

Drei Entdeckungen mit Hilfe von Software für Dynamische Geometrie (DGS)

von

Peter Bender, Paderborn

Kurzfassung: Bei der Arbeit mit Software für Dynamische Geometrie in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung entdeckte der Autor einige für ihn neue elementargeometrische Sachverhalte. Diese werden im Beitrag dargestellt und in klassischer Manier bewiesen.

Abstract: Working with dynamic geometry software in the geometry course in the in-service teacher training, the author discovered several facts from elementary geometry which were new to him. These facts will be presented in the article together with proofs in classical style.

1 Einleitung

Als 1988 CABRI GÉOMÈTRE als erste Software für Dynamische Geometrie (DGS) der didaktischen Öffentlichkeit vorgestellt wurde, schien ein alter Traum aller Geometrie Treibenden und Lehrenden Wirklichkeit geworden zu sein: geometrische Formen, wenigstens in der Ebene, scheinbar (aber genau auf den Schein kommt es an) kontinuierlich bewegen und verändern zu können. Aus den verschiedensten Gründen hat sich aber die Erwartung einer Revolution des Geometrieunterrichts nicht erfüllt. Nach wie vor wird die Geometrie in der allgemeinbildenden Schule vernachlässigt; die erforderliche technische Ausstattung ist fast überall unzulänglich; die Mathematikdidaktik ist immer noch weit davon entfernt, ein brauchbares umfassendes Curriculum für den Geometrieunterricht mit computerlosen und computerhaltigen Aktivitäten zu liefern. Die Kolleginnen und Kollegen hatten stattdessen zunächst einmal die Möglichkeiten der DGS überhaupt ausgelotet, vornehmlich auf der inhaltlichen, zunehmend auf der methodischen und hie und da auch auf der pädagogischen Ebene.

Die Hoffnungen, dass die Verbreitung des Computers das Selbstständigkeitsparadigma der modernen Pädagogik befördern würde, haben sich insgesamt, aber auch speziell bei DGS, nicht erfüllt, jedenfalls wenn es um den Erwerb substanzialer Inhalte geht. Für diesen Misserfolg (wenn man ihn denn so sehen will) sind keineswegs allein methodische und didaktische Mängel (die in der Tat in Hülle und Fülle vorkommen) oder das Ansinnen verantwortlich, überhaupt methodische und didaktische Gesichtspunkte einzubringen. Die Ursachen liegen tiefer.

Die kognitiven, motivationalen, sozialen usw. Voraussetzungen von „gewöhnlichen“ Geometrielernenden bis hinauf zu Studierenden des Lehramts unterscheiden sich doch erheblich von denen derjenigen, die von Berufs wegen (nicht zuletzt als Lehrende oder sich mit dem Lehren Befassende) oder gar um der Sache selbst willen Geometrie treiben. Unsereiner kennt die Geschichte einigermaßen, ist auf dem Stand der Diskussion, hat Interesse, kann (wenn denn Zeit vorhanden) mit Muße Geometrie treiben, hat Erfahrung und schon so manches geometrische Problem in einer gewissen Tiefe durchdrungen, kennt Nachbargebiete, mathematisches Rationieren usw. Den „gewöhnlichen“ Lernenden geht dies alles mehr oder weniger ab. Neben der Geometrie haben sie inner- und außerhalb von Schule bzw. Hochschule vielfältige Interessen und aufwändige Pflichten, und wir sollten viel zurückhaltender und realistischer sein, was wir ihnen an selbstständig zu Erarbeitendem zumuten wollen und können. Der erkenntnistheoretische Konstruktivismus taugt als pädagogische Grundlage und Rechtfertigung für solche Zumutungen überhaupt nicht, eben weil „gewöhnlichen“ Lernenden alle die genannten Voraussetzungen fehlen. In der Tat habe ich noch nie durch langfristige stabile Lernerfolge belegt gesehen, wie sie ohne massive Intervention durch Lehrende (sowohl direkt persönlich, als auch indirekt durch Bücher, Internet o. Ä.) sich substantielle Mathematik in sog. konstruktivistischen Lernumgebungen selbstständig erarbeitet hätten. Das war übrigens „früher“ nicht viel anders, und zwar auch nicht bei einem Martin Wagenschein.

