

Geniale Ideen und ein lehrreicher Fehler des berühmten Herrn Galilei

von

Lutz Führer, Frankfurt a. M.

Kurzfassung: Wer Analysis lehrt und wissen möchte, aus welchen Erkenntnisinteressen sie einst entstand, wird sich irgendwann auch mit ihrer Geburt aus Bewegungsstudien befassen müssen. Das war im 17. Jahrhundert, als Physik und Mathematik noch nicht unterschieden wurden, und Galilei war der erste, der die Mathematik der Bewegungen meisterte – auch wenn seine Überlegungen einen dicken Fehler enthielten ...

Abstract: This article retells the early history of curve design and optimization from Galilei's „discorsi“ to Joh. Bernoulli's solution of the brachistochrone problem, the famous origin of the calculus of variations. The didactical intent is threefold: Firstly, it is a beautiful story, which should please and inspire Hans Schupp (and many others) to continue the promotion of curves as a tool of mathematical education. Secondly, it should serve as an outstanding example of the historical creation process of analysis on the grounds of Galilei's law of falling and gliding bodies and of Fermat's fundamental speed optimization principle. And last but not least it points out how a creative mistake has become fruitful because the error producer was not condemned but taken seriously.

Ueber die örtliche Bewegung.

Ueber einen sehr alten Gegenstand bringen wir eine ganz neue Wissenschaft. Nichts ist älter in der Natur als die Bewegung, und über dieselbe giebt es weder wenig noch geringe Schriften der Philosophen. Dennoch habe ich deren Eigenthümlichkeiten in grosser Menge und darunter sehr wissenswerthe, bisher aber nicht erkannte und noch nicht bewiesene, in Erfahrung gebracht. Einige leichtere Sätze hört man nennen: wie zum Beispiel, dass die natürliche Bewegung fallender schwerer Körper eine stetig beschleunigte sei. In welchem Maasse aber diese Beschleunigung stattfindet, ist bisher nicht ausgesprochen worden; denn so viel ich weiss, hat Niemand bewiesen, dass die vom fallenden Körper in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken sich zu einander verhalten wie die ungeraden Zahlen. Man hat beobachtet, dass Wurfgeschosse eine gewisse Curve beschreiben; dass letztere aber eine Parabel sei, hat Niemand gelehrt. Dass aber dieses sich so verhält und noch vieles andere, nicht minder Wissenswerthe, soll von mir bewiesen werden, und was noch zu thun übrig bleibt, zu dem wird die Bahn geebnet, zur Errichtung einer sehr weiten, ausserordentlich wichtigen Wissenschaft, deren Anfangsgründe diese vorliegende Arbeit bringen soll, in deren tiefere Geheimnisse einzudringen Geistern vorbehalten bleibt, die mir überlegen sind.

Galileis Einleitung zum 3. Tag der „*Unterredungen und mathematischen Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*“ („*Discorsi e dimostrazioni matematiche*“ ... von 1638); zit. nach [Galilei 1995, 140 f.]

1 Die Fall- und Gleitgeschwindigkeit

Gleich zu Beginn der Ausführungen in den „Discorsi“ über die natürlich beschleunigte Bewegung zitiert einer der drei Partner der fiktiven Gesprächsrunde, Galileis Sprachrohr Salviati, „den Autor“:¹

Wenn ich daher bemerke, dass ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum soll ich nicht glauben, dass solche Zuwüchse in allereinfachster, Jedermann plausibler Weise zustande kommen? Wenn wir genau aufmerken, werden wir keinen Zuwachs einfacher finden, als denjenigen, der in immer gleicher Weise hinzutritt [...]. Gleichförmig oder einförmig beschleunigte Bewegung nenne ich diejenige, die von Anfang an in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszuwüchse erteilt.

Dass Galilei nicht einfach $v = g \cdot t$ hinschreibt, sondern sinngemäß $\Delta v \sim \Delta t$, hatte einen wissenschaftshistorisch sehr bedeutsamen Grund: Direkte Vergleiche von Geschwindigkeiten und Zeiten galten wegen der verschiedenen Größenbereiche als sinnlos. Von Euklid bis Newton wurden allenfalls „analoge“ Verhältnisse in Betracht gezogen und ontologisch interpretiert.

Sagredo, der zweite Gesprächspartner, zweifelt sofort, „*ob sie bei der natürlich beschleunigten Bewegung statthabe*“, und Galilei-Salviati muss viel Mühe aufwenden, um den Zweifler mit allerlei Überredungskünsten und geistreichen Gedankenexperimenten zum Nachgeben zu bewegen. Zunächst rettet er jedoch Galileis Behauptung nur als passende Modellannahme (Abduktion im Sinne von Peirce; vgl. etwa [Nöth 2000, 67–70]):

Sollte sich zeigen, dass die später zu besprechenden Erscheinungen mit der Bewegung der [gleichförmig] beschleunigt fallenden Körper übereinstimmen, so werden wir annehmen dürfen, dass unsere Definition den Fall der schweren Körper umfasst und dass es wahr sei, dass ihre Beschleunigung proportional der Zeit sei, so lange die Bewegung andauert.

(Später kommt dann der berühmte Bericht über Experimente mit schiefen Ebenen, siehe [Galilei 1995, 162 f.])

Sagredo gibt klein bei, verfällt aber sofort auf einen naheliegenden Irrtum:²

Einförmig beschleunigte Bewegung ist eine solche, bei welcher die Geschwindigkeit wächst proportional der zurückgelegten Strecke ...

Wäre dem so, argumentiert Salviati, dann würde die doppelte Strecke in derselben Zeit durchfallen. Sagredo gibt sich in der Sache geschlagen, aber nicht aufgeklärt und äußert ein psychologisch-didaktisches Veto:

Mit zu viel Evidenz und Gewandtheit erklärt ihr uns die verborgensten Dinge; diese Fertigkeit macht, dass wir die Erkenntnis weniger schätzen, als wir damals zu thun glaub-

¹ [Galilei 1995, 147 f.]

² [Galilei 1995, 153]

ten, als wir noch der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils huldigten. Die mit wenig Mühe errungenen allgemeinen Kenntnisse würdigt man wenig im Vergleich zu denen, die mit langen unerklärlichen Vorstellungen umgeben sind.

Salviati reagiert als Sachwalter der neuen Klarheit auf diesen antiwissenschaftlichen Affront geradezu beleidigt und bewegt damit Sagredo so erfolgreich zum Nachgeben, dass er ihm und seinem „Autor“ auch gleich noch die folgende „Voraussetzung als wahr“ zugibt:

Die Geschwindigkeitswerte, welche ein und derselbe Körper bei verschiedenen Neigungen einer Ebene erlangt, sind einander gleich, wenn die Höhen dieser Ebenen einander gleich sind.

Salviati lenkt nun seinerseits großmütig ein und untermauert das schon akzeptierte Axiom über die alles entscheidende Höhendifferenz noch zusätzlich (abduktiv) mit Gedankenexperimenten am verkürzten Fadenpendel AB (Abb. 1): Ob der Pendelkörper um A , E oder F schwinde, der Schwung aus der Geschwindigkeit in B reiche jedes Mal aus, um (fast) wieder auf das Niveau CD zu steigen. Die reine Niveauabhängigkeit sei damit zwar nur für Kreisbögen zwingend demonstriert, lasse sich aber auch für gerade Bahnen durch experimentelle Bestätigungen für theoretische Folgerungen erhärten.

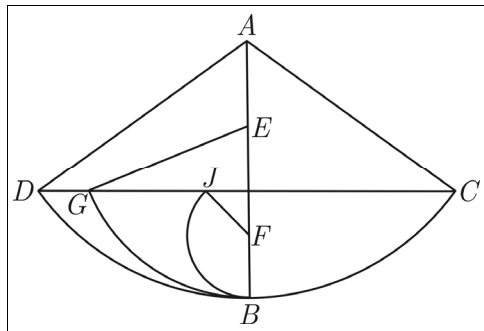


Abb. 1: verkürztes Fadenpendel
(nach [Galilei 1995, 164])

Sagredo, Salviati und Simplicio, der dritte Gesprächspartner, reden in unserem Zusammenhang nur über gerade und kreisförmige Bahnen, aber dieselbe Argumentationslinie zeigt ganz allgemein (Abb. 2), warum ein Körper, der allein unter Schwerkraftwirkung von einem Start aus C , G oder J zu einem Punkt B schwingt, fällt oder gleitet, ganz unabhängig von seiner Bahn und nur aufgrund der Höhendifferenz denselben Endgeschwindigkeitsbetrag erreicht. Der Kern von Galileis Hauptargument war (nach heutiger Deutung): Andernfalls könnte man ein Perpetuum mobile bauen, indem man auf dem ergiebigeren Weg, der die größere Geschwindigkeit erzeuge, hinab gleiten oder schwingen und auf dem anderen – sogar ein Stück höher – hinauf, so dass der Überschuss bei guter Schmierung allemal reichen würde, etwaige Reibungsverluste wettzumachen.

