Extremwertprobleme

Bemerkungen zur (Wieder-)Belebung eines alten Themas

von

Rainer Danckwerts, Siegen, und Dankwart Vogel, Bielefeld

Kurzfassung: Extremwertaufgaben haben im Analysisunterricht ihren festen Platz. Mit Recht, steht doch mit den Kriterien der Kurvendiskussion ein leistungsfähiger Kalkül zur Verfügung. Gelegentlich hat man allerdings den Eindruck, als wäre das Thema geradezu gebunden an diesen analytischen Kalkül. Diese verengte Sicht zu relativieren ist ein erster Schritt zur Öffnung. Welche Chancen des verständigen Umgangs mit dem Gegenstand sich dadurch ergeben, das ist Inhalt dieses Beitrags, der sich auf [Danckwerts & Vogel 2001] stützt.

Abstract: Solving extreme value problems belongs into the calculus classroom, and rightly so, since the criteria of curve sketching place an efficient solution algorithm at our disposal. Now and then, however, one is left with the impression that this topic is virtually bound to be tied to these calculus procedures. Relativising this very narrow view is a first step in broadening the scope of the topic. The article presents the opportunities that arise from such a change in attitude and thus allow for an understanding treatment of this subject.

1 Anmerkungen zum Standardkalkül

Die schulklassischen Kriterien der Kurvendiskussion sind ein leistungsfähiges Instrument zur Berechnung lokaler Extremwerte. Sie begründen den im Analysisunterricht traditionell vertrauten Algorithmus zur Lösung von Extremwertproblemen:

1. Schritt:	Welche Größe ist zu optimieren? Stelle einen Funktionsterm auf.
2. Schritt:	Sind Variable zu eliminieren? Suche nach Nebenbedingungen.
3. Schritt:	Berechne die lokalen Extremstellen im Definitionsbereich.
4. Schritt:	Sind die lokalen Extrema auch global? Untersuche das Verhalten am Rande des Definitionsintervalls.
5. Schritt:	Wie ist das Ergebnis (im Sachkontext) zu interpretieren?

Wie dieses Rezept im Einzelfall anzuwenden ist, ist der Leserin und dem Leser vertraut und hier nicht Gegenstand. Ziel dieses Abschnitts ist es, herauszuarbeiten, dass diesem Verfahren bereits eine *analytisch-theoretische* Perspektive innewohnt, die über eine Problemlösung aus *empirisch-numerischer* Sicht (etwa mit einem Funktionenplotter) weit hinausgeht.

Wir diskutieren diesen Unterschied an einem der Analysis-Lehrkraft wohlbekannten Beispiel. Der Computer (mit seiner numerischen, grafischen und algebraischen Potenz) wird dabei in natürlicher Weise ins Spiel kommen.

1.1 Beispiel: Die optimale Dose – die empirisch-numerische Lösung

Welche Abmessungen hat die zylindrische 1-Liter-Dose mit minimaler Oberfläche?

Es gibt gute Gründe für die Beliebtheit dieses Problems: Es ist unmittelbar zu verstehen, hat über die Konservendose einen Alltagsbezug, und dennoch ist die Lösung nicht offensichtlich. (Für manche Schülerinnen und Schüler ist es nicht einmal selbstverständlich, dass die Oberfläche überhaupt variiert.)

Aus Abb. 1 liest man ab:

$$O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Nach Elimination der Höhe h über die Nebenbedingung $\pi r^2 h = 1$ (Radius r und Höhe h in dm) erhält man für die Zielfunktion

$$O(r) = 2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right), \quad r > 0\,.$$

Da mit größer werdendem r der Summand $\pi\, r^2$ zunimmt, der Summand $\frac{1}{r}$ aber abnimmt, ist nicht ohne weiteres zu erkennen, für welchen Radius die Oberfläche minimal wird. Es ist wichtig, dieser Entdeckung im Unterricht Raum zu geben. Sie präzisiert das Gefühl, dass die Lösung nicht offensichtlich ist.