Unabhängig davon erkenne ich der Geometrie eine wichtige Rolle in der allgemein- und in der berufsbildenden Schule sowie in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung zu. Stichworte zur Rechtfertigung: Raumanschauung, rationales und logisches Denken, Argumentieren, Kreativität, Ästhetik, Anwendungen, „abstrakte“ Bildung, Kompensation (im Vergleich zum restlichen Mathematikunterricht) usw. – In zahlreichen Büchern und Aufsätzen, z. B. [Schupp 1971] (und frühere) über [Schupp 1988] bis heute, hat Hans Schupp wesentliche Beiträge zur Geometrie und ihrer Didaktik überhaupt und zu diesen Gesichtspunkten speziell geleistet. – Inzwischen drückt DGS vielen davon ihren Stempel auf, und DGS hätte m. E. schon seit einiger Zeit ein konstituierender Bestandteil des Geometrieunterrichts zu sein. Die Grenzen sind auch klar: Nach wie vor muss die Papier-und-Bleistift-Zeichnung den Bezug zwischen der Körperlichkeit des Menschen und der ebenen Geometrie herstellen; Beweise sind fast immer in ruhenden Situationen zu führen (für die trotzdem möglichen Funktionen von DGS dabei s. [Bender 1989]); Anwendungen können zwar oft mit Hilfe von zweidimensionalen Skizzen verständlich gemacht werden, und DGS kann dabei helfen, wenn ebene Bewegungsabläufe involviert sind. Für genuin dreidimensionale Situationen gibt es wohl schon lange kommerzielle CAD-Programme und inzwischen sogar leistungsfähige 3D-Weiterentwicklungen von schul-affiner DGS: CABRI 3D (vgl. [Schumann 2004]). Hier werden dann aber die Grenzen durch den übertriebenen Respekt von Lehrenden und Lernenden vor der Sache „Raumgeometrie“ gesetzt.

Zugleich leistet DGS auch einen wesentlichen Beitrag zur, global gesprochen, Medienerziehung und einen spezifischen nichttrivialen Beitrag zur Erfahrung von Möglichkeiten und Grenzen, zur Aneignung und zur Nutzung Neuer Medien. Auch zu diesen Fragen des Mathematikunterrichts hat Hans Schupp, z. B. [Schupp 1990] (und frühere) über [Schupp 1997] bis heute, wichtige Erkenntnisse beigesteuert.

An der „Universität der Informationsgesellschaft“ in Paderborn ist der Nährboden für Forschung und Entwicklung auf diesem Gebiet durchaus günstig. Nicht zuletzt im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung hat hier der Erziehungswissenschaftler Gerhard Tulodziecki als Motor gewirkt. Aus entsprechenden, z. T. von der Bertelsmann-Stiftung geförderten Projekten sind auch einschlägige Aktivitäten der Fachgruppe „Mathematik und ihre Didaktik“ hervorgegangen. So hat Hans-Dieter Rinkens mit Mitarbeiter Hauke Friedrich Ende der 1990er Jahre unsere Erstsemester-Veranstaltung zur Elementargeometrie für Studierende des Grund-, Haupt- und Realschullehramts konsequent auf die Verwendung von DGS umgestellt. Zunächst hat er CABRI GÉOMÈTRE eingesetzt, ist aber bald auf CINDERELLA umgestiegen, weil diese DGS damals allein internettauglich war. Ab WS 02/03 wurde die Veranstaltung von mir übernommen, zunächst mit Mitarbeiterin Dorothee Maczey und dann mit Mitarbeiter Tobias Huhmann. Obwohl wir inzwischen das Internet nicht mehr benötigen, weil wir sämtliche Text- und Grafikdateien auf CD zur Verfügung stellen, und obwohl andere DGS in Sachen „Internettauglichkeit“ aufgeholt haben, sind wir bei CINDERELLA geblieben, auch wenn wir (in der von uns verwendeten Version) u. a. die Möglichkeit des Makro-Schreibens vermissen und uns ein besseres Layout wünschen. Zu dieser Veranstaltung sind Ziele, Konzeption, Erfahrungen usw. in [Bender 2005] beschrieben.

Jetzt möchte ich einige interessante stoffliche Aspekte beleuchten. Es handelt sich um drei Entdeckungen mit Hilfe von DGS und die zugehörigen Beweise, die alle auf der Lehrendenebene stattgefunden haben bzw. durchgeführt wurden. Sie beruhen auf Übungsaufgaben, die noch von Hans-Dieter Rinkens stammen. Zwei dieser Aufgaben haben wir entsprechend unserer Entdeckungen für die Studierenden weiter entwickelt; gemäß den o. a. Bemerkungen versehen wir sie aber mit deutlichen Hinweisen. Unser Ziel ist dabei, die Breite der Hörerschaft zu Verstehenserefolgen zu führen. Trotzdem haben auch die Leistungsstärkeren Entfaltungsmöglichkeiten; denn das eigenständige Finden, saubere Ausarbeiten und nachvollziehbare Präsentieren der Lösungen ist immer noch eine ordentliche Leistung.

