# Straßen sind keine Splines

von

**Anselm Lambert und Uwe Peters, Saarbrücken**

**Kurzfassung:** Kurvendiskussionen sind ein klassischer Bestandteil des alltäglichen Mathematikunterrichts. Viele der alten Aufgaben sind aber spätestens durch den Einzug von Funktionenplottern und Computeralgebrasystemen fragwürdig geworden und werden langsam von neuen Aufgaben abgelöst. So hat sich inzwischen die Aufgabe der „Trassierung von Straßen“ etabliert. In der vorliegenden Arbeit zeichnen wir den Einzug dieser Aufgabe in den Mathematikunterricht nach und diskutieren ihren Realitätsbezug.

**Abstract:** Curve sketching is a classic element of the everyday math lessons. Many of the traditional tasks, however, have become questionable due to the introduction of function plotters and computer algebra systems, and are gradually replaced by new tasks. Thus, the task of “route planning” has been established by now. In this article we trace the introduction of this task in the math lessons and discuss their relationship to reality.

> 8.1.2 Wirklichkeitsbezug
>
> Die vorangegangenen Kapitel [...] haben gezeigt, daß (ebene) höhere Kurven nicht nur innerhalb der Mathematik eine bedeutsame Rolle gespielt haben (und noch spielen), sondern auch in der uns umgebenden Wirklichkeit (Alltag, Natur, Technik, Bau- und Verkehrswesen) in vielfältiger Weise vorkommen. [...]
>
> 8.1.2.8 Straßenbau
>
> Hier erwähnen wir nur die <u>Klothoide</u> als optimale [...] Übergangskurve, z. B. zwischen zwei geradlinigen Abschnitten derselben Straße, zwischen zwei verschiedenen Straßen (Autobahnkreuze), zwischen einem geradlinigen und einem kreisförmigen Abschnitt derselben Straße [...].
>
> [Schupp & Dabrock 1995, 302 und 307]

## 1 Methodologische Einordnung der vorliegenden Arbeit

Mathematikdidaktik als *deskriptive Wissenschaft* beobachtet und beschreibt das Lehren und Lernen von Mathematik, speziell auch das Lehren und Lernen von Mathematik im Mathematikunterricht. Mathematikdidaktik als *präskriptive und konstruktive Wissenschaft* macht Vorschläge für die Gestaltung von Mathematikunterricht (vgl. [Wittmann 1981, 2]). In der vorliegenden Abhandlung versuchen wir, diesen beiden Aspekten gerecht zu werden.

Wir rekonstruieren exemplarisch den Weg eines konstruktiven Vorschlags in den Schulalltag. Dazu verwenden wir von engagierten Lehrpersonen veröffentlichte Aufgabenbeispiele und Musterlösungen. Wir unterstellen also, dass diese Aufgaben veröffentlicht wurden, um sie in der Praxis zu verbreiten, dass ihnen eine Vorbildfunktion zugesprochen wird, und wir halten sie daher für geeignet, ein Bild von aktuellem Mathematikunterricht nachzuzeichnen. Die vorliegende Arbeit versteht sich damit als qualitative empirische Studie.

Darüber hinaus diskutieren wir die beschriebenen Aufgaben vor dem Hintergrund der durch sie anvisierten Ziele und machen Vorschläge zu ihrer möglichen Weiterentwicklung. Die vorliegende Arbeit versteht sich damit als konstruktiver Beitrag zur Weiterentwicklung von Mathematikunterricht.

## 2 Vorbemerkung zur Modellbildung

Mathematik ist eine Sprache. Wir nutzen diese Sprache einerseits, um Wirklichkeit zu beschreiben, z. B. in Modellen der Physik, etwa bei der parabelförmigen Flugbahn eines geworfenen Balles – das ist ihr deskriptiver Aspekt – und andererseits, um Wirklichkeit zu erzeugen. Das ist ihr normativer Aspekt, z. B. in Modellen der Wirtschaft, denn dass

> 5 kg Trauben gegenüber 1 kg dieser Trauben das 5fache kosten, ist nicht denknotwendig, sondern hängt davon ab, ob sich der Verkäufer entschlossen hat, seine Trauben proportional zu verkaufen (und damit als Modell die Funktion $y = c \cdot x$ zu wählen)[,][1]

oder der Politik, etwa zur Sitzverteilung im Parlament[2]. Auch bei der Trassierung von Straßen spielt Mathematik eine normative Rolle: Wie bereits im Eingangszitat erwähnt, wird für unsere Wirklichkeit die Klothoide als Übergangskurve zwischen Trassen konstanter Krümmung seitens der Mathematik empfohlen und auch von den entsprechenden Richtlinien vorgeschrieben.

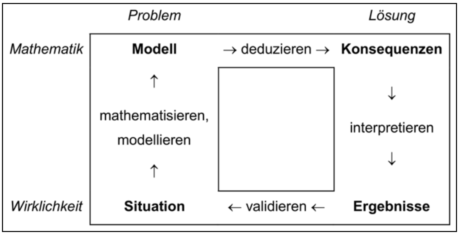



Abb. 1: Regelkreis der Modellbildung nach [Schupp 1988, 11]

Anwendung von Mathematik lässt sich durch einen Regelkreis beschreiben (Abb. 1), der erstens die Ebenen „Mathematik und Wirklichkeit“ und zweitens die Seiten „Problem und Lösung“ bewusst unterscheidet. Die wirkliche Situation wird durch Modellieren und Mathematisieren auf ein mathematisches Modell reduziert. Dazu werden die Situation analysiert und verein-

1 [Schupp 1988, 10]

2 Vgl. [Schupp 1988, 11 f.]

facht, Daten beschafft und teilweise vernachlässigt und Annahmen getroffen[3] – bei der oben angesprochenen Wurfparabel wurden Luftwiderstand und Drall ignoriert.

> Es können nur einige Gesichtspunkte in das Modell einbezogen werden, andere bleiben unberücksichtigt. Dies kann dazu führen, daß in manchen Fällen die mathematisch exakt berechneten Werte von der Wirklichkeit stark abweichen. Trotzdem sind auch solche Modelle oft nicht wertlos und liefern gewisse Anhaltspunkte. Durch Einbeziehung weiterer Gesichtspunkte können daraus unter Umständen bessere Modelle entwickelt werden, die Werte liefern, die mit der Wirklichkeit besser übereinstimmen.[4]

Trassierung von Straßen ist ein Gebiet, auf dem die Sprache Mathematik eine wichtige Rolle spielt und auf dem man über viele Irrtümer, die zu zunächst zu einfachen Modellen führten, im Laufe der Jahrhunderte zu immer besseren Modellen kam.

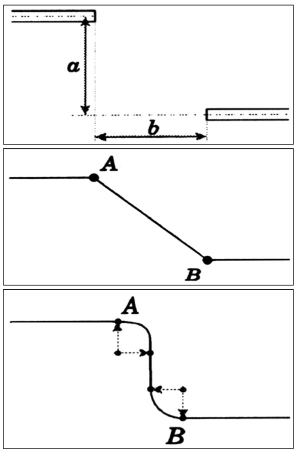
## 3 Die Neue Kurvendiskussion

*Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge,*
*über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.*

*Hans Schupp 1993*

Der Einzug von Funktionenplottern und Computeralgebrasystemen in den Mathematikunterricht riss der alten Kurvendiskussion die Maske vom Gesicht: Außer sinnentleerter Kalkülabarbeitung im Ableitungstermbestimmungs- und Gleichungslösungsdienst kam nur (noch) wenig zum Vorschein – besonders in Ländern mit zentralen Prüfungen und ihrem klausurvorbereitenden Unterricht; Ersatz muss(te) her.