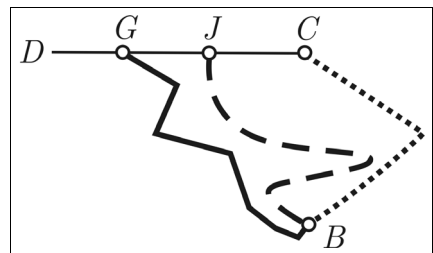


Abb. 2: Abhängigkeit der Endgeschwindigkeit in B nur von der Höhendifferenz

Galilei leitet anschließend mit geometrischen Proportionalitäten, die ohne die damals noch bedeutungslose, scheinbar irrelevante Proportionalitätskonstante g auskommen, sinngemäß Folgendes her (in heutiger Schreibweise): Der Schwung in B stammt nach Voraussetzung nur aus der Erdanziehung, und die Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mv_{CB}^2$ nach dem Gleiten oder Fallen von Punkt C (oder irgendeinem anderen Startpunkt auf CD) nach Punkt B ist die verwandelte Lageenergie $m \cdot g \cdot \Delta h_{CB}$, wobei Δh_{CB} den Höhenunterschied bezeichnet. Damit gilt

$$(1) \quad v_B = \sqrt{2g \cdot \Delta h_{CB}},$$

egal auf welcher Bahn und mit welchem Ziel der ideale Gleiter von CD reibungsfrei nach B gelenkt wurde.

2 Drei Anwendungsbeispiele zur Gleitgeschwindigkeit

Die geschilderte Passage betont das Wegeproblem und bereitet damit elegant vor, was Galilei weiters im Schilde führt: Er will die Wechselbeziehungen zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeiten möglichst umfassend studieren. Die verblüffende Irrelevanz der Bahnform,³

vorausgesetzt immer, dass alle zufälligen und äußeren Störungen fortgeräumt seien, und dass die Ebenen durchaus fest und glatt seien, und der Körper von vollkommenster Rundung sei, kurz Körper und Ebene frei von jeder Rauigkeit seien[.]

dient ihm als Motor. Ganz im Sinne von Sagredos psychologischem Veto sei zunächst die Leistungsfähigkeit der Endgeschwindigkeitsformel (1) anhand von drei „großformatigen“ Anwendungsbeispielen aus dem heutigen Medienalltag demonstriert.

Aufgabe 1

Der „Schanzentisch“, d. h. das letzte gerade Bahnstück, der weltgrößten Flugschanze in Planica fällt mit einem Neigungswinkel von $10,5^\circ$ ab, und die Anlaufbahn von der höchsten Luke bis zum Ende des Schanzen­tischs ist rund 100 m hoch. Wie hoch fliegt ein idealer Gleiter (der völlig ohne Reibungs-, Wind- und Bewegungsenergieverluste springt) über den sog. K -Punkt der Schanze (s. Anhang 2), der sich 157,73 m seitlich und 96,93 m unterhalb der Schanzentischkante befindet? Wie hoch fliegt der Gleiter über dem K -Punkt, wenn aus einer 95 m hohen Luke gestartet wird?

Lösung: Nachdem der Gleiter den Schanzentisch mit der Geschwindigkeit v_0 verlassen hat, wirkt die Schwerkraft nur noch in vertikaler Richtung, d. h., die horizontale Bewegung vollzieht sich, als würde v_0 ungestört erhalten bleiben, und zur

³ [Galilei 1995, 155]

vertikalen Bewegung mit v_0 kommt die freie Fallstrecke $s = -\frac{1}{2}gt^2$. Damit gelten für die Flugzeit t_K , bis sich der Springer genau über dem kritischen Punkt befindet,

$$157,73 \text{ m} = x(t_K) = t_K \cdot v_0 \cdot \cos 10,5^\circ \approx t_K \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m}} \cdot 0,9833 \approx t_K \cdot 43,55 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t_K \approx 3,62 \text{ s} \quad \text{und folglich} \quad 96,93 \text{ m} - t_K \cdot v_0 \cdot \sin 10,5^\circ - \frac{1}{2}gt_K^2 \approx 3,35 \text{ m}.$$

Unser „Galilei-Adler“ befindet sich also noch gut 3 m über dem kritischen Punkt, wenn er 100 m über der Tischkante startet. Eine entsprechende Rechnung für 95 m gibt $t_K \approx 3,72 \text{ s}$ und Aufsprung in K .

Aufgabe 2

Die Schanzentischkante der Planica-Schanze liegt 2 m über dem Schanzenhügel. Nehmen Sie an, dieser Hügel beginne unter der Kante parallel zum Schanzentisch und verlaufe dann aus Sicherheitsgründen parabolisch durch den K -Punkt. Wo und unter welchem Winkel landet der „Galilei-Adler“ von Aufgabe 1, und wie weit ist er geflogen?

Lösung: Die horizontale x -Achse eines Koordinatensystems verlaufe durch den K -Punkt, und das Ende des Schanzentisches befinde sich auf der y -Achse (Abb. 3).

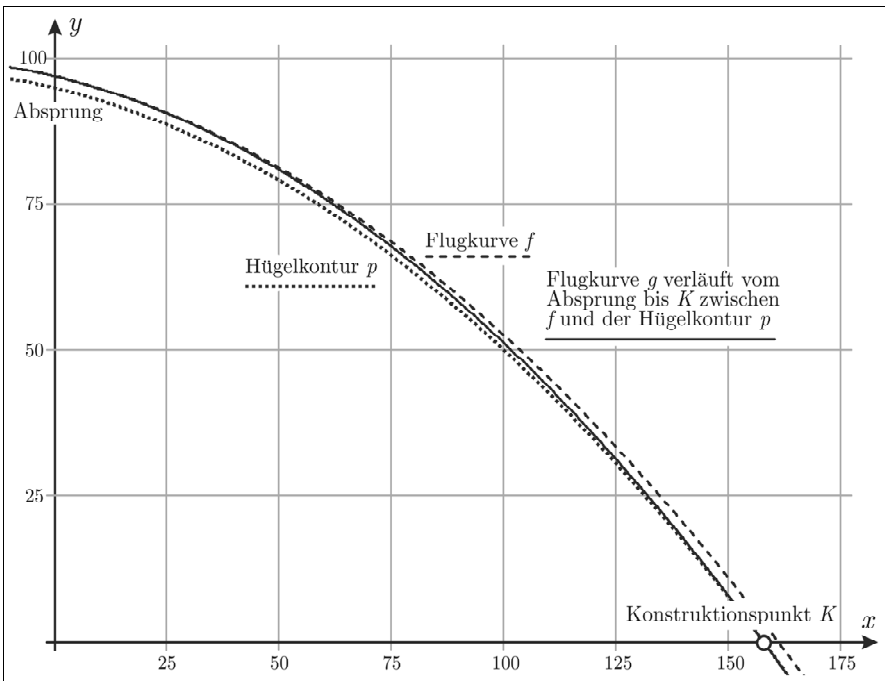


Abb. 3: Schanzenhügel und Flugkurven

Mit $f(x)$ sei die Flughöhe bei Start aus einer 100-m-Luke, mit $g(x)$ die Flughöhe bei Start aus einer 95-m-Luke und mit $p(x)$ die Hügelkontur bezeichnet – alle Höhen über dem K -Punkt in Metern gemessen und x als horizontaler Abstand in Metern vom Schanzentisch. Jeder Sprung beginnt demnach in $(0 \mid 96,93)$.

