Fehler, Unvollständigkeiten und Missverständlichkeiten, den Verzicht auf Abbildungen und den unübersichtlichen Aufbau des Werks – zugleich charakterisiert er Bertrands Schreibstil aber zu Recht als äußerst attraktiv. Bertrand war auch sonst ein gefragter Mann: So wurde er regelmäßig von seinem Freund Jules Verne befragt, wenn diesem irgendwelche wissenschaftlichen Zusammenhänge nicht klar waren.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie war am Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts geprägt von der Suche nach einer zufrieden stellenden Definition des grundlegenden Begriffs der Wahrscheinlichkeit. David Hilbert formulierte in seinem berühmten Vortrag beim Second International Congress of Mathematicians im Jahr 1900 in Paris die mathematische Behandlung der Axiome der Physik, worunter er auch die Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs verstand,[2] als das sechste seiner 23 wichtigsten Probleme für das 20. Jahrhundert. Nach vielen Ansätzen – bekannt sind insbesondere die Arbeiten von Richard Edler von Mises [3] – löste erst Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov 1933 diesen Teil des sechsten Hilbert’schen Problems durch seine maßtheoretische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (vgl. [Büchter & Henn 2005, 152 f.]). Hierzu hat er die Bindung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an konkrete Situationen aufgegeben.

Bertrand leitet seinen „Calcul des Probabilités“ (1888) mit einer umfangreichen philosophisch-kritischen Analyse der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Der eigentliche Text beginnt mit einer Definiton der Wahrscheinlichkeit, die wir heute den *Laplaceschen Ansatz* nennen. Erläutert wird der Ansatz durch das Würfeln mit einem bzw. mit zwei Würfeln. Bertrand weist darauf hin, dass die Forderung der Gleichwahrscheinlichkeit der einzelnen Fälle ausdrücklich vereinbart wird [4] und

---

[2] Im 19. Jahrhunderts war die Verwendung und Weiterentwicklung stochastischer Methoden bei der kinetischen Gastheorie sehr erfolgreich. Hilbert sah die Wahrscheinlichkeitsrechnung als der Physik zugehörig, was er in seinem Vortrag wie folgt ausdrückt: „Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe gestellt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.“

[3] Die Idee war, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Grenzwert der relativen Häufigkeit bei n-maliger Durchführung eines Zufallsexperiments für $n \to \infty$ zu definieren. (vgl. [Büchter & Henn 2005, 145 f.]).

[4] Hier wird sehr schön deutlich, was für den Laplace-Ansatz charakteristisch ist: Die Wahrscheinlichkeiten werden a priori aus theoretischen Überlegungen gewonnen.

dass die Definition bei Verzicht auf diese Festlegung sinnlos wird. Auch der große Henri Poincaré beginnt sein 1896 veröffentlichtes Werk „Calcul des Probabilités“ mit diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff (vgl. [Poincaré 1896, 1]):[5]

> Man kann keine befriedigende Definition der Wahrscheinlichkeit geben. Üblicherweise sagt man: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zu der Gesamtzahl der möglichen Fälle.

Noch 1908 nimmt Emanuel Czuber als „Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit“ (vgl. [Czuber 1908, 14]) den „Laplace-Ansatz“, wobei er anmerkt,

> [dass diese Definition] zur Erledigung nur eines bestimmten Teiles von Fragen ausreichen [wird].

2 Das Bertrand’sche Sehnenproblem

Kehren wir zurück zu Bertrands „Calcul des Probabilités“. Im Anschluss an die oben dargestellte Definition von „Wahrscheinlichkeit“ folgen auf Seite 2 sofort mehrere Beispiele, die von vorne herein für die Problematik dieses Wahrscheinlichkeitsansatzes sensibilisieren sollen:[6] Zuerst kommt das als „Bertrand’sches Kästchen-Paradoxon“ bekannte Beispiel[7] (vgl. [Büchter & Henn 2005, 214]). Im zweiten Beispiel geht es um die Gewinnchancen zweier gleichstarker Boule-Spieler, von denen einer zwei, der andere nur eine Kugel hat. Im Anschluss an diese beiden Beispiele, die mit der getroffenen Festlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gut bearbeitet werden können, folgt ein für unsere Arbeit wichtiger Absatz: Bertrand erklärt, dass „unendlich“ keine für seinen „Laplace-Ansatz“ erlaubte Zahl unterschiedlicher Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist: [8]

> Zufällig unter unendlich vielen Fällen zu wählen, ist keine hinreichende Beschreibung.

---

5 Diese Übersetzung stammt – wie auch die folgenden – von den Autoren dieses Beitrags.

6 Mit dieser Darstellungsart, die von den Problemen und Fragestellungen ausgeht, die bearbeitet werden sollen, ist Bertrands Werk – ähnlich wie auch die beiden Bände [Czuber 1908/1910] – ein hervorragendes Beispiel für den stark inhaltlich und wenig formal geprägten Stil der Mathematikbücher jener Zeit.

7 Ein Kästchen hat drei zweigeteilte Schubladen, die jeweils zu beiden Seiten bis zur Hälfte herausgezogen werden können. So kann man genau in eine Hälfte der herausgezogenen Schublade schauen. In einer Schublade liegt in beiden Hälften jeweils eine Goldmünze, in einer liegt in beiden Hälften jeweils eine Silbermünze, und in der dritten liegt in einer Hälfte eine Gold- und in der anderen eine Silbermünze. Die Verteilung dieser Schubladen im Kästchen ist jedoch unbekannt. Eine Schublade wird herausgezogen, und man sieht eine Goldmünze. Wie wahrscheinlich ist es nun, dass in der anderen Hälfte auch eine Goldmünze liegt?

8 [Bertrand 1888, 4]

Um dies zu verdeutlichen, bringt er dann die hier im Vordergrund stehende Aufgabe: Man zeichne zufällig eine Sehne in einen Kreis und bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie kürzer ist als eine Seite des dem Kreis einbeschriebenen Dreiecks (Abb. 2). Wie viele andere Paradoxa zwingt diese Aufgabe dazu, über einen scheinbaren Widerspruch genauer nachzudenken: Das Beispiel soll zeigen, dass die Anweisung, „zufällig“ eine Sehne zu zeichnen, nicht eindeutig ist. Es geht also eigentlich um „unterschiedliche Interpretationen einer umgangssprachlich gestellten Aufgabe“ (vgl. [Winter 1992, 25]). Poincarés Buch ist unseres Wissens übrigens die erste Quelle, in der diese Sehnen-Aufgabe als „Bertrand’sches Paradoxon“ („un paradox de M. Bertrand“, [Poincaré 1896, 94]) bezeichnet wird. Bertrand selbst gibt in seinem Buch drei Lösungsvorschläge, die zu drei verschiedenen Wahrscheinlichkeiten führen (wie wir anschließend im Detail zeigen werden):

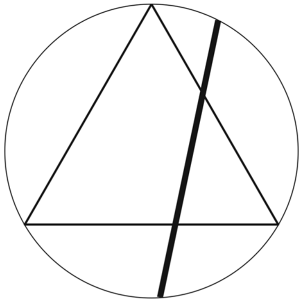

Abb. 2: Das Problem

a. Man wähle den einen Eckpunkt W der Sehne auf dem Kreis. Von W aus wird „zufällig“ eine Gerade gezogen, die durch ihre Richtung bestimmt ist. Auf diesem Weg entsteht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ eine Sehne, die kürzer ist als eine Seite des dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.
b. Die Richtung der Sehne sei vorgegeben. Dann wird die Sehne durch einen „zufälligen“ Punkt auf dem zur gegebenen Richtung senkrechten Durchmesser des Kreises gezogen. Kürzere Sehnen entstehen so mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$.
c. Man wähle „zufällig“ einen Punkt im Kreis. Dieser Punkt ist Mittelpunkt einer Sehne, die senkrecht zur Verbindung dieses Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises ist. Die interessierende Wahrscheinlichkeit beträgt in diesem Fall $\frac{3}{4}$.

