

Kegelschnitte und Reflexionen

von

Jörg Meyer, Hameln

Kurzfassung: Nur Parabeln haben die folgende Eigenschaft: Achsenparallele Strahlen werden so reflektiert, dass sie anschließend durch einen festen Punkt gehen. Und nur Ellipsen haben folgende Eigenschaft: Kopunktale Strahlen werden so reflektiert, dass diese anschließend durch einen festen Punkt gehen. Es werden jeweils unterschiedliche Beweise geführt.

Abstract: Parabolas are the only curves with the property that parallel rays are reflected into a fixed point. Ellipses are the only curves with the property that rays through one fixed point are reflected into another fixed point.

1 Reflexionseigenschaften der Kegelschnitte

Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte P , die zu einem festen Punkt F (Brennpunkt) und zu einer festen Geraden g (Leitgerade) jeweils denselben Abstand haben (vgl. Abb. 1). Die Parabelpunkte P lassen sich durch eine zu g senkrechte Projektion bijektiv auf die Punkte L der Leitgeraden abbilden.

Es gilt also die

(B_P) *Brennstrahleigenschaft* der Parabeln:

$$|P - F| = |P - L|$$

Man kann zeigen,¹ dass die Mittelsenkrechte zu F und L Parabeltangente zu P ist. Wenn Q der Schnittpunkt der Tangente mit der Parabelachse ist, bildet $PFQL$ eine Raute. Deswegen ist $\alpha = \beta$.

Das führt zu der

(R_P) *Reflexionseigenschaft* der Parabeln:²

Achsenparallele Strahlen (d. h. solche, die zu g senkrecht sind) werden so reflektiert, dass sie nach der Reflexion durch F verlaufen.

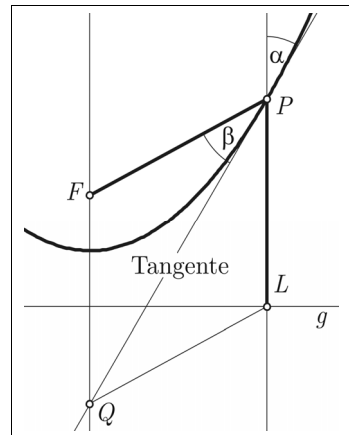


Abb. 1: Zur Definition einer Parabel durch eine Leitgerade g und einen Brennpunkt F

¹ Vgl. etwa [Schupp 2000, 30 f.].

² Alternative Beweise finden sich weiter unten in diesem Aufsatz.

Anwendungen von (R_p) sind Parabolspiegel (Abb. 2) oder Vorrichtungen zur Verengung bzw. Aufweitung achsenparalleler Bündel mit Hilfe zweier konfokaler Parabelstücke (Abb. 3).

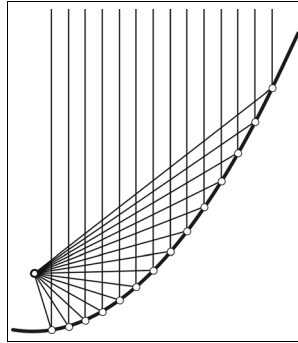


Abb. 2: Parabolspiegel

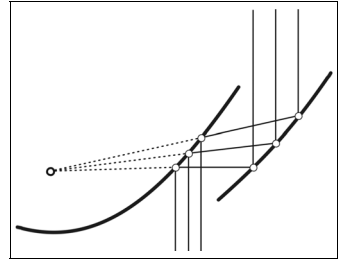


Abb. 3: Aufweitung (bzw. Verengung) eines achsenparallelen Strahlenbündels durch zwei konfokale Parabolspiegel

Eine *Ellipse* ist die Menge aller Punkte P , die zu einem festen Kreis k (mit Zentrum Z und Radius r) und zu einem festen Punkt F (Brennpunkt) *innerhalb* von k immer denselben Abstand haben.

Die Ellipsenpunkte P lassen sich bijektiv auf die Kreispunkte K abbilden (Abb. 4). Für alle Punkte K auf k ist also³

$$|P - F| = |P - K|.$$

Wegen

$$|P - K| = r - |P - Z|$$

gilt die

$$(B_E) \text{ Brennstrahleigenschaft für Ellipsen: } |P - Z| + |P - F| = r$$

Aufgrund der Symmetrie von Z und F in (B_E) heißt Z ebenfalls „Brennpunkt“.

Man kann zeigen,⁴ dass die Mittelsenkrechte zu F und K Ellipsentangente zu P ist und dass $\alpha = \beta$ gilt.

