Kegelschnitte — eine Neubesinnung

von

Wolfgang Kroll, Marburg

Zusammenfassung: Kegelschnitte spielen heutzutage kaum mehr eine Rolle im Mathematikunterricht. Aber sie sollten es, wie Schupp in seinen „Kegelschnitten“ dargelegt hat, jedoch inhaltlich neu konzipiert und in einer modernen Anforderungen entsprechenden Behandlung. Der folgende Artikel beschreibt einen solchen Weg und will zugleich zeigen, dass Kegelschnitte gut geeignet sind, um auch auf die fundamentale didaktische Frage eine Antwort zu geben: Wie kann man den Computer zur Verbesserung des Lernens nutzen?

Summary: Conic sections do not play any major role in mathematics education today. They should, however as Schupp has pointed out in his “Kegelschnitte”, be revisited in content and applied in line with modern requirements. The following article gives a teaching example and in doing so will demonstrate that conics are very well suited to answer the fundamental didactical question: How do we encourage students to use computers for effective learning?

1 Einleitung

Um die Kegelschnitte ist es in den letzten Jahrzehnten still geworden – man könnte fast von „Totenstille“ reden. So hat auch die Monographie, die Schupp diesem Gegenstand 1988 gewidmet hat, in der Didaktik leider kaum Resonanz gefunden und ist die einzige umfassende Diskussion des Themas geblieben. Dort zieht Schupp im Rückblick auf die fast zweihundertjährige Geschichte der Kegelschnitte als Unterrichtsgegenstand das bemerkenswerte Resümee:[1]

> Wie kaum ein anderer Unterrichtsgegenstand waren die Kegelschnitte stets ein aktuelles Thema didaktischer Auseinandersetzungen.

Wenn sie es heute also nicht mehr sind, dann sicher nicht deshalb, weil sie ihre Bedeutung als zentrales Thema der Elementarmathematik verloren hätten – die von Schupp angeführten Argumente sind ja nach wie vor gültig und von niemandem widerlegt worden –, sondern weil man bisher nicht gesehen hat, wie sie in unsere Zeit passen, ja ich scheue mich nicht, sogar zu sagen, wie *gut* sie in unsere Zeit passen.

---

[1] [Schupp 1988, 206]

Zwei Aspekte sind es, denen die didaktische Diskussion heute besonders Rechnung tragen muss:

- der Existenz des Computers und moderner mathematischer Software;
- dem Postulat, Schüler stärker als bisher üblich zu selbstständiger Arbeit zu befähigen.

Ich glaube nun, dass sich meine obige These am besten durch die Darstellung eines *konkreten Unterrichtsganges* belegen lässt, vor allem auch deshalb, weil ein allgemeines Grundwissen über die Kegelschnitte heute nicht (mehr) vorausgesetzt werden kann. Dabei gehe ich davon aus, dass jedem Schüler und jeder Schülerin sowohl in der Schule als auch zu Hause ein Rechner zur Verfügung steht. Er wird vor allem für die Graphiken benötigt, während die algebraischen Rechnungen in der Regel einfach genug sind, um ohne Computerhilfe bewältigt zu werden. Ort der Behandlung ist ein Kurs über Analytische Geometrie / Lineare Algebra, in dem bereits die Grundtatsachen über Geraden und Ebenen entwickelt worden sind.

2 Der Unterrichtsgang

2.1 Die Ellipse als Kegelschnitt

Experimente:

1. Halten Sie den Auslauf eines Haushaltstrichters mit dem Finger zu, füllen Sie ihn halb mit Wasser, und stellen Sie den Trichter schräg.
2. Richten Sie den Lichtkegel einer Taschenlampe im verdunkelten Zimmer auf eine Wand oder eine andere ebene Fläche. Betrachten Sie die Schattengrenze. Wie verändert sie sich, wenn man die Richtung der Taschenlampe ändert?

Die Beobachtungen zeigen jeweils den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, einen „Kegelschnitt“. Um Genaueres über solche Schnittkurven zu erfahren, bestimmt man am einfachsten ihre Gleichung. Dazu benötigt man ein räumliches Koordinatensystem, in dem sich Kegel und Ebene leicht beschreiben lassen. Ein solches ist in der Abbildung 1 dargestellt:

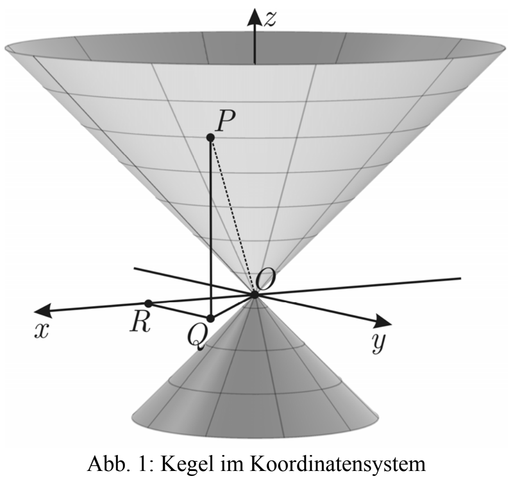

Abb. 1: Kegel im Koordinatensystem

Aufgabe:

Der Kegel habe einen Öffnungswinkel von $90°$. Bestimmen Sie seine Gleichung.

Lösung:

a) Das Dreieck OQP ist gleichschenklig rechtwinklig, also $|OQ| = \sqrt{x^2 + y^2} = z$.

b) Mit Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos 45°$

Ergebnis: In jedem Fall ergibt sich nach Aufheben der Wurzel $x^2 + y^2 = z^2$. Dies ist die gesuchte Kegelgleichung, die jedoch einen „Doppelkegel" beschreibt, da die Lösung doppeldeutig ist. Mit „Kegel" ist im Folgenden stets der entsprechende Doppelkegel gemeint.

Um den Kegel mit einer Ebene zum Schnitt zu bringen, können wir uns die Sache einfach machen. Da er rotationssymmetrisch ist, drehen wir die Ebene um die z-Achse so, dass sie die x-y-Ebene in einer Parallelen zur y-Achse (oder x-Achse) schneidet. Ihre Gleichung lautet dann allgemein: $z = mx + k$ mit $k \neq 0$.

Wie üblich kann man nun aus beiden Gleichungen die Schnittkurve berechnen, indem man den Term z aus der Ebenengleichung in die Kegelgleichung einsetzt und diese dann nach y auflöst. Dann wären sowohl y als auch z mittels x als Parameter dargestellt, d. h., wir erhielten so die Parameterdarstellung der Schnittkurve – allerdings als *Raumkurve*. Da die Schnittkurve aber eben ist, wird ihre Untersuchung viel einfacher, wenn man ihre Gleichung in einem *ebenen kartesischen Koordinatensystem* bestimmt. Dazu nimmt man die Ebene besser in Parameterform an, wobei die beiden aufspannenden Vektoren aufeinander senkrecht stehen und den Betrag 1 haben müssen. Dann lassen sich nämlich die beiden Parameter, die wir immer u und v nennen wollen, als Koordinaten in diesem System deuten. Aus Symmetriegründen ist es ferner zweckmäßig, wenn man außerdem den Mittelpunkt M des Achsenschnitts als „Aufpunkt" wählt.