3 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Die Beschreibung von „wähle zufällig eine Sehne“ durch eine mathematische Operation ist im Modellbildungsprozess auf vielerlei Weisen möglich. Eine Sehne ist z. B. durch zwei Punkte im oder auf dem Kreis oder durch irgendwelche anderen geometrischen Vorschriften festgelegt. Drei mögliche Beispiele sind die Ansätze von Bertrand. Je nach Modellansatz werden verschiedene Situationen beschrieben; man kann keineswegs sagen, der eine Ansatz sei besser als der andere. Jeder Ansatz kann zu einem anderen Ergebnis führen. Auf der Website[9] zu unserem Stochastik-Buch [Büchter & Henn 2005] haben wir zu verschiedenen Problemen der

[9] http://www.elementare-stochastik.de/

Stochastik Java-Applets[10] zur Verfügung gestellt, mit deren Hilfe unsere Studierenden – aber natürlich auch alle anderen Interessierten – eigene Experimente und Simulationen durchführen können. Eines dieser Applets heißt „Bertrand-Problem" und simuliert verschiedene „zufällige" Wahlen von Sehnen. Die ersten drei Modellierungen entsprechen den beschriebenen Modellierungen von Bertrand. Das Programm zeichnet beliebig viele Sehnen, zeigt die relativen Häufigkeiten „Anzahl der kürzeren Sehnen / Anzahl aller Sehnen" an und liefert so einen Ansatz für frequentistische Wahrscheinlichkeiten nach dem Gesetz der großen Zahlen. Zu jeder Realisierung kann aber auch ein theoretischer Wahrscheinlichkeitsansatz p gemacht und mit dem durch die Simulation erhaltenen verglichen werden.

Da es unendlich viele, sogar überabzählbar viele Sehnen gibt, ist ein Wahrscheinlichkeitsansatz nach dem einfachen Laplace-Modell nicht möglich. Beim Bertrand'schen Sehnenproblem werden die Sehnen durch die „zufällige Wahl" eines Punktes auf einer gegebenen Strecke oder Linie, eines Winkels aus einem gegebenen Winkelbereich oder eines Punktes aus einer gegebenen Fläche bestimmt. Sind die Punkte bzw. Winkel in dem jeweiligen geometrischen Bereich alle gleichberechtigt, so kann man das Maß „Wahrscheinlichkeit" auf geometrische Maße zurückführen. Genauer muss die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt auf einer Strecke bzw. einer Fläche liegt, proportional zur Länge der Strecke bzw. zum Inhalt der Fläche sein. Wird z. B. ein Punkt zufällig auf der Strecke AB gewählt und ist jeder Punkt „gleichwahrscheinlich", so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gewählter Punkt auf die Strecke $CD \subseteq AB$ fällt, proportional zu Länge $|CD|$. Da der Punkt sicher auf AB liegt, liegt der Ansatz

$$\mathrm{P}\ (\text{der Punkt liegt auf } CD) := \frac{|CD|}{|AB|}$$

nahe. Entsprechendes gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Winkel in einen Winkelbereich oder ein Punkt in eine Teilfläche fällt. Dies ist der Ansatz „geometrischer Wahrscheinlichkeiten".

Die Simulation mit dem Computer basiert auf einem Generator für Zufallszahlen (genau genommen handelt es sich hier also um „Pseudozufallszahlen", vgl. [Büchter & Henn 2005, 294 f.]). Werden die Zufallszahlen im Intervall $[a, b]$ erzeugt, so ist bei „guten Zufallszahlen" die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallszahl z im Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ liegt, bestimmt durch

$$\mathrm{P}(c \le z \le d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Diese Überlegung verwenden wir, um die drei Ansätze von Bertrand experimentell und theoretisch zu analysieren.

---

10 Die Idee zu diesen Simulationen verdanken wir Hans Schupp, der schon 1992 sehr schöne Simulationen zur Stochastik entwickelt hat (vgl. [Schupp u. a. 1992]).

Aufgrund der Ähnlichkeitsinvarianz des Problems setzen wir in Abb. 3 für den Radius r des Kreises $r = 1$. Damit hat das einbeschriebene gleichseitige Dreieck ABC die Seitenlänge $a = \sqrt{3}$, die Höhe $h = 1{,}5$ und den Inhalt $A_\Delta = \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

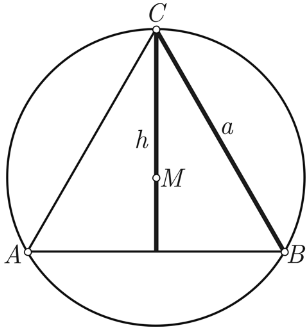

Abb. 3: Der Kreis

Modellierung I*: Ein Punkt W fest auf dem Kreis. Von W aus wird eine Gerade mit zufälliger Richtung gezogen.*

Der Kreis in Abb. 4 hat den Radius 1, W ist ein fester Kreispunkt. Nun wird zufällig eine Zahl α aus $[0; 2\pi)$ gewählt und von W aus gegen den Uhrzeigersinn ein Bogen der Länge α bis zum Punkt P abgetragen. Dies kann man als zufällige Wahl einer Richtung deuten. α ist also ein Wert, der von einer stetigen Zufallsvariable angenommen wird. So wird eine Gerade und damit die Sehne WP bestimmt.

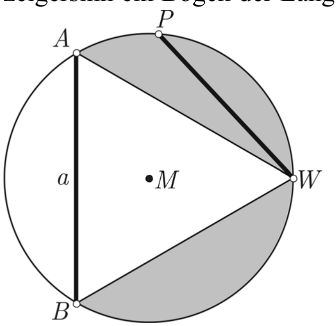

Abb. 4: Sehnenproblem I a

In Abb. 5 haben wir mit unserem Applet n Sehnen gezeichnet, wobei $n = 37$; davon sind 26 kürzer als eine Dreiecksseite, die relative Häufigkeit beträgt ungefähr 0,70. Bei wiederholten Simulationen mit größerer Versuchszahl hat sich die relative Häufigkeit stets bei 0,67 stabilisiert. Um die Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne zu berechnen, kann man versuchen, geometrische Maße der Figur zu verwenden (Abb. 4): Die Konkretisierung für die zufällige Wahl der Sehne basiert auf dem Maß „Länge“, denn der zweite Punkt wurde mit Hilfe der Zahl $\alpha \in [0; 2\pi)$ auf dem Kreis gewählt. Das dem Kreis einbeschriebene gleichseitige Dreieck wurde so gedreht, dass es als einen Eckpunkt den Punkt W hat. Die Sehne WP ist genau dann kürzer als die Dreiecksseite, wenn P auf dem Kreisbogen $\widehat{WA}$ oder $\widehat{BW}$ liegt.

