Kurvendiskussionen: Wirklich Diskussion von Kurven?

von

Günter Steinberg, Oldenburg

Kurzfassung: Im Analysisunterricht geht es bei „Kurvendiskussionen“ oft weniger um Kurven als um Funktionsgraphen, und statt einer Diskussion werden Berechnungen verlangt, um erlernte Kalküle einüben zu lassen. Im Beitrag wird an Beispielen gezeigt, dass es sinnvoll und möglich ist, den Blick auf Kurven unterschiedlicher Genese und Beschreibungsform zu lenken. Wie Erfahrungen zeigen, entfaltet sich dann die Motivation zu eigenständigen Fragen und kreativen Gesprächen. In solchen Diskussionen über Begriffe, Verfahren und Strategien wird die mathematische Kompetenz der Lernenden gefordert und gefördert.

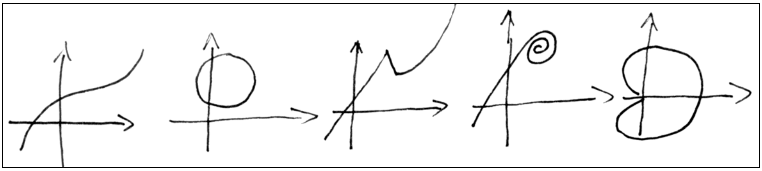
Abstract: In analysis lessons the expression „Kurvendiskussion“ is confusing because it often refers less to curves than to graphs of functions, and instead of a discussion there should be given calculations using rules to be acquainted with. By means of examples we show in this article that it is reasonable and possible to draw learners' attention to graphs having different genesis and forms. As we know from experience, in this way their motivation can be fostered by asking questions by themselves and discussing productively. Such discussions about concepts, methods and strategies also help to develop and strengthen the mathematical skill of learners.

1 Vorbemerkungen

Bei traditionellen „Kurvendiskussionen“ interessiert man sich für charakteristische Punkte eines Graphen, die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte, wobei vielfach die Tangenten in Nullstellen und in Wendepunkten eine sinnvolle Ergänzung liefern, um schließlich einen Überblick über den Funktionsgraphen zu gewinnen. Als Übungen und Lernkontrollen haben solche Aufgaben sicher Sinn. Sie sollten aber eher als „Funktionsuntersuchungen“ deklariert werden, denn zum einen sind Kurven mehr als nur Graphen von Funktionen (vgl. [Steinberg 1996]), und zum anderen stellt die rechnerische Durchführung eines Regelwerks keine Diskussion dar!

Einer meiner letzten Leistungskurse hatte den Auftrag, in wenigen Minuten in wenigen Zeilen der Frage nachzugehen: *„Was ist für Sie eine Kurve in der Ebene?“* Hier die Antworten der 15 Schülerinnen und Schüler (in fünf Gruppen gebündelt, in Klammern jeweils die Anzahl mit annähernd gleicher Formulierung):

- *Ich habe eine Vorstellung von K., kann sie aber nicht als Definition aufschreiben.* (3)



- *Ich könnte ja sagen „die Graphen von Funktionen heißen Kurven", aber das hakt:* $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ *!! Eine Vorstellung habe ich trotzdem.* (1)
- *Wenn* $x(t) = \varphi(t)$ *und* $y(t) = \psi(t)$ *für* $t \in [a;b]$ *stetige Funktionen beschreiben, ergibt das Bild eine Kurve.* (5)
- *Meine Vorstellung (Parabeln, Kreise, Hyperbeln, Geraden, Kardioiden, Rollkurven usw.) ist durch die Schneeflockenkurve ziemlich ins Schleudern gekommen, ist der Graph von* (1)

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  eigentlich auch eine „Kurve"? (Hatten wir mal in 11). Ich bleibe bei meiner Vorstellung.
- *Geraden, Parabeln, Graphen ganz oder gebrochen rationaler Funktionen, Sinuskurve, Zykloiden, Spiralen, das sind alles Kurven, aber wie soll ich das definieren? Der Graph einer über* $[a;b]$ *stetigen Funktion ist sicher eine Kurve, aber eine Kurve kann auch etwas anderes sein!* (5)

Nach dieser Aktion mit heftiger Diskussion wurde dem Kurs der folgende Textauszug aus [Hischer & Scheid 1995, 182 f.] vorgelegt: [1]

> Auch wenn eine befriedigende Behandlung des Kurvenbegriffs im Unterricht nicht möglich ist, könnte man die Problematik dieses Begriffs in der hier dargestellten Form anreißen. Obwohl man ständig (nicht nur in der Analysis) mit Kurven arbeitet, sollte klar werden, daß die Definition dieses so „anschaulichen" Begriffs große Schwierigkeiten aufwirft. Anhand des Kurvenbegriffs kann man einerseits erkennen, wie häufig man in der Mathematik (und nicht nur in der Schule!) zu recht mit undefinierten Grundbegriffen arbeitet, über deren anschauliche Bedeutung ein allgemeiner Konsens besteht; andererseits liegt hier ein Beispiel für die spiralförmige Entwicklung eines Begriffs vor, welche man noch in der jüngsten Mathematikgeschichte verfolgen kann. (Eine umfassende didaktische Diskussion des Kurvenbegriffs hat [Weth 1993] vorgelegt.)

---

[1] Dieses Zitat enthält drei Literaturhinweise. Die bibliographischen Angaben dazu sind:

Hausdorff, Felix [1914]: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit & Co. (Nachdruck 1947 New York: Chelsea).

Vilenkin, Naum Yakovlevich [1968]: Stories about Sets. New York: Academic Press.

Weth, Thomas [1993]: Zum Verständnis des Kurvenbegriffs. Hildesheim: Franzbecker.