In den letzten Jahren hat sich nun die *Linienführung von Straßen* zu einem beliebten Thema von sog. anwendungsorientierten, realitätsnahen Aufgaben im CAS-gestützten Analysisunterricht entwickelt – als Muster für *Neue Kurvendiskussionen*. Henn hat 1991 die folgende Aufgabe als Abituraufgabe in die Diskussion eingebracht[5] – hier in der Variante für den Leistungskurs:




> Ein Bauingenieurteam steht vor folgender **Aufgabe**:
> Es soll die beiden parallelen, geradlinigen Straßenenden geeignet miteinander verbinden:
>
> a. Begründen Sie, wieso folgende Lösungen unfallträchtig und daher nicht zweckmäßig sind:
>
>    **Hinweis**: Beachten Sie, wie ein Autofahrer bei den Punkten $A$ und $B$ jeweils das Lenkrad halten muß.
>
> b. Begründen Sie, warum daher die fragliche Kurve sowohl bei $A$ als auch bei $B$ einen Wendepunkt

---

[3] Vgl. [Fischer & Malle 1985, 99 ff.].

[4] [Fischer & Malle 1985, 99]

[5] [Henn 1991, 124]

haben muß. Setzen Sie die Funktionsgleichung dieser Kurve als ein Polynom möglichst kleinen Grades an, und bestimmen Sie dieses Polynom. Wählen Sie für den Ansatz ein geeignetes Koordinatensystem.

c. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die aufgestellte Funktion definiert? Wie könnte man die Lage der beiden Straßenstücke deuten, wenn man in der Funktion $a < 0$ bzw. $b < 0$ setzt? Gibt der Graph dieser Funktion dann auch eine sinnvolle Lösung des Straßenbauproblems?

Kann der Graph der anvisierten Funktion überhaupt in irgendeinem Fall eine sinnvolle Lösung des Straßenbauproblems geben? Bei der Modellierung und Mathematisierung wird hier eine Straße real endlicher, positiver Breite auf eine irreal unendlich schmale „fragliche Kurve" reduziert. Vor allem aus dieser Modellannahme folgt dann das Problem des Krümmungsrucks – ein Problem, das es in Wirklichkeit zunächst nicht geben muss und häufig auch gar nicht gibt, denn bei hinreichender Straßenbreite ist stets genug Platz zum Einlenken vorhanden! Diese Aufgabe bietet also vortrefflich Gelegenheit zu modellkritischen Diskussionen im Mathematikunterricht.

> Im Gegensatz zum schienengebundenen Fahrzeug ist es dem Kraftfahrer durch die Lenkung möglich, einen etwas anderen Weg zu fahren, als ihm die Straßenachse vorschreibt. Er wird im allgemeinen die Kurven etwas anschneiden, um das plötzliche Einschlagen der Lenkräder am Bogenanfang zeitlich zu verlängern und damit den Seitenruck abzumindern.[6]

Die Kombination Gerade und Kreisbogen wird demzufolge von den entsprechenden Richtlinien zur Anlage von Straßen z. B. für anbaufreie Straßen außerhalb bebauter Gebiete in den Verbindungsfunktions-Stufen „großräumige Straßenverbindung" bzw. „überregionale/region. Straßenverbindung" sinnvollerweise nicht generell verboten:[7]

> Bei der Folge Gerade–Kreisbogen sollen [...] in Abhängigkeit von der Länge $L$ [m] folgende Kurvenradien angewendet werden, sofern die angestrebte Entwurfsgeschwindigkeit keine größeren Radien erfordert:

| | |
|---|---|
| $L \leq 500$ m: $R \geq L$ [m] | $L > 500$ m: $R \geq 500$ m |

Dabei sollte die Fahrt durch den Kreisbogen mit der Entwurfsgeschwindigkeit[8] mindestens zwei Sekunden dauern, um den *Eindruck eines Knicks* zu verhindern.[9] Für den ebenfalls nicht krümmungsruckfreien Übergang Kreisbogen–Kreisbogen sind in den entsprechenden Richtlinien zulässige Radienfolgen festgelegt (Abb. 2).

---

6 [Osterloh 1991, 11]

7 Vgl. [Pietzsch 1989, 25], nachfolgendes Zitat aus [Pietzsch 1989, 97].

8 Unter der Entwurfsgeschwindigkeit versteht man eine Geschwindigkeit, die einem Straßenentwurf zu Grunde gelegt werden soll (vgl. [Pietzsch 1989, 56]): Sie ist damit ein normativer Wert.

9 Vgl. [Pietzsch 1989, 97].

In der betrachteten Aufgabe wird der Funktionsgraph – als Ersatz für die „nicht zweckmäßig[en]“ Geraden und Kreisbögen – eng geführt durch ein Polynom festgelegt.

1995 schlägt Henn diese Aufgabe – ergänzt um die Forderung nach einer maßstabsgerechten Skizze – für das Zentralabitur in Baden-Württemberg vor, wo sie (noch) abgelehnt wird.[10] Herget bringt es an dieser Stelle auf den Punkt:

> Diese Fragestellungen bieten sehr motivierende Einstiege für Unterrichtsprojekte. Es ist jedoch nicht einfach, hieraus Aufgaben zu konstruieren, die sich für Prüfungsaufgaben eignen.

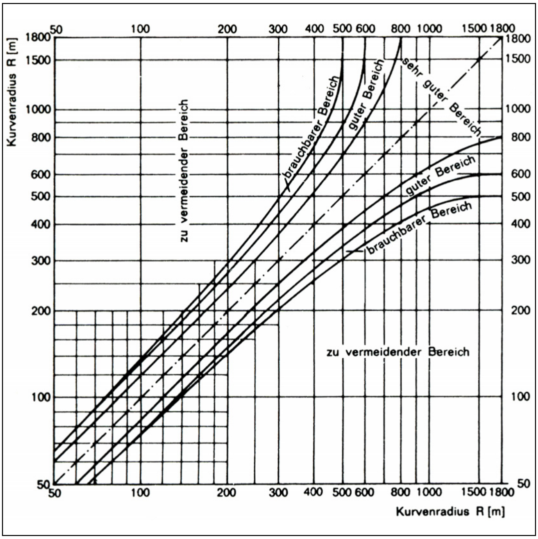



Abb. 2: Zulässige Radienfolge nach RAS-L (aus [Pietzsch 1989, 97])[11]

Um das Trassierungsproblem in eine Prüfungsaufgabe zu verpacken, muss man zwangsläufig einige Vereinfachungen vorwegnehmen. In obigem Aufgabenvorschlag sind dies im Wesentlichen die Festlegung einer Trasse durch „ein Polynom möglichst kleinen Grades“ und die Stetigkeit der zweiten Ableitung an den Nahtstellen.

[Herget, 1996, 67] schreibt weiter:

> Sein ungewöhnlicher Aufgabenvorschlag wurde zwar – wie zu erwarten – nicht ausgewählt, kam aber [...] bei einigen Kommissions-Kollegen gut an.

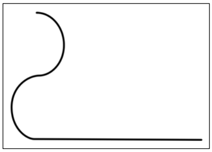
Heute finden sich in der Literatur an zahlreichen Stellen Varianten der Aufgabe. Henns Aufgabe ist also – trotz der damaligen Ablehnung – als ein durchaus erfolgreicher Versuch anzusehen, mit der Prüfungstradition der klassischen Kurvendiskussion zu brechen und realitätsnahe Problemstellungen auf dem Umweg über die Prüfung auch im Unterricht zu etablieren. Leider entwickelte sich in diesem Prozess seine Aufgabe in den folgenden Jahren nicht in der ihr gebührenden Weise, sondern immer weiter von der Realität weg: Die ursprüngliche Modellierung ruckfreier Übergänge wurde in der Folge stets als der Ausgangspunkt der Mathematisierung genommen. Wenn man dies tut, dann nimmt man der Aufgabe ihr großes Potenzial als Modellierungsaufgabe, wie es exemplarisch von [Steinberg 1995, 61–64] noch ausgeschöpft wurde.

[10] [Herget 1996, 67]

[11] a. a. O.