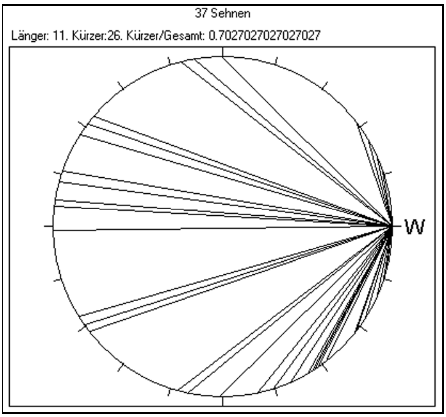

Abb. 5: Sehnenproblem I b

Diese Überlegung führt unter Verwendung des Maßes „Länge“ zum Ansatz

$$p := \frac{\text{Länge der beiden Kreisbögen}}{\text{Umfang des Kreises}} = \frac{2}{3},$$

was mit dem durch die Simulationen gewonnen Wert gut übereinstimmt.

***Modellierung II**: Ein Punkt zufällig auf einem festen Durchmesser des Kreises.*

Diese Variante entspricht dem zweiten Bertrand'schen Vorschlag: Zunächst wird eine Richtung für die Sehnen festgelegt. In Abb. 6 ist die Figur so gedreht worden, dass diese Richtung horizontal ist, so dass AB der fragliche Durchmesser ist. Nun werden zufällig eine Zahl $x \in [0;2]$ erzeugt und ein Punkt $P \in AB$ mit $|AP| = x$ gezeichnet. Das Lot auf AB in P bestimmt dann die „zufällige" Sehne.

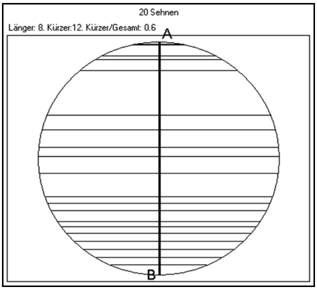

Abb. 6: Sehnenproblem II a

In Abb. 6 sind n Sehnen zu sehen, wobei $n = 20$, von denen 12 kürzer als eine Dreiecksseite sind. Bei großem n stabilisiert sich die relative Häufigkeit in der Regel bei 0,5. Für den Ansatz einer geometrischen Wahrscheinlichkeit denkt man sich wie in Abb. 7 das gleichseitige Dreieck BCD eingezeichnet, dessen Höhenfußpunkt H die Strecke MA halbiert. Alle Sehnen, die kürzer sind als diese Dreiecksseite, stammen folglich von Punkten auf dem oberen oder dem unteren Viertel des Durchmessers, was zur theoretischen Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ führt.

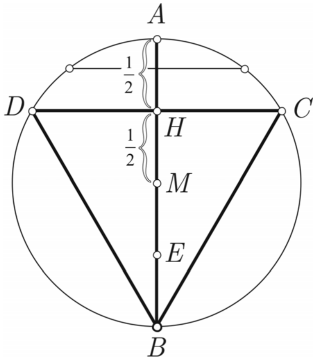

Abb. 7: Sehnenproblem II b

***Modellierung III**: Mittelpunkt der Sehne zufällig im Kreis.*

Für die Experimente konnten wir bisher von der Gleichverteilung der Zufallszahlen auf dem jeweils gegebenen Intervall und damit von einer Gleichverteilung der Punkte auf der jeweiligen Strecke bzw. Linie ausgehen. Wie kann man Punkte P erzeugen, die auf einer gegebenen Fläche gleichverteilt sind? Genauer muss die Dichte der Punkte konstant sein, d. h. für jede Teilfläche A der gegebenen Fläche B muss gelten

$$\mathrm{P}(P \text{ liegt in } A) = \frac{\text{Flächeninhalt von } A}{\text{Flächeninhalt von } B}.$$

Im Applet „Bertrand-Problem" verwenden wir hierfür die folgende Simulation: Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems möge der Kreis den Mittelpunkt $M = (0|0)$ und den Radius 1 haben. Wir erzeugen Zufallszahlen $x, y \in [-1;1]$. Dann sind die Punkte $P = (x|y)$ gleichverteilt in dem dem Kreis umbeschriebenen Quadrat. Als Zufallspunkte für unsere dritte Bertrand-Simulation verwenden wir nur diejenigen Punkte P, für die zusätzlich $x^2 + y^2 \leq 1$ gilt. Diese Punkte haben im Kreis eine konstante Dichte.

Eine andere, scheinbar bestechende Idee bewährt sich dagegen nicht: Um die zufällige Wahl eines Punktes P im Inneren des Kreises zu realisieren, werden zunächst zufällig zwei Zahlen $r \in [0;1]$ und $\varphi \in [0;2\pi[$ gewählt und dann der Punkt $P = (r\cos\varphi \mid r\sin\varphi)$ gezeichnet. Diese Punktverteilung mit Hilfe von Polarkoordinaten hat jedoch keine konstante Dichte auf der Kreisfläche, sondern eine zum Kreisrand hin abnehmende Dichte. Eine einfache Überlegung macht dies klar: Ein Punkt P mit $r < \frac{1}{2}$, d. h., dass P im Inkreis eines dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks liegt, wird mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erzeugt. Der Flächeninhalt des Inkreises ist jedoch $\frac{1}{4}$ des Inhalts des gesamten Kreises, so dass die Wahrscheinlichkeit, im Inkreis zu landen, bei konstanter Dichte auch $\frac{1}{4}$ betragen müsste.

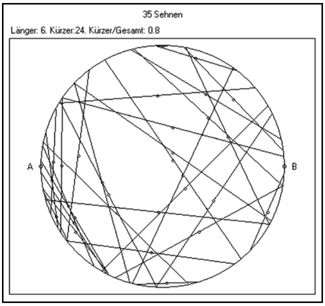

Abb. 8: Sehnenparadoxon III

In Abb. 8 sind mit der in unserem Sinne tauglichen Punkterzeugung schon n Punkte P mit $n = 35$ und zugehörige Sehnen durch die Lote auf MP erzeugt worden. 24 Sehnen waren dabei kürzer als eine Seite des einbeschriebenen Dreiecks. Mit wachsender Versuchszahl n stabilisiert sich die relative Häufigkeit bei 0,75. Der Ansatz einer theoretischen A-priori-Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus Abb. 3: Die Sehne wird genau dann länger als die Dreiecksseite, wenn P im Inkreis des Dreiecks ABC liegt. Die theoretische Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne beträgt also

$$p = 1 - \frac{\mathrm{A(Inkreis)}}{\mathrm{A(Umkreis)}} = \frac{3}{4},$$

was sehr gut zum frequentistischen Ergebnis passt.

