Kann man eine Abkürzung ausweiten?

Variationen zu einer Aufgabe aus den Bildungsstandards Mathematik

von

Werner Blum, Kassel

Kurzfassung: Die nationalen Bildungsstandards Mathematik werden über geeignete Aufgaben konkretisiert, zu deren Lösung gewisse Kompetenzen aktiviert werden müssen. Solche Aufgaben können u. a. dadurch konstruiert werden, dass eine vorgegebene Aufgabe systematisch variiert wird. Im folgenden Aufsatz wird die Beispiel-Aufgabe „Abkürzung“ aus den KMK-Standards in verschiedene Richtungen verändert, bis hin zu offenen und realitätsnahen Varianten.

Abstract: The German Educational Standards for mathematics are illustrated in a concrete form by means of appropriate mathematics tasks which require specific mathematical competencies for their solution. One way in which such tasks can be constructed is by systematically varying a given task. In the present article, the example "Shortcut" from the German Standards is altered in various ways, including open and realistic task variants, to show how this may be done.

1 Bildungsstandards in Mathematik

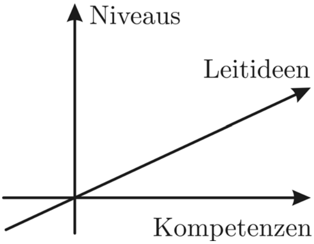
Bekanntlich hat die deutsche Kultusministerkonferenz (KMK) als Reaktion auf PISA für mehrere Fächer und Bildungsstufen die Einführung von *Bildungsstandards* beschlossen, darunter die Standards Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss, für den Hauptschulabschluss nach Klasse 9 und für Klasse 4 der Grundschule. Wesentliche konzeptionelle Grundlage des KMK-Beschlusses war die Expertise [Klieme et al. 2003] der sog. „Klieme-Kommission“. Danach dienen Bildungsstandards erstens der *Orientierung* über verbindlich erwartete Anforderungen, ausgedrückt in Form von Kompetenzen, und zweitens als Grundlage für *Evaluationen* auf Schul- oder Systemebene, aus denen Fördernotwendigkeiten ersichtlich werden.

Bildungsstandards sind fachbezogene Leistungsstandards, orientiert an allgemeinen Bildungszielen. Sie sind keine Unterrichtsstandards, doch zur Standarderfüllung bedarf es eines qualitativ anspruchsvollen Unterrichtens von Mathematik. Insofern ist der wichtigste Zweck von Bildungsstandards die unterrichtliche *Qualitätsentwicklung* und -sicherung.

Die *Mathematik-Standards* basieren auf einem breiten Begriff von mathematischer Bildung, so wie er von [Winter 1995] formuliert wird. Sie sind nach drei Dimensionen konzipiert: Unterschieden werden die angestrebten mathematischen *Kompetenzen*, die *Niveaus* von deren Aktivierung und die stoffinhaltlichen *Leitideen*. Man hat sich bei den beiden Sek.-I-Standards pragmatisch auf sechs Kompetenzen, drei Niveaus und fünf Leitideen verständigt (Abb. 1).

Anforderungsniveaus

- kognitiv niedrig („Reproduktion“)
- kognitiv mittel („Zusammenhänge“)
- kognitiv hoch
  („Verallgemeinerung und Reflexion“)



Leitideen

- Zahl
- Messen
- Raum und Form
- funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall

Kompetenzen

- mathematisch argumentieren
- mathematische Probleme lösen
- mathematisch modellieren
- mathematische Darstellungen verwenden
- mit Mathematik technisch/symbolisch umgehen
- mathematisch kommunizieren

Abb. 1: Bildungsstandards Mathematik Sekundarstufe I

Konkretisiert werden die Bildungsstandards über *Aufgaben*, genauer: über geeignete Sets von Aufgaben, die in angemessener Weise das gesamte Spektrum von Anforderungen (Kompetenzen, Niveaus, Leitideen) widerspiegeln. Die Konstruktion und empirische Prüfung eines umfangreichen Aufgabensets ist seit März 2004 im Gange; dabei hat die KMK die Mathematik als Pilotfach ausgewählt, in dem dieser Prozess der „Normierung der Standards“ exemplarisch durchgeführt wird. Die Aufgaben sind durch vier von den Bundesländern eingesetzte Regionalgruppen entwickelt und von einer aus acht Fachdidaktikern zusammengesetzten „Bewertungsgruppe“ geprüft und überarbeitet worden. Einer der „Bewerter“ ist Hans Schupp. Die empirische Prüfung der Aufgaben wird parallel zu PISA 2006 geschehen.