Aus (9) folgt noch der für die Unterrichtspraxis wichtige Satz, mit dessen Hilfe sich ein engerer Kurvenbegriff definieren läßt:

(13) Satz: Der Graph einer stetigen, auf einem Intervall definierten reellen Funktion ist eine Kurve.

Folgendes Zitat aus [Hausdorff 1914] beleuchtet noch einmal die Schwierigkeit des Kurvenbegriffs: *Wir geben keine Definition des Begriffs der Kurve; die Mengen, die herkömmlicherweise diesen Namen führen, sind von so heterogener Beschaffenheit, daß sie unter keinen vernünftigen Sammelbegriff fallen.* Es gehörte zu den „Sternstunden" der Mathematik, als der russische Mathematiker Urysohn im Jahr 1922 doch einen solchen „vernünftigen Sammelbegriff" fand: Urysohn gelang eine Definition des Dimensionsbegriffs und damit eine Definition der Kurve als ein Kontinuum der Dimension 1. Auf die Dimensionstheorie von Urysohn kann hier nicht eingegangen werden (vgl. etwa [Vilenkin 1968]).

Jetzt setzte nun wirklich eine „Kurvendiskussion" ein, die ohne die voraufgegangene eigenständige Reflexion vermutlich leer geblieben wäre! O-Ton einer Schülerin: *„Ich bin [nach dem Text] richtig froh, ich dachte schon, ich wäre zu dumm."*

2 Graphen erzeugen Kurven

Bezieht man in die Untersuchungen von Graphen auch Krümmungsmaße als innere Kurveneigenschaft des Graphen ein (vgl. [Steinberg 1985]), ergeben sich oft erstaunliche Ergebnisse, die man selbst beim Einsatz von Graphikrechnern keineswegs sofort sieht! Wer ist schon „zoom-bereit", wenn die graphische Darstellung von

$$f:\begin{cases} x \mapsto x \cdot \ln|x| & \text{für} \quad x \neq 0 \\ x \mapsto 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{und von} \quad k: x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+2\cdot\ln|x|+\ln^2|x|}^{\,3}},$$

also der Krümmungskurve von f, ein erwartetes Bild liefert ($k(x) \to 0$ für $x \to 0$)? Misstrauische Betrachter erkennen erst beim Zoom über $U(0)$ oder beim Rechnen den Irrtum ($k(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm 0$, vgl. [Steinberg 1994, 61]). Und die eigentliche Überraschung ist in Verbindung hiermit ein *Krümmungsminimum* bei $\exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+5)\right) \approx 0{,}026835$.

Über eine Verallgemeinerung durch $f_a(x) := a \cdot x \cdot \ln(|\frac{x}{a}|)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ wurde in [Steinberg 1994, 60 f.] berichtet: In einer Leistungskursarbeit wurde f_a zur Untersuchung gestellt. Von den 7 Schülerinnen und 9 Schülern sind 3 (ein Schüler und zwei Schülerinnen) bis zur Krümmungsklassifikation ($a < \frac{2}{3}, a = \frac{2}{3}, a > \frac{2}{3}$ bei $|x| = a \cdot \exp(-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{a^2}})$) vorgedrungen! Originalzitate der beiden Schülerinnen:

- Eine schrieb: *„Haben <u>Sie</u> das vorher gewußt?"*
- Die andere notierte: *„Sie haben mal Leute zitiert, die behauptet haben, daß Newton und Leibniz die Differential- und Integralrechnung nicht erfunden hätten, wenn sie Taschenrechner gehabt hätten! Diese Aufgabe zeigt, was das für ein Unsinn ist!"*

Wer würde schon beim Blick auf den Graphen von $f\colon y = \frac{1}{3}\cdot x^3$ ahnen, dass die Kurve in $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\,\middle|\,\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{125}}\right)$ ein *Krümmungsmaximum*, also einen Scheitel aufweist? Verfolgt man jetzt diesen Untersuchungsaspekt, so stellt sich fast zwingend die Frage nach der Lage von *Krümmungskreismittelpunkten* (Evolute!) der Kurve.

Im Beispiel liegen diese Punkte in

$$x_{\mathrm{m}} = -\tfrac{x}{2}\cdot\left(x^4-1\right),$$
$$y_{\mathrm{m}} = \tfrac{1}{6x}\cdot\left(5x^4+3\right).$$

Sie liegen damit selbst wiederum auf einer Kurve (Abb. 1).

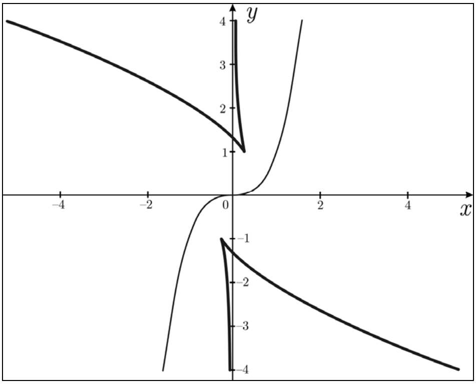


Abb. 1: Evolute (dick) einer kubischen Parabel

Im Gegensatz zur Frage nach den Ortskurven von Extrem- oder Wendepunkten einer Kurvenschar, die relativ oft durch Elimination des Scharparameters zu gewinnen sind, ist hier eine Kurve entstanden, die vom Parameter x abhängt. Lässt man sich den Graphen im Modus „Parametrisch“ vom Rechner (wie ihn z. B. der TI Voyage 200 bietet) darstellen, ist man von einem bis dahin kaum erlebten Verlauf überrascht. (Als Lehrer wird man aus methodischen Gründen vielleicht vorher die Evolute der Normalparabel betrachten lassen, die sich ja noch in einer „$y=f(x)$“-Darstellung beschreiben lässt.) Es stellt sich nun die Frage, wie man

$$K : x(t) = -\tfrac{t}{2}\cdot\left(t^4-1\right);\; y(t) = \tfrac{1}{6t}\cdot\left(5t^4+3\right)$$

untersuchen kann, selbst wenn es unmöglich scheint (?), die Gleichung von $x(t)$ nach t aufzulösen! Über solche Untersuchungen (anhand von Schülervorschlägen!) wurde in [Steinberg 1996, 34 f.], speziell über K in [Steinberg 1998, 63 f.] berichtet.