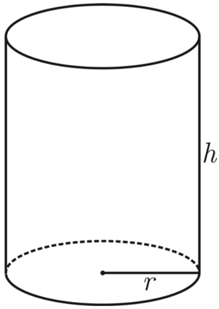


Abb. 1:
Die optimale Dose

Ein Blick auf den Graphen von O genügt (Funktionenplotter, Abb. 2), um das gesuchte Minimum hinreichend genau abzulesen:

Das gesuchte Minimum liegt bei $r_{\min} \approx 0{,}54\ \mathrm{dm} = 5{,}4\ \mathrm{cm}$ mit zugehöriger Höhe $h_{\min} \approx 10{,}9\ \mathrm{cm}$.

Damit ist das Problem der optimalen Dose gelöst, denn für Praktiker genügt diese Genauigkeit allemal!

Das gestellte Problem wurde ohne Rückgriff auf den Ableitungskalkül vollständig gelöst.

Der Funktionenplotter hat die Bedeutung des theoretischen Kalküls relativiert.

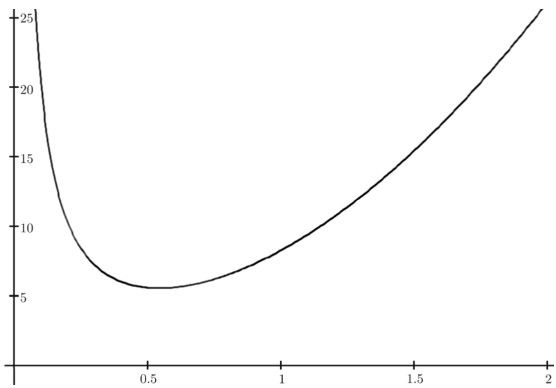


Abb. 2: Ein grafikfähiger Taschenrechner genügt.

1.2 Die optimale Dose – der theoretische Standpunkt

Vergleicht man die gefundenen Werte für Radius und Höhe, so bemerkt man: Die optimale Dose scheint dadurch ausgezeichnet zu sein, dass sie ebenso hoch wie breit ist. Wer sicher sein will, dass dies nicht nur näherungsweise, sondern exakt so ist, *muss eine theoretische Anstrengung auf sich nehmen*.

Hier ist unser Standardkalkül das Mittel der Wahl: $O'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{1}{r^2}\right) = 0$, also

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} .$$

Die Umformung

$$O'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{1}{r^2}\right) = 4\pi \, \frac{r^3 - \frac{1}{2\pi}}{r^2}$$

zeigt, dass links von $r_{\min}$ die Ableitung $O'(r)$ negativ und rechts davon positiv ist. Damit fällt O links von $r_{\min}$, rechts davon wächst sie. Folglich ist die Oberfläche der Dose für $r_{\min}$ minimal. (Dieses Argument beleuchtet einen wichtigen Punkt: Nicht immer wird man reflexartig zur zweiten Ableitung greifen!)

Die zugehörige Höhe $h_{\min}$ ist dann

$$h_{\min} = \frac{1}{\pi r_{\min}^2} = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}{\pi \cdot \frac{1}{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 2\, r_{\min} .$$

(Diese Termumformungen kann man einem Computeralgebrasystem überlassen.)

Die Höhe der optimalen Dose ist exakt so groß wie ihr Durchmesser, d. h., die Dose ist in der Tat ebenso hoch wie breit. Dieses (exakte) Ergebnis wäre ohne eine theoretische Anstrengung nicht zu haben gewesen. *Antworten auf theoretische Fragen sind eben nur mit theoretischen Hilfsmitteln möglich.*

Theoretische Einsichten haben ihren Preis. Sie beruhen auf machtvollen Werkzeugen, hier dem Ableitungskalkül mit den Kriterien der Kurvendiskussion. Diese sind ihrerseits angewiesen auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen und damit auf eine Idealisierung, die in der ursprünglichen Problemstellung nicht zwingend angelegt ist. Die Nutzung eines Funktionenplotters kommt in der Tat ohne die Vollständigkeit allein mit den rationalen Zahlen aus.