Beim Prozess der Konstruktion von Aufgaben ist es wichtig, bewusst auf bestimmte Kompetenzen abzuzielen, so etwa auf eine besonders argumentations- oder besonders modellierungsintensive Aufgabenanforderung. Eine gute Möglichkeit ist es dabei, von einer gegebenen Aufgabenstellung auszugehen und dann die Aufgabe gezielt zu *verändern*, so wie es im diesbezüglichen Standardwerk „Thema mit Variationen“ von Hans Schupp meisterhaft vorgeführt wird.[1]

---

1 [Schupp 2002]; siehe auch [Schupp 2000] und [Biermann & Wiegand & Blum 2003].

Im Folgenden wird versucht, eine Beispiel-Aufgabe aus den veröffentlichten Bildungsstandards Mathematik in diesem Sinne zielgerichtet zu verändern. Dies geschieht in mehreren Schritten, mit zunehmenden Ausweitungen und Öffnungen. Dabei wird auch deutlich, dass nicht immer nur das Ziel in Reinform vorgegeben war und die Veränderung daraufhin vorgenommen wurde, sondern dass mitunter auch zunächst eine reizvolle Veränderung nahe lag und dann erst deren Auswirkung auf die Anforderungen analytisch untersucht wurde. Das ist völlig legitim, so lange es kontrolliert geschieht und in den Zweck der kompetenzorientierten Aufgabenvariation eingebettet bleibt.

2 Die Aufgabe und ihr Ursprung

Die folgende Aufgabe „Abkürzung“ (Abb. 2) gehört zu den 37 Aufgaben (Items), die zur Illustration der Mathematik-Standards für den mittleren Bildungsabschluss veröffentlicht worden sind. Aus systematischen Gründen nennen wir sie im Weiteren „Abkürzung 1“.

Abkürzung 1

Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern einen „Schleichweg“.

Äußere dich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg“ durchschnittlich mit 30 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 km/h fahren kann.

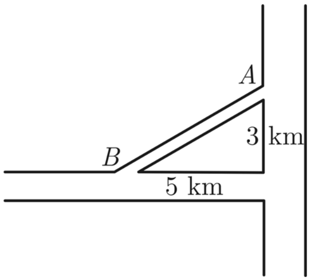


Abb. 2: Aufgabe aus den Mathematik-Standards für den mittleren Bildungsabschluss

Vermutlich ist diese Aufgabe als realitätsbezogene Einkleidung einer einfachen geometrischen Berechnungsaufgabe entstanden (Abb. 3).

Abkürzung 0

Die Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck sind 3 cm und 5 cm lang. Berechne die Länge der Hypotenuse.

Abb. 3: Mögliche Grundlage für „Abkürzung 1“

Es ergibt sich sofort $c = \sqrt{3^2 + 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{34}\ \text{cm} \approx 5{,}83\ \text{cm}$. Zur Lösung dieser Aufgabe „Abkürzung 0“ ist nur die Kenntnis des Satzes von Pythagoras (einschließlich der einschlägigen Begriffe, wenn wie hier keine Zeichnung gegeben ist) und seine Anwendung in der gegebenen Situation nötig, was zu den technischen

Kompetenzen (auf niedrigem Niveau) zählt. Die Leseanforderungen sind sehr gering, ebenso wie die Anforderungen an die Verwendung von Darstellungen. Heuristische Fähigkeiten, Argumentieren oder Modellieren spielen keine Rolle. Man wird die Aufgabe insgesamt in das niedrigste *Anforderungsniveau I* einordnen. Durch die Einkleidung in eine Verkehrssituation erhöhen sich die Anforderungen nicht unerheblich. Denn zur Lösung von „Abkürzung 1“ ist zusätzlich Modellieren (Übersetzen der gegebenen Realsituation in die Mathematik und Interpretieren des mathematischen Ergebnisses in der Realität) nötig, die Anforderungen an das sinnentnehmende Lesen sind gewachsen, die Lösung muss („äußere dich“) dargelegt werden, und vor allem sind jetzt Problemlösefähigkeiten nötig (Zurechtlegen eines Lösungswegs und Heranziehen adäquater Hilfen). Das legt es nahe, „Abkürzung 1“ in das mittlere *Anforderungsniveau II* einzuordnen.