# 4 Der Weg dieser Aufgabe in den Schulalltag

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Aufgabe legte den Grundstein für einen ganzen Hof von verwandten Aufgaben: So stellt [Henn 1997, 76] in „Realitätsnaher Unterricht mit DERIVE“ der Aufgabe – die dort nun als Lern- und nicht als Prüfungsaufgabe gedacht ist – u. a. die folgende Aufgabe dramaturgisch voran:

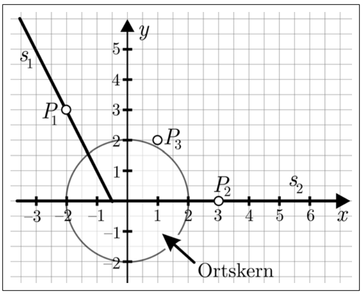
> In Ihrem Schulhof wird mit Kreide die nebenstehende, insgesamt 100 m lange Spur aufgezeichnet:
>
> Zuerst ist der Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve, durch Aneinandersetzen zweier Kreisbögen realisiert, danach der Übergang einer Linkskurve in ein gerades Stück durch Ansetzen der Kreistangente.
>
> 
>
> Könnten Sie mit dem Fahrrad genau diese Spur fahren? Überlegen Sie dazu, wie Sie in den einzelnen Kurvenstücken das Lenkrad halten müssen!

Könnten Sie mit dem Fahrrad genau eine Gerade fahren? Die Aufgabe wird hier sofort mit der mathematischen *Ideal*isierung (*?*) – eben einer unendlich schmalen Trasse – begonnen. Es soll die Straße dann als Polynom (vom Grad 5) formalisiert werden; darüber hinaus werden die Lernenden allerdings auch aufgefordert, andere, ihnen sinnvoll erscheinende Funktionsterme für den Ansatz zu wählen[12] und diesbezüglich ihre eigene mathematische Phantasie auszuleben.[13] So erhält man eine fruchtbare Lernumgebung zu mathematischen Begriffen – etwa dem Begriff der „Krümmung“ über die Metapher „Straße“ für „Kurve“ – und wertvolles Beispielmaterial für eine reflektierende Modellkritik – aber nicht das realitätskonforme Modell, denn Klothoiden sind nicht termdefiniert.

Variation liefert oft neue Erkenntnisse. Variieren wir die Betonung bei dieser Fragestellung – „Können Sie mit dem Fahrrad genau eine Kurve fahren?“ – so erschließen wir uns ein weiteres interessantes Gebiet mathematischer Beschäftigung, das Problem der Schleppkurven.

Die Aufgabe der „genau einen Kurve“ entwickelte sich in den nächsten Jahren fort – wir können diese Entwicklung hier allerdings nur exemplarisch skizzieren. Die Verbindung zweier Trassen wurde um die Umgehung eines Ortes ergänzt: In dieser Variante finden wir sie dann schließlich auch in der Praxis als Abituraufgabe – z. B. in einem Grundkurs in Nordrhein-Westfalen:[14]

> Zwei Fernstraßen $s_1$, von links oben kommend, und $s_2$, welche auf der $x$-Achse verläuft, treffen sich mitten im Ort. Um die Belästigung der Anwohner abzuwenden, wird eine Umgehungsstraße geplant.




[12] [Henn 1997, 77]

[13] [Henn 1997, 79]

[14] Vgl. [Knechtel & Weiskirch 2001 a, 14], die dortige Abbildung wurde hier neu gestaltet.

> Gesucht ist eine Funktion, die in den Punkten $P_1$ und $P_2$ glatt an die bestehenden Straßen $s_1$ und $s_2$ anschließt und den Ortskern dadurch umgeht, dass sie durch den Punkt $P_3$ verläuft. [...]
>
> Bestimmen Sie den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion, die die obigen Bedingungen erfüllt [...]
>
> An welchen Stellen ändert sich die Lenkrichtung auf der Trasse zum Graphen von $f$? [...]

Die Situation wird hier nun in der Aufgabenstellung bereits detailliert mathematisiert geliefert, was im Rahmen einer Prüfung durchaus legitim und oft auch unumgänglich ist – kann man authentische Anwendung überhaupt im Abitur (gar zentral) prüfen? Es wird zielstrebig auf das Polynom zugesteuert, und die Frage nach den Wendepunkten eines Funktionsgraphen wird in die Frage nach der *Änderung der Lenkrichtung (!)* eingekleidet:

> Aufgabenanalyse
>
> [...] Die Lenkrichtung ändert sich an den Stellen, an denen die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat. An den beiden Nullstellen der zweiten Ableitung liegt ein Vorzeichenwechsel vor. Damit findet an den Stellen bei ungefähr –1,072 und 1,648 eine Änderung der Lenkrichtung statt.[15]

Heißt das, dass wir sonst überall das Lenkrad still halten können? Fragen wir uns also verwundert – die gegebene Antwort vor Augen – erneut: „An welchen Stellen ändert sich die Lenkrichtung auf der Trasse zum Graphen von $f$?“, so müssen wir – nach kurzer Betrachtung der Krümmung – antworten: „Nein! Nicht nur an den Wendepunkten! Fast überall!“

Aus diesem Grund werden Polynome nicht zur Trassierung angewandt: Jede und jeder wünscht sich auf der Straße natürlich konstante Krümmungen, also Geraden und Kreise. Beim Autofahren dient es der Bequemlichkeit, um nicht ständig am Lenkrad nachlenken zu müssen, es dient aber auch – ein psychologisches Phänomen – der Fahrsicherheit, da alle Kurven nach dem gleichen Prinzip konstruiert sind. Beim Motorradfahren, bei dem wir nicht so einfach vernachlässigen können, dass Räder immer zugleich Kreisel sind, bieten konstante Krümmungen darüber hinaus fahrphysikalische Vorteile.

Und ebenso natürlich ist die Forderung nach Krümmungen konstanter Änderung als Übergänge – diese Forderung führt uns dann zur Klothoide. Darauf kommen wir unten wieder zurück.

Inzwischen hat der hier beschriebene Aufgabentyp auch in die Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (in der Fassung vom 24.05.2002) als ein „Aufgabenbeispiel für die mündliche Prüfung“ Einzug gehalten – im Wesentlichen handelt es sich bei der dort vorgestellten Variante um die von Gottfried Obereder

[15] [Knechtel & Weiskirch 2001 a, 15]

1996 in Niederösterreich als Abituraufgabe gestellte (Abb. 3, vgl. [Herget 1997, 66]), bereichert um die wichtige Diskussion des Rucks:

> Um die Ortschaft *D*, die an der geraden Straße durch *A* und *B* liegt, wird eine Umgehungsstraße gebaut. Diese soll in *A* und *B* tangential in die alte Straße münden und durch den Punkt *C* gehen. [...]
>
> a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion *f* vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht. Erläutern Sie Ihren Ansatz.
>
> b) Zeichnen Sie die Graphen von *f*, *f'* und *f''* mit Hilfe des Rechners in ein gemeinsames Koordinatensystem. Erläutern Sie daran die Zusammenhänge zwischen *f''*, *f'* und *f*, und ziehen Sie Schlussfolgerungen für markante Punkte des Graphen von *f*.
>
> c) Untersuchen Sie, ob sich die neue Straßenverbindung an den Einmündungsstellen „ruckfrei" durchfahren lässt.[16]

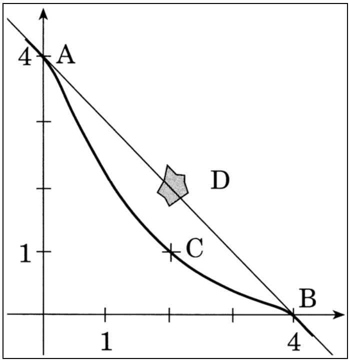



Abb. 3: Abbildung zu der EPA-Aufgabe aus dem Aufgabenvorschlag von G. Obereder

Damit haben sich Straßen als unendlich schmal, polynomial modelliert und mathematisiert und der „ruckfreie Verlauf" als stetige zweite Ableitung auch offiziell geweiht in unserer Aufgabenkultur verwurzelt und gedeihen nun prächtig weiter:

> Für das erste niedersächsische Zentralabitur im Jahre 2006 werden in der Analysis Vertiefungen und Anwendungen in Abhängigkeit von der eingesetzten Technologie gefordert. Für die Leistungskurse Mathematik sind dies bei GTR/CAS-Einsatz u. a. die Modellierung von Trassierungen und die Krümmungsfunktion.[17]

Übrigens sieht bei einer anderen Koordinatisierung (Drehung um 90°) in der ansonsten gleichen Modellierung die „Straße" aus der EPA-Aufgabe wie in Abb. 4 aus.