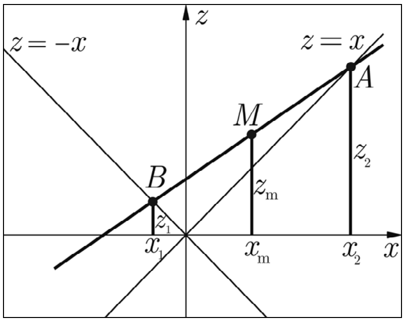

Abb. 2: Achsenschnitt

Aufgabe:

Bestimmen Sie eine entsprechende Parameterdarstellung der Ebene anhand des Beispiels $z = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ (bzw. allgemein).

Lösung: Wir wählen aus Symmetriegründen den einen Spannvektor in Richtung von $\overrightarrow{BA}$, den zweiten in der Richtung der y-Achse. Normiert man noch den ersten Vektor zu 1, so erhält man mittels $A(-1 \mid 0 \mid 1)$, $B(7 \mid 0 \mid 7)$, $M(3 \mid 0 \mid 4)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{u}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Schnittkurve erfolgt nun analog zur Berechnung der Schnittgeraden zweier Ebenen, deren eine durch ihre Koordinatengleichung, die andere in Parameterdarstellung gegeben ist. Man setzt die aus der Parameterdarstellung resultierenden Ausdrücke für x, y und z in die Koordinatengleichung ein. So folgt unmittelbar $\left(3 + \frac{4}{5}u\right)^2 + v^2 = \left(4 + \frac{3}{5}u\right)^2$ und nach einfacher Umrechnung

$$\tfrac{7}{25}u^2 + v^2 = 7 \quad \text{bzw.} \quad 7u^2 + 25v^2 = 175.$$

Aufgabe:

a) Zeichnen Sie diese Kurve mit Hilfe eines graphikfähigen Taschenrechners oder eines Computers. Welche Symmetrien weist sie gemäß ihrer Gleichung auf, und wie lassen sie sich anschaulich verstehen?

b) Bestimmen Sie auch die so genannten „Achsen“ der Kurve, nämlich den *maximalen* Durchmesser („Hauptachse“, $2a$) bzw. *minimalen* Durchmesser („Nebenachse“, $2b$). In welcher Beziehung steht sie zu den Kreisen mit dem gleichen Mittelpunkt, die die Kurve in ihren „Hauptscheiteln“ $(a \mid 0)$, $(-a \mid 0)$ bzw. in ihren „Nebenscheiteln“ $(0 \mid b)$, $(0 \mid -b)$ berühren?

Lösung:

a) In der Gleichung können u und $-u$ sowie v und $-v$ unabhängig voneinander vertauscht werden, ohne dass sich diese ändert. Also ist die Ellipse zu ihren beiden Achsen und damit auch zu ihrem Mittelpunkt symmetrisch. Die Symmetrie zu ihrer Hauptachse ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass sowohl der Kegel als auch die Schnittebene zur x-z-Ebene symmetrisch sind. Dagegen ist die Symmetrie zur Nebenachse alles andere als selbstverständlich, denn anschaulich gesprochen ist der Kegel ja unten „enger“ als oben, weshalb die Schnittkurve unten auch stärker gekrümmt sein sollte als oben. Die Fehlvorstellung beruht darauf, dass man unwillkürlich mit den „Breitenkreisen“ vergleicht und deren unterschiedliche Krümmung als Krümmung der Ellipse in ihren Hauptscheiteln ansieht. Wie man an der Ellipse sieht, verändert sich aber die Krümmung der Schnittkurve in Abhängigkeit von der Neigung der Ebene.

b) Durch Nullsetzen von v bzw. u erhält man die halbe Haupt- bzw. Nebenachse $a = 5$, $b = \sqrt{7}$. Löst man die Kurvengleichung nach v bzw. u auf, so erhält man

$$v = \pm\tfrac{\sqrt{7}}{5}\sqrt{25 - u^2} \quad \text{bzw.} \quad u = \pm\tfrac{5}{\sqrt{7}}\sqrt{7 - v^2}.$$

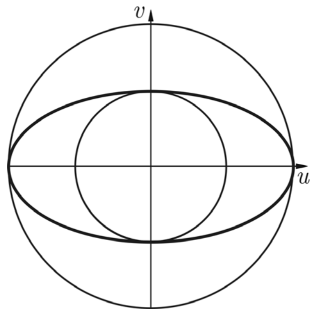

Abb. 3: Schnittellipse mit Scheitelkreisen

Ihnen entsprechen die Gleichungen zweier Kreise, der sogenannte „Hauptscheitelkreis“ und der „Nebenscheitelkreis“:

$$v = \pm\sqrt{25 - u^2} \quad \text{bzw.} \quad u = \pm\sqrt{7 - v^2}$$

Die Ellipse „vermittelt“ also gewissermaßen zwischen beiden Kreisen und entsteht durch Stauchung des ersten im Verhältnis $\frac{\sqrt{7}}{5}$ senkrecht zu ihrer Hauptachse bzw. Streckung des zweiten im Verhältnis $\frac{5}{\sqrt{7}}$ senkrecht zu ihrer Nebenachse.

Allgemeine Rechnung

Man schneidet im x-z-System die Gerade $z = mx + k$ mit den beiden Mantellinien des Kegels $z = \pm x$ und erhält so x_1 und x_2 sowie hieraus $x_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $z_\mathrm{m} = mx_\mathrm{m} + k$. Der Mittelpunkt $M(x_\mathrm{m} \mid 0 \mid z_\mathrm{m})$ liefert den „Aufpunkt“ der Ebenendarstellung. Ferner lautet ein Richtungsvektor der u-Achse $(1, 0, m)$, der noch durch $\sqrt{1+m^2}$ dividiert werden muss, damit er wie der Richtungsvektor $(0, 1, 0)$ der v-Achse die Länge 1 bekommt. Die entsprechende Parameterdarstellung der Ebene lautet daher:

(E) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1-m^2}\begin{pmatrix} mk \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + \frac{u}{\sqrt{1+m^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von

$$x = \frac{mk}{1-m^2} + \frac{u}{\sqrt{1+m^2}}, \; y = v \;\; \text{und} \;\; z = \frac{k}{1-m^2} + \frac{mu}{\sqrt{1+m^2}}$$

in $x^2 + y^2 = z^2$ ergibt nach Auflösen der Klammern und Zusammenfassen die Kegelschnittgleichung

(KS) $$\frac{1-m^2}{1+m^2}u^2 + v^2 = \frac{k^2}{1-m^2}.$$

Für $v = 0$ bzw. $u = 0$ ergeben sich hieraus die Formeln für die Halbachsen,

$$a^2 = \frac{(1+m^2)k^2}{(1-m^2)^2} \;\; \text{und} \;\; b^2 = \frac{k^2}{1-m^2},$$

und mit ihnen unter der Voraussetzung $|m| < 1$ die „Normalform“ der Ellipsengleichung:

(Ell) $$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Allgemein nennen wir die *geschlossenen* Kurven, in denen eine Ebene einen Kegel schneidet, *Ellipsen*. Dabei fassen wir den Kreis als Sonderfall einer Ellipse auf, bei der $a = b$ ist.