Fazit:

Eine auch noch so raffinierte Weiterentwicklung elektronischer Helfer wird an der Bedeutung theoretischer Modellierungen nichts ändern.

1.3 Zusammenfassung

Im Zuge der stürmischen Weiterentwicklung elektronischer Werkzeuge wird es für den Analysisunterricht immer drängender, die *Beziehung zwischen dem empirisch-numerischen und dem theoretischen Standpunkt* schärfer in den Blick zu nehmen. Ein Paradebeispiel für dieses Spannungsfeld sind die Extremwertaufgaben – hier erfährt der analytische Standardkalkül eine begründete Relativierung. Im Unterricht wird es nun darauf ankommen, die Berechtigung *beider* Standpunkte herauszuarbeiten.

2 Wege der Öffnung

Eine Fixierung auf das Standardverfahren verhindert die Vielfalt von Lösungsansätzen und Lösungsmethoden, schwächt so die heuristische Dimension und damit auch die Akzeptanz des Unterrichts. Welche Aspekte des verständigen Umgangs mit dem Thema Extremwertprobleme sich durch eine Öffnung ergeben, das lässt sich an einem einzigen Beispiel entfalten.

Es ist das *isoperimetrische Problem für Rechtecke*. Wir propagieren es keineswegs als ideales Einstiegsbeispiel für den Unterricht. Gleichwohl wird sich zeigen, dass sich daran unsere *grundlegenden Orientierungen* vorzüglich erläutern lassen.

Es geht um den bekannten

Satz (Isoperimetrisches Problem für Rechtecke):
Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

Die analytisch geübte Lehrkraft wird vielleicht sofort sagen: Klarer Fall, wenn a der feste halbe Umfang ist und x die eine Seitenlänge des Rechtecks, dann ist $a - x$ die andere (Abb. 3). Die Zielfunktion $f(x) = x(a-x)$ ist zu maximieren. Aus $f(x) = -x^2 + ax$ folgt $f'(x) = -2x + a$, und $f'(x) = 0$ liefert $x = \frac{a}{2}$. Da dann die andere Seite mit $a - x = a - \frac{a}{2}$ ebenfalls gleich $\frac{a}{2}$ ist, hat man ein Quadrat!

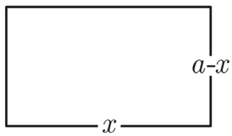


Abb. 3:
Das variable Rechteck

Aber die Sache geht tiefer ...

2.1 Verstehen des Problems

Jeder, der dieses Problem schon einmal mit Schülerinnen und Schülern im Unterricht behandelt hat, weiß, wie wenig selbstverständlich es ist, das Problem überhaupt zu verstehen. Selbst wenn man damit beginnt, das Problem der sinnlichen Wahrnehmung zugänglich zu machen, kann man Überraschungen erleben.

Man hält etwa einen Bindfaden fester Länge zwischen beiden Händen und lässt die Form des Rechtecks variieren (Abb. 4).

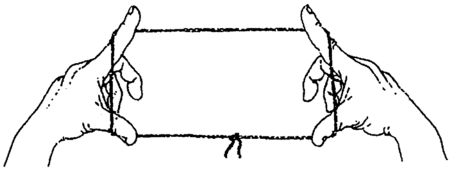


Abb. 4: Das variable Rechteck – handgreiflich (Zeichnung: Julian Jusim)

Damit ist das Verständnis des Problems noch lange nicht gesichert. Auf die Frage, was sich hier eigentlich ändert, antwortet etwa eine Schülerin:

„Na, alles natürlich, denn die Form des Rechtecks ändert sich ja laufend."