Übrigens eröffnet sich durch die kinematische Einkleidung nun auch ein anderer Lösungsweg, der ohne den Satz des Pythagoras auskommt.[2] Denn wenn eine Fahrt mit $30\,\mathrm{km/h}$ kürzer dauern soll als eine Fahrt mit $50\,\mathrm{km/h}$, dann muss der Weg auch weniger als $30/50$, d. h. weniger als das 0,6-Fache des längeren Wegs betragen. Nun ist $0{,}6 \cdot 8\,\mathrm{km} = 4{,}8\,\mathrm{km}$, somit müsste die Abkürzung weniger als $4{,}8$ km lang sein. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist aber sicherlich länger als jede Kathete, die Abkürzung also länger als $5\,\mathrm{km}$. Deshalb bringt der Schleichweg keine Zeitersparnis.

3 Erste Ausweitungen der Aufgabe

Die Aufgabe „Abkürzung 1“ ist gegenüber der nackten Basisversion „Abkürzung 0“ sicherlich anspruchsvoller und interessanter geworden, sie ist aber immer noch relativ bescheiden und repräsentiert offenbar eine stark vereinfachte Realsituation. Eine naheliegende Anreicherung ergibt sich durch die folgende Variation (Abb. 4):

Abkürzung 2 *(dieselbe Straßensituation wie eben)*

a) Nimm an, dass man auf dem Schleichweg mit durchschnittlich $30\,\mathrm{km/h}$ fahren kann. Wie hoch darf dann die Durchschnittsgeschwindigkeit auf den Hauptstraßen höchstens sein, wenn die Abkürzung eine Zeitersparnis bringen soll?

a) Formuliere eine allgemeine Beziehung zwischen den Durchschnittsgeschwindigkeiten auf dem Schleichweg und den Hauptstraßen, die garantiert, dass die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt.

Abb. 4: Anreicherung von „Abkürzung 1“

[2] Diesen Hinweis verdanke ich Arnold Kirsch.

Teil a) steht i. W. schon als Idee in den Bildungsstandards. Nun sind, vor allem bei Teil b), die Anforderungen sowohl an das verstehende Lesen wie auch an das symbolisch-technische Arbeiten gewachsen. Bei a) ergibt sich etwas mehr als $41\,\mathrm{km/h}$, bei b) resultiert, dass die zweite Geschwindigkeit um höchstens etwa $37\ \%$ größer sein darf als die erste bzw. dass die erste mindestens etwa $73\ \%$ der zweiten betragen muss.

Im Übrigen wäre es ökologisch wohl angemessener (wenn auch mathematisch gleichwertig), wenn nach Bedingungen gefragt würde, bei denen die Abkürzung (die offenbar durch ein Wohngebiet führt) *keine* Zeitersparnis bringt. Auch „Abkürzung 2" wird man trotz der gestiegenen Anforderungen immer noch in *Niveau II* einordnen.

Eine kleine, aber durchaus wirkungsvolle Abänderung besteht darin, in „Abkürzung 1" und „Abkürzung 2" statt von „Zeitersparnis bringen" von „lohnen" zu reden. „Lohnen" wird sicher i. Allg. zeitbezogen interpretiert werden, vor allem im ersten Anlauf, kann aber auch darüber hinausgehend aufgefasst werden (z. B.: Lärmbelästigung in Wohngebieten). Dies leitet über zu einer nächsten Erweiterung; noch näher an der Realität ist die folgende Variante (Abb. 5):

Abkürzung 3 *(dieselbe Straßensituation wie eben)*

Formuliere mindestens zwei sinnvolle Bedingungen, die in dieser Verkehrs-Situation vorliegen könnten, und untersuche jeweils, ob es sich lohnt, die Abkürzung zu nehmen.