Bertrand kommt in seinem „Calcul des Probabilités“ zu den gleichen theoretischen Resultaten. Bei der anschließenden Reflexion wirft er die Frage *„Welche unter diesen Antworten ist die wahre?“* auf und beantwortet sie mit *„Keine der drei ist falsch, keine ist zutreffend, die Frage ist schlecht gestellt.“* [11] Zu Recht kritisiert [Czuber 1908, 106] die zweite Aussage, denn nach der Festlegung, wie die „zufällige Sehne“ gewählt werden soll, ist die zugehörige Antwort jeweils sinnvoll und im frequentistischen Sinne valide. Das eigentlich Paradoxe des Sehnenproblems ist also die vage Formulierung „wähle zufällig eine Sehne“. Wird dies durch eine Vorschrift präzisiert, so stimmen – bei den drei gerade diskutierten ebenso wie bei den anderen Modellierungen in dem Java-Applet „Bertrand-Problem“ – die theoretischen A-priori-Wahrscheinlichkeiten, die auf ein geometrisches Maß zurückgeführt werden, mit den durch Simulation erhaltenen frequentistischen Wahrscheinlichkeiten sehr gut überein (vgl. auch Abschnitt 6).

---

[11] [Bertrand 1888, 5]

Schon [Czuber 1908, 75 ff.] sprach in diesem Zusammenhang von *geometrischen Wahrscheinlichkeiten*. Aus dem Bertrand'schen Sehnenproblem wurde später geschlossen, der Begriff der geometrischen Wahrscheinlichkeit sei widersprüchlich. Dies halten wir für eine unzutreffende Sicht, im Gegenteil, die Betrachtung geometrischer Wahrscheinlichkeiten bei Problemen wie diesem war ein bedeutender Schritt zur Entwicklung von Dichtefunktionen und damit zur Behandlung von Wahrscheinlichkeiten bei überabzählbaren Ergebnismengen. Dies wird schon bei [Poincaré 1896, 94] deutlich:

> Nun kommen wir zu Problemen, wo die Anzahl der möglichen Fälle unendlich wird.

Er beginnt mit dem eindimensionalen Fall und schreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl x zwischen zwei Zahlen x_0 und x_1 liegt, als Funktion $\mathrm{P}(x_0, x_1)$. Dann begründet er, dass es eine Funktion φ geben muss, so dass man

$$P(x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)dx$$

schreiben kann ([Poincaré 1986, 97]):

> Aber wir kennen nicht die Natur von $\varphi(x)$, die willkürlich bleibt: Wir müssen ihr zu Beginn eines Problems durch eine spezielle Vorschrift eine Bedeutung geben, die einen Sinn ergibt.

Das Sehnenproblem ist dann sein erstes Beispiel (vgl. [Poincaré 1896, 98]). Diese Beschreibung der zu modellierenden Wahrscheinlichkeiten durch eine stetige Funktion entspricht dem Ansatz von Dichtefunktionen.

4 Das Bertrand'sche Sehnenproblem als produktive Lernumgebung in der Lehrerausbildung — Bearbeitungen durch Studierende

Das Bertrand'sche Sehnenproblem scheint aufgrund der vielfältigen mit ihm verbundenen Entdeckungsmöglichkeiten und Anlässen zur Begriffsbildung besonders gut geeignet zu sein, um bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern den Aufbau eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu unterstützen. Daher haben wir dieses Problem in das Zentrum von zwei aufeinander folgenden, jeweils 90-minütigen Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik" gestellt. Hierbei handelt es sich um eine elementarmathematische Veranstaltung des Hauptstudiums für Studierende des GHR-Lehramts (Grund-, Haupt- und Realschulen). Bis zu diesem Zeitpunkt wurden in der Vorlesung und in den Übungen Konzepte der beschreibenden Statistik sowie eine erste Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt. Bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung standen bis dahin Laplace'sche, frequentistische und subjektive Wahrscheinlichkeiten sowie die Axiomatisierung durch Kolmogorov im Vordergrund (vgl. [Büchter & Henn 2005, Kap. 3.1]). Dabei wurden elementare Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten sowie die üblichen Hilfsmittel aus der Kombinatorik erarbeitet.

In der ersten Übung sollten die Studierenden in Kleingruppen möglichst viele Ansätze für Modellierungen des Sehnenproblems finden:

- **Aufgabe 1**: Beim Bertrand’schen Sehnenproblem soll zunächst zufällig eine Sehne in einen Kreis gezeichnet werden. Finden Sie hierfür so viele Konkretisierungen wie möglich!

Die dabei entstehenden verschiedenen Konkretisierungen wurden im Plenum zusammengetragen und bezüglich ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede verglichen. Anschließend sollte jede Kleingruppe eine Konkretisierung auswählen und hierfür die zweite Aufgabe bearbeiten:

- **Aufgabe 2**: Wählen Sie in Ihrer Gruppe eine der erarbeiteten Varianten aus, eine Sehne zufällig in einem Kreis zu zeichnen. Bestimmen Sie dann, wie wahrscheinlich es ist, dass eine derart gezeichnete Sehne kürzer ist als eine Seite eines dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Die entsprechenden Lösungen und Lösungswege wurden zum Ende der ersten Übung verglichen und diskutiert, bevor die Kleingruppen in der zweiten Übung alle die drei Modellierungsvorschläge von Bertrand untersuchen sollten. Diese Doppelübung endete mit einer gemeinsamen didaktischen Reflexion des Bertrand’schen Sehnenproblems.

In fast allen Kleingruppen erfanden die Studierenden in der ersten Übung unter anderem solche Konkretisierungen der Problemstellung, zufällig eine Sehne in einen Kreis zu zeichnen, die den drei oben vorgestellten Bertrand’schen entsprechen – einige ungefähr gleich lautend, andere zumindest strukturgleich. Darüber hinaus traten weitere originelle Konkretisierungen der Problemstellung auf, die bei der weiteren mathematischen Analyse teilweise auf wiederum andere Wahrscheinlichkeiten für eine kürzere Sehne führen. Konkretisierungen, die mehr oder weniger nah an Bertrands Vorschlägen liegen, waren z. B.:

- *Zwei Punkte auf dem Kreis von einem festen Punkt aus:* Wähle einen festen Punkt auf dem Kreis und zufällig zwei Bogenmaße aus dem Intervall $]0; 2\pi]$. Durch das Abtragen dieser Bogenmaße vom gewählten Punkt aus erhält man zwei Punkte, die gemeinsam eine Sehne definieren.
- *Ein Punkt auf dem Kreis von einem festen Punkt aus:* Dieser Vorschlag lautete wie der voran stehende, nur wird die Sehne durch den festen Punkt und den zufällig gewählten Punkt definiert.
- *Diskretisierung des Problems:* Dieser Vorschlag setzt die zuvor genannten im Diskreten um. Die Kreislinie wird in 360 Punkte gleichen Abstands diskretisiert. Nun muss kein Bogenmaß zufällig gewählt werden, sondern zwei verschiedene der 360 Punkte sind zufällig auszuwählen. Der Auswahlprozess wird direkt als Laplace’sches Zufallsexperiment betrachtet.

- *Parallelenschar:* Zunächst werden zwei verschiedene Punkte zufällig gewählt. Dies können wie im ersten Vorschlag zwei Punkte auf der Kreislinie sein – oder als Variation zwei Punkte in einer betrachteten Fläche. Durch die gewählten Punkte wird eine Gerade festgelegt (vgl. Abb. 9). Nun werden alle Geraden der Parallelenschar mit dieser Richtung betrachtet, die den Kreis schneiden. Hieraus wird zufällig eine gewählt, indem man ausgehend von einer Tangente die Sehne wählt, die den zufällig gewählten Abstand $a \in]0; 2r]$ von dieser Tangente hat.