Es gilt also die

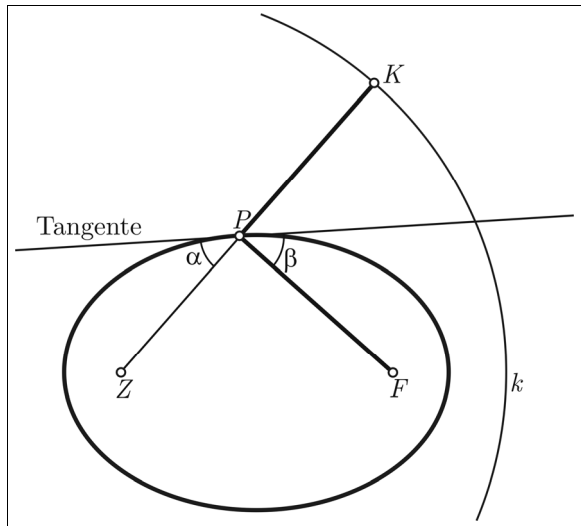


Abb. 4: Zur Definition einer Ellipse durch einen Kreis k und einen Brennpunkt F , der innerhalb von k liegt.

³ In dieser Arbeit werden Punkte mit den zugehörigen Ortsvektoren identifiziert.

⁴ [Schupp 2000, 21 f.]

(R_E) *Reflexionseigenschaft* für Ellipsen: Strahlen durch Z werden so reflektiert, dass sie anschließend durch F verlaufen (Abb. 5).⁵

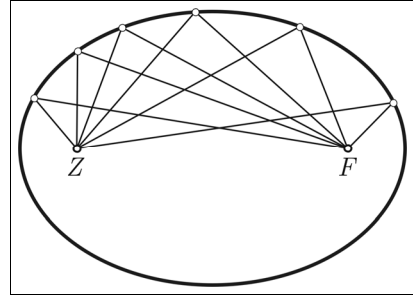


Abb. 5: Reflexionseigenschaft einer Ellipse – Flüstergalerien

Anwendungen von (R_E) sind Zahnarztspiegel bzw. Flüstergalerien. Verläuft ein Strahl weder durch Z noch durch F , so auch keine seiner Reflexionen. Man kann sich also in Flüstergalerien weitgehend ungestört unterhalten.

Hyperbeln werden dadurch definiert, dass

alle ihre Punkte gleichen Abstand zu einem Kreis k (mit Mittelpunkt Z und Radius r) und einem Punkt F (außerhalb von k) haben. Abb. 6 zeigt die Situation für die Kreispunkte K und L und die zugehörigen Hyperbelpunkte P und Q . Wiederum heißen Z und F „Brennpunkte“.

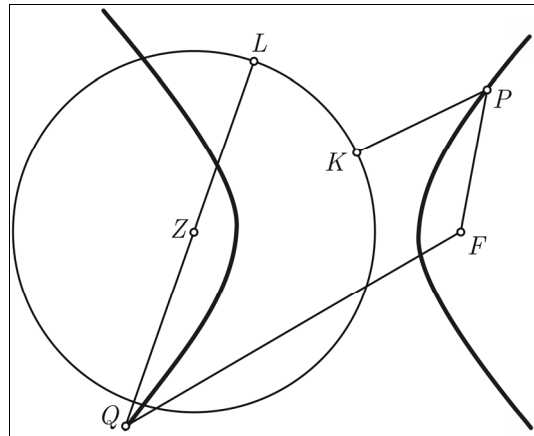


Abb. 6: Zur Definition einer Hyperbel durch einen Kreis mit dem Zentrum Z und einen Brennpunkt F außerhalb des Kreises.

Wegen

$$|P - F| = |P - K| = |P - Z| - r$$

und

$$|Q - F| = |Q - L| = |Q - Z| + r$$

gilt für alle Hyperbelpunkte P die

(B_H) *Brennstrahleigenschaft* für Hyperbeln: $|P - Z| - |P - F| = \pm r$

Analog zur Ellipse gilt die

(R_H) *Reflexionseigenschaft* für Hyperbeln: Die Hyperbel reflektiert Strahlen durch das Kreiszentrum Z so, dass die Verlängerungen der reflektierten Strahlen durch den Brennpunkt F verlaufen (Abb. 7).

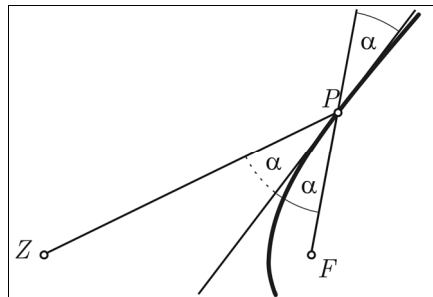


Abb. 7: Reflexionseigenschaft (R_H) von Zentrumsstrahlen an einer Hyperbel

⁵ Alternative Beweise finden sich weiter unten.

Eine schöne Anwendung von (R_H) besteht darin, dass in Kombination mit einem Parabolspiegel dessen Brennpunkt verschoben werden kann (Abb. 8): Der Punkt P liegt auf einer Parabel mit dem Brennpunkt F , und H liegt auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten Z und F . Dann werden achsenparallele Strahlen so reflektiert, dass sie anschließend durch Z verlaufen.