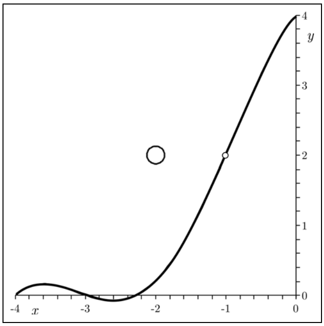



Abb. 4: Die Umgehungsstraße der EPA-Aufgabe bei um 90° gedrehter Koordinatisierung

## 5 Weitere Varianten

Das Thema Trassenführung bietet nun einen Rahmen, in dem inzwischen Aufgabenstellerinnen und -steller ihre mathematische Phantasie – befreit von jeglichem Realitätsbezug – ausleben.

---

[16] [EPA 2003, 42 f.]

[17] [Rolfs 2005, 1]

## 5.1 Logarithmische, exponentielle und gebrochen rationale Trassen?

Gibt es das wirklich? Zumindest in der Reifeprüfung: Wir finden in einem niedersächsischen Abitur für einen Leistungskurs eine Aufgabe zum „Thema: Straßenführung mit ln-Funktionen" verwirklicht, in der ein gerader Streckenabschnitt nach dem Bauplan $f_k(x) = x^2 - \ln(x^2 + k^2)$ ($k > 0$, $x \in \mathbb{R}$) fortgesetzt werden soll.[18]

Und auch die folgende Variation der Aufgabe – die nun auch noch die Terme der vorhandenen Straßen frei variiert – wurde bereits in einem Abitur in einem Leistungskurs in Niedersachsen Wirklichkeit:[19]

> Eine abschnittsweise definierte Funktion $f$ ist gegeben durch
>
> $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{14x^2 - 106x + 180}{x^2 - 5x} & \text{für } x \geq 3 \\ r(x) & \text{für } 0 < x < 3 \\ e^x & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$
>
> dabei ist $r(x)$ der Term einer ganzrationalen Funktion $r$. [...]
>
> d) Der Graph der Funktion $f$ soll den Straßenverlauf durch einen Naturpark wiedergeben, der landschaftlich sehr reizvoll ist, so dass die Autofahrer nicht zu schnell fahren, um auch die Aussicht genießen zu können.
>
> Dazu müssen die beiden schon bestehenden Straßenteile für $x < 0$ und $x > 3$ geeignet miteinander verbunden werden. Die positive $x$-Achse stellt einen großen Fluss dar, dem die zu bauende Straße nicht zu nahe kommen darf. [...]
>
> Beurteilen Sie kritisch die Qualität Ihrer Lösung anhand einer graphischen Skizze [...].

Sollte man wirklich eine Straße – statt eines Fußwegs? – durch einen Naturpark (!) bauen, und das dazu noch ohne genauere Informationen über die Gegebenheiten vor Ort? Das ist Schreibtischtäterei! Das müsste in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht wahrlich kritisch diskutiert werden! Beurteilen wir nun „kritisch die Qualität" der Aufgabe: Laut Aufgabenanalyse wird von der kritischen Bearbeitung nur erwartet, dass die Straße dem Fluss nicht zu nahe kommt. Die Musterlösung schlägt

$$-\frac{427}{1296}x^7 + \frac{4459}{1296}x^6 - \frac{17401}{1296}x^5 + \frac{10163}{432}x^4 - \frac{146}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

exemplarisch als definierenden Term vor und verlautbart, ohne dass ein Maßstab (im doppelten Sinne) bekannt gegeben wird (vgl. Abb. 5):[20]

> Die Straße kommt dem „Fluss" nicht zu nahe. Für einen Naturpark scheint ein ganz passabler Straßenverlauf vorzuliegen.

---

18 Vgl. [Knechtel & Weiskirch 2001 b, 22].

19 [Knechtel & Weiskirch 2001 b, 18]

20 [Knechtel & Weiskirch 2001 b, 19]

Es ist vernünftig, in der Aufgabenanalyse „Fluss“ in Anführungszeichen zu setzen – welcher naturbelassene Fluss ist schließlich achsengerade kanalisiert? –, aber müsste da dann nicht auch „Straße“ stehen?

Mit Realitätsnähe hat dies nichts mehr zu tun, so realisiert ist es nur noch Realitätsnähe vortäuschende Einkleidung.

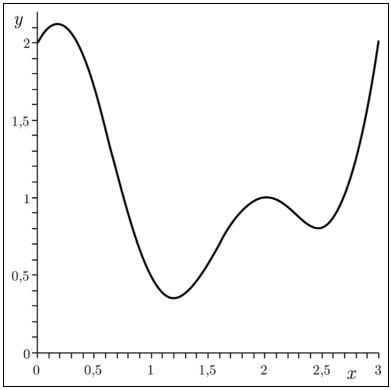



Abb. 5: „Straße“ durch einen Naturpark; die $x$-Achse stellt den Fluss dar

## 5.2 Ortsumgehungssplines?

Die Forderung zweimal differenzierbarer Übergänge, die (wie oben diskutiert) in der Realität nicht gestellt wird, verbunden mit dem Wunsch, die den Schülerinnen und Schülern vertraute Klasse ganzrationaler Funktionen nicht zu verlassen, führte mittlerweile dazu, die Projektierung einer Straße als realen Hintergrund zu verwenden, um *Interpolation mit Splines* zu betreiben.

So werden in einem mit viel Aufwand geplanten Unterrichtsprojekt großen mathematischen Gehalts zunächst in einer topographischen Karte fünf Punkte vorgegeben, durch die eine umzubauende Straße verlaufen soll:[21] Die Schülerinnen und Schüler erhalten „ein kariertes Arbeitsblatt mit fünf Punkten und der Aufgabe, eine ‚möglichst glatte' Kurve durch sie zu legen“.

Die relative Lage der Punkte auf diesem Arbeitsblatt unterscheidet sich dabei deutlich von derjenigen der Punkte in der topographischen Karte! Eine reichhaltige, viele inner- und außermathematische Aspekte berührende Situation wird so durch die Vorgabe von fünf Punkten geschlossen und konvergent modelliert. Mit dem durch die bewusste Abänderung der Daten erhaltenen Modell nimmt man in Kauf, sich von der gegebenen Situation zu entfernen. Was bleibt dann von dem „realen Hintergrund“?

> Viele sogenannte „Anwendungsaufgaben“ in heutigen Lehrbüchern sind eigentlich „eingekleidete“ Aufgaben der reinen Mathematik. Bei diesen Aufgaben steht die Vermittlung eines bestimmten mathematischen Inhaltes oder einer mathematischen Technik im Vordergrund.[22]

Diese Charakterisierung trifft auch auf die vorliegende Aufgabe zu, denn die Intention der Aufgabe ist die *Behandlung der Interpolation mit Splines als eine mögliche Lösung des eingekleideten Interpolationsproblems* und nicht die Diskussion

---

[21] [Kroll & Stachniss-Carp & Weller 2004]

[22] [Fischer & Malle 1985, 85]

möglicher divergierender Lösungsansätze für das Trassierungsproblem. (Die verwendete topographische Karte zeigt, dass die existierende und nun neu zu trassierende Straße durch ein relativ enges Tal verläuft und somit kaum Spielraum zum Trassieren bleibt – die durch Interpolation mit Splines erhaltenen Lösungen verlaufen hingegen stellenweise senkrecht zu den Höhenlinien.)

> Bei allen Vorteilen, die die Trennung von Situation und Modell mit sich bringt, muß aber auch gesehen werden, daß diese Trennung Gefahren mit sich bringt. Vor allem handelt es sich um die Gefahr der Verabsolutierung der Modellebene. Es kann sein, [...] daß möglicherweise die Situationen überhaupt ‚vergessen' werden.[23]

Die Vorgabe der zu interpolierenden Punkte hat hier letztlich zum Ziel, die Koordinatensystemabhängigkeit natürlicher kubischer Splines zu demonstrieren. In der Tat liegt in diesem Phänomen ein interessanter Sachverhalt verborgen, dass nämlich die Modellierung einer Biegelinie durch natürliche Splines nur eine Näherung sein kann, da die Form einer *realen* Biegelinie zweifelsohne koordinatensystem*unabhängig* ist. Auch hier eröffnet sich eine Möglichkeit, Modellkritik mit Schülern zu betreiben. Der Einkleidung in eine Trassierungsaufgabe hätte dies nicht bedurft.