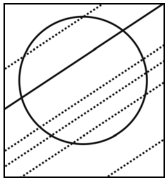
Abb. 9: Parallelenschar

- *Lot auf Radius/Durchmesser:* Betrachte einen Radius bzw. einen Durchmesser und wähle zufällig einen Punkt hierauf. Die Lotgerade zum gewählten Radius bzw. Durchmesser durch diesen Punkt erzeugt eine Sehne.

Über diese genannten Konkretisierungen hinaus gab es eine Vielzahl weiterer Vorschläge, von denen wir auf vier genauer eingehen, da sie uns besonders originell erscheinen oder bei der weiteren Analyse auf andere Wahrscheinlichkeiten für kürzere Sehnen führen. In der folgenden Beschreibung und in den Abb. 10 bis 13 ist der Ausgangskreis mit Radius r jeweils durchgezeichnet,[12] und der zufällig gewählte Punkt ist als kleines Quadrat dargestellt.

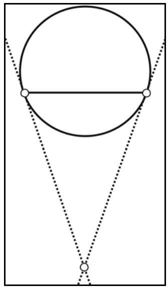
Abb. 10: Tangenten-Sehne

- *Tangenten-Sehne* (Abb. 10): Wähle zufällig einen Punkt außerhalb des Kreises, und konstruiere die beiden Tangenten an den Kreis. Die beiden Berührpunkte definieren eine Sehne.
- *Kreisschnittpunkt 1* (Abb. 11): Verlängere zunächst einen Radius des Kreises. Konstruiere einen Punkt auf dieser Halbgeraden mit einem Abstand vom Mittelpunkt aus dem Intervall $]0; 2r]$, und zeichne um diesen Punkt einen Kreis mit dem Radius r. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem ursprünglichen Kreis legen eine Sehne fest.

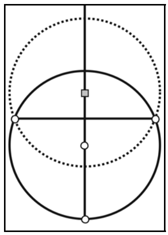
Abb. 11: Kreisschnittpunkt 1

- *Kreisschnittpunkt 2* (Abb. 12): Wähle einen Punkt auf dem Kreis und einen neuen Radius aus dem Intervall $]0; 2r]$. Zeichne einen Kreis mit diesem Radius um den gewählten Punkt, und verbinde diesen Punkt mit den entstehenden Schnittpunkten der beiden Kreise. Dadurch werden zwei gleich lange Sehnen definiert.

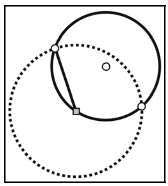
Abb. 12: Kreisschnittpunkt 2

[12] Niemand der Studierenden hat die Ähnlichkeitsinvarianz des Problems genutzt, um zur Vereinfachung $r = 1$ zu setzen.

- *Kreisschnittpunkt 3* (Abb. 13): Wähle einen Punkt auf dem Kreis und einen neuen Radius aus dem Intervall $]0;2r]$. Zeichne einen Kreis mit diesem Radius um den gewählten Punkt. Verbinde die entstehenden Schnittpunkte der beiden Kreise. Dadurch wird eine Sehne festgelegt.

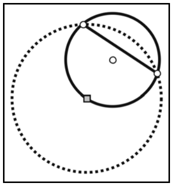

Abb. 13: Kreisschnittpunkt 3

Bei der weiteren mathematischen Analyse ausgewählter Konkretisierungen setzten sich einige Kleingruppen mit den zuletzt genannten Vorschlägen auseinander. Die Analyse der *„Tangenten-Sehne“* und der *„Kreisschnittpunkte 1 bis 3“* ist dabei gut mit elementargeometrischen Überlegungen zu bewältigen – gleichwohl stellt die Notwendigkeit, elementargeometrische Kompetenzen in einer Stochastik-Veranstaltung anwenden zu müssen, viele Studierende vor Probleme. Hier stellen wir eine kurze Skizze dieser Analysen dar:

- *Tangenten-Sehne*: Aufgrund der Symmetrie des Kreises kommt es nur auf den Abstand des zufällig gewählten Punktes zum Mittelpunkt des Kreises an. Für eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass eine mit Hilfe des Punktes erzeugte „Tangenten-Sehne“ kürzer ist als eine Seite eines dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, gehen wir davon aus, dass der Kreis sich in einer endlich großen Fläche befindet und bei der zufälligen Wahl des Punktes gleichgroße Teilflächen jeweils eine gleichgroße Wahrscheinlichkeit haben, „getroffen“ zu werden. Wir führen wiederum alle Betrachtungen für den Einheitskreis durch! Kürzere Sehnen entstehen dann, wenn der Punkt einen Abstand $1 \leq a \leq 2$ vom Mittelpunkt des Kreises hat. Damit wird der entsprechende „äußere Kreisring“ mit dem Flächeninhalt 3π interessant. Im Kreis selber können keine Punkte gewählt werden, sein Flächeninhalt beträgt π. Ist F der Inhalt der insgesamt betrachteten endlich großen Fläche, die den Kreis und den „äußeren Kreisring“ umfassen soll, so erhält man $p = 3\pi/(F-\pi)$ als Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne. Damit wird auch rechnerisch nachvollziehbar, was anschaulich klar ist: Die Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne geht gegen 0, wenn die Fläche immer größer wird. Das stochastische Maß *Wahrscheinlichkeit* wurde hier wie bei der dritten Bertrand’schen Modellierung aus dem geometrischen Maß *Flächeninhalt* abgeleitet.
- *Kreisschnittpunkt 1*: Wenn man auf dem verlängerten Radius zufällig einen Punkt mit Abstand $0 < a \leq 2$ wählt und hierum einen Kreis mit Radius 1 zeichnet, so erhält man durch die Schnittpunkte der Kreise genau dann eine kürzere Sehne, wenn $1 \leq a \leq 2$ gilt. Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ für eine kürzere Sehne. Hier wurde die Wahrscheinlichkeit wie bei den beiden folgenden Modellierungen aus dem Maß *Länge* abgeleitet.
- *Kreisschnittpunkt 2*: Nachdem ein Punkt P auf der Kreislinie gewählt wurde, wird ein neuer Radius $0 < r_2 \leq 2$ zufällig gewählt. Zeichnet man einen Kreis mit

Radius r_2 um P und verbindet P mit den Schnittpunkten der beiden Kreise, so entsteht genau dann eine kürzere Sehne, wenn r_2 ebenfalls kürzer ist als eine Seite eines dem Einheitskreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, also kürzer als $\sqrt{3}$, da die Sehnenlänge gerade gleich r_2 ist. Damit erhält man $p = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$ als Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne. Dieses Resultat gleicht dem einer etwas anderen mathematischen Analyse von *Bertrands* Sehnenproblem, die direkt ohne eine Konkretisierung der zufälligen Wahl einer Sehne wie folgt lautet: Die Länge s einer Sehne liegt zwischen 0 und 2, für die fraglichen kürzeren Sehnen gilt $0 \leq s \leq \sqrt{3}$. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit einfach $p = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$.

- *Kreisschnittpunkt 3*: Wenn man einen Punkt P auf dem Kreis wählt und um ihn einen Kreis mit zufällig gewähltem Radius $0 < r_3 \leq 2$ zeichnet, so erhält man genau durch die Kreisschnittpunkte für $0 < r_3 \leq 1$ oder $\sqrt{3} < r_3 \leq 2$ eine kürzere Sehne. Damit folgt als Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne $p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0,63$.