Auf Nachfrage stellt sich heraus, dass sie tatsächlich davon überzeugt ist, dass hier Seitenlängen, Inhalt *und* Umfang variieren. Dass alle konkurrierenden Rechtecke wegen der festen Fadenlänge denselben Umfang besitzen, muss erst bewusst gemacht werden. Nur dann wird aus der Situation eine verstehbare Problemstellung. Dies gilt prinzipiell für jede Extremwertaufgabe. *Es kommt entscheidend darauf an, sich genau klar zu machen, was fest bleibt und was variiert.*

Es geht darum, sich noch vor der Problem*lösung* stärker um ein Verständnis der Problem*stellung* zu bemühen, so wie es schon Pólya in seiner Heuristik empfohlen hat, vgl. [Pólya 1995, 19]. Nach aller Erfahrung führt ein genügend breit angelegtes Unterrichtsgespräch über die Feststellung, dass der Umfang konstant bleibt, auch zu der dann sinnvollen Fragestellung*, bei welcher Stellung die größte Fläche eingeschlossen wird.* Vielfach führt die Intuition der Schülerinnen und Schüler zu der lapidaren Feststellung: „Natürlich beim Quadrat." Und nicht jeder wird das Bedürfnis haben, nach dem Grund zu fragen.

2.2 Heuristik und Beweisen

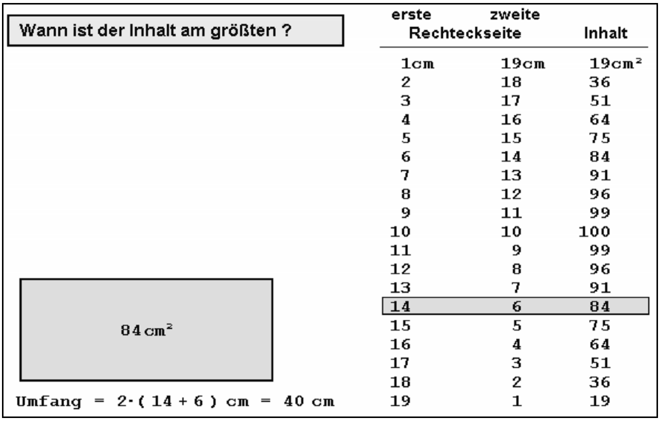
Wodurch lässt sich der Prozess

- des *Auffindens* der Lösung
- und einer *Vergewisserung* durch Argumente

unterstützen?

Eine computergestützte Möglichkeit, um auf die Lösung zu stoßen, besteht darin, für eine konkrete Fadenlänge (etwa 40 cm) die Gesamtheit der konkurrierenden Konstellationen diskret zu durchlaufen und in einer Tabelle zu organisieren (Abb. 5; siehe hierzu etwa die Realisierung auf der CD-ROM [Danckwerts & Vogel & Maczey 2001]). Diese Visualisierung enthält bereits Ansätze für die Vergewisserung, dass das Quadrat optimal ist. Schließlich nimmt der Inhalt der konkurrierenden Rechtecke bis zum quadratischen Fall monoton zu, um danach in gleicher Weise abzunehmen. Diese Beobachtung wird durch die links neben der Tabelle mitlaufende Rechteckfolge begleitet.

Will man dem „Warum?" mit elementaren Mitteln tiefer nachgehen, könnte man fragen, auf welche Weise eine Abweichung vom Quadrat zu einem Schwund des Flächeninhalts führt.



erste Rechteckseite	zweite Rechteckseite	Inhalt
1cm	19cm	19cm²
2	18	36
3	17	51
4	16	64
5	15	75
6	14	84
7	13	91
8	12	96
9	11	99
10	10	100
11	9	99
12	8	96
13	7	91
14	6	84
15	5	75
16	4	64
17	3	51
18	2	36
19	1	19

Abb. 5: Je nachdem, welche Zeile man anklickt, erscheint links das zugehörige Rechteck mit der Größe seines Inhalts.

Man wird dann also vom Quadrat aus schauen und untersuchen, wie sich ein leichtes „Wackeln" an einer Seite auf den Flächeninhalt auswirkt. Im Falle unserer Rechtecke mit $40\,\mathrm{cm}$ Umfang hat das Quadrat die Seitenlänge $10\,\mathrm{cm}$. Verkürzt man die eine Seite zum Beispiel um $2\,\mathrm{mm}$, so muss die andere um $2\,\mathrm{mm}$ verlängert werden (Konstanz des Umfangs!). Das entstehende Rechteck hat dann den Inhalt

$$(10 + 0{,}2)\,(10 - 0{,}2) = 10^2 - 0{,}2^2,$$

und dieser ist kleiner als 10^2 (der Inhalt des Quadrats).

