Von Euro und Cent zu Stellenwerten

Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses

von

Kirsten Heckmann, Bielefeld

Kurzfassung: Bevor Dezimalbrüche gegen Ende des sechsten Schuljahres im Unterricht behandelt werden, haben Schülerinnen und Schüler bereits einige Erfahrungen mit „Kommazahlen" gesammelt, allerdings nur im Wesentlichen in Form von konkreten Größen, wobei dem Umgang mit Geld eine zentrale Bedeutung zukommt. Eine empirische Untersuchung an 6 Realschulklassen der Jahrgangsstufe 6 zeigt, wie diese Vorerfahrungen das Verständnis für abstrakte Dezimalbrüche beeinflussen.

Abstract: Before decimal fractions are taught at the end of grade 6 pupils already gain some experience with decimals, especially in the form of concrete measures. In this process money plays an important role. An empirical investigation in 6 classes of grade 6 students shows how these experiences affect the understanding of abstract decimal fractions.

1 Einleitung und Zielsetzung

Im täglichen Leben werden zur Benennung von Bruchzahlen praktisch nur noch Dezimalbrüche verwendet, während die einst üblichen gemeinen Brüche unter anderem durch den zunehmenden Einsatz von Computern immer weiter verdrängt wurden (vgl. Mahlstedt/Jannack 1986, S. 54). Trotz ihrer großen alltagspraktischen Bedeutung werden diese Zahlen jedoch sowohl im Unterricht als auch in der mathematikdidaktischen Literatur im Vergleich zu gemeinen Brüchen relativ wenig berücksichtigt. Eine wichtige Ursache hierfür liegt in der Annahme, der Umgang mit Dezimalbrüchen müsse den Schülerinnen und Schülern aufgrund der Nähe zu den vertrauten natürlichen Zahlen leicht fallen. Die Realität zeigt jedoch ein ganz anderes Bild. So geht aus empirischen Untersuchungen (z. B. Padberg 1990; 1991; 1992) hervor, dass der Umgang mit Dezimalbrüchen den Schülerinnen und Schülern teilweise sogar mehr Probleme bereitet als der Umgang mit gemeinen Brüchen (z. B. bei der Multiplikation und der Division). Ferner liefern u. a. die vorgenannten Studien Hinweise darauf, dass viele Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage ihrer Vorerfahrungen fehlerhafte Vorstellungen von „Kommazahlen" entwickeln. Daher soll im nächsten Abschnitt zunächst diskutiert werden, wie sich die Vorerfahrungen mit „Kommazahlen" auf das Verständnis von Dezimalbrüchen auswirken können, bevor die hier dargestellten Fehlvorstellungen durch die Ergebnisse einer eigenen empirischen Untersuchung konkretisiert bzw. ergänzt werden.

2 Vorerfahrungen mit „Kommazahlen“ und mögliche Folgen

2.1 Erfahrungen mit konkreten Größen

Vor der systematischen Behandlung der Dezimalbrüche gegen Ende der sechsten Klasse haben Schülerinnen und Schüler bereits gewisse Erfahrungen mit dieser Art von Zahlen sammeln können, da diese sowohl im Alltag auftreten als auch in der Schule angesprochen werden. Wichtig ist dabei die Tatsache, dass sich diese Vorerfahrungen nahezu ausschließlich auf *konkrete Größen* beschränken, da abstrakte Dezimalbrüche in der kindlichen Erfahrungswelt kaum auftreten. Dies gilt auch für die Schule, in der Dezimalbrüche bis zur sechsten Klasse stets in Verbindung mit Größen stehen.

Die Schülerinnen und Schüler kommen dabei mit verschiedenen Größenbereichen in Berührung, im Wesentlichen mit Geldwerten, Längen, Gewichten und Volumina. Allerdings gibt es zwischen diesen Größenbereichen einige Unterschiede in der Häufigkeit ihres Auftretens, wobei Geldwerte offensichtlich eine Sonderposition einnehmen, da sie im Alltag in Form von Preisangaben nahezu überall zu finden sind. Die Dominanz der Geldwerte spiegelt sich auch in den Schulbüchern wider, in denen – anknüpfend an eben diese Alltagserfahrungen – häufiger auf Geldwerte als auf die anderen Größenbereiche zurückgegriffen wird.