Neben diesen Analysen mit üblichen elementargeometrischen Betrachtungen haben Studierende auch eigene Wege der Analyse mit unkonventionellen Methoden gewählt, die zeigen, dass das Bertrand'sche Sehnenproblem sehr gut geeignet ist, um Studierende zum authentischen Treiben von Mathematik mit den ihnen verfügbaren Methoden anzuregen.[13] Exemplarisch stellen wir zwei Bearbeitungen durch Studierende vor:

- Mehrere Kleingruppen haben das Problem für die Analyse verschiedener Konkretisierungen diskretisiert. Dieser Zugang wird besonders verständlich, wenn man berücksichtigt, dass vor der Doppelübung in der Veranstaltung endliche Ergebnismengen und entsprechende Methoden im Vordergrund standen. Eine Gruppe betrachtete 360 in gleichem Abstand auf dem Kreis verteilte Punkte und analysierte die Konkretisierung *„Zwei Punkte auf dem Kreis"* mit Hilfe kombinatorischer Betrachtungen und einem Laplace-Ansatz: Insgesamt gibt es $\binom{360}{2} = 64.620$ mögliche Sehnen, die durch die Zufallswahl der Punkte gleichwahrscheinlich sind. Um die günstigen Sehnen genau ein Mal zu zählen, werden für jeden der 360 Punkte die im Uhrzeigersinn folgenden 119 Punkte betrachtet. So erhält man $360 \cdot 119 = 42.840$ günstige Sehnen und damit als Wahrscheinlichkeit für eine kürzere Sehne ungefähr 0,66.
- Eine Kleingruppe setzte sich mit der Konkretisierung *„Ein Punkt im Kreis zufällig, Lot auf einen zuvor festgelegten Durchmesser"* auseinander. Dabei fanden die Studierenden direkt heraus, dass der Anteil der Inhalte der in Abb. 14 schraffierten Flächen am gesamten Kreisflächeninhalt die gesuchte Wahrscheinlich-

[13] Zum hier implizit präsentierten Verständnis von „Authentizität" vgl. [Büchter & Leuders 2005].

keit ergibt. Sie sahen zwar nicht die Möglichkeit, die relevanten Flächeninhalte durch Differenzbildung von Kreisflächeninhalt und Dreiecksflächeninhalt zu bestimmen ($\frac{2}{3}$ dieser Differenz entspricht der gesuchten Wahrscheinlichkeit), fanden dafür aber eine sehr schöne Möglichkeit, die Figur in kongruente Teilfiguren zu zerlegen und die relevanten Flächeninhalte damit abzuschätzen.

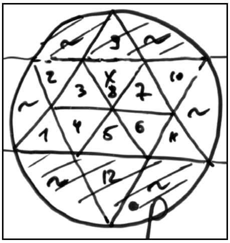

Abb. 14

5 Didaktische Reflexion der Bearbeitungen

Da die historische Darstellung des Bertrand’schen Sehnenproblems, seine mathematische Analyse und die konkreten Arbeiten der Studierenden schon einen sehr guten Eindruck vom Gehalt dieses Problems und seiner potenziellen Bedeutung für den Aufbau eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs vermitteln, beschränken wir die didaktische Reflexion der Doppelübung auf einige kurz ausgeführte Stichworte.

Zunächst kann man bilanzieren, dass das Bertrand’sche Sehnenproblem sehr gut geeignet ist, um für die in der Stochastik so wichtige Frage *„Was ist zufällig?“* zu sensibilisieren. Das Paradoxe, nämlich die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für kürzere Sehnen je nach Konkretisierung, tritt in analoger Weise bei dem Teilproblem *„Wähle zufällig einen Punkt im Kreis“* auf. Dieses Teilproblem kann so konkretisiert werden, dass alle Teilflächen des Kreises, die gleich groß sind, mit gleicher Wahrscheinlichkeit „getroffen“ werden – oder dass Teilflächen nahe am Mittelpunkt bevorzugt werden. Die hierbei notwendigen Betrachtungen führen zwangsläufig auf den wichtigen Begriff „Dichte“ (wenn auch nicht zwangsläufig in dieser Bezeichnung), nämlich als Wahrscheinlichkeit pro Teilfläche.

Schon der Vergleich verschiedener Konkretisierungen von *„zufällig eine Sehne zeichnen“* führte in den Übungen zu lebhaften Diskussionen unter den Studierenden, bei denen schnell tiefer liegende mathematische Strukturen thematisiert wurden. Es handelt sich um eine Aufgabenstellung im Sinne des „open ended approach“ (*„find as much as possible“*, vgl. [Becker & Shimada 1997]). Die Diskussion verschiedener Berechnungen zu den Konkretisierungen führt gerade beim Vergleich der diskreten Ansätze mit den anderen Ansätzen auf die Frage von unendlichen, sogar überabzählbaren Ergebnismengen. Die Möglichkeit, hier das Maß *Wahrscheinlichkeit* aus geometrischen Maßen abzuleiten, kann also in vertiefenden Stochastik-Veranstaltungen sehr gut zur Vorbereitung der Axiomatisierung des überabzählbaren Falls dienen (vgl. [Büchter & Henn 2005, Kap. 3.1]).

Die Schwierigkeiten, die viele Studierende beim Aktivieren elementargeometrischer Fähigkeiten im Kontext einer Stochastik-Veranstaltung haben, deuten auf ein gravierendes Vernetzungsproblem – besser vielleicht: Vernetzungsdefizit – in der Lehrerausbildung hin. Zwar fordern wir Fachdidaktiker zu Recht von den Lehrerinnen und Lehrern, Mathematik müsse in ihrer Vernetztheit erfahrbar werden; in der eigenen Lehrpraxis werden aber die Inhaltsgebiete doch allzu oft fein säuberlich in verschiedene Schubladen separiert angeboten.[14] Umso wichtiger sind also solche Probleme, bei deren Bearbeitung Fähigkeiten aus mehreren Bereichen aktiviert werden müssen. Das Bertrand'sche Sehnenproblem kann dabei als ein Paradebeispiel betrachtet werden. Ein anderes Beispiel ist, wenn bei der Einführung der kombinatorischen Grundaufgaben statt der Möglichkeit eines Lottogewinns z. B. die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl in den Mittelpunkt gerückt wird.

Das Sehnenproblem ist unseres Erachtens auch gut für den Stochastik-Unterricht am Ende der Sekundarstufe I oder in der Sekundarstufe II geeignet. Insbesondere können neben den abstrakteren Zugängen und Computersimulationen dort handlungsorientierte Zugänge im Vordergrund stehen. Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts können z. B. „Zufallsmaschinen“ konstruiert werden, mit denen wiederholt zufällige Sehnen erzeugt werden können.

6 Weitere Modellierungen

In diesem Abschnitt werden die weiteren Modellierungen besprochen, die in dem Java-Applet „Bertrand-Problem“ auf unserer Website verfügbar sind.

Modellierung VI*: Beide Punkte zufällig auf dem Kreis.*

Hier geht man von einem festen Punkt auf dem Kreis aus, wählt dann zwei Punkte nach der bei der *Modellierung I* besprochenen Methode zufällig auf dem Kreis und zeichnet dann die Sehne, die diese beiden Punkte verbindet. Auch hier kommt man zu der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$.