Wir selbst versuchen, unsere eigene Begeisterung für die Geometrie auf die Studierenden zu übertragen, und wir wünschen uns, dass sie es später in der Schule mit ihren Lernenden genauso tun. Aus Sicht der wissenschaftlichen Mathematikdidaktik ist das natürlich zu wenig, und obwohl es sich um eine Fachveranstaltung handelt, versuchen wir immer wieder, die Lernprozesse der Studierenden explizit zu machen, die sich ja von denen ihrer zukünftigen Schülerinnen und Schülern kaum unterscheiden, und wir streuen an vielen Stellen genuin didaktische Bemerkungen ein.

Nun also einige Ergebnisse der intensiven Diskussionen des Stoffs mit den Mitarbeitenden, zu denen uns, wie gesagt, die DGS verholfen hat. Ich hoffe, dass auch Hans Schupp seine Freude an unseren Entdeckungen hat.

2 Ortslinien bei regelmäßigen Figuren

Eine typische Ortslinien-Aufgabe in unserem Lehrgang: Gegeben sind ein Winkelfeld (mit gewissen Einschränkungen für das Winkelmaß, die aber bei unseren weiteren Ausführungen keine Rolle spielen) mit zwei Schenkeln g und h sowie ein Punkt A im Inneren. Es soll ein gleichseitiges Dreieck so in das Winkelfeld eingepasst werden, dass eine Ecke auf A , die zweite auf g und die dritte auf h liegt.

Man legt eine Ecke B auf g und konstruiert das zugehörige gleichseitige Dreieck ABC (die drei Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn). Mit dem Ortslinien-Button zeichnet man die Ortslinie c von C in Abhängigkeit von B mit dessen Ortslinie g . c ist offensichtlich eine Gerade mit einer bestimmten Neigung gegen g . Für den Beweis der Geraden-Eigenschaft und die Bestimmung dieser Neigung haben wir folgenden Beweis-Prototypen entwickelt: Wir betrachten die Rotation (der ganzen Ebene) um A mit 60° nach links. Diese bildet jeden Punkt B auf den zugehörigen Punkt (Ecke im gleichseitigen Dreieck) C ab. Das Bild der Geraden g (die Ortslinie von B) unter dieser Rotation ist also genau c (die Ortslinie von C). Diese ist demnach eine Gerade mit einer Neigung von 60° (dem Rotationswinkel) gegen g (Abb. 1). Nun muss noch der Schnittpunkt S von c mit g konstruiert werden: Dazu betrachtet man diejenige besondere Lage von B auf g , bei der auch C auf g liegt (Abb. 2), und diese Lage von C ist dann gerade S . Die Konstruktion liegt damit auf der Hand: Man fällt das Lot von A auf g und trägt daran in A links und rechts je 30° ab. Zeichnet man nun c (durch S um 60° gegen g geneigt), liefert der Schnittpunkt mit dem Schenkel h den endgültigen Punkt C (Abb. 3).

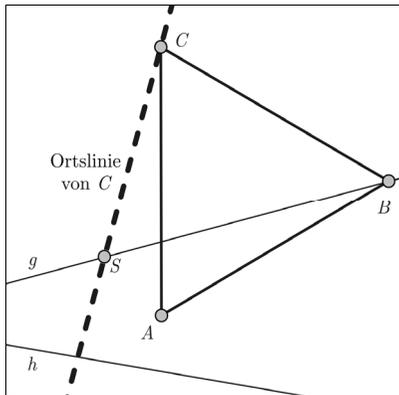


Abb. 1: S ist der Schnittpunkt von g und der Ortslinie von C

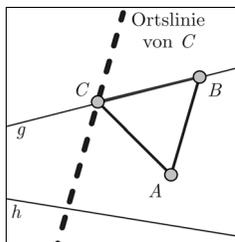


Abb. 2: der Fall C auf g

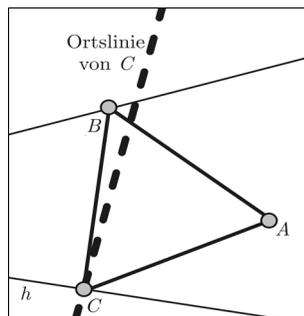


Abb. 3: endgültige Lage von C

Bei Ortslinien-Aufgaben dieses Typs haben wir auch andere Formen vorgegeben, vornehmlich gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke und Quadrate. Möchte man im Quadrat $ABCD$ bei fester Ecke A nun z. B. untersuchen, wie C von B abhängt, so benötigt man folgende Weiterentwicklung des o. a. Beweis-Prototyps: Man muss nun eine Drehstreckung um A mit einem Winkel von 45° und einem Streckfaktor von $\sqrt{2}$ betrachten. Ansonsten ist das Vorgehen dasselbe wie beim Dreieck; bei der Konstruktion der Ortslinie spielt der Streckfaktor keine Rolle. Beim n -Eck mit $n > 3$ tritt die Möglichkeit auf, dass zwei Ecken des n -Ecks auf den beiden Schenkeln, aber nicht alle Ecken im Inneren des Winkelfelds liegen, so dass man nicht mehr von einem Einpassen ins Winkelfeld reden kann.