Natürlich hängt das Beweisargument nicht an den $2\,\mathrm{mm}$. Entsprechend kann man mit *jeder* Abweichung argumentieren.

Die geometrische Fassung dieses Arguments zeigt die Abb. 6.

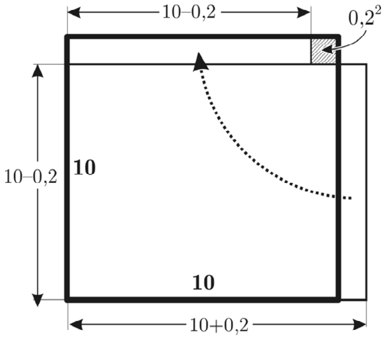


Abb. 6: Quadrat (fett umrandet) und Rechteck haben denselben Umfang, aber der Inhalt des Rechtecks ist um den des kleinen Quadrats kleiner.

2.3 Einbeziehung historischer Momente

Es ist bemerkenswert, dass die Entdeckung der Optimalität des Quadrats in die Antike zurückreicht. So findet man die vorgestellte – und im Kern geometrische – Beweisidee bereits in den berühmten *Elementen* des Euklid um 300 v. Chr. Unser Resultat ist dort als Spezialfall enthalten (vgl. hierzu [Danckwerts & Vogel 1997]).

2.4 Elementare Lösungsvarianten

Die bekannteste elementare Lösungsvariante für unser Problem verwendet die algebraische Methode der *quadratischen Ergänzung*. Ihre Anwendung setzt die funktionale Sicht des Problems voraus. Da der Umfang u fest bleibt, kann nur *eine* Rechteckseite frei variieren.

Betrachtet man den Flächeninhalt A als Funktion der frei variierenden Seite x, so ist die andere Rechteckseite $\frac{u}{2} - x$, und man erhält

$$A(x) = x\left(\frac{u}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{u}{2}x = \left(\frac{u}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{u}{4}\right)^2.$$

$A(x)$ ist maximal, wenn $(x - \frac{u}{4})^2$ den kleinstmöglichen Wert annimmt, also gleich null ist, was zu $x = \frac{u}{4}$ führt. Die andere Rechteckseite ist dann $\frac{u}{2} - \frac{u}{4} = \frac{u}{4}$, d. h., das Rechteck ist ein Quadrat.

(Im Allgemeinen wird man auf Vorwissen über Parabeln zurückgreifen können und eine weit elegantere Schlussweise vorziehen: Der Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen. Die sind hier $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{u}{4}$, da $A(x) = x\left(\frac{u}{2} - x\right)$ ist. Daher liegt das Maximum bei $x = \frac{u}{4}$.)

Gerade der argumentative Umgang mit dieser Lösungsvariante ist alles andere als leicht, aber sehr mächtig. Der unterliegende mathematische Sachverhalt ist die Nichtnegativität von Quadraten ($x^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$ ist). Erneut erweist sich als wichtig, sich klar zu machen, was fest bleibt (hier der Minuend $(\frac{u}{4})^2$) und was variiert (hier der Subtrahend $(x - \frac{u}{4})^2$)!

Eine weitere algebraische Variante nutzt die schlagkräftige Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel (*Mittelungleichung*), siehe auch Abb. 7 (für eine umfassende Einordnung in den Kontext der Mittelwertbildung vgl. etwa [Hischer 1998]):

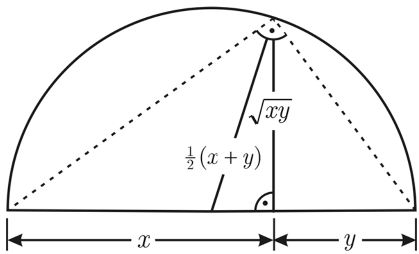


Abb. 7: Geometrische Deutung der Mittelungleichung (Höhensatz des Euklid)

Für beliebige Zahlen $x, y \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = y$ ist.