Modellierung V*: Ein Punkt W fest auf dem Kreis, ein zweiter Punkt P zufällig im Inneren des Kreises.*

Mit dem bei der Analyse der *Modellierung III* (Abschnitt 3) beschriebenen Verfahren wird ein zufälliger Punkt P im Kreisinneren gewählt und mit dem festen Punkt W verbunden. Der Abb. 4 kann man entnehmen, dass eine Sehne genau dann kürzer als eine Dreiecksseite ist, wenn der Zufallspunkt P im Inneren der grauen Fläche liegt. Jetzt basiert die zufällige Wahl des die Sehne definierenden Punktes auf dem Maß *Flächeninhalt*, so dass das Flächenverhältnis

$$p = \frac{\text{Inhalt der beiden Kreisabschnitte}}{\text{Inhalt des Kreises}} = \frac{\frac{2}{3}(\pi - A_\Delta)}{\pi} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}391$$

[14] Wir generalisieren hier guten Gewissens; es wird sich hierbei nicht um ein spezifisches Dortmunder Problem handeln.

als Wahrscheinlichkeit anzusetzen ist, ein Ansatz, der mit dem frequentistischen Ergebnis sehr gut verträglich ist.

***Modellierung VI**: Beide Punkte zufällig im Inneren des Kreises.*

Diese Variante ist relativ komplex und benötigt einen Integralansatz zur weiteren Berechnung. Diese Modellierung wird auch von [De Montessus 1908, 111] und von [Czuber 1908, 108] diskutiert. Zwei verschiedene Punkte P und Q werden zufällig im Innern des Kreises gewählt, und es wird die durch sie definierte Sehne gezeichnet.

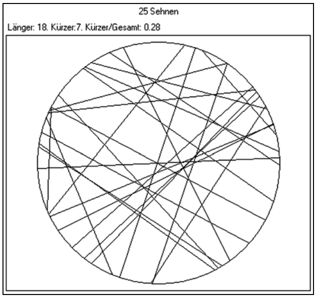

Abb. 15: Zwei Punkte im Kreis

In Abb. 15 sind 25 Sehnen gezeichnet, von denen 7 kürzer als die Dreiecksseite sind. Die relative Häufigkeit ist 0,28. Bei großen Versuchszahlen stabilisierte sich die relative Häufigkeit bei 0,253. Die theoretische Analyse ist jetzt deutlich komplizierter: Nachdem der erste Punkt P zufällig gewählt ist, denken wir uns den Kreis geeignet gedreht, so dass eine Lage wie in Abb. 16 erreicht wird. Damit die Sehne kürzer als die Seitenlänge des Dreiecks ABC sein kann, darf P nicht im Inkreis des Dreiecks liegen, es muss also gelten $0{,}5 \le \rho := |PM| \le 1$. Der zweite Zufallspunkt Q führt nun genau dann zu einer Sehne, die kürzer als die Dreiecksseite ist, wenn Q in der grauen Fläche $\mathrm{A}(\rho)$ in Abb. 16 liegt, die durch die Tangenten t_1 und t_2 von P an den Inkreis und durch den Umkreis definiert ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Q zu einer kürzeren Sehne führt, hängt also von der Lage von P, genauer vom Abstand r ab.

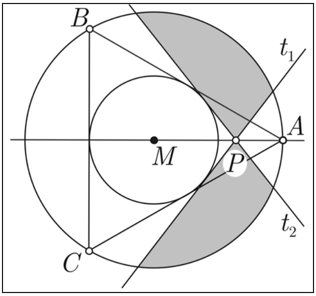

Abb. 16: Analysefigur

Es sei nun $0{,}5 \le \rho := |PM| \le 1$. Im Koordinatensystem mit Ursprung M und x-Achse = MA hat P die Koordinaten $P(\rho|0)$. Der Umkreis des Dreiecks ABC ist auf 1 normiert, der Inkreis hat also den Radius 0,5, das Dreieck hat die Seitenlänge $a = \sqrt{3}$ und die Höhe $h = 1{,}5$. Abb. 17 ist eine Spezifizierung von Abb. 16. Wir berechnen zuerst den Inhalt der dunkelgrauen Fläche $\mathrm{A}(\rho)$. Die beiden Tangenten berühren den Inkreis in den Punkten D und F, die Strecke DF schneidet die x-Achse in E. Die Tangente t_1 schneidet den Umkreis in H, das Lot von H auf die x-Achse schneidet die x-Achse im Punkt G. Schließlich ist $\alpha := \sphericalangle AMH$ der Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl MH. Die Tangente t_2 schneidet vom Kreis einen Kreisabschnitt ab, dessen Inhalt F_1 genauso groß ist wie der durch AB definierte Kreisabschnitt. Es gilt also

$$F_1 = \frac{1}{3} \cdot (\text{Inhalt des Umkreises} - \text{Inhalt des Dreiecks}) = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

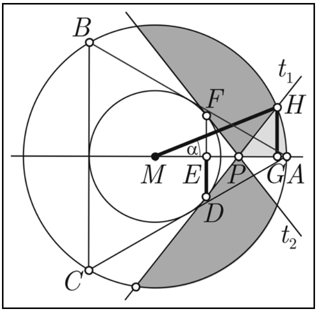

Abb. 17: Berechnung von $\mathrm{A}(\rho)$

Die hellgraue Fläche mit Inhalt F_2 wird gebildet von der x-Achse, der Tangente t_1 und dem Kreis. Damit gilt für den Inhalt $\mathrm{A}(\rho)$ der dunkelgrauen Fläche

$$\mathrm{A}(\rho) = 2\cdot(F_1 - 2\,F_2).$$

Der hellgraue Flächeninhalt F_2 berechnet sich als Differenz der Flächeninhalte des Kreissektors AMH mit Öffnungswinkel α und des Dreiecks MPH, also

$$F_2 = \frac{1}{2}\Big(\alpha - |MP|\cdot|GH|\Big).$$

a und b seien die Koordinaten des Punktes H, also $H(a\,|\,b)$. Damit gilt weiter

$$F_2 = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(b) - \rho\, b\Big).$$

Zur Berechnung von b sei zunächst $D(c\,|\,d)$, also $E(c\,|\,0)$. Damit gilt für die Koordinaten c und d

$$c^2 + d^2 = \frac{1}{4}$$

(da D auf dem Inkreis liegt) und

$$\frac{1}{4} + \Big((\rho - c)^2 + d^2\Big) = \rho^2$$

(Satz des Pythagoras im Dreieck MDP).

Nach kurzer Rechnung folgt wegen $d < 0$

$$c = \frac{1}{4\rho}, \quad d = -\frac{1}{4\rho}\cdot\sqrt{4\rho^2 - 1}\,.$$

Die Koordinaten a und b von H ergeben sich durch den Schnitt der Gerade t_1 mit dem Umkreis. Diese Gerade hat den x-Achsenabschnitt ρ und die Steigung

$$m = \frac{|ED|}{|EP|} = \frac{d-0}{\rho - c} = \frac{1}{\sqrt{4\rho^2 - 1}}.$$

Damit erhalten wir für a und b die beiden Gleichungen

$$a^2 + b^2 = 1,$$

da H auf dem Kreis liegt, und

$$b = \frac{1}{\sqrt{4\rho^2 - 1}}\cdot(a - \rho),$$

da H auf der Geraden t_1 liegt.