Überhaupt wird für die weiteren Überlegungen das Winkelfeld nicht mehr gebraucht, und wir beschränken uns auf die Gerade g , einen festen Punkt A_1 außerhalb von ihr, einen Punkt A_2 beweglich auf ihr sowie das regelmäßige n -Eck $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ (die Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn). Es fiel uns auf, und zwar im Zuge des Erfindens von Klausuraufgaben erstmals beim Fünfeck, dass die $n-2$ Ortslinien

a_3, a_4, \dots, a_n aller Ecken A_3, A_4, \dots, A_n sich in einem einzigen Punkt S auf g schneiden und die $n-3$ Neigungen $a_3a_4, a_4a_5, \dots, a_{n-1}a_n$ benachbarter Ortslinien gegeneinander alle das gleiche Maß, nämlich $\frac{180^\circ}{n}$, haben (Abb. 4 mit $n=8$). Nimmt man die beiden Geraden SA_1 und SA_2 hinzu, so entsteht eine n -fach drehsymmetrische Figur aus n Geraden durch S , die $2 \cdot n$ Winkelfelder vom Maß $\frac{180^\circ}{n}$ bilden. Ehe wir eine Aufgabe hierzu für die Studierenden stellen würden, wollten wir diesen Sach-

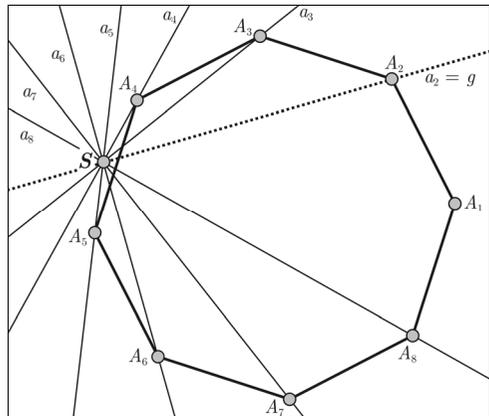


Abb. 4: Die Ortslinien aller Ecken gehen augenscheinlich durch ein und denselben Punkt!?

verhalt erst einmal für uns selbst klären. Für die Klausur kam er schließlich nicht in Frage, wohl aber später für eine entsprechend vorbereitete Hausaufgabe.

Bald erwies sich folgendes Faktum als zentral: Zeichnet man im regelmäßigen n -Eck von der Ecke A_1 aus sämtliche $n-3$ Diagonalen, dann sind die so in A_1 gebildeten Winkel alle gleich groß und haben das Maß $\frac{180^\circ}{n}$ (Abb. 5). Beweis hierzu: Die $n-2$ Winkel $A_2A_1A_3, A_3A_1A_4, \dots, A_{n-1}A_1A_n$ sind im Umkreis des n -Ecks Umfangswinkel über demselben Kreisbogen von A_2 über A_3 usw. bis A_n über kongruenten Sehnen, nämlich den n -Ecks-Seiten $A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$. Also sind, nach dem Umfangswinkelsatz, die Winkel alle gleich groß und zerlegen folglich den

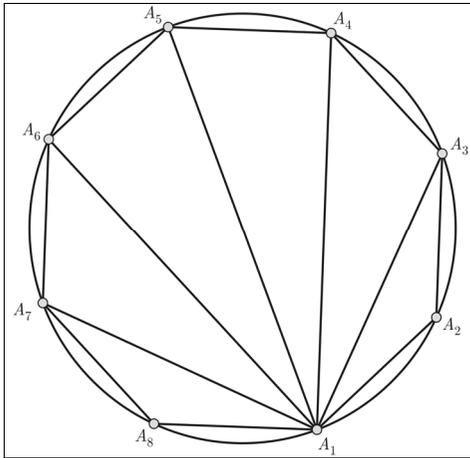


Abb. 5: Die Diagonalen zerlegen den n -Ecks-Winkel in $n-2$ gleich große Winkel

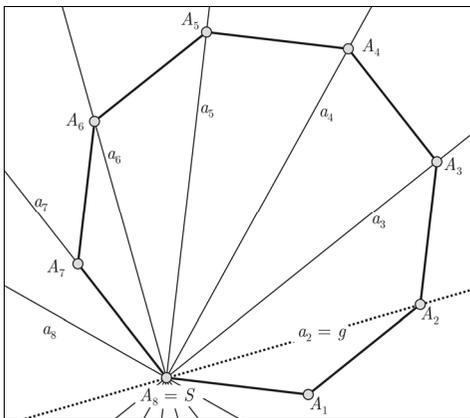


Abb. 6:

Liegt A_8 auf g , dann sind seine Diagonalen mit den Ortslinien der anderen Ecken identisch

n -Ecks-Winkel in A_1 , der bekanntlich das Maß $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ hat, in $n-2$ gleich große Winkel von je $\frac{180^\circ}{n}$.