Die Rückkehr zum Trassierungsproblem erfolgt letztlich bei der Validierung der von den Schülern erhaltenen Ergebnisse. Hierzu wird das Integral über das Quadrat der zweiten Ableitung der interpolierenden Splinefunktion als „Gütekriterium" angelegt. Dieses Integral beschreibt nun aber weder Gesamtkrümmung des interpolierenden Splines (vgl. u. a. [Rolfs 2005]), noch wäre diese ein im realen Kontext der Trassierung sinnvoller Beurteilungsmaßstab. Um einen Eindruck von dem sich bietenden Krümmungsverlauf zu vermitteln, müsste man die Krümmung in Abhängigkeit von der Bogenlänge der Kurve darstellen. Eine solche Darstellung finden wir z. B. in [Gläser 1972, 26] für den stetigen Krümmungsübergang von einer Gerade zu einem Kreisbogen über eine Klothoide (Abb. 6).

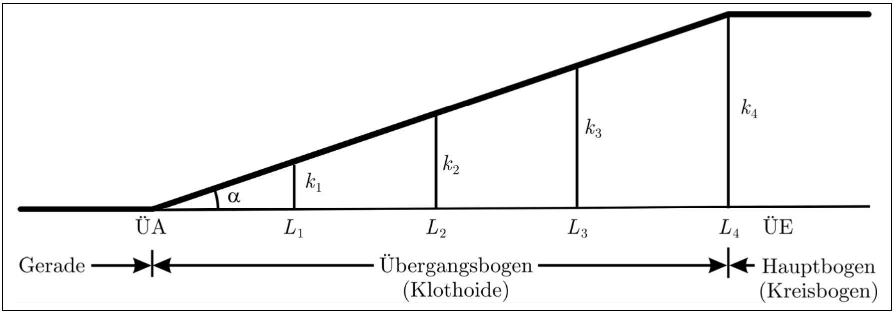



Abb. 6: Krümmungslinie der Klothoide (in Anlehnung an [Gläser 1972, 26])

23 [Fischer & Malle 1985, 108 f]

## 6 Des Kaisers Neue Kleider?

Sollen so die Neuen Kurvendiskussionen für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht aussehen? Diese „Konstruierte-Wirklichkeit"-Aufgaben lassen sich kaum als „lebensnah" oder gar „lebenswahr" bezeichnen; nach Adolf Kruckenberg sollte man sie wohl einordnen unter *„Aufgaben, die die Wirklichkeit verfälschen und zum ‚Scheindenken' führen.*", zu denen jener bereits unreflektierte Dreisatzaufgaben zählte (vgl. [Kruckenberg 1935, 137]). Realitätsnahe Anwendungsaufgaben für den Mathematikunterricht erhält man nicht dadurch, dass man die Kurven, die man gerne diskutieren möchte, „Straßen" nennt. Wenn man das tut, wird die Mathematik im Mathematikunterricht zu einer *Wirklichkeit sui generis*, nicht von eigenem Wert, sondern zu einer sich selbst erzeugenden Wirklichkeit, die sich – obwohl von ihr verschieden – für die Wirklichkeit da draußen hält.

Wir können heute Denkfähigkeit auf Maschinen auslagern und uns dadurch neue Inhalte erschließen. Aber mit solch noch ungenügend reflektierten Neuen Kurvendiskussionen verhält es sich dann letztlich doch wie mit den alten: Die Fokussierung auf das nun mit dem Rechner technisch Mögliche, als willkommene Erweiterung des bisher händisch Möglichen, führt letztlich zur gleichen Sinnlosigkeit, die wir heute rückblickend bei so manch vermeintlich klassischer Kurvendiskussion bedauern. Wir können das jetzt rechnen – aber müssen wir das wirklich rechnen? Der Computer befreit uns *zum* Denken, nicht *vom* Denken!

Konsequenz: Sicherlich ist Linienführung bei der Anlage von Straßen ein geeignetes Thema für den Mathematikunterricht, da Mathematik dabei in der Wirklichkeit tatsächlich eine wichtige normative Rolle spielt. Aber es darf nicht so getan werden, als seien Straßen etwa Polynome und als hätte man damit ein wirkliches Problem gelöst. Die Modellbildung – und hier speziell die möglicherweise realitätsferne Modellierung und Mathematisierung im Unterricht – muss als solche bewusst diskutiert werden:

> Nachdem wir mit dem Polynom fünften Grades eine für unsere rechnerischen Fähigkeiten optimale Trassierungsfunktion gefunden haben, folgte ein Besuch bei der Straßenbauverwaltung – Niederlassung Münster. Hier informierte uns Herr Brüggemann über die Arbeit des Amtes, speziell darüber, wie in der Praxis denn nun wirklich trassiert wird.
>
> Gemäß den Richtlinien für die Anlage von Straßen – RAS (Teil 1: Linienführung RAS-L) soll nämlich mit Übergangsbögen in Form von Klothoiden und Kreisen gearbeitet werden. Klothoiden zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen proportionalen Krümmungsanstieg zur Länge $L$ besitzen [...]. Hierdurch werden Krümmungssprünge gänzlich vermieden und harmonische Trassenführungen gewährleistet. Im Unterschied zum Polynom fünften Grades [...] ist die Krümmung hier konstant oder ändert sich nur linear.[24]

---

[24] [Projekt 8, 2001]

Diese Interpretation des abschließenden Satzes aus der Lösungsskizze zu oben diskutierter EPA-Aufgabe,

> [die] Charakterisierung „ruckfrei" bietet Anlass für vertieftes Hinterfragen[,][25]

ist in der Praxis wünschenswert für einen anwendungsorientierten Unterricht.

# 7 Die Entwicklung der Trassierungselemente in der Wirklichkeit

Wie wurde und wird nun eigentlich wirklich trassiert? Und wie haben sich die Trassierungsmodelle entwickelt? Straßen werden von Bauingenieuren geplant: Werfen wir also einige Blicke in die Fachliteratur dieser Berufsgruppe, um Einblicke in die Wirklichkeit der Linienführung – und ihre normativen Modelle – zu erhalten; oder wir schauen uns das Objekt „Straße" selbst an – um selber deskriptive Modelle entwickeln zu können.

## 7.1 Die klassischen Trassierungselemente

Das älteste Trassierungselement ist die Gerade:

> Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Das war ein Grund, weshalb man eine Zeitlang glaubte, Straßen möglichst mit langen Geraden trassieren zu müssen. [...]
>
> Die Römer hatten ihr Streckennetz meist über Dutzende von Kilometern schnurgerade angelegt, weil es beim Marsch zu Fuß oder mit Tieren sehr auf die kürzeste Entfernung ankam. Wir können heute noch Straßen aus der Eifel nachweisen, die von dort schnurgerade auf den Rhein bei Köln zuliefen.[26]

Auch das 10 000 km messende Straßennetz der Inkas,

> ein in der Welt bis dahin einmaliges Straßensystem[,][27]

wurde von der Gerade beherrscht:

> Das Prinzip der mathematischen Zielstrebigkeit herrschte hier so konsequent, dass z. B. Sümpfe und Seen nicht umgangen, sondern mittels Steindämmen und Pontonbrücken geradlinig gequert wurden. Nach dem gleichen Prinzip überwand man im Hochgebirge bis hinauf zu 4 000 m Höhe sich in den Weg stellende Schluchten mittels kühner, an Pflanzenfasern hängender Brücken und Felsmassive durch Tunnel.[28]

Dies war durchaus zweckmäßig,

> denn die Inkas kannten das Rad nicht. [...]
>
> Auf diesem Entwicklungsstand des Verkehrs war tatsächlich die Einsparung jeden Meters Gewinn, und da Neigungen, die dem rollenden Rad nicht zumutbar wären, ja selbst

---

25 [EPA 2003, 43]

26 [Pietzsch 1989, 94]

27 [Gläser 1972, 62]

28 a. a. O.