So löst die Mittelungleichung unser Problem: Sind x und y die beiden Rechteckseiten, dann ist $\frac{1}{2}(x + y)$ ein Viertel des Umfangs und damit konstant. Folglich ist $x \cdot y$ (der Flächeninhalt) genau dann maximal, wenn in der Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, d. h., wenn $x = y$ ist, d. h. ein Quadrat vorliegt. (Zum Gebrauch der Mittelungleichung vgl. [Danckwerts & Vogel 2001].)

Der Einsatz der Mittelungleichung zur Lösung von Extremalproblemen erscheint trickreich und ungewohnt. Es ist eine Frage der Übung, sich dieser Methode sicher zu bedienen – ihre Reichweite ist erstaunlich. Erneut erweist sich dabei als entscheidend, dass man den Blick dafür schult, was fest bleibt und was variiert.

Für den Unterricht plädieren wir mit [Schupp 1997] dafür, elementare Lösungsmethoden von Anfang an einzubeziehen und nicht in eine exotische Ecke abzudrängen. In der Regel liegen sie dicht an der Problemstellung, weil kein entwickelter Kalkül den Blick auf das versperrt, was ein Extremalproblem ausmacht:

> Es wird nun klar sein, was eine Maximumaufgabe ist und was unter einer wirklichen Lösung zu verstehen ist: die Aufweisung einer Lösung und der Nachweis, daß diese in der in Rede stehenden Eigenschaft (hier im Flächeninhalt) alle Vergleichsfiguren übertrifft. [Rademacher & Toeplitz 1968, 11]

2.5 Zusammenfassung

Das isoperimetrische Problem für Rechtecke offenbart einen überraschenden elementarmathematischen Beziehungsreichtum, dessen Kern die enge Verflechtung zwischen Geometrie und Algebra ist. Zugleich bietet es die Gelegenheit, drei vernachlässigte Aspekte im Umgang mit Extremwertaufgaben konkret aufscheinen zu lassen: Diese sind die *Kraft elementarer Methoden*, die *Einbeziehung historischer Momente* und die das Verständnis unterstützende Nutzung des *Mediums Computer*.

Mit diesem Beispiel wird zugleich für einen Mathematikunterricht geworben, dem das Verstehen am Herzen liegt, der die Heuristik zur Geltung bringt und dem Computer einen angemessenen Platz einräumt.

Literatur

Danckwerts, Rainer & Vogel, Dankwart (Hrsg.) [2001]: Der Themenkreis Extremwertprobleme — Wege der Öffnung. *Der Mathematikunterricht* **47**(2001)4.

Danckwerts, Rainer & Vogel, Dankwart [1997]: Ein Blick in die Geschichte: Euklid. In: *mathematik lehren*, Heft 81, 17–20.

Danckwerts, Rainer & Vogel, Dankwart & Maczey, Dorothee [2001]: Der Themenkreis Extremwertprobleme — Wege der Öffnung. CD-ROM zu *Der Mathematikunterricht* **47**(2001)4.

Hischer, Horst [1998]: „Fundamentale Ideen" und „Historische Verankerung" — dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **21**(1998)1, 3–21.

Pólya, George [1995]: Schule des Denkens. Tübingen: Franke, 4. Auflage.

Rademacher, Hans & Toeplitz, Otto [1968]: Von Zahlen und Figuren. Berlin / Heidelberg: Springer; (1930 erste Auflage, 2001 Reprint der zweiten Auflage von 1933).

Schupp, Hans [1997]: Optimieren ist fundamental. In: *mathematik lehren*, Heft 81, 4–10.

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. Rainer Danckwerts
Universität Siegen, FB Mathematik
Emmy-Noether-Campus
Walter-Flex-Str. 3
57068 Siegen

StD Dr. Dankwart Vogel
Andreas-Lamey-Str. 15
33604 Bielefeld