Mittels Drehstreckung um die Ecke A_1 mit $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$ nach links mit einem (nicht weiter interessierenden) Streckfaktor f_j wird die Ecke A_2 für $j = 1, 2, \dots, n-2$ auf die Ecke A_{j+2} abgebildet, so dass die zugehörige Ortslinie a_{j+2} (in Abhängigkeit von A_2) die Neigung $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$ gegen die Ortslinie $a_2 = g$ von A_2 hat.

Um zu zeigen, dass alle diese Geraden sich in einem Punkt schneiden, ziehen wir A_2 so, dass A_n auch auf g liegt, und betrachten in dieser Lage des n -Ecks sämtliche Diagonalen von A_n aus, wovon die Gerade g die erste ist (Abb. 6). Nach den Überlegungen von oben hat für $j=1, 2, \dots, n-4$ die Diagonale $A_n A_{j+2}$ die Neigung $\frac{j}{n} \cdot 180^\circ$ und die Seite $A_n A_{n-1}$ die Neigung $\frac{n-3}{n} \cdot 180^\circ$ gegen g . Das heißt, die Ortslinien aller Ecken A_3, A_4, \dots, A_{n-1} treffen sich in A_n in dieser Lage, und dies ist der gesuchte Schnittpunkt S , durch den ja auch die Ortslinie von A_n geht. (Ergänzt man diese Kollektion von $n-2$ Ortslinien noch um die Ortslinie von A_2 , nämlich die Gerade g , und um die Gerade $A_1 A_n$, so erhält man das genannte Gebilde aus n Geraden durch S mit $2 \cdot n$ gleich großen Winkeln.)

3 Zerlegung des Umfangswinkels

Man betrachte einen Kreis mit der Sehne AB und die beiden Kreisbögen j und k von A nach B (wobei die Endpunkte A und B nicht zu den Bögen gehören sollen). Man wähle einen der beiden Kreisbögen aus, etwa k . Dann haben für alle Punkte X auf k die Umfangswinkel AXB dasselbe Maß (Umfangswinkelsatz).

Man zeichne nun die Winkelhalbierende in AXB ein und beobachte ihren Schnittpunkt C mit dem gegenüberliegenden Kreisbogen j (Abb. 7). Es fällt direkt auf, dass C ein Fixpunkt bei der Bewegung von X auf k ist. Im Umfeld des Umfangswinkelsatzes stößt man leicht auf einen Beweis hierfür. Man weiß ja: Ist, in ein und demselben Kreis, eine Sehne kürzer als eine andere, dann ist ihr spitzer Umfangswinkel kleiner und ihr stumpfer Umfangswinkel größer als der jeweils entsprechende Winkel der anderen Sehne, und sind zwei Sehnen kongruent, dann sind auch ihre spitzen Umfangswinkel und ihre stumpfen Umfangswinkel jeweils kongruent (mit nahe liegendem Einbezug einer Sehne, die Durchmesser ist, mit ihren beiden rechten Umfangswinkeln).

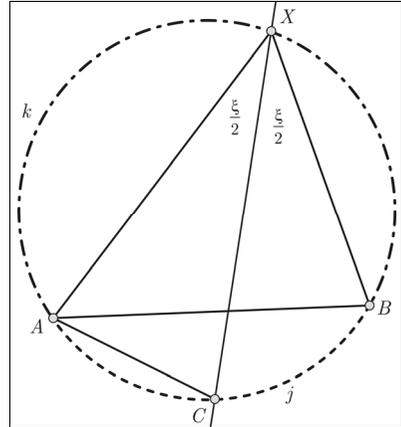


Abb. 7: Schnittpunkt C der Winkelhalbierenden von ξ mit dem Kreisbogen j

Nun schließt man: Für irgendeinen Punkt X auf k erhält man einen bestimmten Schnittpunkt C der Winkelhalbierenden mit j , und der Winkel AXC ist halb so groß wie der Winkel AXB . Er bleibt dies auch, wenn X auf k wandert, und deswegen bleibt auch sein Winkelmaß bei dieser Wanderung konstant. Dann muss auch die Länge der Sehne AC , über der AXC Umfangswinkel ist, konstant sein, und damit ist C Fixpunkt bei dieser Wanderung.

Ohne weiteres ist dieser Beweis aber nur vollständig, wenn k nicht der kürzere Bogen ist, AXB also nicht stumpf ist. Dann gibt es nämlich auf dem Bogen j keine zwei Punkte C , die von A denselben Abstand hätten. – Wenn nun aber k der kürzere Bogen ist, dann kann es passieren, dass es neben dem wie oben konstruierten Schnittpunkt C einen weiteren Punkt C_1 auf j gibt, der von A denselben Abstand hat (Abb. 8). Allerdings ist die Existenz dieses Bastards nicht „schädlich“; denn sie ist nur auf folgende Weise möglich: C und C_1 mögen zwar beide auf j liegen, aber sie liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers durch A . Der Winkel AXC_1 ist also stumpf und hat jedenfalls nicht dasselbe Maß wie der Winkel AXC , der ja als halber Winkel eines anderen Winkels immer spitz ist.