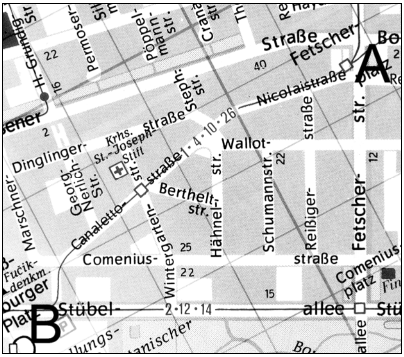
Abb. 5: „realitätsnähere" Variante von „Abkürzung 2"

Jetzt ist eine deutlich höhere Modellierungs-Kompetenz gefordert, denn die Realsituation muss ernster genommen werden als bisher, es müssen zunächst einmal einschlägige Variable identifiziert und angemessene Annahmen getroffen werden (etwa: Vorhandensein von Ampeln), die Annahmen müssen dann in eine mathematische Sprache übersetzt werden, und nach der Rückübersetzung der Ergebnisse muss auch deren Brauchbarkeit im Hinblick auf das Ausgangsproblem ernsthaft überprüft werden. Zudem wachsen bei dieser offenen Aufgabenvariante auch die Problemlöseanforderungen und vermutlich auch die rein rechentechnischen Ansprüche. Man wird „Abkürzung 3" sicher im höchsten *Anforderungsniveau III* einordnen.

Noch viel näher an der Realität liegen die Aufgaben, wenn nicht wie bisher ein abstraktes Dreieck, sondern ein Ausschnitt aus einem Stadtplan (mit Maßstab) gegeben ist (Abb. 6). Man kann die Aufgabenstellungen entsprechend formulieren wie in „Abkürzung 1/2/3", aber jetzt wird zunächst noch ein maßstäbliches Umrechnen von Längen benötigt.

Abkürzung 1'/2'/3'

Gegeben ist nebenstehender Kartenausschnitt (Maßstab 1:20 000).



Aufgabenformulierung dann wie in „Abkürzung 1/2/3".

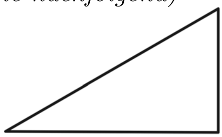
Abb. 6: realitätsnähere Variante von Abkürzung 1/2/3 mittels Kartenausschnitt

4 Noch mehr Ausweitungen

Durch die Varianten in Abschnitt 3 sind die Anforderungen an Modellieren, Problemlösen und Rechnen deutlich und an Kommunizieren ein wenig gestiegen. Nun sollen weitere Varianten gefunden werden, welche bzgl. Argumentieren und Kommunizieren noch höhere Ansprüche stellen. Mehr Argumentieren kann man z. B. dadurch herausfordern, dass man die Straßen-Gegebenheiten abändert (Abb. 7):

Abkürzung 4 *(Straßensituation verallgemeinert wie nachfolgend)*

Nimm an, dass man auf dem Schleichweg mit durchschnittlich 30 km/h fahren kann.



3 km

u km

a) Wie hoch darf die Durchschnittsgeschwindigkeit auf den Hauptstraßen höchstens sein, wenn die Abkürzung eine Zeitersparnis bringen soll? Erstelle für diese Höchstgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von u eine Wertetabelle und einen Graphen.

b) Begründe, ohne zu rechnen: Die in a) beschriebene Höchstgeschwindigkeit v erreicht für ein gewisses u einen größtmöglichen Wert.

c) Begründe: Dieser größtmögliche Wert liegt sicherlich unter 50 km/h.

Abb. 7: höhere Argumentations-Anforderungen durch Variation der Straßensituation

Die funktionalen Überlegungen in Teil b) und c) von „Abkürzung 4“ sind sicher für Sek.-I-Schüler schon an der Grenze des Leistbaren. Mit den Mitteln der Sek.-II-Mathematik werden diese Begründungen fast zur Routine, und man berechnet dann leicht, dass jenes Maximum bei $30 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{km/h}$ liegt und für $u = 3\,\mathrm{km}$ erreicht wird. Das entspricht einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck, und man spürt geradezu, dass man dies natürlich auch *elementar* zeigen können muss. Dieser Nachweis sei den Lesern überlassen. Hierfür sei nur darauf hingewiesen, dass es ja nur auf das *Verhältnis* von Hypotenusenlänge und Summe der Kathetenlängen ankommt und man sich deshalb auf rechtwinklige Dreiecke mit fester Kathetenlängen-Summe, d. h. auf Rechtecke mit festem Umfang beschränken kann.

Schließlich soll die Aufgabe im Hinblick auf die Kommunikations-Anforderungen angereichert werden. Das kann etwa so geschehen (Abb. 8):

Abkürzung 5 (*Aufgabe zunächst wie „Abkürzung 3“*)

Formuliere auf einer halben Seite klare Empfehlungen für die Autofahrer, die sich überlegen, welchen Weg sie von A nach B fahren sollen, und begründe deine Empfehlungen.