Wegen der Bedingungen für $f(0)$ und $f'(0)$ hat f eine Gleichung der Form

$$f(x) = ax^2 - (\tan 10,5^\circ) \cdot x + 96,93.$$

Nach Aufgabe 1 ist $f(x_K) = 3,35$, daher ergibt sich a aus $f(157,73) = 3,35$ zu

$$a \approx -0,0025864.$$

Beim Start aus der 95-m-Luke ergibt sich die Flughöhenfunktion analog zu

$$g(x) = b \cdot x^2 - (\tan 10,5^\circ) \cdot x + 96,93 \quad \text{mit} \quad b \approx -0,0027211.$$

Die Hügelkontur lautet

$$p(x) = -0,0026407x^2 - (\tan 10,5^\circ) \cdot x + 94,93.$$

Der Aufsprung im Fall der 95-m-Luke liegt nach Aufgabe 1 in K , also können aus den dortigen Ableitungswerten die Gefälle von p und g in K sowie eine Winkeldifferenz von rund $0,7^\circ$ als Aufsprungswinkel berechnet werden. Im Fall des Starts aus der 100-m-Luke erhält man gar keinen Schnittpunkt von f mit p , d. h., der (reibungsfreie und punktförmige) Springer würde niemals auf dem parabolischen Hügelteil landen.

Bemerkung: Anders als beim Leichtathletik-Weitsprung geben die Skispringer ihre Weiten als Längen der Flugkurven gemäß Video-Messung an – das macht mehr Eindruck. Für die Flugweite beim Start aus der 95-m-Luke müsste dafür die Länge des Parabelbogens g zwischen Schanzenkante und K berechnet werden. DERIVE™ liefert für das Bogenlängenintegral

$$\int_0^{157,73} \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$$

den Näherungswert 188, d. h., die Flugweite bis zum kritischen Punkt betrüge für den reibungsfreien „Galilei-Adler“ 188 m. Das FIS-Zertifikat für die Planica-Schanze gibt übrigens 185 m als Flugweite bis K an. Unsere Rechnung war also – trotz der Reibungs- und Torsionsignoranz – erstaunlich realistisch.

Aufgabe 3

Die Anlaufspur der Willinger Schanze, die zu den größten Normalschanzen der Welt gehört, erstreckt sich von der obersten Luke 50,7 m nach unten und 92,9 m nach vorn bis zum Ende des Schanzentischs. Die Spur besteht aus zwei ebenen Bahnen, zwischen denen ein Kreisbogen vermittelt. Das erste Geradenstück aus Edelstahl führt um 46,1 m nach vorn und fällt dabei um 32,3 m (Genauerer in [Böer & Führer 2004]).

Wie lange braucht ein klitzekleiner Skispringer auf der vereisten Willinger Schanze, d. h. ohne Gleitreibung, ohne Eigenbewegungen und ohne Luftwiderstand, von der obersten Luke C bis zum Beginn B des Übergangsbogens vor dem Schanzentisch?

Lösung: Die Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit proportional zu, so dass von der Startluke $C(0 \mid 50,7)$ bis zum Übergangsbogen ab $B(46,1 \mid 18,4)$ im Mittel die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{CB} = \frac{|CB|}{t_{CB}}$$

eingehalten wurde. Daraus erhält man die Gleitzeit

$$(2) \quad t_{CB} = \frac{2 \cdot |CB|}{\sqrt{2g \cdot \Delta h_{CB}}}.$$

Bei der Willinger Schanze ist $|CB| \approx 46,45$ m. So erhält man $t_{CB} \approx 3,7$ s.

3 Das Isochronenproblem

Wie man Derartiges rechnet, wusste auch Galilei, er drückte es nur anders aus. Im Gegensatz zu heutigen Normalschülern war der Meister aber mit dieser Aufgabe noch bei weitem nicht fertig. Er war nämlich ein großer Fan des „operativen Prinzips“ – 300 Jahre bevor man es erfand – und fragte sich demgemäß: Was passiert, wenn man die Lage von B verändert? Wie ist es beispielsweise möglich, andere Punkte B zu finden, für die dieselbe Gleitzeit gebraucht wird? Später hieß eine derartige Frage „Isochronenproblem“.

Aufgabe 4

Gibt es Punkte B^* , für die von C dieselbe Gleitzeit auf geradem Weg gebraucht wird wie von C nach B ? Hinweis: Es gibt viele Lösungen. Probieren Sie, einige mit einem sog. „Dynamischen Geometrie-System“ (DGS) zu finden und daraus auf die Kurve, die „Isochrone“, zu schließen, auf der alle diese Punkte liegen.

*Galileis Lösung:*⁴ Man stelle sich CB geeignet gedreht und gestreckt vor (Abb. 4).

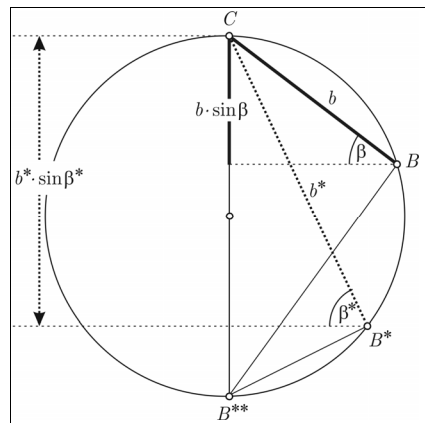


Abb. 4: Gleiche Gleitzeiten am Kreis (frei nach Galilei)

⁴ [Galilei 1995, 172 ff.]

Mit den (heutigen) Bezeichnungen (siehe Abb. 4) soll nach (2) gelten

$$t_B = \frac{2b}{\sqrt{2g \cdot b \cdot \sin \beta}} = t_{B^*} = \frac{2b^*}{\sqrt{2g \cdot b^* \cdot \sin \beta^*}}.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{b^*}{\sin \beta^*}$$

ist. Für Kenner der Sehnenrechnung des Ptolemaios, von der unsere heutige Trigonometrie abstammt, war die letzte Gleichung sehr geläufig: Es handelt sich um eine charakteristische Eigenschaft für Kreissehnen! Unsere Strecken b , b^* müssen Sehnen desselben Kreises mit „Nordpol“ C und „Südpol“ B^{**} sein, wobei B^{**} natürlich senkrecht zu b auf der Vertikalen liegt. Wir können es nach Galilei so einsehen:

Ergänzt man CB so zu einem Kreis, dass b Sehne und C oberster Punkt eines vertikalen Durchmessers $2r$ wird, dann gelten nach dem Kathetensatz

$$b^2 = 2r \cdot b \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad b^{*2} = 2r \cdot b^* \cdot \sin \beta^*.$$

Die entscheidenden Quotienten sind also konstant gleich $2r$.

So liest sich das Ergebnis bei Galilei:⁵

Wenn von dem höchsten Punkte oder von dem Gipfel eines Kreises nach dem Horizonte hin geneigte Ebenen bis zur Kreisperipherie errichtet werden, so sind die Fallzeiten längs derselben einander gleich [...]. Auch folgt, dass, wenn von einem Punkte eine senkrechte und eine geneigte Ebene sich hinab erstrecken, längs welcher die Fallzeiten gleich groß seien, alle solche Strecken in einem Halbkreis liegen, dessen Durchmesser die lotrechte Fallstrecke selbst ist.

Er fügt auch gleich noch eine Entdeckung hinzu: Da in Abb. 5 die Fallzeit von D nach F gleich der des freien Falls von D nach C ist, kann man dasselbe Argument auf die gegenüber liegende Sehne EC anwenden, man wähle nur E als Nordpol eines kongruenten Kreises. Folglich braucht man von E nach C auf gerader Rinne auch dieselbe Zeit wie beim freien Fall von D nach C .

Galilei war von diesen genialen Entdeckungen begeistert und feierte sie mit einem Scherzo gracioso (s. Anhang 1), in dem er seinen Gesprächspartnern Sagredo und Simplicio gewagte Analogien in den Mund legte, Analogien zur Ausbreitung von Wellenfronten und sogar zur Erschaffung der Welt in Kugelform.

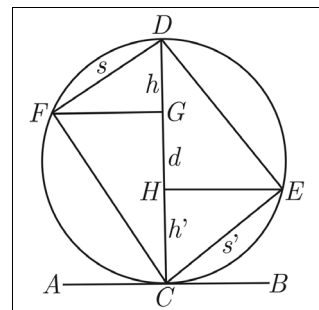


Abb. 5:
nach [Galilei 1995, 173];
die kleinen Buchstaben
wurden zusätzlich ergänzt

⁵ [Galilei 1995, 171 f. und 174] – in den dortigen Abbildungen sind leider die großen Buchstaben in wechselnden Bedeutungen benutzt.