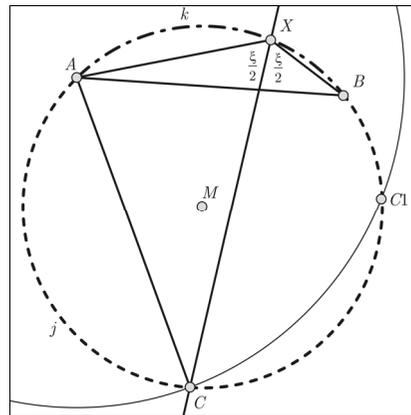


Abb. 8:
Zweiter Punkt C_1 mit $|AC_1|=|AC|$

Der Punkt C_1 kommt also nicht als auf der Winkelhalbierenden von AXB liegend in Frage.

Ohne DGS hätten wir uns eventuell die mögliche Existenz eines solchen Punkts C_1 nicht bewusst gemacht und hätten es auch mit dem Durchdringen der folgenden Überlegungen erheblich schwerer gehabt.

Eigentlich spielt die Winkelhalbierenden-Eigenschaft bei dem ganzen Beweis nämlich gar keine Rolle. In der Tat gilt auch für jeden anderen Strahl c ab X im Inneren des Winkels AXB , dass sein Schnittpunkt C mit j bei der Bewegung von X Fixpunkt ist, wenn man das Maß des Winkels AXc bei der Bewegung von X konstant hält (Abb. 9). Es war genau diese Eigenschaft der Winkelhalbierenden, die man oben gebraucht hat, und folglich lässt sich der Beweis wörtlich übertragen, einschließlich der Diskussion der Möglichkeit eines zweiten Punkts C_1 auf j mit demselben Abstand von A wie C .

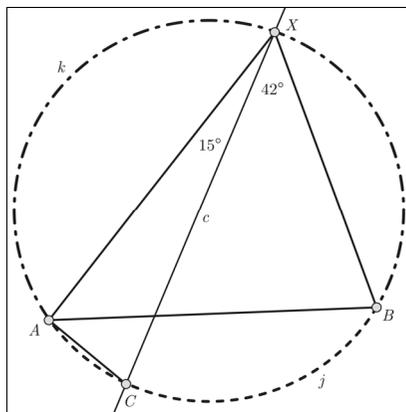


Abb. 9: C ist fix bei Wanderung von X auf k mit konstantem Winkel AXc

Der Vollständigkeit halber stellen wir fest, dass der Kreisbogen k , der als Ortslinie für X als Umfangswinkelscheitel bezüglich AB zur Verfügung steht, immer in demjenigen Kreisbogen enthalten ist, der als Ortslinie für X als Umfangswinkelscheitel bezüglich AC in Frage kommt. Daher ist bei der Wanderung von X auf k nicht nur das Maß des Winkels AXB , sondern auch das des Winkels AXC konstant.

Zum Schluss noch ein Überblick über die ganze Situation (Abb. 10). Unter allen Punkten X auf k wählen wir denjenigen aus, der genau in der Mitte von k liegt. In dem so festgelegten Winkelfeld betrachten wir nun sämtliche Strahlen c , die von X ausgehen; wir stellen uns konkret eine Rotation des Strahls c um X vor, beginnend mit der Lage, wo er durch A geht, bis hin zu der Lage, wo er durch B geht (unter Ausschluss dieser beiden Randlagen). Dabei erhalten wir nacheinander als Maße der Winkel AXc sämtliche Werte zwischen 0° und dem Maß von AXB und sämtliche Punkte C auf j als Schnittpunkte. Insbesondere, wenn c den Winkel AXB halbiert, liegt C in der Mitte von j .

Wenn X nun auf dem Bogen k wandert, dann bleibt ja das Maß des Winkels AXB konstant, und alle Strahlen c können so „mitgenommen“ werden, dass die Maße der Winkel AXc konstant sind. Die Wanderung von X auf k , unter Mitnahme des beschriebenen Strahlenbüschels, induziert natürlich für jeden dieser Strahlen eine Lageveränderung. Diese geschieht für jeden Strahl c so, dass sein Schnittpunkt C mit

dem Bogen j fix ist, d. h., der Strahl rotiert um C . In Abb. 10 sieht man deutlich: Während sich bei der Wanderung von X die Schnittpunkte der Strahlen z. B. mit der Sehne AB ändern, sind ihre Schnittpunkte mit dem Bogen j fix. Man könnte den Sachverhalt auch so formulieren: Eine Bewegung des Punktes X auf k induziert für jeden (wie oben definierten) Strahl eine Rotation. Der Ort aller zugehörigen Drehzentren ist j .