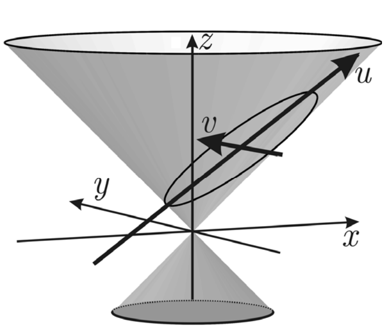

Abb. 4: Ellipse als Kegelschnitt

Arbeitsaufträge

1. Zeigen Sie: Die Gleichung $a^2(x^2+y^2)=z^2$ stellt einen (Doppel-)Kegel dar, dessen Spitze im Nullpunkt liegt. Untersuchen Sie an eigenen Zahlenbeispielen, unter welchen Bedingungen der Ebenenschnitt eine Ellipse darstellt. Können diese Ellipsen auch als Schnitt mit dem Kegel $x^2+y^2=z^2$ auftreten?
2. Bestimmen Sie die Kurve, in der die Ebene $4x+3y+2z=12$ den Kegel $x^2+y^2=z^2$ schneidet.

2.2 Hyperbel und Parabel

Abbildung 5 und 6 zeigen, dass ein Kegelschnitt auch zweiteilig und offen oder einteilig und offen sein kann, nämlich wenn die Steigung in $z=mx+k$ dem Betrage nach größer oder gleich 1 ist.

Aufgabe:

Bestimmen Sie analog zum Beispiel der Ellipse die Schnittkurve des Kegels $x^2+y^2=z^2$ mit der Ebene $z=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$ *oder* mit einer Ebene der Form $z=x+k$ mit $k>0$. Wie unterscheiden sich diese Kurven von der Ellipse?

Lösung: Im Falle der Hyperbel besteht kein Unterschied zur Ellipsenrechnung, so dass man das Ergebnis (KS) sofort übernehmen kann. Auch die Formel für a^2 bleibt gleich, während sich für $b^2=k^2/(m^2-1)$ ergibt. Dementsprechend lautet die Normalform

(Hyp) $$\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1.$$

Löst man diese Gleichung nach v auf, so erhält man

$$v=\pm\frac{b}{a}\sqrt{u^2-a^2}.$$

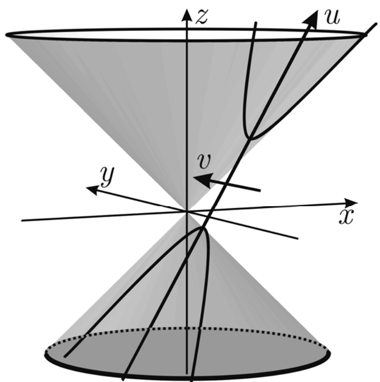

Abb. 5: Die Hyperbel als Kegelschnitt

Die Rolle des Hauptscheitelkreises übernimmt also hier die *spezielle* Hyperbel $v=\pm\sqrt{u^2-a^2}$, die wegen $b=a$ auch „gleichseitige“ Hyperbel genannt wird. Unsere Hyperbel geht aus ihr durch axiale Streckung bezüglich der Hauptachse im Verhältnis $\frac{b}{a}$ hervor. Gemäß $u=\pm\frac{a}{b}\sqrt{v^2+b^2}$ kann die Hyperbel aber auch aus der gleichseitigen Hyperbel $u^2-v^2=b^2$ durch axiale Streckung bezüglich der Nebenachse im Verhältnis $\frac{a}{b}$ erzeugt werden.

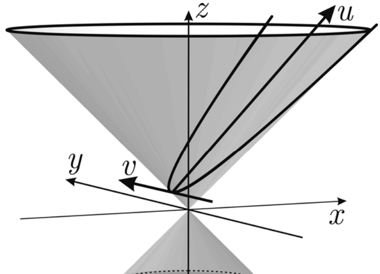

Abb. 6: Die Parabel als Kegelschnitt

In Abbildung 7 sind die beiden Möglichkeiten anhand des obigen Beispiels dargestellt. Für die halbe „Nebenachse“ b gibt es offenbar keine unmittelbare Entsprechung zur Ellipse.

Ein weiterer Unterschied wird den Schülerinnen und Schülern wahrscheinlich nicht auffallen. Hyperbeln mit $b > a$, die rein formal möglich sind, lassen sich im Gegensatz zu den Ellipsen wegen des Minus nicht durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden $v = u$ in die Standardform mit $a > b$ überführen. Das heißt: Solche Hyperbeln sind nicht als Schnitt mit dem Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ erzeugbar.

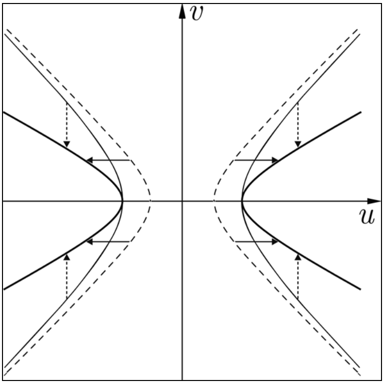

Abb. 7: Die Hyperbel und die ihr zugeordneten gleichseitigen Hyperbeln

Wir werden jedoch sehen, dass es sich auch in ihrem Fall um „Kegelschnitte“ handelt. Der Kegel muss lediglich einen größeren Öffnungswinkel haben. Einmal auf das Problem gestoßen, dürften die Schüler und Schülerinnen wohl aber von selbst auf diesen Zusammenhang kommen.

Im Falle der Parabel ist etwas größere Selbstständigkeit der Schüler erforderlich, die Rechnung dafür aber einfacher und leicht allgemein durchzuführen. Da die Parabel keinen Mittelpunkt hat, liegt es nahe, den Schnittpunkt der Mantellinie $z = -x$ mit $z = x + k$ als Anfangspunkt des u-v-Koordinatensystems zu wählen. Damit bekommt die Schnittebene die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}k \\ 0 \\ \frac{1}{2}k \end{pmatrix} + \frac{u}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und als Gleichung der Schnittkurve resultiert $v^2 = \sqrt{2}ku$. Als Funktion $u = f(v)$ erhält man demnach $f(v) = v^2/(k\sqrt{2})$. Offenbar kann man allein durch Änderung von k – also Parallelverschiebung – jede beliebige Parabel erzeugen. Als Normalform der Parabel bezeichnet man allgemein die Gleichung

(Par) $$v^2 = 2pu.$$

Arbeitsaufträge

1. Wählen Sie unter den folgenden Kurven einige aus, und zeigen Sie, dass sie sich als Schnitt einer geeigneten Ebene mit mindestens einem der beiden Kegel erzeugen lassen.

   a) Kurven
   (1) $u^2 + 4v^2 = 1$, (2) $4u^2 - v^2 = 1$, (3) $v^2 - 4u^2 = 24$, (4) $4v^2 - u^2 = 36$.

   b) Kegel
   (1) $x^2 + y^2 = 25z^2$, (2) $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$.

2. Untersuchen Sie die Funktionen $f(x) = \sqrt{g(x)}$ mit $g(x) = cx^2 + dx + e$. Wählen Sie ein spezielles Beispiel, und variieren Sie lediglich e. Welche allgemeinen Feststellungen können Sie treffen?
3. Diskutieren Sie die Änderungen der Kurvengestalt, wenn die Schnittebene parallel verschoben wird. Beziehen Sie dabei den Fall, dass die Schnittebene durch die Kegelspitze geht, mit ein. Welche besondere Rolle spielt dieser Sonderfall, wenn $|m| > 1$ ist?