Hier gilt es, die den Schülern bekannten Kalküle der Analysis auf parametrisierte Kurven anzuwenden, insbesondere die Kettenregel zur Ermittlung von Steigungen und damit von Extrempunkten, Wendepunkten und „Spitzen“ auszunutzen. So werden letztlich Schülerfragen zum Auslöser weitergehender Theoriebetrachtungen! Die hierbei herausgeforderten Gespräche dürfen sicher eher als „Kurvendiskussionen“ bezeichnet werden als die oben erwähnten Berechnungen von Extrem- oder Wendepunkten!

3 Entstehung einer unendlichen Geschichte

Die Frage nach Parabeln durch $(0\,|\,0)$, $(1\,|\,1)$ und $(2\,|\,4)$ wird erfahrungsgemäß von Lernenden zunächst belacht. Natürlich wird die Normalparabel genannt, die Frage scheint beantwortet, wenn nicht Stutzen bei der Eindeutigkeit folgte!

Nach kurzer Überlegung wird meist schnell $P_2 : \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = -6 \cdot \left(x - \frac{49}{24}\right)$ als zweite Möglichkeit erkannt, schließlich kennt man ja die nach links oder rechts geöffneten Parabeln auch schon. Wir werden einer Parabel nämlich nicht die Parabeleigenschaft aberkennen, wenn sie mal „anders“ im Koordinatensystem liegt! Dies zu erkennen wird in neueren Lehrbüchern endlich auch für Klassen 9 ermöglicht, um die geometrische Bedeutung der Parabel als Kurve schon früh sichtbar zu machen (vgl. [Cukrowicz-Zimmermann 2001, 148–163]).

Neues Stutzen: Könnte es nicht auch noch eine „schief liegende“ Parabel durch die drei Punkte geben? Wie sähe denn z. B. die Gleichung der mit 60° um 0 gedrehten Normalparabel aus? Wendet man auf $y = x^2$ die Drehung

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos 60^\circ - y \cdot \sin 60^\circ \\ y' &= x \cdot \sin 60^\circ + y \cdot \cos 60^\circ \end{aligned}$$

an, so erhält man

$$2y' - 2\sqrt{3}\,x' = x'^2 + 2\sqrt{3}\,x' \cdot y' + 3y'^2 .$$

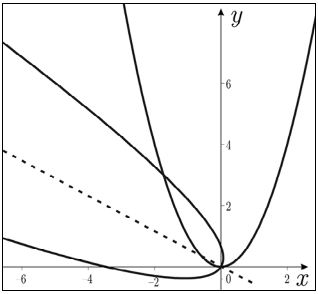


Abb. 2: gedrehte Normalparabel

(Nach y' auflösen lassen und die beiden Äste vom Rechner darstellen lassen! – Siehe Abb. 2.)

Könnten wir nicht auch für unser Problem mit einem Ansatz

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

fündig werden? Nach kurzer Überlegung liegt ein lineares Gleichungssystem vor,

$$\left| \begin{array}{r} f = 0 \\ a + b + c + d + e + f = 0 \\ 4a + 8b + 16c + 2d + 4e + f = 0 \end{array} \right|, \quad \text{woraus z. B.} \quad \left| \begin{array}{l} d = 2b + 6c \\ e = -a - 3b + 7c \end{array} \right| \quad \text{folgt.}$$

Die Frage lautet nun:

Wann beschreibt $ax^2 + bxy + cy^2 + \left(2b + 6c\right) \cdot x - \left(a + 3b + 7c\right) \cdot y = 0$ eine Parabel?

Wir können o. B. d. A. $b := 1$ wählen und erhalten als Auflösung nach y (Rechnerhilfe!):

$$y_{1/2} = \frac{-x + a + 7c + 3}{2c} \pm \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{-\left(4ac - 1\right) \cdot x^2 - 2\left(a + 12c^2 + 11c + 3\right) \cdot x + \left(a + 7c + 3\right)^2}$$

Eine „rettende Idee“:

Der Radikand soll im Fall einer Parabel eine Funktion von x sein, die nach einer Seite begrenzt ist, es muss also $4ac = 1$ gelten. Gibt man dem Rechner also $a = \frac{1}{4c}$ ein und wählt dann für c verschiedene Werte, z. B. $c = 1$, $c = 2$, $c = -1$, erhält man erhoffte Graphen, die durch die drei Punkte gehen!

Die Kurven sehen wirklich wie Parabeln aus, sind es aber auch Parabeln?

Für $c = 1$ und damit $a = \frac{1}{4}$ ergibt sich

$$\frac{1}{4}x^2 + x \cdot y + y^2 + 8x - \frac{41}{4}y = 0\,.$$

Ein neues Projekt ist aufbereitet! Wir erarbeiten die Hauptachsentransformationen (vgl. [Leupold u. a. 2001, 126 f.]), die uns die Drehwinkel δ liefern, bei deren Anwendung auf

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

der Term mit $x' \cdot y'$ verschwindet. (Für $a = c$ ist $\delta = 45°$, für $a \neq c$ ist $\delta = \frac{1}{2}\arctan\frac{b}{c-a}$.)