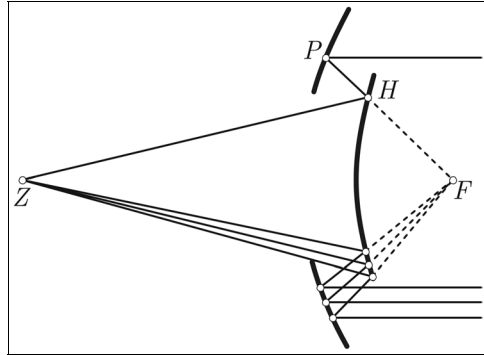


Abb. 8: Verschiebung des Brennpunkts F eines Parabolspiegels mit Hilfe eines Hyperbolspiegels

2 Fragestellung

Wir haben gesehen: Aus den Brennstrahleigenschaften folgen jeweils die Reflexionseigenschaften. Gilt auch die Umkehrung? Anders formuliert: Gibt es außer den drei betrachteten Kurven (Parabel, Ellipse, Hyperbel) auch noch andere Kurven mit den Eigenschaften (R_P) bzw. (R_E) bzw. (R_H) ? Genauer: Was kann man z. B. über alle Kurven mit der Eigenschaft sagen, dass parallele Strahlen so an ihnen reflektiert werden, dass sie anschließend durch einen festen Punkt F verlaufen? Haben nur Parabeln diese Eigenschaft?

Diese Frage wird in vielen Büchern über Kegelschnitte nicht beantwortet – ja, sie wird noch nicht einmal gestellt. Der Grund liegt darin, dass sie allein mit Hilfe von Vektorgeometrie (d. h. ohne Analysis) kaum zu beantworten ist.

Eine Antwort findet man z. B. in [Drucker 1992]. Jedoch ist Druckers Begründung zwar elementar, aber sehr rechenintensiv. Dies soll Anlass sein, möglichst übersichtliche Begründungen dafür zu finden, dass tatsächlich die Kegelschnitte die einzigen Kurven mit den obigen Reflexionseigenschaften sind. Oder anders formuliert: Die Brennstrahleigenschaften sind zu den entsprechenden Reflexionseigenschaften äquivalent.

Die Fragestellung soll auf drei unterschiedlichen Wegen angegangen werden. Im Gegensatz zu [Drucker 1992] werde ich hier die analoge Frage für Flächen (Rotationsparaboloid usw.) nicht behandeln.

Bei der Beschreibung der Kegelschnitte in Abschnitt 1 wurden deren Gleichungen bzw. die allgemeine Gestalt ihrer Punkte nicht erwähnt. Auch bei den folgenden Begründungen werden diese Aspekte keine Rolle spielen. Es ist nämlich weitaus einfacher, sich auf den Nachweis der Tatsache

„Reflexionseigenschaft \Rightarrow Brennstrahleigenschaft“

zu beschränken, anstatt sich um die Gleichungen der Kegelschnitte zu kümmern.

3 Erster Weg

3.1 Parabeln

Wir gehen aus von einer durch $P(t) = (u(t); v(t))$ auf einem Kontinuum in Parameterdarstellung definierten Kurve mit differenzierbaren Funktionen u und v , wobei stets $u'(t) \neq 0$ gelte (Abb. 9).⁶

Die Tangente in P hat dann die Gleichung

$$y = \frac{v'}{u'} \cdot (x - u) + v.$$

Wir fordern, dass ein zur y -Achse paralleler Strahl so in P (an der dortigen Kurventangente) reflektiert wird, dass er anschließend durch den Ursprung F verläuft.

Nun schneidet die Tangente in P die y -Achse in

$$Q = \left(0; -\frac{v'}{u'} \cdot u + v\right).$$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit des Dreiecks PFQ ist $|F - P| = |F - Q|$; es gilt also die

$$(D_p) \quad \text{Differentialgleichung: } \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{v'}{u'} \cdot u - v$$

Übrigens liefert die untersuchte Situation in natürlicher Weise ein Richtungsfeld: Man kann sich in jedem Punkt der Ebene einen kleinen Spiegel vorstellen, der das Licht wie gewünscht lenkt! Mit einem Dynamischen Geometriesystem lässt sich diese Situation konstruieren und dann die Lösung heuristisch einpassen, indem man mit Schieberegeln im Ansatz $y = ax^2 + c$ die Parameter justiert (Abb. 10).⁷

Zu zeigen ist nun, dass (D_p) auf eine Parabel führt. Ergänzt man das Dreieck PFQ zu einer Raute $PFQL$ (Abb. 11), so ergibt sich

$$L = \left(u; 2 \cdot v - \frac{v'}{u'} \cdot u\right).$$

Es soll bewiesen werden, dass L auf einer Parallelen zur x -Achse liegt; daraus folgt dann, dass eine Parabel vorliegt.