4 Galileis falsche Brachistochrone

Dass Galilei so stark an Fallbewegungen auf schiefen Ebenen und in Kreisbögen interessiert war, hatte natürlich nichts mit Skispringern zu tun. Ihm ging es, wie vielen Gelehrten im 17. Jh., darum, die Ganggenauigkeit von Uhren so zu verbessern, dass die geografische Längenbestimmung auf hoher See möglich würde (vgl. z. B. [Sobel 1999]). Die genauesten Uhren waren damals Pendeluhr, und deshalb kam viel darauf an, das Weg-Zeit-Gesetz für den Pendel-Kopf in den Griff zu bekommen. Was Wunder, dass Galilei nicht locker ließ und schließlich mit einem gewaltigen Paukenschlag den dritten Tag der „Unterredungen“ beendete (Abb. 6).

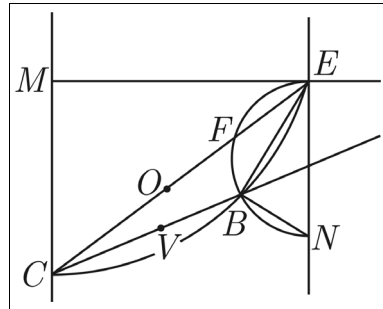


Abb. 6: nach einem Ausschnitt aus [Galilei 1995, 212];
Bezeichnung E statt D wie in Abb. 5

Der (für Pendelbewegungen charakteristische) Kreisbogen zwischen E und C , sagt sein Theorem 22, Proposition 36 (S. 212), werde schneller durchglichen als jeder Streckenzug von E nach C .

Aufgabe 5

Zeigen Sie experimentell mit dem DGS-Zugmodus oder rechnerisch mittels Zahlenbeispielen, dass der Fallweg gemäß Abb. 6 von E über B nach C schneller ist als der „direkte“ Weg von E nach C .

Galileis Lösung und Verallgemeinerung (Abb. 7, nächste Seite):

Wir geben hier nur die elegante Beweisidee des Meisters wieder, ohne auf die Rolle gewisser mittlerer Proportionalen (Punkte O und V in Abb. 6) einzugehen: Man übertrage die Fallzeit zwischen E und B auf EC . Dann ist $t_{EF} = t_{EB}$, d. h., bis F ist schon die Zeit t_{EB} verstrichen. Bei B ist aber wegen des Gefälles die Geschwindigkeit deutlich höher als bei F , obwohl es von F nach C weiter als von B nach C ist. Daher ist der Fall auf dem Streckenzug von E über B nach C rascher beendet als der direkte Fall längs EC . Jeder Umweg über weitere Teilpunkte des Kreisbogens zwischen E und C macht alles noch schneller als auf dem Streckenzug DBC :

Wenn die Strecken allein unter Wirkung der Schwerkraft und alle Ecken ohne Geschwindigkeitsverlust durchfallen werden, folgt nach Abb. 7

$$t_a > t_{a'} + t_d \quad \text{und} \quad t_d > t_d' + t_e$$

also

$$t_{a'} + t_d > t_{a'} + t_d' + t_e.$$

So kann man es für alle noch so feinen Sehnenzüge von A nach C zeigen, und folglich geht es auf dem Kreisbogen von A nach C am schnellsten.

Dem folgt ein stolzer, leider etwas voreiliger Zusatz Galileis ([Galilei 1995, 213]):

Aus dem Vorangehenden kann erschlossen werden, dass die schnellste Bewegung von einem Punkte zu einem anderen nicht längs der kürzesten Linie, der geraden, zu Stande komme, sondern längs des Kreisbogens.

Galilei hatte von vorneherein nur Geraden und Kreisbögen in Betracht gezogen – und dafür stimmt seine Bemerkung. Lässt man auch andere Kurven zu – und in der Natur des „Brachistochronenproblems“, d. h. der Suche nach der Gleitkurve mit kürzester Fallzeit, sind keine Formbeschränkungen gegeben –, dann muss Galileis hier ganz uneingeschränkte Behauptung als falsch gelten (vgl. Aufgabe 6 auf der nächsten Seite):

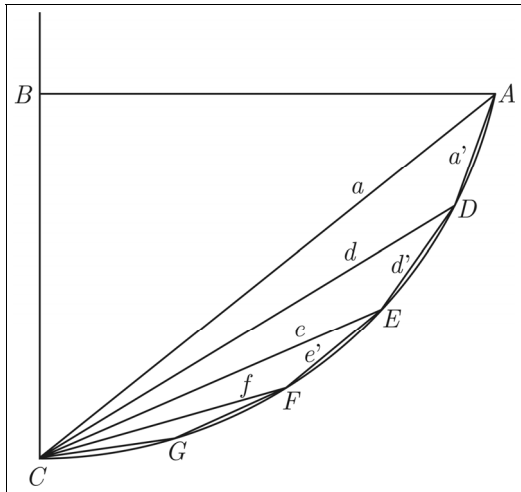


Abb. 7: nach [Galilei 1995, 214];
kleine Buchstaben ergänzt



Abb. 8: Modell der Brachistochrone; 3. Viertel des 17. Jhs.; Holz, Messing, Elfenbein⁶

⁶ Siehe „Brachistochrone“ in den Internetquellen nach dem Literaturverzeichnis.

Aufgabe 6

Zeigen Sie mit einer einfach geknickten Bahn APC , dass es auf so einer Bahn allein unter Schwerkrafteinfluss schneller von A nach C gehen kann als auf einem Sehnenzug des Typs $ADEC$.

Lösung: Wählt man P wie in Abb. 9 unterhalb von C – und das kam Galilei offenbar nicht in den Sinn –, dann wird möglicherweise längs des steilen Weges AP genug Geschwindigkeit aufgenommen, um das Flachstück PC noch schnell genug zu durchgleiten.

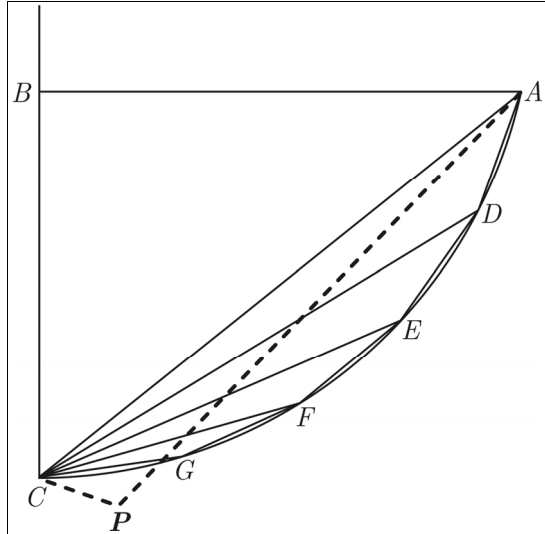


Abb. 9: Es geht auch schneller, wenn man Galileis Zeichnung um APC ergänzt!

Die Fallzeiten auf geradem Weg von A nach C bzw. D kann man direkt nach Gleichung (2) berechnen. Für die anderen Fallzeiten, bei denen der Gleiter schon am Streckenanfang in Bewegung ist, argumentiert man mit Hilfe von Gleichung (1) nach der Lösungsidee von Aufgabe 1:

Die jeweiligen Endgeschwindigkeiten sind $v_P = \sqrt{2g \cdot \Delta h_{AP}}$ und – unabhängig von der Richtung! – $v_C = \sqrt{2g \cdot \Delta h_{AC}}$. Ihr arithmetisches Mittel ist die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\bar{v}_{PC} = \frac{v_P + v_A}{2} = \frac{|PC|}{t_{PC}}$$

längs PC , so dass von A über P nach C insgesamt die Zeit

$$(3) \quad t_{APC} = t_{AP} + t_{PC} = \frac{2 \cdot |AP|}{v_A} + \frac{2 \cdot |PC|}{v_P + v_A}$$

benötigt wird. Und anhand dieser Formel lässt sich auch die Fallzeit für $ADEC$ berechnen. Am besten lässt man das von einem DGS erledigen, damit man P noch in eine passende oder sogar optimale Lage bringen und den Sehnenzug auch noch ausbauen kann. Abb. 10 zeigt eine entsprechende Zeichnung mit GEONEXT⁷. (In der DGS-Vorlage können die benannten Punkte experimentell verschoben werden,

⁷ Dieses DGS, das auch einige Algebrafunktionen enthält, lässt sich kostenlos unter <http://www.geonext.de> herunterladen. Ein anderes, ebenso geeignetes und kostenlos verfügbares DGS mit Algebrafunktionen bekommt man unter <http://www.geogebra.de>.