Wir installieren in unseren Rechnern ein Programm und werden endlich für die Mühen belohnt. Im obigen Fall ergibt die Drehung um 0 mit Drehwinkel $\delta = \frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}$ $\approx 26{,}6°$ als gedrehte Kurve

$$1{,}25y^2 - 5{,}59017y + 11{,}7394 \cdot x = 0$$

(Abb. 3), die wir jetzt (endlich!) als Parabel identifizieren.

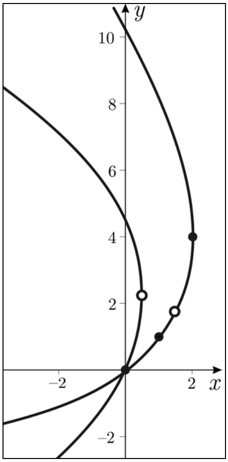


Abb. 3:
gedrehte Parabel

Fazit:

Ein zunächst trivial scheinendes Problem hat ein überraschend weit reichendes Ergebnis geliefert. Durch $(0|0)$, $(1|1)$ und $(2|4)$ gehen unendlich viele Parabeln, von denen einige gründlich erarbeitet wurden.

Aber wir erkennen dabei noch mehr: Mit dem Ansatz

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

lassen sich durch drei gegebene Punkte beliebig viele Kegelschnitte legen. Ein viel weitergehendes Projekt ist eröffnet, zu dem in [Schupp 1988, 85 ff.] eine umfassende Analyse vorgelegt wird.

Die Diskussion um eine Kurve hat das Buch einer unendlichen Geschichte aufgeschlagen!

4 Einfacher, aber nicht besser!

Eine „Extremwertaufgabe“ lautet: Gegeben sei eine Ellipse

$$E : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

mit $a > b$. Welcher Punkt auf E hat vom unteren Nebenscheitel $N = (0|-b)$ den größten Abstand (vgl. Abb. 4)?

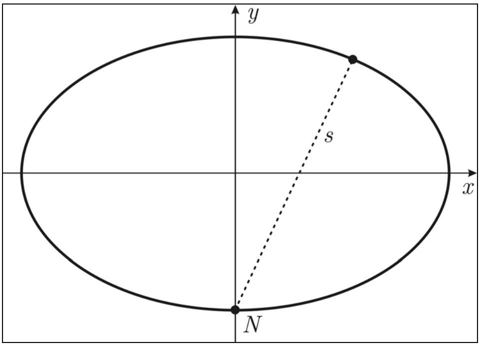


Abb. 4: Punkt maximalen Abstands von *N*?

Die Lösung ist nicht schwer. Für das Abstandsquadrat ergibt sich sofort $s^2\,(x,y) = x^2 + (y+b)^2$ mit der Nebenbedingung

$$\text{(I):}\quad x^2 = \left(\tfrac{a}{b}\right)^2\left(b^2 - y^2\right) \qquad \text{oder} \qquad \text{(II):}\quad y^2 = \left(\tfrac{b}{a}\right)^2\left(a^2 - x^2\right),$$

(vgl. [Steinberg 1982, 40 ff.]).

Mit Blick auf s^2 wird man sich für die leichtere Strategie (I) entscheiden, erhält

$$s^2\,(y) = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right) + (y+b)^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 + (y+b)^2$$

und nach Nullsetzen der Ableitung nach y sofort

$$\frac{2a^2}{b^2}y = 2(y+b)$$

und nach kurzer Umformung $y = \dfrac{b^3}{a^2 - b^2}$ und damit

$$x_{1/2} = \pm\frac{a^2}{a^2 - b^2}\cdot\sqrt{a^2 - 2b^2}\,.$$

Dieses Ergebnis entpuppt sich schnell als „diskussionswürdig“:

1. Wegen $y \le b$ ist (kurze Rechnung!) $2b^2 \le a^2$ zu fordern, vgl. auch $x_{1/2}$!
   Für $a > b\cdot\sqrt{2}$ erhält man dann zwei symmetrisch zur y-Achse liegende Ellipsenpunkte mit größtem Abstand von N.

Aber:

2. Für $a = b\cdot\sqrt{2}$ ist $x = 0,\ y = b$, der obere Nebenscheitel ist also Punkt größten Abstands von N.
3. Für $b < a < b\cdot\sqrt{2}$ liefert die Rechnung überhaupt keine Lösung! Die Graphik muss helfen (Abb. 5): s nimmt sein Maximum im Rand des Definitionsbereichs an, der obere Nebenscheitel $\overline{N} = \left(0|b\right)$ ist Punkt größten Abstands von N!
4. Warum liefert uns die Rechnung eigentlich keine Antwort auf die Frage nach einem Minimum für s^2? (Eine Frage, die eigentlich immer bei Extremwertaufgaben zu stellen wäre!) Ein Punkt minimalen Abstands müsste doch N selbst sein, und für $a > b\cdot\sqrt{2}$ müsste wohl in $\overline{N}$ ein „relatives Minimum“ liegen? Wieder schafft erst der Blick auf die Graphik Klarheit, auch hier sind „Randextrema“ zu erkennen.
5. Warum liefert $a \overset{>}{\underset{<}{=}} b\cdot\sqrt{2}$ überhaupt eine Klasseneinteilung möglicher Lösungen?

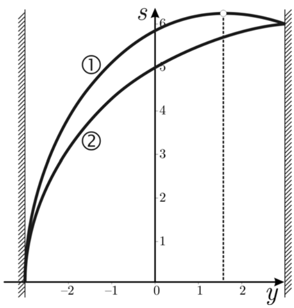


Abb. 5: Ordinate des Punkts maximalen Abstands von N:
① $a > b\cdot\sqrt{2}$: 2 Lösungen
② $b < a \le b\cdot\sqrt{2}$: 1 Lösung

Vielleicht ist ja die Strategie (II) doch interessanter?