> Treppenpartien von leichtfüßigen Läufern und bedächtigen Lamatritten anstandslos zu nehmen waren, bildete die mathematisch kürzeste Verbindung von Zwangspunkten das beste und einzige Trassierungselement.[29]

Nicht nur wegökonomisch, sondern auch fahrpsychologisch versprach man sich bis weit ins 20. Jahrhundert hinein von der Geraden Vorteile:

> Der andere Grund wurde darin gesehen, dass der Fahrer keine Lenkbewegungen ausführen und daher wenig Augenmerk auf die Fahrbahn legen musste.[30]
>
> So würde, ohne Veränderung der Fußhaltung, zwei Finger leicht am Lenkrad, das Fahren zum reinen, unbelasteten Vergnügen werden.[31]

Und:

> Die Gerade, so nahm man an, reduziere den Zeitaufwand, den Fahrzeugverschleiß und den Kraftstoffverbrauch auf ein Minimum.[32]

Diese Annahmen prägten die Linienführung von Straßen bis weit in unsere Zeit:

> In den Jahren 1923/24 entstand eine erste Autobahn von Mailand aus über 130 km nach den lombardischen Seen. [...]
>
> Zwischen 1929 und 1935 folgten in Italien weitere 500 km [...]. Die Linienführung ist außerordentlich starr. Fast kann man es historische Konsequenz nennen, wenn hier auf klassischem Boden jene römische [...] Gerade den Staub zweier Jahrtausende abschüttelte und zu neuem Leben erwachte. Sie ist mit Recht als einzig angewandtes Trassierungselement zu bezeichnen, da die nur infolge unumgänglich nötiger Richtungsänderungen eingefügten Kreisbögen stets so kurz als möglich gehalten sind. [...] Übergangsbögen sind nicht angewandt.[33]

Auch bei den ersten deutschen Autobahnen war die Gerade

> das primäre und allfällig anzustrebende Trassierungselement [...].[34]

Aber nicht alle Hoffnungen in die Gerade erfüllten sich:

> Nach Inbetriebnahme der ersten Autobahnabschnitte zeigten sich vornehmlich auf langen Geraden Erscheinungen, für die zunächst Erklärungen nicht zur Hand waren: Spuren abgeirrter Fahrzeuge fanden sich auf den frischen Rand- und Mittelstreifen; es geschahen Unfälle, achtzig Prozent davon durch Auffahren auf haltende Fahrzeuge.[35]

Aus diesem und aus anderen Gründen trat neben die Gerade der Kreisbogen als Trassierungselement; dabei spielen bis heute normative – manchmal sehr einfache – mathematische Modelle eine Rolle.

---

[29] a. a. O.

[30] [Pietzsch 1989, 94]

[31] [Gläser 1972, 71]

[32] [Gläser 1972, 70]

[33] [Gläser 1972, 67]

[34] [Gläser 1972, 70]

[35] [Gläser 1972, 73]

> Die in Deutschland zwischen 1934 und 1940 gebauten Autobahnen weisen mit geringen Ausnahmen als Trassierungselemente nur Geraden und Kreisbögen auf [...].[36]

> Heute wird die Gerade im Straßenbau oft durch eine weitgeschwungene Linie ersetzt, weil die Gerade [...] zu einem harten, unharmonischen Linienverlauf führen kann und weil sie nur wenig Anpassungsvermögen an die verschiedenen Landschaftsformen zeigt. [...]

> Die RAS–L begrenzt die Länge der Geraden $[\mathrm{m}]$ auf das 20-fache der Entwurfsgeschwindigkeit $V_\mathrm{e}$ $[\mathrm{km/h}]$.[37]

Abb. 7: A7 bei Bad Hersfeld

Die Aufnahme des Verlaufs der A7 bei Bad Hersfeld (Abb. 7) zeigt eindrucksvoll, dass sich die Kombination Gerade-Kreisbogen problemlos durchfahren lässt.

## 7.2 Spuren im Schnee

Das Geraden und Kreisbögen ergänzende Trassierungselement wurde durch praktische Beobachtungen und theoretische Überlegungen gewonnen. Zu Beginn der 1940er Jahre begann man Fahrspuren im Schnee zu studieren, begann sich also dafür zu interessieren, wie denn die Autos tatsächlich auf den bereits längst gebauten Straßen fahren (Abb. 8[38]).

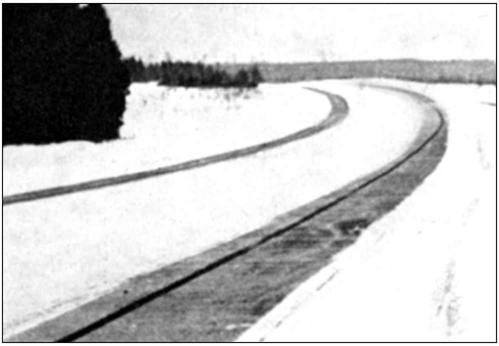


Abb. 8: Schneespur auf der Autobahn (aus [Gläser 1972, 23])

## 7.3 Die Klothoide als Trassierungselement

Auf diesem Weg kam die Klothoide (wieder) ins Spiel – Polynome wurden schnell verworfen:

> Als uns der Schienenweg die Möglichkeit eröffnete, die Fahrgeschwindigkeiten zu erhöhen, wurde die Notwendigkeit eines Übergangs zwischen der Geraden und dem Kreisbogen bald erkannt. Schon damals suchte man nach einem Übergangsbogen, dessen Krümmung proportional seiner Länge zunimmt. Es wurden also schon zu jener Zeit

---

36 [Gläser 1972, 23]

37 [Pietzsch 1989, 94]

38 Ursprünglich aus einer Arbeit von Gläser von 1943.

die Bedingungen aufgestellt, die nur die Klothoide erfüllt. Trotzdem kam sie erst in den letzten Jahren zur Anwendung.

Der Grund hierfür ist sehr plausibel. Mathematisch ist die Klothoide nur schwer erfaßbar, da die Ableitung der Formeln für die rechtwinkligen Koordinaten $X$ und $Y$ nur durch Fresnelsche Integrale möglich ist. Für die Praxis bedeutete das einen außerordentlich großen Rechenaufwand und damit Unwirtschaftlichkeit für die Anwendung der Klothoide.

Dagegen wurde sehr bald erkannt, daß eine leichter zu erfassende mathematische Kurve, nämlich die kubische Parabel, bis zu einer gewissen Länge die oben gestellte Bedingung näherungsweise erfüllt. Man gab daher der kubischen Parabel den Vorzug.

Da der Übergangsbogen beim Schienenweg nur rein technisch bedingt war, nämlich den seitlichen Ruck beim Übergang von der Geraden zum Kreisbogen aufzunehmen, war seine Bedeutung untergeordnet. Gerade und Kreisbogen blieben die bestimmenden Elemente im Gleisbau.

Als die Straßenfahrzeuge immer mehr an Bedeutung für den Massenverkehr gewannen und ihre Geschwindigkeiten laufend stiegen, wurde die Frage aufgeworfen, ob für den Straßenbau auch Übergangsbögen erforderlich seien. [...]

Beim Bau der Reichsautobahnen wurden 1940 erstmals eingehende Versuche mit Übergangsbögen gemacht. Doch blieb auch hier der Übergangsbogen zunächst nur verbindendes Element zwischen der Geraden und dem Kreisbogen. Erst mit der Zeit wurde erkannt, daß der Übergangsbogen bei genügender Länge die Linienführung wesentlich flüssiger erscheinen läßt. Für diese geforderten Längen war aber die kubische Parabel nicht mehr ausreichend, man stieß also zwangsläufig auf die Klothoide. [...]

Die Trassierung mit der Klothoide [...] kann [...] auch viel besser dem Gelände angepasst werden, sie läßt sich daher gut in die Landschaft eingliedern. [...]