4 Harmonische Teilung einer Dreiecksseite

Im Dreieck ABC mit den entsprechenden Seitenlängen a, b, c (o. B. d. A. $a > b$) sei die Seite AB im Verhältnis der beiden Seitenlängen a und b harmonisch geteilt, d. h., P auf der Seite AB und Q auf der Geraden AB sind so gewählt, dass $|BP| \cdot |AP| = a \cdot b = |BQ| \cdot |AQ|$. In einer DGS-Zeichnung (Abb. 11) haben wir entdeckt, dass die beiden Strahlen CP und CQ orthogonal zu sein scheinen, diese Vermutung durch DGS-Veränderungen der Zeichnung vertieft und den Beweis dafür dann klassisch erbracht.

Wer sich mit Teilverhältnissen und (schließlich) mit dem Kreis des Apollonius auskennt, wird unsere Errungenschaft als trivial empfinden. Aber wir konnten uns eben nicht aus.

Den Kreis des Apollonius hatten wir zwar schon verschiedentlich beschrieben gesehen, jedoch hatten wir ihn nie wirklich unseren kognitiven Strukturen einverleibt; und erst die Beobachtung und der eigenständige Beweis jener Rechtwinkligkeit hat das Thema für uns bedeutsam gemacht.

Ausgangspunkt des Beweises ist der (bekannte) Sachverhalt: Die Winkelhalbierende w_i von γ teilt die Seite c im Verhältnis $a : b$; sie geht also durch P . Die Gerade w_o , die jeden der beiden Außenwinkel in C halbiert, steht senkrecht auf w_i (da die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel orthogonal sind). Man muss also nur

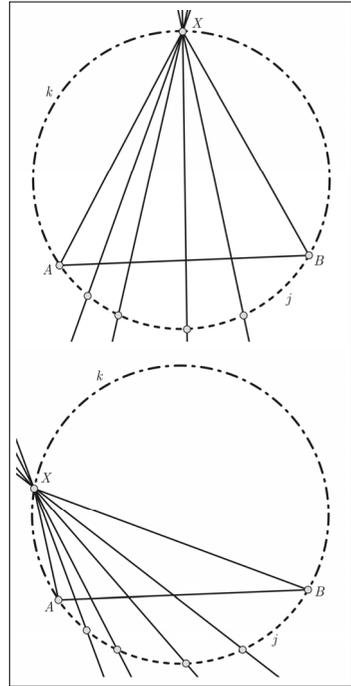


Abb. 10: Wandert X auf k und mit ihm das Strahlenbündel, so sind alle Schnittpunkte der Strahlen mit j Fixpunkte

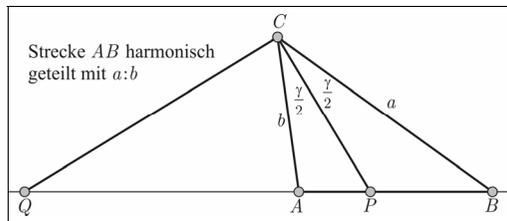


Abb. 11: Orthogonalität von QC und PC , wo Q und P die Teilungspunkte bei harmonischer Teilung von AB im Verhältnis $a : b$ sind

noch zeigen, dass w_a durch Q geht. Dafür geht man ähnlich vor wie bei dem bekannten Nachweis, dass P auf w_i liegt:

Man zeichnet die beiden Parallelen zu w_i durch A sowie durch B und erhält die beiden Schnittpunkte D und E mit w_a . Dann verlängert man die Seite AC , bis sie die Gerade BE schneidet, und nennt den Schnittpunkt F . Wegen der Voraussetzung $a > b$ ist $\alpha > \beta$, und in den beiden Dreiecken APC und BPC gilt für die Winkel $APC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \alpha < 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = BPC$, d. h., APC ist spitz, und BPC ist stumpf, so dass w_a die Gerade AB in dem Strahl ab A schneidet, in dem Q liegt (Abb. 12). Wir nennen diesen Schnittpunkt S und zeigen nun $S = Q$.



Abb. 12: Figur zum Beweis der entdeckten Orthogonalität (vgl. Abb. 11)

Im Dreieck FCB steht die Winkelhalbierende w_a des Winkels in C senkrecht auf BF . Deshalb ist das Dreieck gleichschenkelig, d. h. $|CF| = a$ und $|BE| = |EF|$. Nach dem Strahlensatz mit C als Scheitel gilt also $a : b = |BE| : |AD|$. Nun folgt nach dem Strahlensatz mit S als Scheitel $|SB| : |SA| = |BE| : |AD| = a : b$. Also ist $S = Q$.