2.3 Entdeckung der Brennpunkte

Im Folgenden bleiben wir in der Ebene und schreiben wieder x statt u und y statt v. Wir untersuchen nun systematisch, wie sich der Abstand eines beliebigen Kurvenpunktes $P(x \mid y)$ mit $y \geq 0$ von einem zuvor fest gewählten Achsenpunkt $M(c \mid 0)$ verhält. Dieser Abstand $d := |MP|$ ist also eine Funktion des x-Wertes von P gemäß der Formel

$$d = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} =: f_c(x),$$

wobei y der jeweiligen Kurvengleichung zu entnehmen ist.

Aufgabe:

Wählen Sie eine der folgenden Kurven

(1) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, (2) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ und

(3) $y^2 = 4x$,

und zeichnen Sie diese zusammen mit den Graphen der zugehörigen Abstandsfunktionen $f_c(x)$ für einige Werte von c. Wie lässt sich der Verlauf der Graphen erklären? Gibt es in der jeweiligen Schar besonders ausgezeichnete Graphen?

Lösung: Abbildung 8 zeigt die Schar der Abstandsgraphen für alle drei Kurven zusammen mit den oberen Kurvenhälften.

In allen Fällen bemerkt man, dass es sich um „Halbhyperbeln" handelt, die die betrachtete Kurve von oben berühren. Dass es Hyperbeln sein müssen, geht unmittelbar aus der Funktionsgleichung hervor. Warum sie aber die Kurve tangieren, bedarf einer Erklärung. Diese ist in allen Fällen gleich.

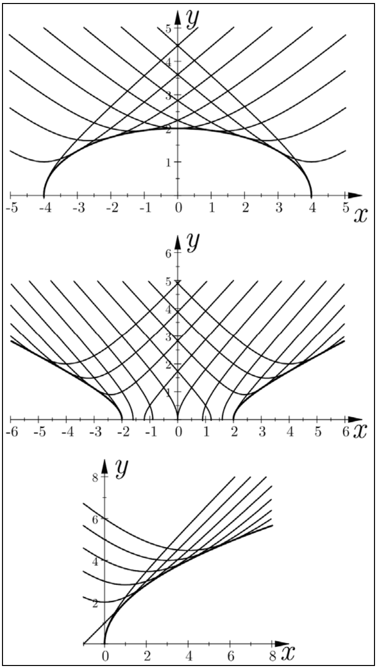

Abb. 8: Abstandsgraphen bei den Kegelschnitten

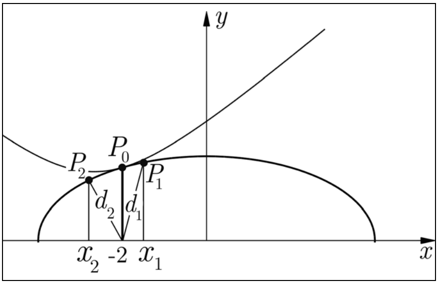

Abb. 9: Erklärung des Berührens

Abbildung 9 zeigt die Situation für $c = -2$ mit dem mutmaßlichen Berührpunkt P_0 an der Stelle $x_0 = -2$.

Nach Definition der Abstandsfunktion ist dort $f_{-2}(-2)$ gleich dem y-Wert von P_0. Somit geht der Abstandsgraph durch P_0. Im Falle der beiden Nachbarpunkte P_1, P_2 auf der Ellipse bildet aber der Abstand von $(-2 \mid 0)$ die Hypotenuse des Koordinatendreiecks, so dass

$$f_{-2}(x_1) = d_1 \text{ und } f_2(x_2) = d_2$$

beide *größer* sein müssen als der jeweilige y-Wert der Punkte P_1, P_2. Somit ist P_0 der *einzige* Punkt, den der Abstandsgraph mit der Ellipse gemeinsam hat. Entsprechend argumentiert man bei Hyperbel und Parabel.

Betrachtet man nun die berührenden Hyperbeln aufmerksam von rechts nach links, so bemerkt man, dass sie irgendwann von dem nach oben geöffneten Typ zu dem nach rechts und links geöffneten übergehen. Es muss also an einer bestimmten Stelle eine „Übergangskurve“ geben, die nur eine Gerade[2] sein kann. Im Fall der Parabel ist eine solche Gerade sogar zu sehen. Damit ergibt sich die

Anschlussaufgabe*:* Man bestimme die fraglichen Punkte in dem eigenen Beispiel bzw. gleich allgemein für den ausgewählten Kegelschnitttyp.

Die *Lösung* folgt leicht aus der Bedingung, dass der Term unter der Wurzel ein *vollständiges Quadrat* sein muss. Die entsprechende Umformung ergibt bei der Ellipse

$$\begin{aligned} f_c^2(x) &= (x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + b^2 + c^2 \\ &= \frac{e^2}{a^2}x^2 - 2cx + b^2 + c^2 = \left(\frac{e}{a}x - \frac{ca}{e}\right)^2 + b^2 + c^2 - \frac{c^2a^2}{e^2}, \end{aligned}$$

wobei wir zur Abkürzung $a^2 - b^2$ gleich e^2 gesetzt haben.

Demnach muss $b^2 + c^2 - \frac{c^2a^2}{e^2} = 0$ sein, und hieraus folgt $c = \pm e = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.

Im Falle der Hyperbel erhält man analog $c = \pm e$, wobei allerdings $e^2 = a^2 + b^2$ gesetzt wird, und im Falle der Parabel $c = \frac{1}{2}p$. Die zugehörigen Punkte $(\pm e \mid 0)$ bzw. $(\frac{1}{2}p \mid 0)$ heißen aus einem noch zu erklärenden Grund die „Brennpunkte“ der betreffenden Kegelschnitte und werden mit F_1, F_2 bzw. F bezeichnet. Ihre Verbindungsstrecken mit einem beliebigen Kurvenpunkt nennt man „Brennstrahlen“ und

---

2 Genau genommen handelt es sich um ein Paar sich schneidender Geraden, von denen nur eine sichtbar ist („entartete Hyperbel“).

kürzt sie meist mit r_1, r_2 bzw. r ab. Zwischen der Strecke und ihrer Länge, also dem *Abstand* des jeweiligen Brennpunktes vom Kurvenpunkt, wird dabei hier kein Unterschied gemacht.

Nach den bisherigen Überlegungen sind also die (Längen der) Brennstrahlen *lineare Funktionen* des x-Wertes des Kurvenpunktes. Diese ergeben sich aus der obigen Rechnung im Fall der Ellipse zu

$$r_{1,\,2} = \frac{e}{a}\left| x \mp \frac{a^2}{e} \right| = a \mp \frac{e}{a} x \ (> 0),$$

da $\frac{e}{a} < 1$ und $|x| \le a$ ist. Bei der Hyperbel sind dagegen vier Fälle möglich:

$$r_{1,\,2} = \frac{e}{a}\left| x \mp \frac{a^2}{e} \right| = \frac{e}{a} x \mp a \quad \text{für} \quad x \ge a$$

bzw.

$$r_{1,\,2} = \frac{e}{a}\left| x \mp \frac{a^2}{e} \right| = -\frac{e}{a} x \pm a \quad \text{für} \quad x \le -a$$

Das einfachste Ergebnis erhalten wir bei der Parabel:

$$r = x + \tfrac{1}{2} p$$

Arbeitsauftrag

Entwickeln Sie anhand eines selbst ausgewählten Kegelschnitts und der zugehörigen Formeln für die Brennstrahllängen ein Verfahren zur *Konstruktion* von beliebigen Punkten des Kegelschnitts.