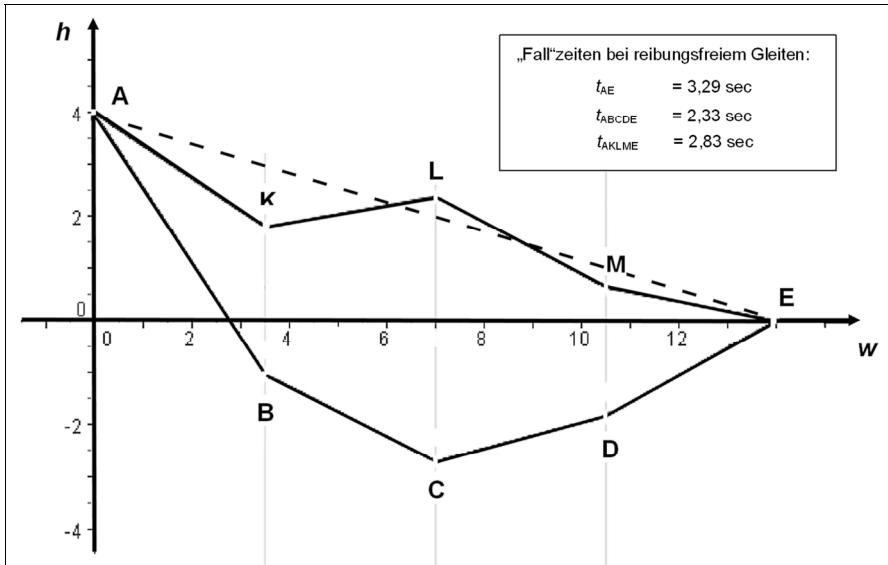


Abb. 10: Laufzeiten auf unterschiedlichen Streckenzügen, modelliert mit GEONEXT

um bessere Bahnformen herauszufinden. Die entsprechenden Laufzeiten für das (reibungsfreie) Herabgleiten werden jeweils automatisch angezeigt.) Wegen der Knickstellen ist damit Galileis Behauptung, dass der Kreisbogen die „Brachistochrone“, d. h. die Bahn für den schnellsten Fall von A nach B liefere, noch nicht ganz widerlegt, aber sie ist tatsächlich falsch.

Hier die Korrekturgeschichte in einer Kurzform des Wissenschaftshistorikers und Philosophen Alexandre Koyré:⁸

Da die Zeiten des Fallens längs allen Kreissehnen gleich sind und die Bewegung längs des Kreisbogens schneller ist als längs der Sehne, war die Annahme für Galilei vernünftig, dass der Fall längs des Bogens der schnellstmögliche [...] sei. Dass dies nicht der Fall ist, entdeckten Mersenne experimentell 1644 und Huygens theoretisch, der 1657 bewies, dass die „tautochrone“ Falllinie zyklloid und nicht kreisförmig ist (die gleiche Entdeckung machte unabhängig davon Lord Brouncker 1662). Dass die zyklloide Linie zugleich die Kurve des schnellsten Falles ist („brachistochron“), bewiesen J. Bernoulli 1696 und unabhängig davon – auf Bernoullis Herausforderung antwortend – Leibniz, L’Hospital und Newton.

Auch für eine faire Beurteilung von Galileis Fehler empfiehlt sich ein Zitat aus [Koyré 1998, 160]:

Man kann die Tiefe von Galileis Denken, die sich selbst noch bei seinem Irrtum zeigt, nur bewundern. Die Pendelschwingungen sind natürlich nicht isochron, und der Kreis ist

⁸ [Koyré 1998, 178]

nicht die Linie der schnellsten Schwingungsbewegung. Aber, um die Begriffe des achtzehnten Jahrhunderts zu benutzen, so hat Galilei erkannt, dass die „brachistochrone“ Kurve und die Kurve, auf der [das Pendel geführt werden muss, damit] die Schwingungen in der gleichen Zeit ausgeführt werden, die „tautochrone“, die gleiche Linie sind.

Es ist ziemlich merkwürdig, dass Galilei, der die Isochronie des Pendels – die eigentliche Grundlage aller modernen Zeitmessung – entdeckt hat, zwar mit ihrer Hilfe ein Chronometer zu schaffen und sogar eine mechanische Pendeluhr zu konstruieren versuchte, sie [die Isochronie des Pendels] aber nie bei seinen eigenen Experimenten benutzte.

Wie man die richtige „Brachistochrone“ fand, wird im folgenden Abschnitt grob skizziert. In [Pesch 2002] kann man sehr eindrucksvoll sehen, dass das Brachistochronenproblem alles andere als ein alter Hut ist: Zeitoptimale Raumkurven sind inzwischen z. B. für das Flugwesen oder für Robotersteuerungen fundamental geworden.

5 Vom Fermat-Prinzip zur richtigen Brachistochrone

Die Differentialrechnung wurde in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts nicht dazu erfunden, Extrema genau zu berechnen. Das konnten die europäischen Spitzenmathematiker schon 50 Jahre früher, nachdem Kepler an Planetenbahnen bemerkt hatte, dass sich Extremwerte in ihrer Nähe nur unmerklich abschwächen, dass man also – in heutiger Ausdrucksweise – x_E für praktische Zwecke nicht genau bestimmen muss.

Eine der berühmten frühen Anwendungen war Fermats Untersuchung der Lichtbrechung von 1658. Snellius hatte vierzig Jahre zuvor herausgefunden, dass Lichtstrahlen beim Übergang von einem homogenen Medium in ein anderes an der Grenzfläche konstant nach $n := \sin \alpha : \sin \beta$ gebrochen werden. Indem Fermat Ideen Herons über den Zusammenhang von Stoffdichten und gebremsten Durchdringungsgeschwindigkeiten aufgriff, gelang es ihm, diesen „Brechungsindex“ n als Wunder zu verstehen.

Sein Gedankengang verlief etwa so (Abb. 11): Hat das Licht im Medium von A die konstante Geschwindigkeit v_A und im Medium von B die Geschwindigkeit v_B , dann gilt für den schnellsten Lichtweg ACB und einen eng benachbarten ADB , dass sich die Laufzeiten nur unmerklich unterscheiden. Von A bis D braucht ein Lichtstrahl genau so lange wie von A nach E (vgl. Galileis Idee zum Zeitvergleich auf Knickbahnen), und dann muss er auf dem schnellsten Lichtweg ACB noch das kleine Stück EC mit v_A bewältigen. Dafür ist der Vergleichsweg ADB im Medium von B etwas länger, nämlich um DF . Da sich die Laufzeiten in der Nähe des Optimalwegs ACB nicht merklich unterscheiden, muss

$$t_{EC} = \frac{EC}{v_A} \cong \frac{DF}{v_B} = t_{DF} \text{ sein, also } \frac{DC \cdot \sin \alpha'}{v_A} \cong \frac{DC \cdot \sin \beta}{v_B} \text{ und } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_A}{v_B} = n.$$