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, daß die Klothoide als drittes Trassierungselement gleichbedeutend neben Gerade und Kreisbogen tritt. Der neuzeitliche Straßenbau ist ohne dieses dritte Element heute nicht mehr denkbar.[39]

Im gleichen Sinne schreiben bereits [Kasper & Schürba & Lorenz 1954, 5]:

Im neuzeitlichen Straßenbau ist der Übergangsbogen ein gleichrangiges Trassierungselement neben dem Kreis und der Geraden. Bei scharfen Kurven zwingen fahrdynamische Erwägungen zu seiner Anwendung, um jähe Wechsel der Fliehkraft zu vermeiden. Fahrpsychologische, geländebedingte und ästhetische Gründe sprechen für seine Verwendung bei allen Trassierungsaufgaben. [...]

Allen praktischen Anforderungen an den Übergangsbogen entspricht am besten die schon um 1860 durch MAX V. LEBER untersuchte und von L. OERLEY 1937 in den Straßenbau aus fahrdynamischen Gründen eingeführte Klothoide.

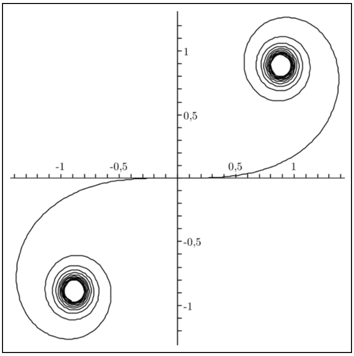


Abb. 9: Plot einer Klothoide

[39] [Osterloh 1991, 11]

Klothoiden (vgl. Abb. 9) lassen sich mit CAS ebenso leicht erzeugen wie Splines, können von daher ebenso leicht im Mathematikunterricht betrachtet werden wie diese. Sie haben allerdings den Vorteil, aus einer *problemadäquaten* Modellierung – sich konstant verändernde Krümmung – und Mathematisierung deduziert werden zu können.

## 7.4 Eine wirkliche Trasse: Beispiel Rettersheim

Schauen wir uns nun einmal eine echte Umgehungsstraße an: Beim Bau der A3 von Frankfurt nach Nürnberg war man in der Situation, den Ort Rettersheim umgehen zu wollen, und hat das Problem folgendermaßen (im Rahmen des offiziell vorgeschriebenen mathematischen Modells mit (langen) Kreisbögen und (kurzen) Klothoiden!) gelöst (Abb. 10 und 11):

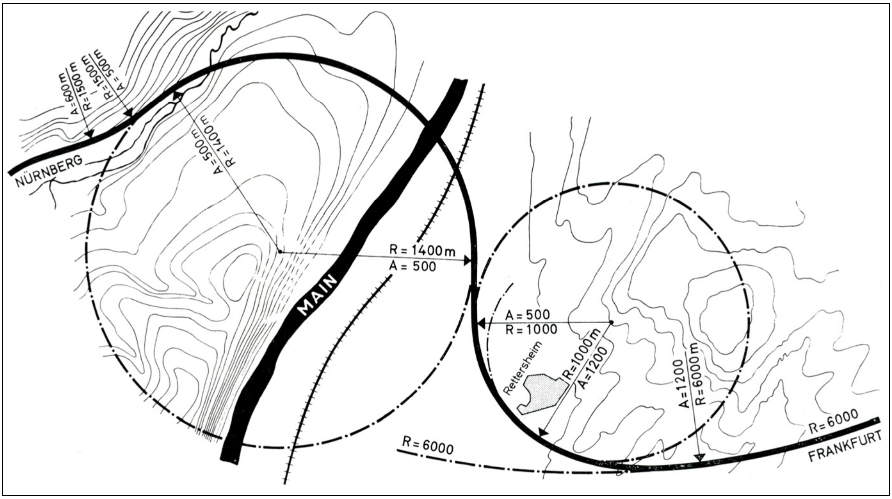



Abb. 10: Verwendung von Kreisbogen und Klothoide bei der Trassierung der Autobahnumgehung von Rettersheim (aus [Lorenz 1971, 399])

Solche Kurven – hier ist es nun wirklich legitim, dafür auch „Straße“ zu schreiben – hat man mit Biegestäben, den sog. Splines, in die Pläne gezeichnet.

Abb. 11: Ein aktuelles Satellitenbild der Autobahnumgehung von Rettersheim[40]

[40] Abb. 11: © Luftbild des Bayerischen Landesvermessungsamtes München, Nr. 4547/ 04, http://www.geodaten.bayern.de/bayernviewer/

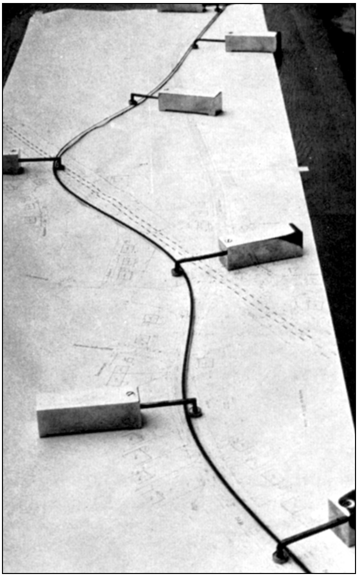


Abb. 12: Verwendung des Biegestabes (Spline) im Lageplan (aus [Lorenz 1971, 41])

Da die so realisierten Biegekurven allerdings nicht den Vorgaben entsprachen, hat man diese Näherungen durch Verwendung von Kurvenlinealen mit den gewünschten Kurven präzisiert (Abb. 12 und 13).

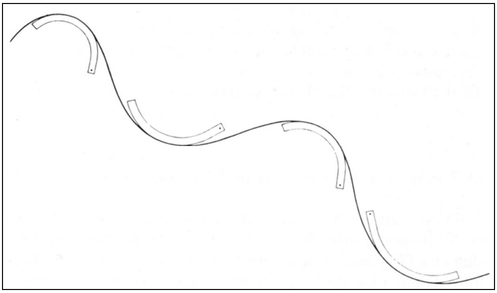


Abb. 13: Trassierung mit dem Biegestab: In die Bogen der Biegestablinie werden Kurvenlineale eingelegt. Die dazwischen befindliche S-Kurve kann als Wendelinie mit Klothoiden eingerechnet werden. Das Ergebnis ist eine geschwungene Trasse ohne Unstetigkeiten in der Krümmung (aus [Pietzsch 1989, 279]).

Versuchen wir nun, ein deskriptives Modell der realen Kurve zu erstellen, und nehmen wir numerische Splines zu Hilfe, so stehen wir vor dem bekannten Problem: Numerische Splines – und das gilt auch für die sog. B-Splines (z. B. [Deuflhard & Hohmann 1991, 220 ff.]) – sind, im Gegensatz zu den realen Splines, abhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Die von uns betrachtete Straße enthält Viertelkreisbögen, und bereits für diese erhalten wir die unterschiedlichsten „Näherungen" – denen man die Konsequenz der Vernachlässigung des Steigungsterms bei der Modellierung der Biegeenergie deutlich ansieht (Abb. 14):

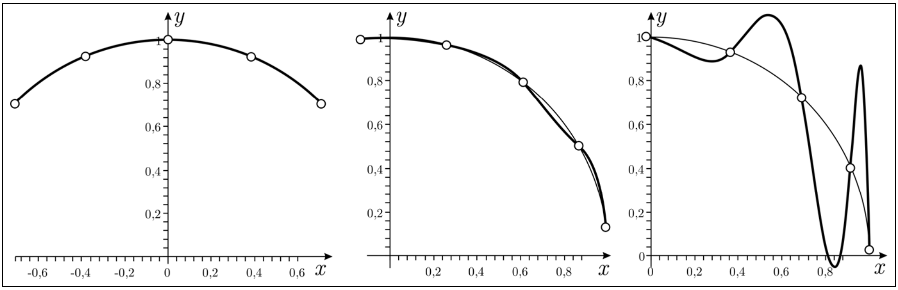



Abb. 14: Modellierung eines Viertelkreisbogens mit einem Spline bei bezüglich der Bogenlänge äquidistanter Stützstellenwahl und unterschiedlicher Koordinatisierung

Hier können wir eine durchaus sehr interessante Eigenschaft von Splines entdecken, die im Mathematikunterricht diskutiert werden kann – allerdings ist dazu die Verkleidung der Kurve als Straße völlig überflüssig.