2.4 Rechtfertigung der Bezeichnung

Aus dem Physikunterricht sollten die Schüler wissen, dass elektromagnetische oder akustische Wellen, die von einem Brennpunkt ausgehen, nach der Reflexion entweder selbst (Ellipse) oder ihre Verlängerung (Hyperbel) durch den anderen Brennpunkt gehen bzw. im Falle der Parabel achsenparallel verlaufen. Dabei muss natürlich das Einfallslot senkrecht zur Tangente verlaufen, also die Richtung der Kurvennormalen haben.

Nach diesen Vorüberlegungen erscheint die folgende ***Aufgabe*** sinnvoll:

Wählen Sie einen Kegelschnitt aus, und überzeugen Sie sich anschaulich-geometrisch an einigen Beispielen, dass die Brennpunkte ihre Bezeichnung zu Recht tragen. Entwickeln Sie danach einen Rechenweg, wie man den Sachverhalt beweisen kann, und führen Sie ihn an einem Beispiel oder gleich allgemein aus.

Nehmen wir an, dass die Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ und der Punkt $P(-5 \mid \frac{8}{3})$ gewählt worden sind, dann wird man zunächst die Kurve vom Computer zeichnen lassen (Abb. 10), um anschließend die Tangente durch Ableiten zu bestimmen. Aus $y' = \frac{2}{3} x / \sqrt{x^2 - 9}$ folgt für ihre Steigung $m = -\frac{5}{6}$, d. h., der Tangentenvektor hat die

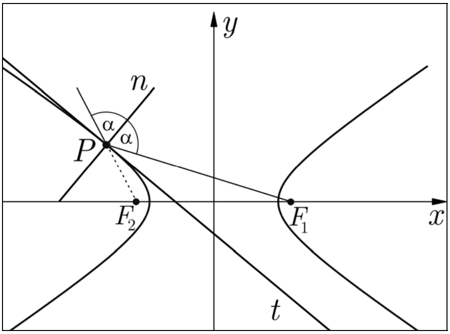

Abb. 10: Reflexionseigenschaft der Hyperbel

Richtung $(6, -5)$, und der Normalenvektor die Richtung $\vec{n} = (5, 6)$. Beide können eingezeichnet werden, und man stellt schon durch Messen fest, dass Einfalls- und Ausfallswinkel sehr genau übereinstimmen. Rechnerisch bietet sich der Weg über das Skalarprodukt an. Wir gehen hier gleich allgemein vor.

Für die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ erhalten wir gemäß dem obigen Vorgehen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b^2x_0 \\ -a^2y_0 \end{pmatrix}, \text{ und mit } \vec{r_1} = \overrightarrow{F_1P} = \begin{pmatrix} x_0 - e \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r_2} = \overrightarrow{F_2P} = \begin{pmatrix} x_0 + e \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ folgt}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{r_i}) = \frac{b^2x_0(x_0 \mp e) - a^2y_0^2}{|F_iP| \cdot |\vec{n}|} = \frac{b^2x_0^2 \mp b^2ex_0 - a^2y_0^2}{|F_iP| \cdot |\vec{n}|} = \frac{a^2b^2 \mp b^2ex_0}{|F_iP| \cdot |\vec{n}|} = \frac{ab^2}{|\vec{n}|} \cdot \frac{a \mp \frac{e}{a}x_0}{|F_iP|}.$$

Nun ist, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben,

$\left|F_iP\right| = \frac{e}{a}x_0 \mp a$ für $x_0 \geq a$ bzw. $\left|F_iP\right| = \frac{e}{a}x_0 \pm a$ für $x_0 \leq -a$, also im ersten Fall

$$\cos(\vec{n}, \vec{r_1}) = -\frac{ab^2}{|\vec{n}|}, \ \cos(\vec{n}, \vec{r_2}) = \frac{ab^2}{|\vec{n}|},$$

während sich im zweiten Fall die Vorzeichen beide umkehren. Beachtet man die Richtung der Vektoren, so besagt dies aber gerade, dass die fraglichen Winkel in jedem Falle gleich sind. Analog erfolgt die Rechnung bei der Ellipse und bei der Parabel, die jedoch einfacher ist, weil keine Fallunterscheidungen erforderlich sind.

Arbeitsauftrag

Zeichnen Sie den „Achsenschnitt" des (Doppel-)Kegels $x^2 + y^2 = z^2$ in der x-z-Ebene und die Gerade g mit der Gleichung $z = mx + k$. Variieren Sie m und k, und berechnen Sie die Brennpunkte des zugehörigen Kegelschnitts. Zeichnen Sie diese ein, und untersuchen Sie die Frage, ob sie sich als besondere Punkte der obigen „Schnittfigur" *elementargeometrisch konstruieren* lassen. Beachten Sie dabei besonders den elliptischen Fall $|m| < 1$.

2.5 Kegelschnitte in beliebiger Lage

Durch die besondere Wahl des Koordinatensystems erhielten die Kegelschnitte geometrisch leicht zu interpretierende Gleichungen. Wir fragen jetzt, wie die Gleichung lauten würde, wenn der Kegelschnitt gedreht und verschoben wird.

Als Beispiel wählen wir eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(-2\mid 1)$ und dem Brennpunkt $F_1(-\frac{1}{2}\mid 3)$. Ihre halbe Hauptachse sei $a = 2$.

Aufgabe 1:

Geben Sie die Gleichung dieser Hyperbel in einem u-v-System an, dessen Nullpunkt M ist und dessen u-Achse die positive Richtung $\overrightarrow{MF_1}$ hat.

Lösung: Man berechnet zunächst $e = \left|MF_1\right| = \frac{5}{2}$ und dann $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \frac{3}{2}$. Also lautet die Gleichung gemäß (Hyp)

$$\frac{u^2}{4} - \frac{4v^2}{9} = 1 \quad \text{oder} \quad 9u^2 - 16v^2 = 36.$$

Aufgabe 2:

Beschreiben Sie die x-y-Ebene mittels des u-v-Systems, ermitteln Sie hieraus eine Darstellung des u-v-Systems mit den Parametern x und y und schließlich die Gleichung der Hyperbel im x-y-System.

Lösung: Wir berechnen zuerst den Spannvektor $\overrightarrow{MF_1} = (\frac{3}{2},\ 2)$ und normieren ihn zu 1, indem wir durch seine Länge $\frac{5}{2}$ dividieren. Dann ist $\frac{1}{5}(-4,\ 3)$ ein dazu orthogonaler und normierter zweiter Spannvektor, und die geforderte Beschreibung lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{u}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{v}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektorgleichung wird nach u und v aufgelöst, und man erhält nach leichter Rechnung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + \frac{x}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{y}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in $9u^2 - 16v^2 = 36$ folgt die gesuchte Darstellung

$$-7x^2 + 24xy - 52x + 48y = 112.$$

An der Lösung erkennt man etwas Unerwartetes. Die Variable y erscheint nicht im Quadrat, d. h., man kann die Gleichung *eindeutig* nach y auflösen. Diese Hyperbel ist also auch als *Funktion von* x darstellbar, nämlich

$$y = f(x) = \frac{7x^2 + 52x + 112}{24(x+2)} = \frac{7}{24}x + \frac{19}{2} + \frac{3}{2(x+2)}.$$

Ihr Graph hat die Gerade $x = -2$ und die Gerade $y = \frac{7}{24}x + \frac{19}{12}$ zu Asymptoten. Die in der Analysis übliche Bezeichnung solcher Funktionen als „Hyperbeln“ ist also – zumindest in diesem konkreten Fall – gerechtfertigt.