Unter den verbleibenden Größenbereichen sind ferner die Längen von größerer alltagspraktischer Bedeutung, so zum Beispiel bei der eigenen Körpergröße oder bei sportlichen Leistungen. Allerdings tritt die Kommaschreibweise hierbei im Wesentlichen bei der Einheit Meter und seltener bei anderen Längeneinheiten (km, dm, cm, mm) auf.

Selbstverständlich machen die Schülerinnen und Schüler auch Erfahrungen mit Gewichten und Volumina, jedoch seltener in Form von Dezimalbrüchen, da hier die Kommaschreibweise häufig umgangen wird, indem auf kleinere Größeneinheiten zurückgegriffen wird (z. B. 400 g statt 0,4 kg oder 250 ml statt 0,25 l). In Schulbüchern findet man Entsprechendes nicht selten selbst bei größeren Zahlen (z. B. 4400 g statt 4,4 kg). Daneben wird hier die Kommasetzung des Öfteren auch durch eine explizite Trennung der Größeneinheiten vermieden (4 kg 400 g).

2.2 Dezimalbrüche besitzen zwei Nachkommastellen

Die Feststellung, dass die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler zu Dezimalbrüchen vor allem Geldwerte und Längenangaben in der Einheit Meter betreffen, ist von großer Bedeutung für die Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses. Eine wichtige Gemeinsamkeit dieser Größen besteht darin, dass sie in der Regel mit genau zwei Nachkommastellen dargestellt werden. So wird selbst in den Fällen, in denen die zweite Dezimale nicht besetzt ist, fast ausschließlich die längere Form benutzt, also z. B. 1,80 € und 3,20 m statt kürzer 1,8 € und 3,2 m. Weil sich die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler also im Wesentlichen auf diesen Spezialfall konzentrieren, besteht die Gefahr einer fehlerhaften Generalisierung: Die Schülerinnen und Schüler entwickeln die Vorstellung, dass Dezimalbrüche stets genau zwei Nachkommastellen besitzen, die im Falle einer Null an letzter Stelle ggf. in verkürzter Form dargestellt werden können. Schülerinnen und Schüler mit diesem Verständnis schneiden Befunden von Steinle/Stacey (1998b) zu Folge in der Regel recht erfolgreich ab. Sie zeichnen sich durch einen sicheren Umgang mit Dezimalbrüchen mit bis zu zwei Nachkommastellen aus, da sie offenbar stets mit zwei Dezimalen arbeiten und gegebenenfalls „kürzere“ Dezimalbrüche entsprechend erweitern. Aus diesem Grund lässt sich diese Fehlvorstellung nur bei Dezimalbrüchen mit einer größeren Anzahl von Dezimalen aufdecken. Beim Größenvergleich lässt sie sich überdies nur in Sonderfällen identifizieren, weil viele Schülerinnen und Schüler die zusätzlichen Dezimalen ignorieren (vgl. ebd. S. 550) und damit zum Beispiel auch beim Vergleich von 2,437 und 2,65 zu einer richtigen Antwort gelangen, indem sie 43 und 65 miteinander vergleichen. Fehler können hier nur dann auftreten, wenn die zu vergleichenden Zahlen bis zur Hundertstelstelle einschließlich übereinstimmen. So würde das Ignorieren der zusätzlichen Ziffern z. B. beim Vergleich von 2,43 mit 2,437 zu der falschen Aussage 2,43 = 2,437 führen (denn 43 = 43). Aber selbst in diesen Fällen können die betreffenden Schülerinnen und Schüler auf erfolgreiche Strategien zurückgreifen, indem sie beispielsweise bei letztgenannter Aufgabe argumentieren, 2,43 sei kleiner als 2,437, weil der zweite Dezimalbruch eine Ziffer mehr enthalte.