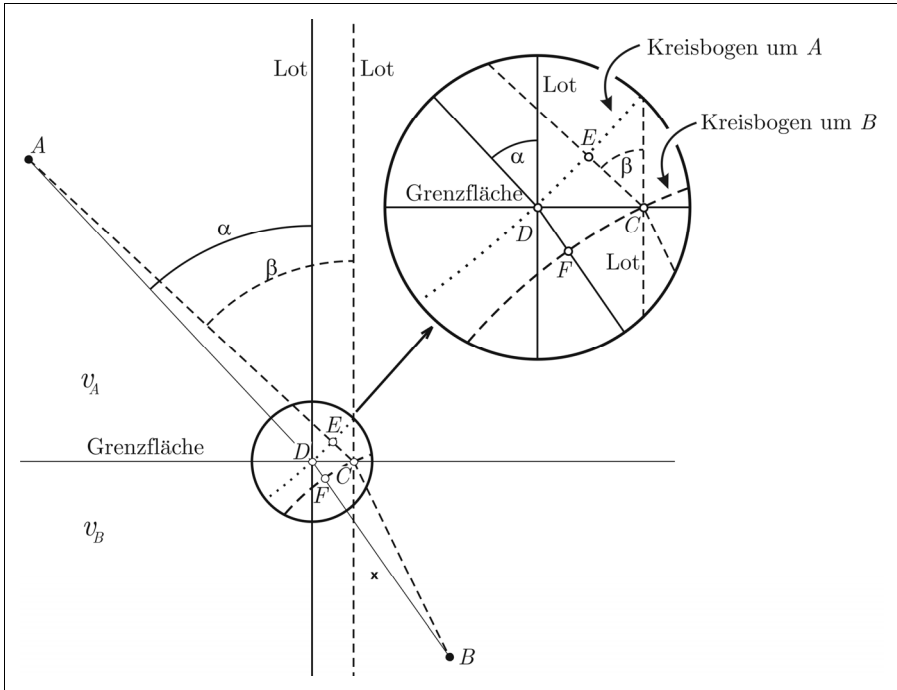


Abb. 11: zu Fermats Untersuchung der Lichtbrechung von 1658

Dabei ist unser Zeichen „ \cong “ im Sinne von „quasi gleich“ oder „unmerklich verschieden“ zu verstehen, und in diesem Näherungssinne wurden die Annahmen $\angle ADE \cong \angle AED \cong \angle BCF \cong \angle BFC \cong 90^\circ$ und $\alpha' \cong \alpha$ ohne Umschweife als Gleichheiten ausgenutzt, weil die Fehler bei genügend schmalen Lichtbündeln als unwesentlich bzw. unmerklich gelten durften. (Heute bestätigen das kleinkarierte Grenzwertkontrollen.)

Bei Ernst Mach findet sich diese Vorgeschichte ähnlich skizziert, und er fährt dann fort:⁹

Huygens hat bei seinen optischen Untersuchungen die Ideen von Fermat festgehalten und ausgebildet, indem er nicht nur geradlinige, sondern auch krummlinige Lichtbewegungen in Medien von kontinuierlich von Stelle zu Stelle variierender Lichtgeschwindigkeit betrachtet und auch für diese das Fermatsche Gesetz als gültig erkannt hat. In allen Lichtbewegungen schien sich somit bei aller Mannigfaltigkeit als Grundzug das Bestreben nach einem Minimum von Zeitaufwand auszusprechen.

[...] Den mächtigsten Anstoß erhielt die bezeichnete wissenschaftliche Bewegung [Extremwertaufgaben zu studieren, L. F.] durch das von Johann Bernoulli aufgestellte Prob-

⁹ [Mach 1976, 412 ff.]

lem der Brachistochrone. In einer Vertikalebene liegen zwei Punkte A, B . Es soll diejenige Kurve in dieser Ebene angegeben werden, durch welche ein Körper, der auf derselben zu bleiben gezwungen ist, in der kürzesten Zeit von A nach B fällt. Die Aufgabe wurde in sehr geistreicher Weise von Johann Bernoulli selbst, außerdem aber noch von Leibniz, L'Hôpital, Newton und Jakob Bernoulli gelöst.

Die merkwürdigste Lösung ist jene von Johann Bernoulli selbst. Er bemerkt, daß Aufgaben dieser Art zwar nicht für die Fallbewegung, wohl aber für die Lichtbewegung schon gelöst seien. Er denkt sich also die Fallbewegung in zweckmäßiger Weise durch eine Lichtbewegung ersetzt [...]. Die beiden Punkte A und B [...] sollen sich in einem Medium befinden, in welchem die Lichtgeschwindigkeit vertikal nach unten nach demselben Gesetz zunimmt wie die Fallgeschwindigkeit. Das Medium soll etwa aus horizontalen Schichten mit nach unten abnehmender Dichte bestehen, so daß $v = \sqrt{2gh}$ die Lichtgeschwindigkeit in einer Schicht bedeutet, welche in der Tiefe h unter A liegt. Ein Lichtstrahl, der bei dieser Anordnung von A nach B gelangt, beschreibt diesen Weg in der kürzesten Zeit und gibt zugleich die Kurve der kürzesten Fallzeit an.

Nach Fermats Zeitprinzip ist

$$\frac{\sin \alpha(x)}{v(x)} = \frac{\sin \alpha(x)}{\sqrt{2gh(x)}} =: c$$

eine Konstante. Ohne Brechungswinkel und ohne Wurzeln liest sich dasselbe so (Abb. 12):

$$c^2 = \frac{\left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta h)^2} \right)}{2gh(x)} = \frac{1}{2gh(x) \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta h}{\Delta x} \right)^2 \right)}$$

Kürzt man die vorkommenden Konstanten mit $k := 1/(2c^2g)$ ab, geht zum Grenzwert über und löst die Klammer auf, dann erhält man für die unbekannte Funktion $h(x)$ die Gleichung

$$h'(x) = \sqrt{\frac{k - h(x)}{h(x)}},$$

die sog. *Differentialgleichung der Brachistochrone*. Offenbar beginnt h in A vertikal. Man könnte die Form von h nach einer späteren Idee von Euler Schritt für Schritt erkunden, indem man von einem A' dicht unter A in kleinen Schritten erst $h'(x_{A_1})$ aus $y_{A'}$ statt $h(0)$, dann auf der Tangente von A' aus ein kleines Stück nach A_1 wandert, dort mit $h(x_{A_1}) := y_{A_1}$ das $h'(x_{A_1})$ berechnet und von der neuen Tangente von A_1 nach demselben Rezept weiter wandert.

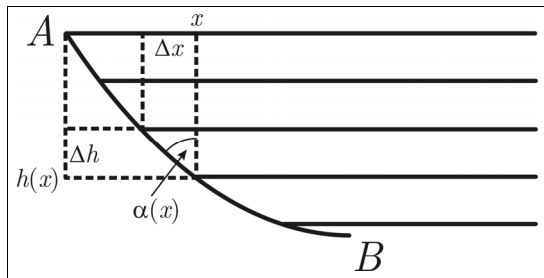


Abb. 12: Vorlage nach [Mach 1976, 413] mit eingezeichneten Steigungsdaten

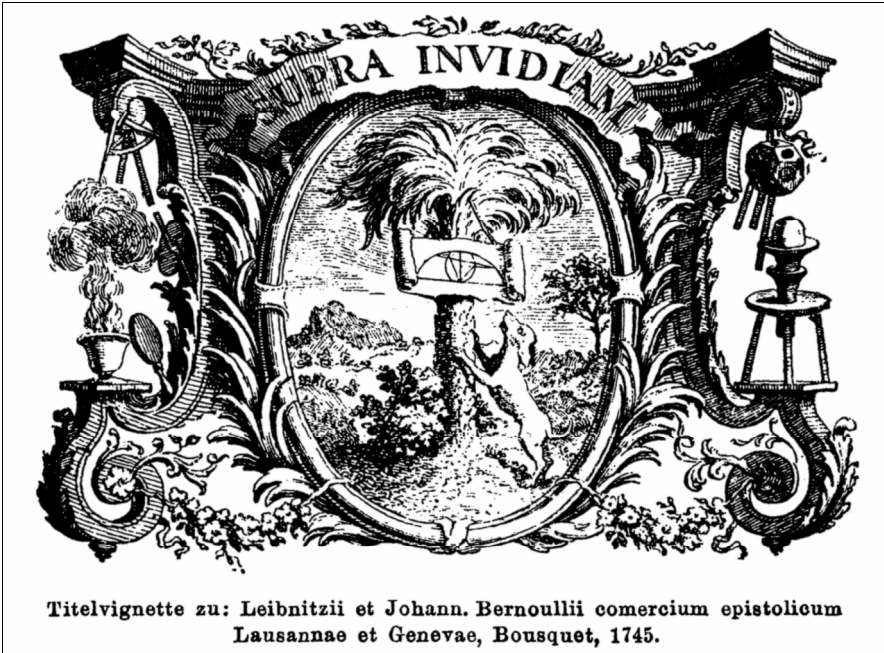


Abb. 13: aus [Mach 1976, 415]

Der historische Weg war anders. Fachleute wie die Bernoullis kannten viele Funktionen und deren Ableitungen, und eine dieser Funktionen hatte schon in Huygens' Untersuchungen zum Problem der Pendeluhr die Hauptrolle gespielt, die Zykloide, d. h. die Bahn eines Kreisrandpunktes beim Rollen. Sie passte in der Tat in die Differentialgleichung der Brachistochrone, und damit war – im Wesentlichen, d. h. der Lösungsidee nach – das Problem gelöst. Für Einzelheiten sei auf die einschlägige Literatur über Differentialgleichungen oder Kurven verwiesen, z. B. auf [Schupp & Dabrock 1995].