Arbeitsauftrag

Bestimmen Sie die Gleichungen ein und desselben Kegelschnittes mit *festen* Achsenrichtungen, die nicht zu den Koordinatenachsen parallel sind. Diskutieren Sie die Ergebnisse.

2.6 Die allgemeine quadratische Gleichung

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse können wir vermuten, dass jede quadratische Gleichung der Form

(QG) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

mit $B \neq 0$ einen Kegelschnitt darstellt. Im Folgenden wird sich zeigen, dass diese Vermutung bis auf gewisse Ausnahmefälle richtig ist. Wir betrachten zunächst ein Beispiel:

(1) $$12x^2 - 12xy + 7y^2 + 96x - 96y + 288 = 0$$

Der Computer zeichnet dazu eine Kurve,[3] die wie eine Ellipse aussieht, doch können wir weder ihren Mittelpunkt noch ihre Achsen der Graphik entnehmen und auf diese Weise die Vermutung überprüfen. Am nächsten liegt es wohl, (1) nach y oder x aufzulösen und das Ergebnis geometrisch zu interpretieren. So erhalten wir

(1') $$y = \frac{6}{7}x + \frac{48}{7} \pm \frac{4}{7}\sqrt{18 - 6x - 3x^2}.$$

Nun wissen wir bereits, dass durch die Gleichungen

$$y = \pm\frac{4}{7}\sqrt{18 - 6x - 3x^2}$$

eine Ellipse beschrieben wird (die hier fast ein Kreis ist). Also können wir (1') als „Summe einer Geraden und einer Ellipse“ deuten: Bei festem x wird die Ellipsenordinate je nach Vorzeichen nach oben oder unten an den entsprechenden Geradenpunkt von g: $y = \frac{6}{7}x + \frac{48}{7}$ angetragen (Abb. 11).

Demnach liegen auf dieser Geraden die Mittelpunkte aller Sehnen von (1), die zur y-Achse parallel sind. Wenn (1) nun wirklich eine Ellipse ist, verläuft eine solche Sehne auch durch ihren Mittelpunkt $M(x_\mathrm{m}, y_\mathrm{m})$. Er muss also ein Punkt der Geraden g sein.

Analoges gilt, wenn man nach x auflöst,

(1'') $$x = \frac{1}{2}y - 4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-72 + 36y - 3y^2}.$$

M liegt also auch auf der Geraden h: $x = \frac{1}{2}y - 4$. Als Mittelpunkt M kommt daher nur der Schnittpunkt $(-1 \mid 6)$ von g und h in Frage.

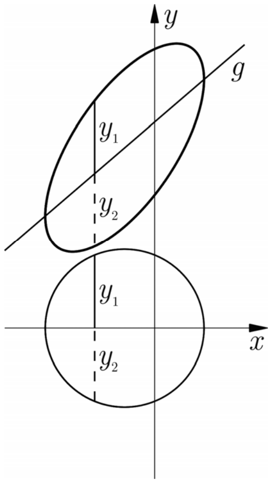

Abb. 11: Addition einer Ellipse zu einer Geraden

Jetzt fehlen nur noch die Achsenrichtungen (c, d) und $(-d, c)$, die wir nach derselben Methode wie bisher bestimmen. Wir nehmen sie als normierte Spannvektoren an und stellen die x-y-Ebene mit ihrer Hilfe neu dar:

---

[3] Das ist z. B. mit DERIVE oder MUPAD ohne Auflösen nach y direkt möglich.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in (1) müsste sich dann bei richtiger Wahl der Spannvektoren eine Ellipsengleichung in Normalform ergeben. Die Rechnung – zu der man am besten ein CAS zu Hilfe nimmt – ergibt

$$(12c^2 - 12cd + 7d^2)u^2 - 2(6c^2 + 5cd - 6d^2)uv + (7c^2 + 12cd + 12d^2)v^2 - 48 = 0\,.$$

Wie man sieht, sind die linearen Glieder bereits verschwunden, der Mittelpunkt ist also Symmetriezentrum. Damit nun auch das gemischte uv-Glied wegfällt, muss die Bedingung $6c^2 + 5cd - 6d^2 = 0$ gelten. Diese Gleichung enthält allerdings zwei Unbekannte und wird erst durch die Normierungsbedingung $c^2 + d^2 = 1$ eindeutig lösbar. Wir können aber etwas einfacher zum Ziel gelangen, wenn wir beachten, dass $m = \frac{d}{c}$ die gesuchte Richtung der u-Achse ist. Daher dividieren wir durch c^2 und erhalten als Gleichung für m

$$6 + 5m - 6m^2 = 0.$$

Ihre Lösungen $m_1 = \frac{3}{2}$ und $m_2 = -\frac{2}{3}$ ergeben zusammen mit $c^2 + d^2 = 1$ die folgenden Wertepaare

$$c = \pm\frac{2}{\sqrt{13}},\ d = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{und} \quad c = \pm\frac{3}{\sqrt{13}},\ d = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Sie gehen durch Vertauschung ineinander über. Wählen wir die erste, so folgt (unabhängig vom Vorzeichen, wie es sein muss!)

(1''') $$3u^2 + 16v^2 - 48 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{3} = 1.$$

Damit ist bestätigt, dass (1) eine Ellipse darstellt mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = \sqrt{3}$.

Ob nun das obige Verfahren *immer* zu dem Ergebnis führt, dass eine quadratische Gleichung mit xy-Glied einen Kegelschnitt darstellt, lässt sich nicht unmittelbar erkennen. Sicher ist aber, dass es bei einer gedrehten Parabel modifiziert werden müsste.

***Aufgabe*:**
Betrachten Sie die Parabel mit dem Scheitel $S(5\,|\,3)$, der Achse $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ und dem Öffnungsfaktor $2p = \sqrt{5}$, und zeigen Sie nach dem aus 2.5 bekannten Verfahren, dass ihre Gleichung

(2) $$x^2 - 4xy + 4y^2 + 12x + y - 64 = 0$$

lautet, wenn sie nach links unten geöffnet ist.

Lösung: Zunächst lösen wir diese Gleichung wie oben nach y bzw. x auf:

(2') $$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \pm \sqrt{41 - 8x}$$

(2'') $$x = 2y - 6 \pm \sqrt{4 - y}$$

Danach ist die Parabel also die Summe aus einer Geraden und einer Parabel in Normallage. Auch hier könnten wir nun wie oben argumentieren, dass der Mittelpunkt der Kurve auf den beiden Geraden

$$g : y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{8} \quad \text{und} \quad h : x = 2y - 6$$

liegen muss. Da die Parabel aber keinen Mittelpunkt hat, dürfen sich g und h nicht schneiden. Das ist in der Tat der Fall!