Hier ist

$$s^2(x) = x^2 + \left(\pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + b\right)^2$$

erheblich sperriger, umgeformt

$$s^2(x) = x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \pm \frac{2b^2}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2} + 2b^2.$$

Wir finden den Ableitungsterm $2x\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\mp\frac{2b^2x}{a\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$ und damit

$$x_1 = \begin{cases}0\\0\end{cases} \text{ mit } y_1 = \begin{cases}b\\-b\end{cases} \text{ und } x_{2/3} = \begin{cases}\pm\dfrac{a^2\sqrt{a^2-2b^2}}{a^2-b^2}\\ \text{keine Lösung}\\ \text{wegen } a^2 > b^2\end{cases} \text{ mit } y_{2/3} = \begin{cases}\dfrac{b^3}{a^2-b^2}\\ \text{keine Lösung}\end{cases} \;!$$

Hier werden nun (siehe Abb. 6) die Fragen 1 bis 4 aus (I) schlagartig beantwortet. Wir erhalten für $a^2 > 2b^2$ nicht nur die symmetrisch liegenden Maximalpunkte, sondern auch die Minimalpunkte N und $\overline{N}$.

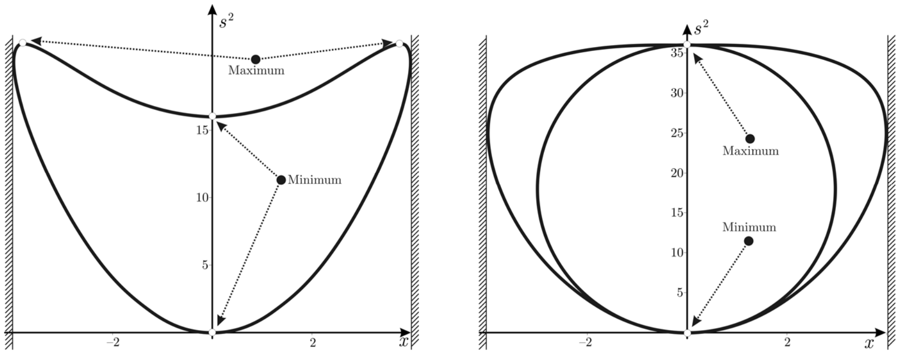


Abb. 6: Maximalpunkte und Minimalpunkte von $s^2(x) = x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) \pm \frac{2b^2}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + 2b^2$

links: $a^2 > 2b^2$, $a = 4$, $b = 2$

$s^2(x) = \frac{3}{4}x^2 \pm 2\cdot\sqrt{16-x^2} + 8$

rechts: $a^2 < 2b^2$, $a = 4$, $b = 3$

$s^2(x) = \frac{7}{16}x^2 \pm \frac{9}{2}\cdot\sqrt{16-x^2} + 18$

rechts innen: Sonderfall $a = b = 3$ ergibt die Ellipse $324x^2 + 9\cdot(s^2 - 18)^2 = 2916$

Im Fall $b^2 < a^2 \le 2b^2$ ist $\overline{N}$ einziger Maximalpunkt, N Minimalpunkt. Es hat sich gelohnt, die unfreundlichen Kurven für s^2 zu studieren! Aber: Frage 5 ist noch offen.

Die Fallunterscheidung $a^2 > 2b^2$, $a^2 = 2b^2$, $a^2 < 2b^2$ ergibt sich durch den Vergleich von Krümmungen! Betrachten wir den Kreis um N mit Radius $2b$:

Umfasst er die Ellipse oder nicht?

Ist seine Krümmung also kleiner-gleich oder größer als die der Ellipse?

Die Kreiskrümmung ist $1/2b$, die Ellipsenkrümmung in $\overline{N}$ ist b/a^2. (Wenn wir es nicht wissen, müssen wir es herleiten!)

Wir sehen jetzt (vgl. Abb. 7):

$\frac{1}{2b} \leq \frac{b}{a^2}$, d. h. $a^2 \leq 2b^2$: $\overline{N}$ ist Ellipsenpunkt größter Entfernung von N.

$\frac{1}{2b} > \frac{b}{a^2}$, d. h. $a^2 > 2b^2$: Es gibt Ellipsenpunkte, die von N weiter entfernt sind als $\overline{N}$.