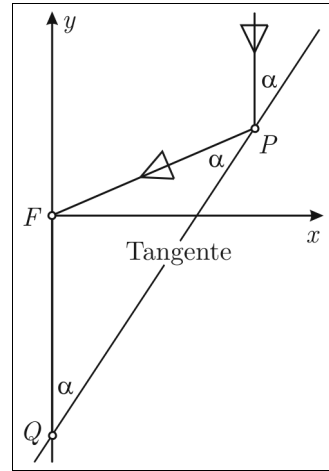


Abb. 9: Gleichschenkliges Dreieck PFQ mit Hilfe der Tangente

⁶ Die Argumente werden im Folgenden häufig weggelassen.

⁷ Für diese Idee und die zugehörige Abb. 10 sowie für eine konstruktive und insistierende Diskussion des gesamten Artikels bin ich Anselm Lambert sehr zu Dank verpflichtet.

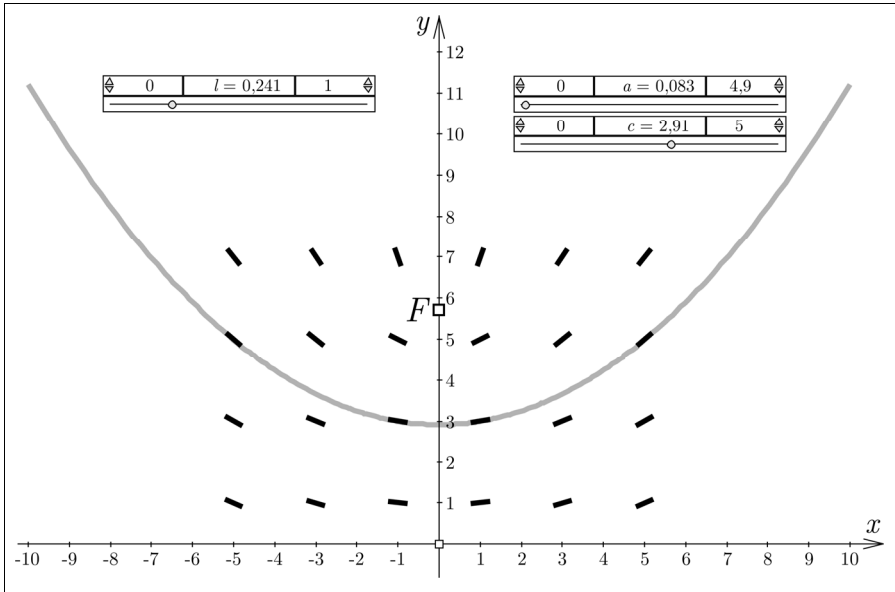


Abb. 10: Heuristischer Ansatz zur Auffindung des Richtungsfeldes von (D_P) und einer Lösung mit Hilfe eines Dynamischen Geometriesystems (hier: EUKLID DYNAGEO); der Schieberegler für l steuert die Spiegelgröße und die für a und c die Parameter im Lösungsansatz.

Der Punkt L liegt nun genau dann auf einer Parallelen zur x -Achse, wenn die durch

$$\lambda(t) := 2 \cdot v - \frac{v'}{u'} \cdot u \stackrel{(D_P)}{=} v - \sqrt{u^2 + v^2}$$

gegebene Funktion λ konstant ist (vgl. Abb. 11).

Nun ist $\lambda'(t) = v' - \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Setzt man hier die aus (D_P) folgende Beziehung

$$v' = u' \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2} + v}{u}$$

ein, so erhält man tatsächlich $\lambda'(t) = 0$.

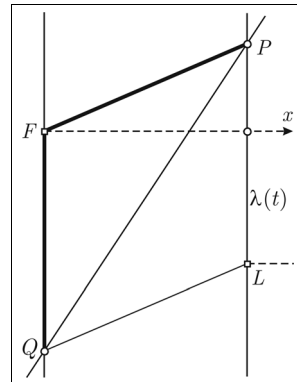


Abb. 11: Zur Definition von λ

Die Gestaltung einer Lernumgebung, in der Schülerinnen und Schüler entdeckend auf diese Begründung kommen, dürfte sich als schwierig erweisen: Die Anzahl der möglichen Sackgassen bei der Verarbeitung von $\lambda'(t)$ ist recht groß.

Gegen diesen Beweis spricht aber noch ein anderes Argument: Er lässt sich nämlich kaum auf Ellipsen oder Hyperbeln transferieren. Dies gelingt jedoch, wenn

man Abb. 9 ein klein wenig anders liest und nicht die Gleichschenkligkeit des durch die *Tangente* gebildeten Dreiecks PFQ betrachtet, sondern die Gleichschenkligkeit des durch die *Normale* gebildeten Dreiecks FPN (Abb. 12).