Der Vollständigkeit halber sei noch der Kreis des Apollonius in die ganze Situation eingebracht (den wir jedoch nicht selbstständig entdeckt haben): Die Strecke AB sei harmonisch im Verhältnis $r : 1$ geteilt (o. B. d. A. $r > 1$), mit dem inneren Teilungspunkt P und dem äußeren Teilungspunkt Q . Dann ist der Thales-Kreis über PQ die Ortslinie aller Punkte C der Ebene, für die $|BC| : |AC| = r : 1$ ist (Apollonius-Kreis für die Strecke AB und für das Teilverhältnis $r : 1$) (Abb. 13).

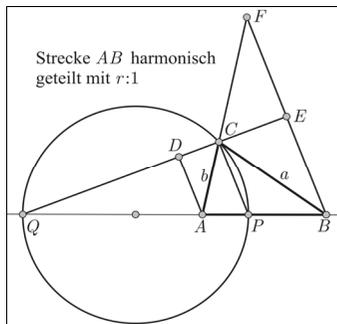


Abb. 13: Beweisfigur zum Apollonius-Kreis

Für $C = Q$ und $C = P$ trifft das Verhältnis jedenfalls zu. Sei ab jetzt $P \neq C \neq Q$.

Ist C ein Punkt der Ebene, für den $|BC| : |AC| = r : 1$ ist, dann liefert die Gerade CP die Winkelhalbierende des Innenwinkels γ im Dreieck ABC , und die Gerade CQ liefert die Winkelhalbierende der Außenwinkel zu γ . Diese beiden Geraden sind also orthogonal, und ihr Schnittpunkt C liegt auf dem Thales-Kreis über PQ , also auf dem Apollonius-Kreis für die Strecke AB und für das Teilverhältnis $r : 1$.

Liegt umgekehrt C auf dem Thales-Kreis von PQ , dann erzeugen wir (Abb. 13) noch einmal die Zeichnung aus Abb. 12 und wenden folgendes Paradigma geometrischen Beweisens an: Die Eigenschaften, die wir oben vorausgesetzt haben, werden jetzt abgeleitet – und umgekehrt, und zwar in ein und derselben geometrischen Situation. Wir zeichnen die Parallelen zu CP durch A sowie durch B und erhalten als Schnittpunkte mit der Geraden QC die Punkte D und E . Wir schneiden die Gerade BE mit der Geraden AC und erhalten den Schnittpunkt F . Nach dem Strahlensatz mit Q als Scheitel gilt $|BE|:|AD|=r:1$ sowie $|CE|:|DC|=r:1$, und nach dem Strahlensatz mit C als Scheitel gilt $|EF|:|AD|=r:1$. Also ist $|EF|=|BE|$, das Dreieck BCF (in dem CE senkrecht auf BF steht) ist gleichschenkelig, und die Gerade QE liefert dort die Winkelhalbierende in C , d. h., sie halbiert den Außenwinkel von γ . Damit halbiert der Strahl CP den Innenwinkel γ im Dreieck ABC , und für die Seiten a und b gilt $a:b=r:1$.

Literatur

- Bender, Peter [1989]: Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht — unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. Hauptvortrag auf dem 7. Workshop in Klagenfurt 1987. In: Kautschitsch, Hermann & Metzler, Wolfgang (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: Teubner, 95–145.
- Bender, Peter [2005]: Dynamische-Geometrie-Software (DGS) in der Erstsemester-Vorlesung — ein Werkstatt-Bericht über ein Entwicklungs- und ein Forschungs-Projekt. In: Henn, Hans-Wolfgang & Kaiser, Gabriele (Hrsg.): Mathematikunterricht im Spannungsfeld zwischen Evolution und Evaluation — Festschrift für Werner Blum. Hildesheim: Franzbecker, 283–293.
- Schumann, Heinz [2004]: Dynamische Raumgeometrie I. In: *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule* 18, Heft 2. ISSN 0932-2736.
- Schupp, Hans [1971]: Geometrie in der Sekundarstufe I. Weinheim: Beltz.
- Schupp, Hans [1988]: Kegelschnitte. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
- Schupp, Hans [1990]: PRO GEO: Ein Programmpaket für den Geometrieunterricht. In: Graf, Klaus-Dieter (Hrsg.): Computer in der Schule 3. Stuttgart: Teubner, 25–44.
- Schupp, Hans [1997]: Regeometrisierung der Schulgeometrie — durch Computer? In: Hischer, Horst (Hrsg.): Computer und Geometrie — Neue Chancen für den Geometrieunterricht? Bericht über die 14. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 1996. Hildesheim: Franzbecker, 16–25.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Peter Bender
Universität Paderborn
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Warburger Str. 100
33098 Paderborn
E-Mail: bender@upb.de