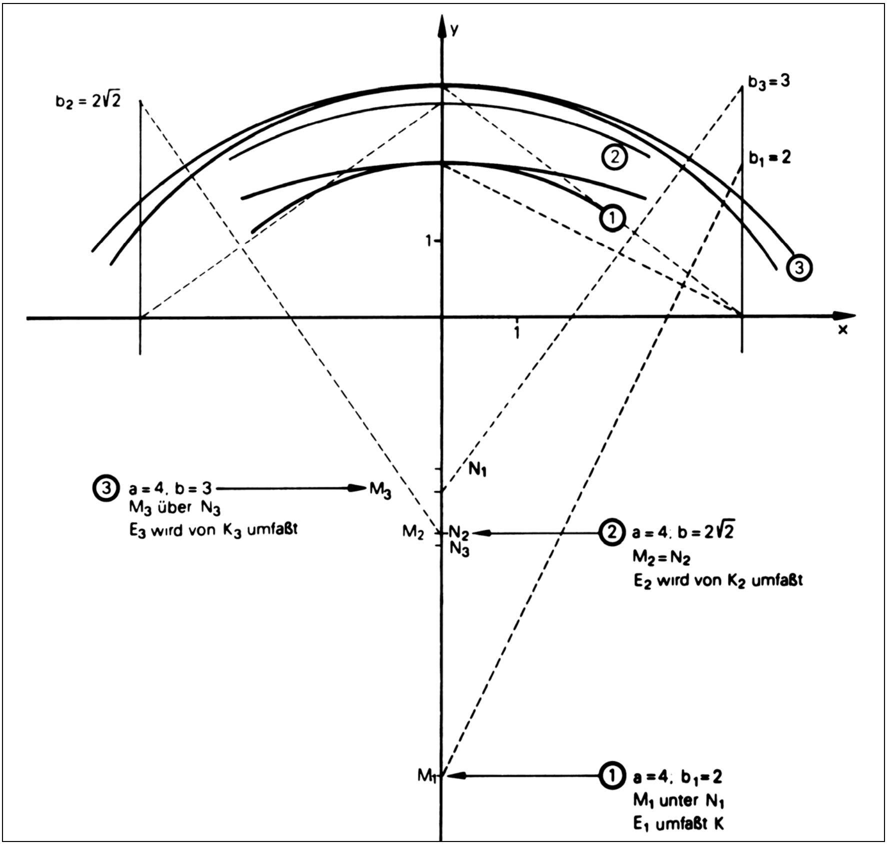


Abb. 7 (entnommen aus [Steinberg 1982, 42]): Vergleich der Krümmungen der Kreise (um N mit dem Radius $2b$) mit den Krümmungen der Ellipsen in $\overline{N}$

Fazit:

Man kann hier wohl mit Recht von einer Kurvendiskussion als Helfer bei der Lösung eines Problems sprechen. Ganz nebenbei ist dabei das Problem von Randextrema erschlossen worden, das ja gerade bei der Anwendung von Funktionen als Modellierer von großer Bedeutung ist.

Anmerkung:

Alle Rechnungen, also auch die sperrigen in (II), werden beim Einsatz eines CAS-Rechners erheblich erleichtert, die Ergebnisse „sicherer" gefunden. Deshalb habe ich bewusst auf viele Zwischenrechnungen bei der Notierung verzichtet. Die Problematik der in (I) erschlossenen Fragen wird dadurch keineswegs entschärft: Rechner antworten nur verständigen Fragern!

5 Zu Kurven gehören Tangenten

Schüler und Schülerinnen lernen Tangenten meistens in der elementaren Geometrie bei der Betrachtung von Kreisen kennen. Sie wissen dann, wie man die Kreistangente in einem Kreispunkt konstruiert und wie sie die Tangenten von einem Punkt an einen Kreis mit Zirkel und Lineal konstruieren können. Entsprechende Konstruktionsaufgaben zu Parabeltangenten sind in Klasse 9 lösbar, was bei gründlicher Untersuchung der Parabel in dieser Klassenstufe relativ leicht zu erarbeiten ist. In der Sekundarstufe II geraten die Tangenten dann meistens unter die „Herrschaft der Differentialrechnung", wodurch der geometrische Aspekt ganz aus dem Blick zu verschwinden droht. Dieser Substanzverlust muss nicht sein! Wir lernen, Kurven auch in Polardarstellung zu beschreiben (vgl. [Steinberg 1993, 32 ff.]), erarbeiten dabei den Winkel γ zwischen Fahrstrahl und Tangente, $\tan\gamma = r(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$, erkennen für die durch $r(\varphi) = c\cdot\varphi$ gegebene *Archimedische Spirale* $\tan\gamma = \varphi$ und folgern daraus $\gamma \to 90°$ für $\varphi \to \infty$. Das bedeutet, dass diese Spirale mit wachsender Umlaufzahl „immer kreisähnlicher" wird, was für das Verständnis über die Kurve nicht unwichtig ist! Fragt man nun nach einer Kurve, für die der Winkel zwischen Fahrstrahl und Tangente konstant ist (Problem der Klingenform von Blechscheren!), erhält man $\tan\gamma = c$, also $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{c}{r}$ und damit $\varphi = c\cdot\ln r + k$ bzw.

$$r(\varphi) = e^{\frac{\varphi-k}{c}}.$$

Wir haben damit eine Gleichung der *Logarithmischen Spirale*,

$$r(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{c}},$$

gefunden (Abb. 8). Punkte, deren Fahrstrahlen auf einer gemeinsamen Halbgeraden liegen, bilden eine geometrische Folge, im Gegensatz zur Archimedischen Spirale, deren Punkte mit kollinearen Fahrstrahlen eine arithmetische Folge beschreiben.

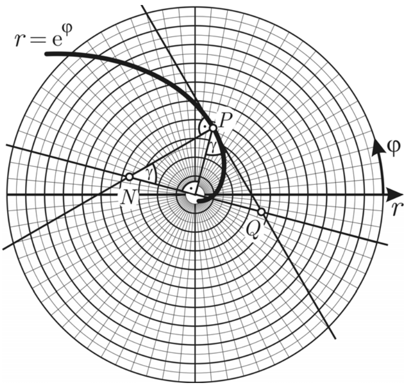


Abb. 8: Tangente an Logarithmische Spirale im Kurvenpunkt P

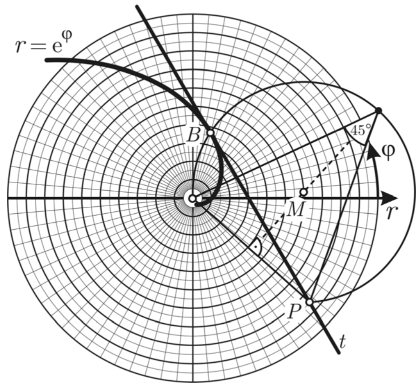


Abb. 9: Tangente an Logarithmische Spirale von einem nicht auf ihr liegenden Punkt aus

Wenn nun eine Logarithmische Spirale durch $r(\varphi) = e^{a\cdot\varphi}$ gegeben ist, kann sie punktweise gezeichnet (oder vom Rechner dargestellt) werden. Soll in einem Punkt P der Kurve die Tangente gezeichnet werden, muss lediglich an den Fahrstrahl in P der (konstante) Winkel $\gamma = \arctan\frac{1}{a}$ angelegt werden. Soll andererseits von einem Punkt P aus an die Kurve eine Tangente gelegt werden, braucht nur der Fasskreis zum bekannten Winkel γ über $\overline{OP}$ mit der Kurve zum Schnitt gebracht zu werden, um den Berührpunkt zu ermitteln (Abb. 9). Es sei angemerkt, dass dazu natürlich die Kurve vorliegen muss, eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich (vgl. [Schmidt 1949, 233]).