Die Kurvennormale zu P schneidet die y -Achse in $N = (0; n)$. Bei N taucht der Winkel β als Wechselwinkel wieder auf, so dass das Dreieck NFP gleichschenklig mit $|N - F| = |P - F|$ bzw. mit $n = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist.

Die Behauptung lautet, dass es sich bei der Kurve um eine Parabel handeln muss, d. h., dass $|P - F| = v + c$ bzw. dass $\sqrt{u^2 + v^2} = v + c$ mit einer Konstanten c gilt.

Es reicht somit zu zeigen, dass für die Ableitungen die Beziehung

$$\frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{n} = v'$$

gilt. Dies ist aber leicht zu sehen, da einerseits die Tangente die Steigung v'/u' hat und andererseits die Normale die Steigung $(v - n)/u$ hat, so dass zusammen $v'/u' = u/(n - v)$ gilt; dies war aber die Behauptung.

(Die Formeln werden sinnlos, wenn die Normalen- oder die Tangentensteigung verschwinden; für alle anderen Punkte lässt sich die Argumentation aber durchführen.)

3.2 Ellipsen

Wir koordinatisieren die Kurve mit dem allgemeinen Punkt $P(t) = (u(t); v(t))$ mit differenzierbaren Funktionen u und v . Ferner sei $Z = (0; 0)$ und $F = (1; 0)$. Ein von Z ausgehender Strahl soll so in P an der dortigen Kurventangente reflektiert werden, dass er anschließend durch F geht.

Die Tangente zu P schneidet die x -Achse in $G = (g; 0)$, die Normale zu P tut es in $E = (e; 0)$ (Abb. 13). Wie kann man e und g ermitteln?

Benötigt wird der Sachverhalt, dass die Innen- bzw. die Außenwinkelhalbierende eines Dreiecks die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Es gilt also stets $\frac{c}{d} = \frac{e}{1 - e} = \frac{g}{g - 1}$ und daher $e = \frac{c}{c + d}$ und $g = \frac{c}{c - d}$.

Nun lässt sich die Steigung der Kurventangente auf zwei Arten bestimmen:

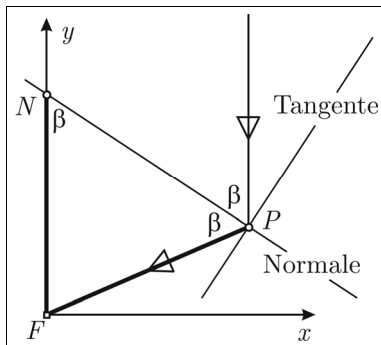
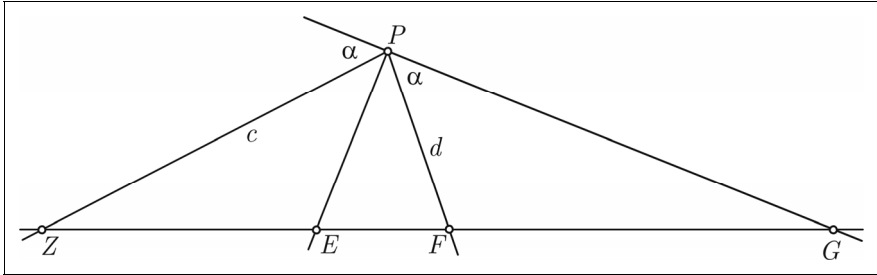


Abb. 12: Gleichschenkliges Dreieck NFP mit Hilfe der Normale

Abb. 13: Zur Ermittlung von e und g

Einerseits ist sie so groß wie v'/u' , andererseits so groß wie $v/(u-g)$. Die weitere Verarbeitung der entstehenden Differentialgleichung $v'/u' = v/(u-g)$ bereitet allerdings Schwierigkeiten. Viel einfacher wird es, wenn man nicht die Tangente, sondern (wie im Parabelfall) die Normale benutzt:

Die Kurvennormale hat die Steigung $v/(u-e)$, für die Kurventangente gilt also die

$$(D_E) \text{ Differentialgleichung: } \frac{v'}{u'} = \frac{e-u}{v}$$

Gezeigt werden muss, dass $c+d$ unabhängig von t ist. Wegen $c = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist

$$c' = \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{c} \stackrel{(D_E)}{=} u' \cdot \frac{e}{c} = \frac{u'}{c+d},$$

und wegen $d = \sqrt{(u-1)^2 + v^2}$ ist

$$d' = \frac{u \cdot u' - u' + v \cdot v'}{d} \stackrel{(D_E)}{=} u' \cdot \frac{e-1}{d} = \frac{-u'}{c+d},$$

so dass sich insgesamt $(c+d)' = 0$ ergibt.

(Auch diese Argumentation gelingt nicht für die Punkte, die sinnlose Ausdrücke ergeben.)