Durch Einsetzen von b in die erste Gleichung erhält man eine quadratische Gleichung, deren positive Lösung das gesuchte a ist. Aus der Geradengleichung ergibt sich dann b. Das Ergebnis ist

$$a = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4\rho^2-1}+1}{4\rho},\quad b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4\rho^2-1}}{4\rho}.$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt $\mathrm{A}(\rho)$ ausdrücken:

$$\mathrm{A}(\rho) = \frac{2\pi}{3} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4\rho^2-1}}{4\rho}\right) - \frac{\sqrt{4\rho^2-1}}{2}.$$

Nun können wir einen theoretischen Ansatz für die Wahrscheinlichkeit machen, dass eine zufällig gezeichnete Sehne kürzer als eine Seite eines dem Kreis einbeschriebenen Dreiecks ist. Die zufälligen Wahlen des ersten Punkts P und des zweiten Punkts Q sind unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit p_1, dass P in einen Kreisring mit Radien $0 \le r_1 < r_2 \le 1$ fällt, ist

$$\frac{\text{Inhalt des Kreisrings}}{\text{Inhalt des Kreises}}.$$

Die Dichtefunktion $f:[0;\,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x$ bestimmt also diese Wahrscheinlichkeit als

$$p_1 = \int_{r_1}^{r_2} 2x\,dx.$$

Wenn wir uns einen „infinitesimalen“ Kreisring mit Radien ρ und $\rho+\Delta\rho$ denken, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$p_1 = \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} 2x\,dx$$

durch dieses Integral bestimmt, und die Wahrscheinlichkeit p_2 können wir für jeden Punkt im Kreisring als konstanten Wert $p_2 = \mathrm{A}(\rho)/\pi$ ansehen. Damit ist $p_1\cdot p_2$ die Wahrscheinlichkeit, dass P in den Kreisring fällt und Q dann so gewählt wird, dass die zugehörige Sehne kürzer als die Dreiecksseite ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p für die *Modellierung VI* können wir also ansetzen als

$$p = \int_{0{,}5}^{1} 2\rho\frac{\mathrm{A}(\rho)}{\pi}\,d\rho \approx 0{,}2531670.$$

Man könnte für den Integranden eine Stammfunktion suchen, was jedoch hier unnötig ist: Uns hat bei der numerischen Auswertung des Integrals ein Computeralgebrasystem geholfen. Wieder stimmen diese theoretische Wahrscheinlichkeit und der mit dem frequentistischen Ansatz gewonnene Wert gut überein.

***Modellierung VII**: Fester Kreisdurchmesser und ein Punkt zufällig im Kreis.*

Bei dieser Variante werden im Kreis zufällig ein Punkt P gewählt und dann senkrecht zu einem festen Durchmesser AB eine Sehne gezeichnet. Wie bei der *Modellierung V* liegt das Maß *Flächeninhalt* zugrunde, was dann zum gleichen Wahrscheinlichkeitsansatz

$$p = \frac{\frac{2}{3}(\pi - A_\Delta)}{\pi} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \approx 0,391$$

führt.

***Modellierung VIII**: Fester Kreisdurchmesser und ein Punkt zufällig auf dem Kreis.*

Die achte Variante entspricht der siebten, nur dass der Punkt P auf dem Kreis liegt. Denkt man sich in Abb. 4 den festen Durchmesser als Lot von W auf AB, so ist wieder klar, dass die Punkte P auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und auf dem an dem vertikalen Durchmesser gespiegelten Bogen zu einer kürzeren Sehne führen, so dass wieder $p = \frac{2}{3}$ folgt.

Selbstverständlich sind noch viele weitere Konkretisierungen möglich, zufällig eine Sehne zu zeichnen. Ausführlich beschäftigt sich das Stochastik-Buch [Barth & Haller 1985, 389 f.] mit dem Bertrand'schen Sehnenproblem. Die dortigen Modelle A bis D entsprechen bzw. sind analog zu unseren Modellen I, II, III und V. Als interessante Verallgemeinerung schlagen sie vor, für $0 \leq s \leq 2$ die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Sehnenlänge} \leq s)$ zu betrachten. [Gardner 1971, 146] gibt konkrete Experimente an, z. B. soll man einen Kreis mit Sirup bilden und warten, bis sich eine Fliege auf der Kreisfläche nieder lässt. Der Platz der Fliege bestimmt dann den Mittelpunkt einer Sehne. Er zitiert auch das interessante Ergebnis eines amerikanischen Psychologie-Professors. Nach dessen Test ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch eine Sehne zeichnet, die länger als die Seite des einbeschriebenen Dreiecks ist, wesentlich größer als $\frac{1}{2}$.

Wie schon das gerade erwähnte Beispiel von Barth & Haller zeigt, findet man leicht Variationen des ursprünglichen Sehnenproblems. Dieses Variieren ist eine sehr erfolgversprechende Strategie für Lernende, wie Hans Schupp mit seiner Arbeitsgruppe „Aufgabenvariation" überzeugend dargestellt hat (vgl. [Schupp 2003]). Viele Beispiele findet man schon in dem Werk von Czuber (1908/1910, Band 1, S. 87 ff.).

Sicher werden Sie selbst eigene Ideen haben, zufällig und variantenreich Sehnen zu zeichnen. Oder zeichnen Sie doch mal zufällig ein Dreieck in einen Kreis und berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Flächeninhalt einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet. Was kann passieren, wenn Sie statt des Flächeninhalts den Umfang betrachten? Oder zeichnen Sie zufällig Vierecke in ein vorgegebenes Dreieck und ... Oder, oder, oder ... Viel Spaß dabei!

Literatur

Barth, Friedrich & Haller, Rudolf [1985]: Stochastik — Leistungskurs. München: Ehrenwirth.

Becker, Jerry P. & Shimada, Shigeru [1997]: The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Bertrand, Joseph [1888]: Calcul des Probabilités. Paris: Gauthier-Villars.

Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang [2005]: Elementare Stochastik. Heidelberg: Springer.

Büchter, Andreas & Leuders, Timo [2005]: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Czuber, Emanuel [1908/1910]: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2 Bände. Leipzig: Teubner.

De Montessus, Robert [1908] : Leçons élémentaire sur le calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villar.

Gardner, Martin [1971]: Mathematische Rätsel und Probleme. Braunschweig: Vieweg.

Schupp, Hans [2003]: Thema mit Variationen. Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, Hans & Berg, Gregor & Dabrock, Heinz [1992]: Programme für den Stochastik-Unterricht. Bonn: Dümmler.

Poincaré, Henri [1896]: Calcul des Probabilités. Paris: Gauthier-Villars.

Sheynin, Oscar [1994]: Bertrand`s work on probability. In: *Archive for History of Exact Sciences* **48**(1994)2, 155–199.

Winter, Heinrich [1992]: Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **13**(1992)1, 23–53.

Anschrift der Verfasser

Andreas Büchter & Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn
Fachbereich Mathematik, IEEM
Universität Dortmund
44221 Dortmund
E-Mail: andreas.buechter@uni-dortmund.de, wolfgang.henn@uni-dortmund.de