Fazit:

Die besondere Eigenschaft einer Kurve eröffnet die (geometrische) Möglichkeit der Tangentenzeichnung – Ergebnis einer Kurvendiskussion, die in der Erörterung der Beziehung zwischen Analysis und elementarer Geometrie wurzelt.

6 Diskussion über eine „Kurvenlösung"

Gegeben seien die Punkte $A = (0|a)$ und $B = (b|h)$ mit $a=1,\ b=6,\ h=2$. Für welchen Punkt $X = (x|0)$ ist $w(AXO) = 2\cdot w(LXB)$ mit $L = (b|0)$ (Abb. 10)?

(I) Für Kurvenfreunde geht es schnell: Sie setzen $w(LXB) =: \delta$, dann gilt

$$x = a/\tan(2\delta)$$

und

$$x = b - h/\tan(\delta);$$

betrachten sie dann die Graphen von

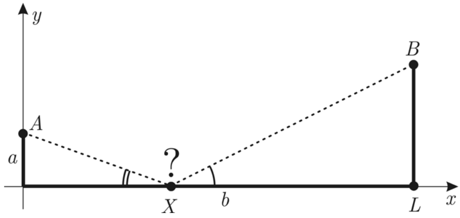


Abb. 10: Problemstellung

$$y = a/\tan(2x)$$

und von

$$y = b - h/\tan(x)$$

und bringen sie diese zum Schnitt, so liefert ihnen die Rechnergraphik den Wert von $x_S = \delta$, und sie finden damit X (Abb. 11).

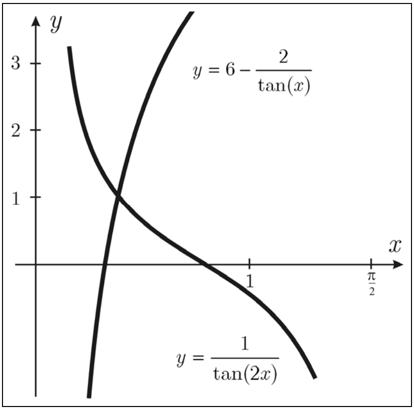


Abb. 11: Kurvenlösung des Problems

(II) Geometer sind irritiert! Sie interpretieren das Problem geometrisch: Spiegele B an g (x-Achse), Bildpunkt B'; der Kreis um B' mit Radius $|B'A|$ schneidet g in A', die Mittelsenkrechte von AA' geht durch B' und schneidet g in X. (Der Beweis ist mit Hilfe des gleichschenkligen Dreiecks ABA' sehr leicht, vgl. Abb. 12.)

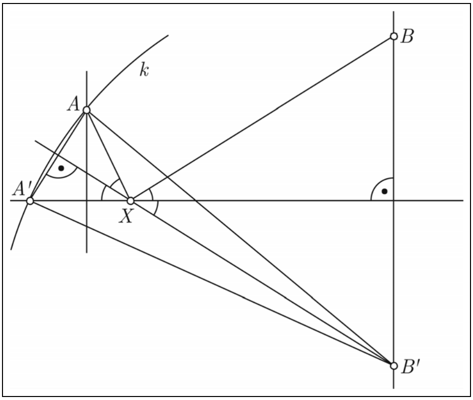


Abb. 12: geometrische Lösung des Problems

Jetzt beginnt eine Diskussion: (II) ist viel eleganter, aber viel schwerer zu finden, Geometrie ist eben die Königin der Mathematik! Die Kurvenfreunde sind verärgert, trumpfen aber auf: Unsere Lösung (I) klappt auch, wenn $w(AX0) = K \cdot w(LXB)$ gelten soll, z. B.: $K = 3$; $K = 2{,}5$; …

Wer geht aus der Diskussion als Sieger hervor?

7 Langweilig oder doch spannend?

Eine Funktionsuntersuchung von $f : y = 2/(1 + x^2)$ mag als Übung sinnvoll sein, eine besondere Motivation geht von ihr wohl kaum aus! Erfahrungsgemäß ändert sich das schlagartig, wenn Schüler die Entstehung einer solchen Kurve selbst erleben.

Gegeben seien ein Punkt M, ein Kreis k um M mit Radius r und eine Gerade g durch M. A_1 und A_2 seien Endpunkte des zu g senkrechten Durchmessers. Q sei nun ein beliebiger Punkt auf k. Die Sekante A_1Q schneide g in S. Die Senkrechte zu g in S schneide die Parallele zu g durch Q in P.

Welche Kurve beschreibt P, wenn Q den Kreis k durchläuft (Abb. 13)?

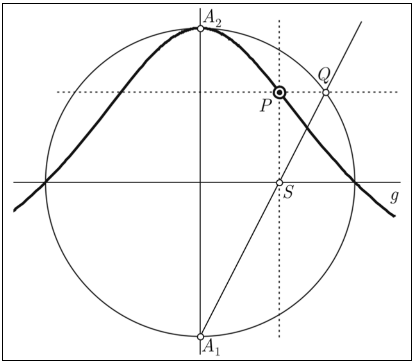


Abb. 13: Versiera als Ortskurve

Lösung:

Zunächst verfolgen wir mit EUKLID DYNAGEO die Wanderung von P und sehen die Kurve entstehen. Sie wurde 1748 von Maria Gaetano Agnesi behandelt und heißt „Versiera“ (vgl. [Schmidt 1949, 64 ff.].