3.3 Hyperbeln

Ein von Z ausgehender Strahl soll so in P an der Tangente reflektiert werden, dass die rückwärtige Verlängerung durch F verläuft. Wir benutzen dieselbe Figur wie bei der Ellipse (Abb. 13). In ihr ist nun die Gerade durch P und E Hyperbeltangente; die Normale geht durch P und G . Es sei $c > d$. Nun schließt man wie im Parabel- bzw. im Ellipsenfall:

Die Steigung der Normalen ist $v/(u-g)$; die Tangente hat also die Steigung $(g-u)/v$, und daraus ergibt sich die

$$(D_H) \text{ Differentialgleichung: } \frac{v'}{u'} = \frac{g-u}{v}$$

Gezeigt werden muss, dass $c-d$ unabhängig von t ist. Wegen $c = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist

$$c' = \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{c} \stackrel{(D_H)}{=} u' \cdot \frac{g}{c} = \frac{u'}{c-d},$$

und wegen $d = \sqrt{(u-1)^2 + v^2}$ ist

$$d' = \frac{u \cdot u' - u' + v \cdot v'}{d} \stackrel{(D_H)}{=} u' \cdot \frac{g-1}{d} = \frac{u'}{c-d},$$

so dass sich insgesamt $(c-d)' = 0$ ergibt.

3.4 Didaktischer Kommentar

Die hier dargestellten Vorgehensweisen sind zwar einfach und kurz, aber gleichwohl reich an möglichen Sackgassen. Der Transfer vom Parabel- auf den Ellipsenfall wird nur gelingen, wenn die Argumentation über die Normale gewählt wurde. Die Äquivalenz der Brennstrahl- mit den Reflexionseigenschaften wird allerdings nicht „auf einen Blick“ deutlich. Das ist Grund genug, sich nach weiteren Wegen umzusehen.

4 Zweiter Weg

[Drucker 1992] zitiert [Flanders 1968], der einen sehr kurzen Beweis dafür gibt, dass Kegelschnitte die oben erwähnten Reflexionseigenschaften haben. Merkwürdigerweise übersieht Drucker, dass sich die Argumentation von Flanders umkehren lässt und zu einem ebenfalls sehr kurzen Beweis dafür führt, dass aus den Reflexionseigenschaften die entsprechenden Brennstrahleigenschaften folgen.

Flanders benötigt ein elementares

Lemma: Es sei X ein Vektor und $X^0 := X/|X|$.

Wegen $|X| = \sqrt{X^2}$ folgt aufgrund der Kettenregel $|X|' = X^0 \cdot X'$.

4.1 Parabeln

Bei *Parabeln* gilt mit dem Brennpunkt $F = (0; 0)$ die Beziehung

$$(B_P) \quad |P| = |P - L|$$

(vgl. Abschnitt 1); diese schreibt sich mit $Y := (0; 1)$ und L auf $g: y = -f$ (mit beliebigem $f \neq 0$) handhabbarer als

$$|P| = P \cdot Y + f.$$

Leitet man beide Seiten ab, erhält man

$$(B_p') \quad P^0 \cdot P' = Y \cdot P'$$

Interpretiert man diese Gleichung geometrisch, so erhält man die folgende Aussage (Abb. 14):

Der Winkel zwischen Tangente (mit Richtungsvektor P') und Brennpunktstrahl (mit Richtungsvektor $-P^0$) ist genau so groß wie der Winkel zwischen Tangente und einfallendem Strahl (mit Richtungsvektor $-Y = -Y^0$). Diese Aussage ist aber der Inhalt von (R_p) !

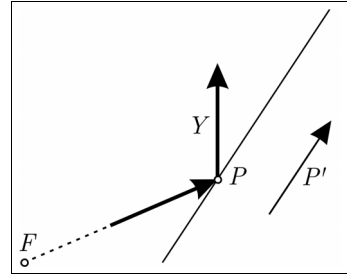


Abb. 14: Geometrische Interpretation von $P^0 \cdot P' = Y \cdot P'$

Somit ist $(B_p') \hat{=} (R_p)$, und dass man daraus wieder (B_p) bekommt, ist einfach zu sehen: Wir gehen wie oben in 3.1 aus von einer Kurve mit dem typischen Kurvenpunkt $P(t) = (u(t); v(t))$; dabei seien die Koordinatenfunktionen differenzierbar, und es gelte (B_p') .

Die rechte Seite von (B_p') lässt sich wegen der Konstanz von Y auch als $Y \cdot P' = (Y \cdot P)'$ schreiben, so dass man aus (B_p') tatsächlich wieder $|P| = P \cdot Y + c$ erhält. Dabei darf c nicht von t abhängen (sonst erhält man beim Ableiten nicht (B_p') ; man beachte die vorausgesetzte Differenzierbarkeit der Koordinatenfunktionen). Dies ist aber der Inhalt von (B_p) . Die Leitgerade hat die Gleichung $y = -c$.