Abb. 8: Anreicherung der Aufgabe über höhere Kommunikations-Anforderungen

Auch diese besonders offene Aufgaben-Variante gehört natürlich zu *Anforderungsniveau III*.

5 Ein kritischer Rückblick

Wir waren ausgegangen vom Zweck neu entwickelter Aufgaben, an dem derzeit (wie gesagt unter maßgeblicher Beteiligung von Hans Schupp) mit Vehemenz gearbeitet wird, nämlich zu einem breiten Set empirisch geprüfter und normierter Illustrationen der Bildungsstandards beizutragen. Mit zunehmender Öffnung haben sich die präsentierten Aufgaben-Varianten von diesem Zweck entfernt. Denn die offenen Aufgaben „Abkürzung 3“ und „Abkürzung 5“ sind nur schwer in reliabler Weise codierbar und eignen sich daher kaum für Tests. Alle Aufgaben sind aber als anregende Unterrichtsaufgaben verwendbar, mit denen die „Neue Aufgabenkultur“ ([Bruder 2000], [Herget 2000], [Blum et al. 2000]) realisiert werden kann.

Nur wenn Schüler ausreichend Gelegenheit erhalten, sich aktiv und selbstständig mit kompetenzorientierten Aufgaben auseinander zu setzen, können sie Kompetenzen ausbilden. Insofern sollte die eigene Konstruktion passender Aufgaben zu den Alltagstätigkeiten des Mathematiklehrers gehören, und die entsprechende Fähigkeit ist eine wichtige Komponente von *Lehrerprofessionalität,* die in der Lehreraus- und -fortbildung mehr als bisher gefördert werden sollte. Der einzelne Lehrer kann natürlich auch genauer (was hier nicht möglich war) auf die besondere Klassen- oder Schulsituation eingehen und ggf. Aufgaben mit spezifischem Lokalbezug konstruieren, die dann noch realitätsnäher als „Abkürzung 1“ bis „Abkürzung 5“ sind.

Überhaupt müssen sich all diese Aufgaben-Varianten dem Urteil der Experten erst noch stellen. So sind die meisten der in [Schupp 2002] ausgeführten Strategien zur Aufgaben-Variation im vorliegenden Aufsatz noch gar nicht zur Anwendung gekommen, etwa „analogisieren“ (hier: andere Verkehrsführungen als rechtwinklige Dreiecke wählen), „kombinieren“ (hier: die Erweiterungen gemäß „Abkürzung 3“ und „Abkürzung 4“ verbinden) oder „umkehren“ (hier: in „Abkürzung 4“, Teil a, Geschwindigkeiten vorgeben und Straßenlängen suchen). Ich hoffe, dass die hier aufgeführten Variationen von Experten wie Hans Schupp als diskussions- und ausbauwürdig angesehen werden und viele konstruktive Rückmeldungen und Erfahrungsberichte hervorrufen.

Literatur

Biermann, Mark & Wiegand, Bernd & Blum, Werner [2003]: Nicht „irgendwie”, sondern zielgerichtet Aufgaben verändern. In: Ball, Helga u. a. (Hrsg.): Aufgaben. Friedrich Jahresheft XXI. Seelze: Friedrich, 32–35.

Blum, Werner et al. [2000]: Gute Unterrichts-Praxis — Zwei Jahre hessische Modellversuche im BLK-Programm zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Frankfurt: Hessisches Landesinstitut für Pädagogik.

Bruder, Regina [2000]: Mit Aufgaben arbeiten. Ein ganzheitliches Konzept für eine andere Aufgabenkultur. In: *mathematik lehren*, Heft 101, 12–17.

Herget, Wilfried [2000]: Rechnen können reicht … eben nicht! In: *mathematik lehren*, Heft 100, 4–10.

Klieme, Eckhard et al. [2003]: Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards — Eine Expertise. In: Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards (Hrsg.: BMBF). Bonn: BMBF, 7–174.

Schupp, Hans [2000]: Thema mit Variationen. In: *mathematik lehren*, Heft 100, 11–14.

Schupp, Hans [2002]: Thema mit Variationen. Hildesheim: Franzbecker.

Winter, Heinrich [1995]: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 61, 37–46.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Werner Blum
Universität Kassel, Fachbereich Mathematik
34109 Kassel
E-Mail: blum@mathematik.uni-kassel.de