Wir wollen sie durch eine Gleichung erfassen, um sie näher untersuchen zu können. Dazu wählen wir z. B. A_1A_2 als y-Achse und die Parallele zu g durch A_1 als x-Achse (Abb. 14).

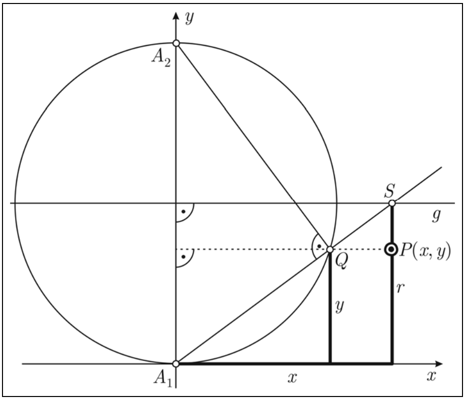


Abb. 14: Herleitung der Gleichung der Versiera

Es gilt $|A_1Q|^2 = 2r \cdot y$ (Kathetensatz), $y : r = |A_1Q| : |A_1S|$ (Strahlensatz) und damit

$$y : r = \sqrt{2ry} : \sqrt{r^2 + x^2}$$

(pythagoreischer Satz); nach Quadrieren und wegen $y \neq 0$ (für Q in A_1 gibt es kein P!) findet man $y = 2r^3/(r^2 + x^2)$, für $r = 1$ also die oben als „langweilig“ bezeichnete Funktion!

Jetzt gewinnt deren Untersuchung eine ganz andere Schubkraft!

Immer in Korrespondenz zwischen Geometrie und Analysis ermitteln wir: die Symmetrie zu A_1A_2, A_2 als Hochpunkt, den zur x-Achse asymptotischen Verlauf (für $Q \to A_1$), vielleicht suchen wir noch die Wendepunkte

$$W_{1/2} = (\pm \tfrac{r}{3}\sqrt{3} \,\Big|\, \tfrac{3}{2} r).$$

Die Kurve bildet mit der x-Achse eine ins Unendliche reichende Fläche, deren Inhalt

$$A = 2 \cdot \lim_{z \to \infty} \int_0^z \frac{2r^3}{r^2 + x^2} \, dx$$

liefert uns der Rechner: $A = 2\pi r^2$, also genau das Doppelte des Inhalts des erzeugenden Kreises.

Wir werden mutig und bestimmen das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung der Kurve um die K-Achse entsteht:

$$V = 2\pi \cdot \lim_{z \to \infty} \int_0^z \frac{4r^6}{\left(r^2 + x^2\right)^2}\, dx = 2\pi^2 \cdot r^3$$

Wer will, vergleiche einmal mit dem Körper, der durch Rotation des erzeugenden Kreises entsteht! Da wir in der Analysis die 1. Guldin-Regel erarbeitet haben (vgl. [Steinberg 1986, 55 ff.]), finden wir aus „Volumen gleich Inhalt der rotierenden Fläche mal Weg des rotierenden Schwerpunktes" $2\pi^2 r^3 = 2\pi^2 r^2 \cdot 2\pi s$, folglich $s = \frac{r}{2}$, den Schwerpunkt $S = (0 \mid \frac{r}{2})$.

Fazit:

Erlebt man die Genese einer Kurve, ist der Reiz, sie im Detail zu studieren, groß. Wenn dann noch „richtig schöne" Ergebnisse herauskommen, macht die Untersuchung auch richtig Spaß (vgl. [Steinberg 2004, 15 f.])!

Literatur

Cukrowicz-Zimmermann [2001]: MatheNetz, Bd. 9. Braunschweig: Westermann.

Hischer, Horst & Scheid, Harald [1995]: Grundbegriffe der Analysis — Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg / Berlin / Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Leupold, Wilhelm u. a. [2001]: Lehr- und Übungsbuch Mathematik III. Leipzig: Fachbuchverlag.

Schmidt, Hermann [1949]: Ausgewählte höhere Kurven. Wiesbaden: Kesselring.

Schupp, Hans [1988]: Kegelschnitte. Mannheim / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Steinberg, Günter [1982]: Gedanken zum Analysisunterricht — ein Plädoyer für Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben. In: *Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht*, Metzler, März 1982, Heft 37, 25–43.

Steinberg, Günter [1985]: Die Krümmung von Funktionsgraphen. In: *Didaktik der Mathematik* **13(**1985)3, 222–236.

Steinberg, Günter [1986]: Entdecken — Erkennen — Verstehen. In: *Der Mathematikunterricht* **32**(1986)5, 28–58.

Steinberg, Günter [1993]: Polarkoordinaten. Hannover: Metzler-Schroedel.

Steinberg, Günter [1994]: Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts an Gymnasien. In: *mathematik lehren*, Heft 67, 59–63.

Steinberg, Günter [1996]: Kurven sind mehr als Graphen von Funktionen. In: *Der Mathematikunterricht* **42(**1996)6, 26–40.

Steinberg, Günter [1998]: Evoluten und Evolventen. In: *Der Mathematikunterricht* **44**(1998) 4/5, 61–73.

Steinberg, Günter [2004]: Entstehung und Untersuchung von Kurven im Geometriefenster eines Taschencomputers. In: *Der Mathematikunterricht* **50**(2004)4, 7–16.

Anschrift des Verfassers

Prof. Günter Steinberg
Mutzenbecherstr. 3
26131 Oldenburg