Wir wollen hier unsere Zeitreise mit einem weiteren Zitat des großen Ernst Mach beenden [Mach 1976, 414]:

Die Art, wie Johann Bernoulli, noch ohne alle Methode, bloß durch seine geometrische Phantasie die Aufgabe mit einem Blick löst und wie er das zufällig schon Bekannte hierbei zu benutzen weiß, ist wirklich bemerkenswert und wunderbar schön. Wir erkennen in Johann Bernoulli eine wahre, auf dem Gebiet der Naturwissenschaft tätige Künstlernatur. Sein Bruder Jakob Bernoulli war ein ganz anderer wissenschaftlicher Charakter. Ihm ward viel mehr Kritik, aber viel weniger schöpferische Phantasie zuteil. Auch Jakob Bernoulli löste dieselbe Aufgabe, wengleich in viel mehr schwerfälliger Weise. Dafür unterließ er aber nicht, die allgemeine Methode zur Behandlung dieser Klasse von Aufgaben mit großer Gründlichkeit zu entwickeln. Wir finden so in den beiden Brüdern die beiden Seiten des wissenschaftlichen Talents, welche sich in den größten Naturforschern, wie z. B. Newton, in ungewöhnlicher Stärke vereinigt finden, getrennt vor.

Literatur

- Böer, Heinz & Führer, Lutz [2004]: Die Skisprungszene — unnötige Belastungen für die Springer? In: *mathematik lehren*, Heft 125, 58–62.
- Galilei, Galileo [1995]: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. (Übersetzung der „Discorsi“ von 1638 von A. von Oettingen). Frankfurt am Main: Harry Deutsch.
- Gasser, Hans-Heini [1996/2001]: Grundlagen für die Projektierung einer Skisprungschanze — Ausführungsbestimmungen zu Art. 411 der IWO, Band III. Oberhofen (CH): FIS.
- Koyré, Alexandre [1998]: Leonardo, Galilei, Pascal — Die Anfänge der neuzeitlichen Naturwissenschaft. Frankfurt am Main: Fischer TB.
- Mach, Ernst [1976]: Die Mechanik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft (Reproduktion der 9 Auflage von 1933).
- Nöth, Winfried [2000]: Handbuch der Semiotik. Stuttgart: Metzler.
- Pesch, Hans Josef [2002]: Schlüsseltechnologie Mathematik — Einblicke in aktuelle Anwendungen der Mathematik. Stuttgart / Wiesbaden / Leipzig: Teubner.
- Schupp, Hans & Dabrock, Heinz [1995]: Höhere Kurven. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.
- Sobel, Dava [1999]: Längengrad. Berlin: Berlin Verlag.
- Stäckel, Paul (Hrsg.) [1976]: Variationsrechnung — Abhandlungen von Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Adrien Marie Legendre, Carl Gustav Jacobi. (Ostwalds Klassiker, Band 46–47) Nachdruck: Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.

Internetquellen

Brachistochrone (Stand: April 2005):

Abb. 8 entnommen aus <http://brunelleschi.imss.fi.it/catalogo/>. Dort der Reihe nach wählen: „Exhibition Areas“, „Room IV – Galileo Galilei“ und dann „Brachistochrone“. Das Modell stammt von Francesco Spighi, ausgestellt im Galilei-Museum in Florenz.

Daten der Schanzen in Planica und Willingen (Stand: April 2005):

<http://www.fis-ski.com/data/document/skijumpinghomologatedhills26-04-2004.pdf>

Design, Bezeichnungen und Vorschriften des Internationalen Ski-Verbandes FIS für Sprungschanzen (Stand: April 2005):

s. Internationale Wettkampfordnung der FIS

FIS: Internationale Skiwettkampfordnung (IWO) (Stand: April 2005)

<http://www.fis-ski.com/de/reglementeundpublikatione/skispringen/reglemente.html>

Kurzbiographien der erwähnten Mathematiker (Stand: April 2005):

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/>

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. [2002] The brachistochrone problem (Stand: April 2005):

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html>

Weitenmessung beim Skispringen (Stand: April 2005):

<http://skispringen.com.rtl.de/archiv/lexikon/w.htm>

Anhang 1:

Galileis „Scherzo gracioso“ (aus [Galilei 1995, 174–176])

Sagr. Unterbrechet, bitte, ein wenig den Vortrag, bis ich einen Gedanken geklärt habe, der mir soeben beikam und der entweder einen Irrthum birgt oder ein anmuthiges Spiel (scherzo grazioso), wie wir solchem so oft in der Natur oder in dem Gebiete der Nothwendigkeit begegnen.

Es ist klar, dass, wenn man von einem Punkte einer Horizontalen unendlich viele gerade Linien nach allen Richtungen hinzieht, auf denen allen ein Punkt mit gleicher Geschwindigkeit sich bewege, dass, im Falle alle in ein und demselben Augenblicke sich zu bewegen beginnen in dem genannten Punkte mit gleichen Geschwindigkeiten, alle diese Punkte stets immer wachsende Kreisperipherien bilden werden, die sämmtlich concentrisch um den Anfangspunkt herumliegen, ganz so, wie man Wellen im stehenden Wasser von einem Punkte aus sich ausbreiten sieht, nachdem aus der Höhe ein Steinchen hineingefallen war, dessen Stoss den Antrieb zur Bewegung nach allen Richtungen abgiebt, und dieser Punkt bleibt der Mittelpunkt aller Kreise, welche die kleinen Wellen in immer wachsendem Umfange bilden. Wenn wir aber eine Ebene senkrecht zum Horizont errichten, und in dieser irgend einen Punkt als höchsten annehmen, von welchem aus nach allen möglichen Richtungen geneigte Linien ausgehen, längs welchen Körper mit natürlich beschleunigter Bewegung mit dem einer jeden Neigung zukommenden Geschwindigkeitsbetrage fallen, in welcher Gestalt wären diese Körper geordnet, vorausgesetzt, dass sie stets sichtbar blieben? Das erregt mein Erstaunen, dass, den vorigen Erörterungen gemäss, alle Punkte auf immer wachsenden Kreisperipherien angeordnet bleiben werden, die sämmtlich immer mehr vom Anfangspunkte der Bewegung sich entfernen; zur deutlicheren Erklärung sei *A* [in Abb. 14] der höchste Punkt, von welchem aus die Körper nach beliebigen Richtungen *AF*, *AH* sich bewegen, und auch längs der Vertikalen *AB*, in welcher die Mittelpunkte

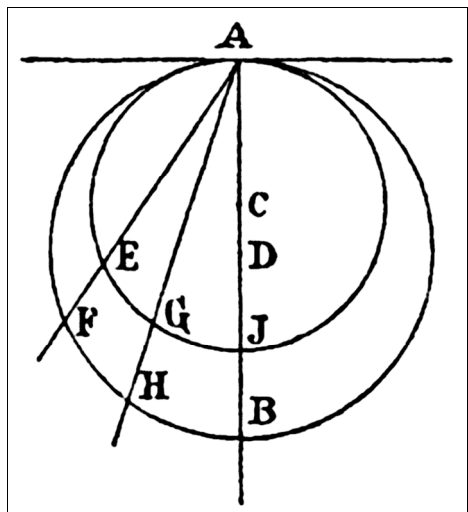


Abb. 14: Isochrone Flächen aus [Galilei 1995, 175]

C, D der beiden durch *A* gezogenen Kreise beliebig angenommen wurden, Kreise, welche die geneigten Linien in *FHB, EGJ* schneiden. Es ist nach den vorigen Sätzen klar, dass, wenn gleichzeitig von *A* aus Körper in jenen Richtungen sich bewegen, sie auch gleichzeitig der eine in *E*, der zweite in *G*, der dritte in *J* sein werden, und weiter fallend werden sie gleichzeitig in *F, H, B* eintreffen u. s. f. würden unendlich viel Körper auf immer grösser werdenden Peripherien gleichzeitig ankommen bis in die Unendlichkeit. Die beiden Arten von Bewegung also, deren die Natur sich bedient, erzeugen mit einer wunderbar correspondirenden Verschiedenheit unendlich viele Kreise. Dort sehen wir den Sitz und Ursprung im Mittelpunkt unendlich vieler concentrischer Kreise, hier findet am höchsten Punkt ein Contact unendlich vieler excentrischer Kreise statt. Jene entstehen aus gleichförmiger und gleicher Bewegung; diese aus lauter ungleichen Bewegungen, in jeder Richtung von der anderen verschieden. Ferner aber, wenn wir von den beiden genannten Punkten aus vier Linien ziehen, nicht bloß in einer vertikalen und horizontalen Ebene, sondern nach allen Richtungen des Raumes hin, so werden wir gerade so, wie vorhin von einem Punkte aus Kreise erzeugt wurden, jetzt unendlich viele Kugeln entstehen sehen, oder besser eine Kugel, die bis ins Unendliche anwächst. Und das zwar auf zweierlei Art, nämlich mit dem Anfangspunkt der Bewegung im Centrum oder in der Peripherie aller Kugeln.