Wir erkennen aber in diesem Zusammenhang, dass g und h parallel zur Parabelachse sind. Wüsste man es nicht schon, so könnte man das einer Schnittpunktsberechnung entnehmen. Die resultierende Gleichung wird linear, d. h., es gibt nur einen Schnittpunkt, und zwar einen „echten“, keinen Berührpunkt. Solches gilt nur für die Parallelen zur Parabelachse.

Der weitere Weg verläuft wie oben, wobei wir diesmal die Achsenrichtung bereits kennen. Wir setzen dementsprechend

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten, eingesetzt in (2),

(2”) $$5u^2 - 2\sqrt{5}u - 5\sqrt{5}v - 64 = 0.$$

Diese Gleichung bringen wir noch durch quadratische Ergänzung auf die „Scheitelform“

$$\left(u - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{5}\left(v + \frac{13}{\sqrt{5}}\right).$$

Danach hat der Scheitel im u-v-Koordinatensystem die Koordinaten $u_S = 1/\sqrt{5}$, $v_S = -13/\sqrt{5}$. Das ergibt nach unserem Ansatz in der Tat $x_S = 5,\ y_S = -3$.

Lehrreich wäre es, wenn man dieselbe Aufgabe von vornherein mittels des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$$

bearbeitet hätte. Das Ergebnis

$$(c^2 - 4cd + 4d^2)u^2 + (-4c^2 + 6cd + 4d^2)uv + (4c^2 + 4cd + d^2)v^2 + (12c + d)u + (c - 12d)v - 64 = 0$$

führt dann auf die Bedingung

$$-4c^2 + 6cd + 4d^2 = 0$$

und mit $m = \frac{d}{c}$ auf die beiden Lösungen $m_1 = \frac{1}{2}$ und $m_2 = -2$. Dies ergibt mit $c^2 + d^2 = 1$ die Lösungspaare

$$c = \frac{2}{\sqrt{5}},\ d = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{\sqrt{5}},\ d = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(wobei wir uns nur auf ein Vorzeichen beschränken). Durch Einsetzen in (2) folgt aus dem ersten

(2*) $$5\sqrt{5}u + 5v^2 - 2\sqrt{5}v - 64 = 0$$

mit der zugehörigen Scheitelform $(v - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = -\sqrt{5}(u - \frac{13}{\sqrt{5}})$.

Wie man sieht, sind also nur die Achsen vertauscht und von einer noch die Richtung umgekehrt worden.

Offensichtlich lässt sich diese Vorgehensweise auf jede Gleichung (QG) anwenden. Dies und noch anderes überlassen wir den Arbeitsaufträgen.

Arbeitsaufträge

1. Im Falle von Hyperbeln lässt sich der Mittelpunkt einfacher mit Hilfe ihrer Asymptoten ermitteln. Bestimmen Sie demgemäß Asymptoten, Achsen und Brennpunkte der folgenden Kurven:

   a) $3x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y = 0$ b) $4xy - y^2 - 2 = 0$

   c) $3x^2 + 2xy - 5x - 6y - 15 = 0$ d) $(x+2)(y-3) = 6$

2. Wenden Sie mit Hilfe eines CAS den Ansatz

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$$

   unmittelbar auf (QG) an, und leiten Sie so die Bedingung

   $$Bm^2 - (A - C)m - B = 0$$

   aus dem Verschwinden des uv-Gliedes her. Welche Folgerungen ergeben sich aus dieser Bedingung? Diskutieren Sie diese mittels geeigneter Beispiele.

3. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten von (QG) erfüllen, damit die Kurve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, von den möglichen Ausartungen abgesehen?

3 Didaktischer Kommentar

Seit im 19. Jahrhundert der belgische Genieoffizier Dandelin die später nach ihm benannten Kugeln gefunden hat, existiert ein gewissermaßen klassischer Weg, die grundlegenden geometrischen Eigenschaften der Kegelschnitte *unmittelbar* aus ihrer räumlichen Definition abzuleiten. Deshalb ist zuallererst zu begründen, warum Dandelins geniale Idee in dem von mir entwickelten Konzept (praktisch) keine Rolle spielt, obwohl der Ausgangspunkt genau derselbe ist.

Meine Erfahrung ist die, dass räumlich-geometrische Überlegungen heute mehr denn je für Schüler fremd und ungewohnt sind. Insbesondere fällt es ihnen schwer, die verschiedenen Tangentenkegel in die Figur „hineinzusehen“, da sie weder bildlich noch im Modell angemessen dargestellt werden können, jedoch für die dandelinsche Argumentation zentral sind. Wirklich einfach ist sein Zugang deshalb nur für das geübte Auge des Geometers. Doch dies ist nicht der ausschlaggebende Grund, zumal man ja die Gelegenheit nutzen könnte, das Vorstellungsvermögen der Schüler zu trainieren. Viel wichtiger ist ein anderer Aspekt. Die dandelinsche Lösung muss den Schülern in allen Teilen vorgesetzt werden, und es gibt später dann nur noch wenige Situationen, (Hyperbel, Parabel, Zylinderschnitt), auf die sie das Gelernte übertragen können. Demgegenüber besitzt das hier dargestellte Konzept entscheidende Vorzüge. Es knüpft an Bekanntes in der Analytischen Geometrie des $\mathbb{R}^3$ an und lässt den Schülern erheblich mehr Raum für eigene Aktivitäten. Letzteres wird vor allem dadurch möglich, dass die *Methode, die Parameterdarstellung der Ebene als Koordinatensystem aufzufassen*, leicht anwendbar ist und keinerlei „Ad-hoc-Konstruktionen“ erforderlich macht. Sie bewährt sich sogar bei der „Hauptachsentransformation“, wie sie in 2.5 vorbereitet und in 2.6 dargestellt wird. Umso bedauerlicher ist es, dass diese Methode wenig bekannt zu sein scheint, obwohl „Basistransformationen“ zum üblichen Lehrstoff der Linearen Algebra gehören.

Was jedoch die dandelinschen Kugeln und weitere geometrische Zusammenhänge anlangt, so möchte ich hervorheben, dass der von mir vorgeschlagene Weg auch einen Zugang zu ihnen bereithält. Am Schluss jedes Abschnittes habe ich nämlich „Arbeitsaufträge“ formuliert, die die Schüler zu *zusätzlichen* eigenständigen Untersuchungen anhalten. Sie könnten von kleineren oder größeren Arbeitsgruppen übernommen werden, wobei die Ergebnisse allen Mitschülern vorzustellen wären. Ob ein solcher Auftrag erteilt wird, hängt natürlich davon ab, wie viel Zeit der Lehrer für diese den Unterrichtsstoff ergänzenden Fragestellungen aufwenden möchte. Dort jedenfalls finden sich einige geometrische Fragestellungen, die nun aber im Unterschied zum üblichen Vorgehen die Schüler zur *Entdeckung* von interessanten Zusammenhängen führen können. So in 2.3, wo die Schüler keine großen Schwierigkeiten haben dürften, auf die bekannten Charakterisierungen von Ellipse und Hyperbel mittels Summe und Differenz der Brennstrahlen zu kommen, wo aber auch die Konstruktionen mittels Leitkreis und Leitgeraden durchaus nahe liegen. Nicht ganz so nahe liegt die Entdeckung, auf die der Arbeitsauftrag in 2.4 abzielt, dass nämlich die Brennpunkte gerade die Berührungspunkte von In- und Ankreis sind. Von hier wäre es dann nur noch ein kleiner Schritt zu den dandelinschen Kugeln, den ich, wenn die Zeit es erlaubt, auch dringend empfehlen möchte.