4.2 Ellipsen

Bei *Ellipsen* gilt

$$(B_E) \quad |P - Z| + |P - F| = r$$

(vgl. Abschnitt 3). Leitet man beide Seiten von (B_E) nach t ab, so gelangt man zu

$$(B_E') \quad ((P - Z)^0 + (P - F)^0) \cdot P' = 0$$

bzw. (vgl. Abb. 15) zu

$$\cos(P - Z, P') = -\cos(P - F, P')$$

oder zu

$$\cos(P - Z, P') = \cos(P - F, -P'),$$

d. h. zu

$$\cos \alpha = \cos \beta.$$

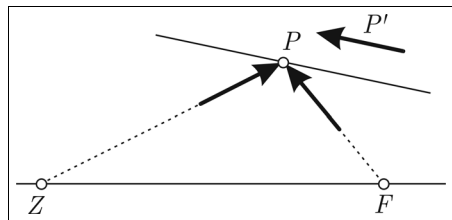


Abb. 15: Visualisierung von $((P - Z)^0 + (P - F)^0) \cdot P' = 0$

Damit ist die Reflexionseigenschaft (R_E) bewiesen.

Gilt umgekehrt (B_E') ($\hat{=}$ (R_E)), so folgt $|P - Z| + |P - F| = c$ mit einer Konstanten c und damit (B_E).

Die Argumentation verläuft bei *Hyperbeln* ganz analog.

4.3 Didaktischer Kommentar

Insgesamt haben wir gesehen:

Die Reflexionseigenschaft ist jeweils die „Ableitung der Brennstrahleigenschaft.“

Beide Eigenschaften sind zueinander äquivalent. Der vektorgeometrische zweite Weg hat gegenüber dem ersten Weg den Vorteil, dass die Äquivalenz zwischen Brennstrahl- und Reflexionseigenschaft tatsächlich „fast auf einen Blick“ offensichtlich ist. Dass hierzu Vektorformeln interpretiert werden müssen, fördert das allgemeine Verständnis solcher Beziehungen. Schließlich weist dieser zweite Weg eine gute Transferierbarkeit auf: Wenn man im Unterricht den elliptischen Fall behandelt hat, sollten die Lernenden selbstständig auf die beiden anderen Fälle kommen können.

5 Dritter Weg

Die Äquivalenz von Brennstrahleigenschaft und Reflexionseigenschaft lässt sich nicht nur „fast auf einen Blick“, sondern folgendermaßen sogar „ganz auf einen Blick“ einsehen.⁸

Wir betrachten zwei Kurvenpunkte P und Q , die durch einen Kurvenbogen der Länge s voneinander getrennt sind.

Bei *Parabeln* (vgl. Abb. 16) gelten für kleine s die Beziehungen

$$|F - Q| \approx |F - P| + s \cdot \cos \alpha$$

sowie

$$|Q - M| \approx |P - L| + s \cdot \sin(90^\circ - \beta).$$

Für $s \rightarrow 0$ folgt hieraus: Die Brennstrahleigenschaft $|F - P| - |P - L| = |F - Q| - |Q - M|$ gilt genau dann, wenn die Reflexionseigenschaft $\alpha = \beta$ erfüllt ist.

Bei *Ellipsen* (Abb. 17) gelten für kleine s die beiden Beziehungen

$$|Z - Q| \approx |Z - P| - s \cdot \cos \alpha \quad \text{sowie} \quad |F - Q| \approx |F - P| + s \cdot \cos \beta.$$

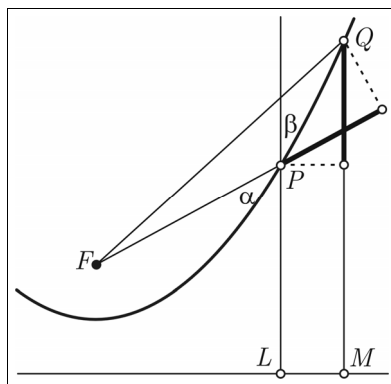


Abb. 16: Zwei Parabelpunkte.

⁸ Nach [Zwicker 1950, 113].

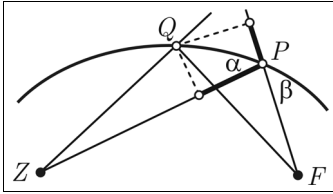


Abb. 17: Zwei Ellipsenpunkte

Hieraus folgt nach dem Grenzübergang $s \rightarrow 0$:
Die Brennstrahleigenschaft

$$|P - Z| + |P - F| = |Q - Z| + |Q - F|$$

gilt genau dann, wenn die Reflexionseigenschaft $\alpha = \beta$ erfüllt ist.

Man sieht an Abb. 18, dass der Transfer hin zu Hyperbeln leicht fällt.