Salv. Das ist fürwahr ein sehr schöner Gedanke, der dem Scharfsinn des Herrn *Sagredo* entspricht.

Simpl. Ich habe völlig den Gedanken erfasst in Betreff der beiden Arten, wie die Kreise oder Kugeln erzeugt werden, entsprechend den beiden Arten natürlicher Bewegung, obwohl ich die Entstehung der Kreise bei der beschleunigten Bewegung nicht ganz verstanden habe; immerhin will mir der Umstand, dass sowohl das Centrum wie der Gipfel Ausgangspunkt der Bewegung sein könne, die Vermuthung erwecken, dass ein grosses Mysterium in diesen wahren und wunderbaren Sätzen verborgen sei; ich meine ein Mysterium hinsichtlich der Erschaffung der Welt, – welch letztere man für eine Kugel hält, und hinsichtlich der ersten Ursache.

Salv. Ich stehe nicht an, ebendasselbe zu vermuthen, allein ähnliche tiefe Betrachtungen knüpfen sich an viele und an höhere Lehren an, als die unserigen es sind. Uns muss es genügen, dass wir jene weniger erhabenen Werkleute sind, die aus dem Schachte den Marmor hervorsuchen und herbeischaffen, aus welchem später die genialen Bildhauer Wunderwerke erzeugen, die unter rauher ungeformter Hülle verborgen lagen. Setzen wir nun, wenns beliebt, den Vortrag fort.

Anhang 2: Der K -Punkt einer Sprungschanze

Der Konstruktionspunkt K , früher auch „kritischer Punkt“ genannt, ist der wichtigste Punkt einer Sprungschanzenanlage. Er liegt etwa in der Mitte der schwach gewölbten Aufsprungzone, die den Hügel unter dem Schanzentisch, den sog. Schanzenvorbau, mit dem Übergangsbogen zum Auslauf hin verbindet. Der K -Punkt definiert die Bewertung der Sprungweite: Wer im K -Punkt aufspringt, bekommt auf Normalschanzen 60 Wertungspunkte, auf Flugschanzen 120. Kürzere Sprünge bekommen Punktabzüge, weitere Punktzuschläge.

Konstruktive Bedeutung hat der K -Punkt insofern, als er die Größe der Schanze charakterisiert. Anders als beim Leichtathletik-Weitsprung werden die Weiten beim Skispringen nicht horizontal, sondern längs der (idealen) Flugkurve zwischen Schanzentischkante und Aufsprung bestimmt. Zum Konstruktionspunkt gehört (theoretisch) die Weite w , die die Schanze insofern charakterisiert, als ein Spitzenspringer bei „langsamem“ Anlauf, d. h. beim Start aus der höchsten Luke bei angemessenen Gleitbedingungen, im Durchschnitt auf den K -Punkt springt, nachdem er einen Flugbogen der Länge w durchflogen hat. Reale Flugkurven von Spitzenspringern sind näherungsweise mathematisierbar, nämlich durch ein System von vier nichtlinearen Differentialgleichungen, das nur numerisch lösbar ist. Die geometrischen Parameter einer Schanzenarchitektur werden deshalb vom internationalen Skiverband FIS in Form von Nomogrammen, neuerdings auch mithilfe eines Computerprogramms vorgeschrieben. Da sich die einschlägigen Bogenlängen nur geringfügig vom geraden Abstand zwischen Schanzentischkante und Aufsprungspunkt unterscheiden, wird oft nur dieser Abstand als Sprungweite bezeichnet (mit evtl. $\frac{1}{2}\%$ Aufschlag für den Bogen). Viel heikler ist die Bestimmung des realen Aufsprungspunktes. Bei internationalen Wettbewerben wird dafür Videomessung vorgeschrieben.

Das Aufsprungprofil muss aus Sicherheitsgründen so geformt sein, dass die Flugkurve des Springers nie zu hoch wird. In [Gasser 1996/2001] wird als realistisches Beispiel eine 90-m-Schanze ($w := 90$ m) aus den Terrainvorgaben $h/n := 0,55$ und $\beta := 34^\circ$ (Tangentensteigung bei K) entwickelt. Da $w \approx 1,005 \cdot \bar{w}$ ist, kann man daraus sofort die Koordinaten von K berechnen. Aus Nomogrammen erhält man folgende Werte: Um den Bogen vom Schanzentisch nach K durchfliegen zu können, braucht man an der Tischkante eine Absprunggeschwindigkeit v_0 von 29,3 m/s bei einer Tischneigung $\alpha := 10,5^\circ$. Da im Beispiel ein künstlicher Anlauf zu errichten ist („Anlaufurm“), wählt man für γ das maximal zulässige Gefälle von 35° , was für die Anlaufbahn nach Daten für Spitzen- und Normalspringer auf einen sinnvollen Wert von 88 m und eine Schanzentischlänge von 6,35 m führt. Der

Übergangsbogen hat dabei den Radius 90,3 m, so dass sich für die Gesamthöhe des Anlaufs von oberster Luke bis zur Schanzentischkante 66,45 m ergibt.

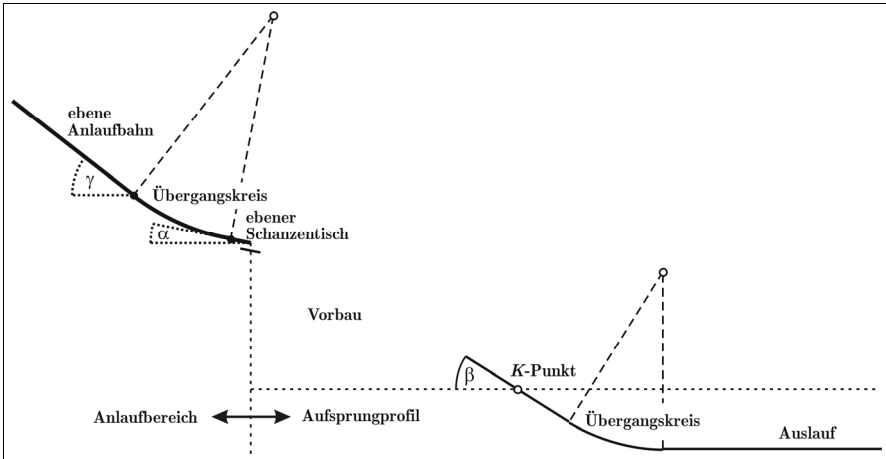


Abb. 15: Profil einer Schanzenanlage, stark vereinfacht nach [FIS-IWO 2005]

Für den Vorbau wird eine kubische Parabel gewählt:

$$f(x) := 40,91 - 0,10805x - 0,00747x^2 + 0,00002697x^3$$

Es wird versichert, dass ein Spitzenspringer damit beim Sprung nach K maximal 2,9 m über dem Vorbau fliegt. Ein einfacher Parabelansatz würde zeigen, dass ein Springer bei reibungsfreiem Sprung am Schanzentisch eine deutlich höhere Geschwindigkeit von 36,1 m/s hätte und erst unter $x = 114$ m auf dem von f gegebenen Profil landen würde. Die Flugbogenlänge betrüge dabei 137 m, während die gerade Entfernung zwischen Schanzentischkante und Aufsprung knapp 135 m wäre.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Lutz Führer
 Institut für Didaktik der Mathematik
 Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
 600054 Frankfurt
 E-Mail: fuehrer@math.uni-frankfurt.de