Außer den dandelinschen Kugeln mag der Leser aber auch noch andere Dinge vermissen, die früher zum üblichen Kanon gehörten, so z. B. eine ausführliche Behandlung von Tangente und Polare. Von der Sache her können natürlich alle diesbezüglichen Aufgaben bereits mit den bisher erarbeiteten Kenntnissen gelöst werden. Eine darüber hinausgehende Erweiterung zur *Theorie* der Bilinearformen würde dagegen den Rahmen sprengen.

Ich halte es für besser vertretbar, wenn der Kegelschnitt-Exkurs die Schüler mit den wichtigsten Eigenschaften dieser Theorie, wie sie vor allem in der Physik gebraucht werden, vertraut macht und wenn sie außerdem erfahren, was es mit der allgemeinen quadratischen Gleichung auf sich hat, die ihnen viel häufiger begegnet. Das Ziel ist ein „exemplarisches“ Verständnis im Sinne von Schupp, während eine wie auch immer beschaffene „Vollständigkeit“ – z. B. bei den Klassifizierungen – außer einem großen Aufwand m. E. keinen Gewinn brächte. Schupp hat gegenüber einem allzu systemorientierten Unterricht immer wieder die Notwendigkeit eines *objektexplorierenden Unterrichts* betont und dabei zugleich auf die Kegelschnitte hingewiesen – vgl. z. B. [Schupp 1998, 15 ff.]. Dem brauche ich hier nichts mehr hinzuzufügen.

Nach diesen grundsätzlichen Erwägungen gehe ich noch auf einige Einzelheiten ein.

Zu 2.1 und 2.2: Die Beschränkung auf einen Kegel mit dem Öffnungswinkel 90° hat den Vorteil, dass seine Gleichung nicht einen weiteren Parameter enthält, der für das Verständnis unwesentlich ist. Die Erweiterung kann per „Arbeitsauftrag“ leicht von den Schülern allein geleistet werden. Wenig bekannt ist im Übrigen, dass bereits *alle* Ellipsen und Parabeln als Schnitt mit diesem Kegel möglich sind, nicht jedoch alle Hyperbeln (vgl. hierzu den ersten Arbeitsauftrag von 2.2).

Der zweite Arbeitsauftrag von 2.2 stellt eine Verbindung zur Analysis her – eine Verbindung, die in der Schule sträflich vernachlässigt wird. Dabei sind die Beziehungen zum Verlauf des Radikanden (Parabel oder Gerade) ebenso erhellend wie nützlich.

Der dritte Arbeitsauftrag von 2.2 zielt auf die Charakterisierung der Ähnlichkeit der Kegelschnitte. Der Kegel „materialisiert“ dabei gewissermaßen die zentrische Streckung. Ferner sind hier die Asymptoten der Hyperbel (wieder) zu entdecken, nämlich als „entartete“ (ähnliche) Hyperbel, die zu allen übrigen der „Familie“ asymptotisch verläuft. Das sollte am besten zusammen mit dem zweiten Arbeitsauftrag diskutiert werden.

Zu 2.3 und 2.4: Der hier eingeschlagene Weg wird viele überraschen. Aber er hat im Vergleich zu allen anderen Möglichkeiten den Vorteil, dass man mit den wenigsten Vorgaben auskommt und die Schüler wirklich eigene Entdeckungen machen *und erklären* können. Die Formeln für die Brennstrahlen, die sonst immer nur als „Anhängsel“ auftreten, erweisen sich als besonders ergiebig, wenn es darum geht, die Kegelschnitte geometrisch über ihre Längen zu interpretieren. Natürlich erlaubt das auch, wie üblich die Reflexionseigenschaft zu beweisen. Der in 2.4 dargestellte Weg hat jedoch den Vorzug, dass die Schüler ihn selbst finden können, da sie über alle nötigen Mittel verfügen.

Zu 2.5 und 2.6: Wer hier bedauert, dass auf das mächtige Instrument der Drehmatrizen verzichtet wird, der möge bedenken, dass Schüler heute im Umgang mit den trigonometrischen Funktionen nur wenig geübt sind und sich dabei sehr unsicher fühlen. Ich halte den hier beschriebenen Weg aber auch deshalb für besser, weil er sich vollständig in die bisherigen Entwicklungen einordnet und die Schüler ihn weitgehend selbst finden können. Dabei nehme ich in Kauf, dass mit der Bestimmung des Mittelpunktes zunächst ein Umweg eingeschlagen wird, der sich später als überflüssig erweist. Denn für die Lagebestimmung erscheint seine Kenntnis unumgänglich, da er gewissermaßen den (Mittelpunkts-)Kegelschnitt „verankert". Der Arbeitsauftrag zu 2.5 führt allerdings schon zu der Erkenntnis, dass die Achsenrichtungen bereits durch die Koeffizienten der quadratischen Glieder festgelegt sind, und der zweite Arbeitsauftrag zu 2.6 zeigt, dass man besser zum Ziel kommt, wenn man hiervon Gebrauch macht. Das Vorgehen hier hat jedoch den Vorteil, dass die Schüler *in gut motivierten Schritten* zur Lösung gelangen, wobei der Weg nur unbeträchtlich länger ist.

Wichtiger erscheint mir, dass die Verbindung zur Analysis – erneut! – hergestellt wird und die Schüler anhand des ersten Arbeitsauftrages von 2.6 erkennen, dass gewisse gebrochen-rationale Funktionen, die dort ebenfalls „Hyperbeln" genannt werden, auch wirklich welche sind. Denn nur dann, wenn die Kegelschnitte nicht mehr wie früher isoliert, sondern in enger Verzahnung mit der Analysis und der gewohnten Analytischen Geometrie behandelt werden, haben sie m. E. eine Chance, den ihnen gebührenden Platz im Unterricht (wieder) einzunehmen.

Zum Schluss möchte ich noch eine „explizite" Antwort auf die eingangs angeführte fundamentale didaktische Frage geben, nämlich inwiefern der PC – hier – dazu hilft, die Qualität des Lernens zu verbessern. Sie lautet, notwendig verkürzt: Vor allem dadurch, dass die Schüler an offenen Aufgaben lernen, ihre Denkhandlungen selbstständig zu entwerfen und zu überprüfen.

Literatur

Schupp, Hans [1988]: Kegelschnitte. Mannheim / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Schupp, Hans [1998]: Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion. In: *Der Mathematikunterricht* **44**(1998)4/5, 5–21.

Schupp, Hans [2000]: Geometrie in der Sekundarstufe II. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **21**(2000)1, 50–66.

Anmerkung (Hrsg.):

Alle Graphiken wurden vom Autor mit MuPAD™ erstellt; für das Layout wurden diese mit Corel Draw™ und Corel PhotoPaint™ bearbeitet.

Anschrift des Verfassers

Prof. Wolfgang Kroll
In der Lache 5
35094 Lahntal
E-Mail: kroll@staff.uni-marburg.de