Diese rein-analytische Vorgehensweise ist ganz nah an den Grundvorstellungen der Analysis und – abgesehen von elementarer Trigonometrie – auch voraussetzungslos durchführbar. Der Transfer von einem Kegelschnitt-Typ zu einem anderen sollte noch weniger Probleme bereiten als bei dem vektorgeometrischen Weg.

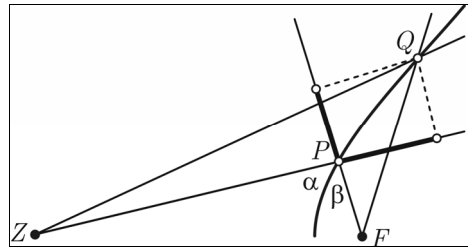


Abb. 18: Zwei Hyperbelpunkte

6 Variation: Cartesische Ovale

Gegeben seien zwei Brennpunkte Z und F . Die gemeinsame Verallgemeinerung von (B_E) und (B_H) lautet: Wir suchen alle Punkte P mit der

(B_C) Brennstrahleigenschaft

$$m \cdot |P - Z| + n \cdot |P - F| = r$$

(für feste reelle Parameter m, n und r).

Wie lautet die entsprechende Reflexionseigenschaft? Hier bietet sich der Weg von Abschnitt 4 an: Leitet man (B_C) ab, so gelangt man zur

$(B_{C'})$ Reflexionseigenschaft

$$(m \cdot (P - Z)^0 + n \cdot (P - F)^0) \cdot P' = 0$$

bzw.

$$m \cdot \cos(P - Z, P') = n \cdot \cos(P - F, -P').$$

An dieser Kurve kann man daher das Brechungsgesetz realisieren.

Die zu m und n gehörigen Kurven heißen *Cartesische Ovale* (Ausführlicheres zu diesen in [Loria 1910, 174 ff.]). Die Konstruktion wird im Folgenden für $m = 1$ und $n = 2$ beschrieben. Dazu formt man (B_C) um zu $2 \cdot |P - F| = r - |P - Z|$ bzw. zu $2 \cdot |P - F| = |P - K|$; dabei ist K ein Punkt auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt Z und dem Radius r .

Das Cartesische Oval besteht dann aus allen Punkten P bzw. Q (vgl. Abb. 19), die zu einem festen Kreis k (mit Zentrum Z und Radius r) einen doppelt so großen Abstand haben wie zu einem festen Punkt F (Brennpunkt).

Abb. 20 zeigt k , Z und F sowie die vollständige Kurve, die aus zwei Teilen besteht.

Aus dieser Variation ergeben sich folgende Fragen:

- Wie konstruiert man P (etwa mit Hilfe des Apolloniuskreises)?
- Wie funktioniert die Konstruktion für beliebige m und n ?
- Welche Gestalten können die Cartesischen Ovale annehmen?
- Ist auch bei Cartesischen Ovalen die Brennstrahleigenschaft zur Reflexionseigenschaft äquivalent?
- Wozu lassen sich die Cartesischen Ovale in der Optik anwenden?
- Wie lässt sich die Brennstrahleigenschaft (B_P) der Parabeln verallgemeinern? Welche Resultate ergeben sich?

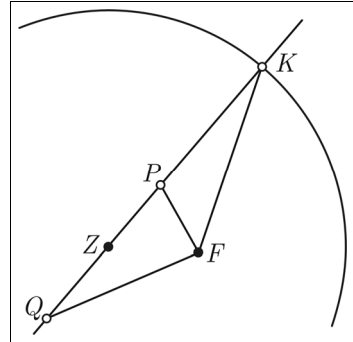


Abb. 19: Zur Definition des Cartesischen Ovals

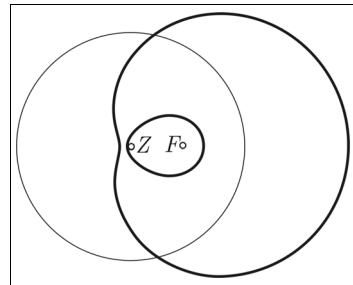


Abb. 20: Ein Cartesisches Oval

Literatur

- Drucker, Daniel [1992]: Reflection properties of curves and surfaces. In: *Mathematics Magazine* **65**(1992)3, 147–157.
- Flanders, Harley [1968]: The optical property of the conics. In: *American Mathematical Monthly* **75**(1968)4, 399.
- Loria, Gino [1910]: Ebene Kurven, Band I. Leipzig und Berlin: Teubner.
- Meyer, Jörg [1996]: Kegelschnitte mit Geometrie-Software. In: *Mathematik betrifft uns*, Heft 5, 1–31.
- Schupp, Hans [2000]: Kegelschnitte. Hildesheim: Franzbecker.
- Zwicker, C. [1950]: Advanced plane geometry. Amsterdam: North Holland.

Anschrift des Verfassers

Dr. Jörg Meyer
 Schäfertrift 16
 31789 Hameln
 E-Mail: J.M.Meyer@t-online.de