### 7.5 Auch Splines sind keine Splines

Eine Bemerkung zu Splines ist noch nötig: Mathematische Splines und physikalische Splines sind verschiedene Objekte, die den gleichen Namen tragen, aber sie sind nur a posteriori miteinander verwandt.[41]

I. J. Schoenberg verwendet 1946 in seiner Arbeit "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions" erstmals die Bezeichnung „Spline" für zweimal stetig differenzierbare Interpolationsfunktionen, deren vierte Ableitung verschwindet.[42] Diese Glattheitsbedingung hat ihre *Analogie* in glatten Straklatten (engl.: *splines*), was die Namensgebung motiviert. Die physikalischen Eigenschaften dieser Straklatten spielten in der Splinetheorie zu diesem Zeitpunkt keine Rolle!

Erst zehn Jahre später beweist J. C. Holladay in seiner in der Zeitschrift *"Math. Table Aids Computations"* erschienenen Arbeit "Smoothest curve approximation", dass diese Splinefunktionen die (unter gewissen Vernachlässigungen modellierte!) Biegeenergie $\int f''(x)^2\,dx$ minimieren.[43] Diese Untersuchungen wurden in der Folge von verschiedenen Autoren systematisch vertieft und wegen ihres Verallgemeinerungspotenzials zum heutigen Ausgangspunkt der Splinetheorie.

## 8 Modellbildung im Mathematikunterricht

> Gute Trassierung ist echtes, schöpferisches Tun, das nur gedeihen kann, wenn naturwissenschaftlich-technische, ästhetische und psychologische Fakten gleichermaßen zu Grunde gelegt werden.[44]

Trassierung von Straßen ist ein außerordentlich komplexes Gebiet: Im Bauingenieurstudium dauern entsprechende Veranstaltungen mindestens ein Semester. So ist es klar, dass bei einer Diskussion im Mathematikunterricht starke Vernachlässigungen realer Umstände unumgänglich sind. In unserer obigen Diskussion haben

---

41 Die *falsche Identifikation* von mathematischen Splines und Straklatten findet man immer wieder, nicht untypisch dafür ist z. B.: „Ein **Spline** ist ein Begriff aus der numerischen Mathematik und bezeichnet ein stückweises Polynom [...]. Der Begriff stammt aus dem Schiffsbau: Eine lange dünne Latte (Straklatte), die an einzelnen Punkten durch Nägel fixiert wird, biegt sich genau wie ein kubischer Spline mit natürlicher Randbedingung." (http://de.wikipedia.org/wiki/Spline, Download vom 21.05.2005)

42 [Böhmer 1974, 16].

43 a. a. O.

44 [Gläser 1972, 74]

wir immer noch viele wichtige Aspekte verschweigen: den Landschafts-Gradienten, die Fahrbahnneigungen, die Umwelt (zu diesem Aspekt gibt es MUED-Materialien, z. B. [Böer & Volk 1982]), Eigentumsverhältnisse (z. B. Felder), politische Gebietsgrenzen usw. Es ist nicht zu erwarten, dass Trassierung von Straßen im Mathematikunterricht authentisch diskutiert werden kann. Hier sollte man sich, wenn man sie zum Thema machen möchte, vielleicht auch von vorneherein bewusst auf kleine Details beschränken, die man lebenswahr unterrichten kann – vielleicht die Untersuchung von Sichtweiten in Abhängigkeit von möglichen Kuppenformen? Weniger ist mehr!

**Danksagung**

Wir danken Hans Schupp für all die wertvollen Anregungen, die er uns im Laufe unserer Beschäftigung mit Fragen der Mathematikdidaktik gegeben hat, in seinen Vorlesungen und in zahllosen weiteren Gesprächen. Und nicht zuletzt danken wir ihm für den Anstoß, uns die Trassierungsaufgabe genauer anzusehen und zu diskutieren.

**Literatur**

Böer, Heinz & Volk, Dieter [1982]: Trassierung von Autobahn+Kreuz+en, autogerecht oder. MUED-Unterrichtsprojekte Nr. 1. Göttingen: Gegenwind-Verlag.

Böhmer, Klaus [1974]: Spline-Funktionen – Theorie und Anwendungen. Stuttgart: Teubner.

Deuflhard, Peter & Hohmann, Andreas [1991]: Numerische Mathematik. Berlin: de Gruyter.

EPA [2003]: Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (Beschluss der KMK vom 1. 12. 1989 i. d. F. vom 24. 05. 2002). München / Neuwied: Luchterhand.

Fischer, Roland & Malle, Günther [1985]: Mensch und Mathematik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik; Band 1. Mannheim / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Gläser, Hans [1972]: Trassierung von Straßen und Gewässern. Berlin: VEB Verlag für Verkehrswesen.

Henn, Hans-Wolfgang [1991]: Aufgaben für den Computereinsatz im Mathematikunericht – „Die Alternative Abituraufgabe“. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hard- und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker, 124–125.

Henn, Hans-Wolfgang [1997]: Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE. Bonn: Dümmler.

Herget, Wilfried [1996]: Die umgekehrte Kurvendiskussion. In: *mathematik lehren*, Heft 76, 67.

Herget, Wilfried [1997]: Patente, Tüftler und passende Polynome. In: *mathematik lehren*, Heft 83, 66.

Kasper, Hugo & Schürba, Walter & Lorenz, Hans [1965]: Die Klothoide als Trassierungselement. Bonn: Dümmler, Vierte Auflage (1. Auflage 1954).

Knechtel, Heiko & Weiskirch, Wilhelm [2001 a]: Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern. Teil 1. Hannover: Schroedel.

Knechtel, Heiko & Weiskirch, Wilhelm [2001 b]: Abituraufgaben mit Graphikrechnern und Taschencomputern. Teil 2. Hannover: Schroedel.

Kroll, Wolfgang & Stachniss-Carp, Sibylle & Weller, Hubert [2004]: Interpolation mit Splines. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **57**(2004)5, 266–270.

Kruckenberg, [1935]: Die Welt der Zahl im Unterricht. Hannover / Berlin / Darmstadt: Schroedel (6. unveränderte Auflage 1950).

Lorenz, Hans [1971]: Trassierung und Gestaltung von Straßen und Autobahnen. Wiesbaden / Berlin: Bauverlag.

Osterloh, Horst [1991]: Straßenplanung mit Klothoiden und Schleppkurven. Einrechnung mit Trasse und Gradiente. Wiesbaden / Berlin: Bauverlag, 5., neubearbeitete und erweiterte Auflage (1. Auflage 1958).

Pietzsch, Wolfgang [1989]: Straßenplanung. Düsseldorf: Werner-Verlag GmbH, 5. Auflage.

Projekt 8 [2004]: http://www2.learnline.de/angebote/blickpunktmatnat/autoren/smims/2001/projekt8/autobahn/Trassierung_Autobahnkreuz.html

Rolfs, Josef [2005]: Wie krumm ist die Banane? Übergangsbögen, Stützstellenpolynome und Splines — ihre Krümmung und Gesamtkrümmung. Handout zu einem Vortrag auf dem 96. MNU-Kongress in Kiel vom 20.–24. März 2005.

Schupp, Hans [1988]: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: *Der Mathematikunterricht* **34**(1988)6, 5–16.

Schupp, Hans & Dabrock, Heinz [1995]: Höhere Kurven. Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Mannheim / Leipzig / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Steinberg, Günter [1995]: Sanft krümmt sich, was ein Gleis werden will. In: *mathematik lehren* 1995, Heft 69, 61–64.

Wittmann, Erich Christian [1981]: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg, 6., neu bearbeitete Auflage.

### Redaktionelle Bemerkung

Wir haben uns erlaubt, offensichtliche Schreibfehler in den Zitaten zu korrigieren.

### Anschrift der Verfasser

Dr. Anselm Lambert
Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Postfach 151150, 66041 Saarbrücken
alambert@math.uni-sb.de

StR Uwe Peters
Landesinstitut für Pädagogik und Medien
Beethovenstraße 26, 66125 Saarbrücken
upeters@lpm.uni-sb.de