Trotz des im Allgemeinen guten Abschneidens dieser Schülerinnen und Schüler ist klar, dass diese Vorstellung alles andere als erstrebenswert ist, weil grundlegende Einsichten in den Aufbau der Zahlen und damit tragfähige Grundlagen für die Dezimalbruchrechnung fehlen. Die in vielen Fällen richtigen Antworten sind in dieser Hinsicht eher nachteilig, da sie die Schülerinnen und Schüler in ihrer Denkweise bestärken. Außerdem wird diese Denkweise bei Schülerinnen und Schülern aus den gleichen Gründen eher selten durch schriftliche Tests aufgedeckt, so dass sich Untersuchungen zu Dezimalbrüchen in der Regel nicht mit dieser Fragestellung beschäftigen. Lediglich Steinle/Stacey (1998a; 1998b) untersuchen unter anderem auch diese Fehlvorstellung, nachdem sie diese in Interviews entdeckt haben. An ihrer Studie zum Größenvergleich nahmen gut 2500 australische Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 5 bis 10 teil. Da die Anfänge der Dezimalbruchrechnung in dem betreffenden Bundesstaat (Victoria) bereits für die Klassenstufen 3 und 4 vorgesehen ist (allerdings erstreckt sie sich im Unterschied zum deutschen Curriculum über mehrere Jahre bis Ende der Klasse 6), waren Dezimalbrüche in allen untersuchten Klassen bereits aus dem Unterricht bekannt. Durch entsprechende Testitems (z. B. beim Vergleich von 4,276 und 4,278 durch Einsetzen des zugehörigen Symbols <, > oder =) lässt sich das „Geld-Denken“ – wie die Autoren die besagte Vorstellung treffend bezeichnen – in dieser Studie bei knapp 4 % der Gesamtstichprobe feststellen. Da jedoch auch bei den relevanten Fragestellungen richtige Antworten möglich sind (s. o.) vermuten die Autoren, dass die Dunkelziffer deutlich höher liegt.

2.3 Das Komma trennt

Im Alltag wird in den meisten Fällen 1,80 € und 3,20 m statt kürzer 1,8 € und 3,2 m geschrieben. Ein Blick in aktuelle Schulbücher zeigt, dass diese Schreibweise bei diesen speziellen Größeneinheiten sogar durchgängig benutzt wird. Ihre Intention liegt in der Sortentrennung: So wie die Zahl vor dem Komma die Euro bzw. Meter direkt angibt, sollen auch nach dem Komma die kleineren Maßeinheiten Cent bzw. Zentimeter direkt ablesbar sein. Diese Verwendung des Kommas als Trennzeichen zwischen den verschiedenen Größeneinheiten, die bei Gewichten und Volumina ganz analog verwendet wird (sofern hier die Kommaschreibweise verwendet wird, s. o.), birgt allerdings die Gefahr einer fehlerhaften Verallgemeinerung, bei der die Schülerinnen und Schüler annehmen, dass diese Trennung von Euro und Cent bzw. Meter und Zentimeter allgemein, d. h. unabhängig von der Anzahl der Dezimalen, gilt. In der Unterrichtspraxis spielt dieses fehlerhafte Größenverständnis tatsächlich eine größere Rolle, wie eine empirische Arbeit von Klika (1997) mit dem bezeichnenden Titel „0,5 m sind doch 5 cm, oder?“ verdeutlicht. Allerdings ist dies nicht weiter verwunderlich, wenn man in Schulbüchern pauschale Merksätze wie „Das Komma trennt m und cm“ (Eidt u. a. 2002, S. 51) oder „Das Komma trennt t und kg“ (Eidt u. a. 2003, S. 59) liest, insbesondere dann nicht, wenn in letzterem Fall gleich daneben die Zahl 3,5 t geschrieben steht.

Probleme treten aber nicht nur im Bereich der Größen auf, sondern auch bei der Entwicklung des Dezimalbruchbegriffs. So wird nämlich die Tatsache, dass bei der Schreibweise im Sinne der Sortentrennung nach dem Komma eine natürliche Zahl zu stehen scheint (nämlich die Anzahl der ganzen Cent bzw. Zentimeter), häufig auf den Bereich der abstrakten Zahlen übertragen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln also die fehlerhafte Vorstellung, dass jeder Dezimalbruch aus zwei natürlichen Zahlen besteht, die durch ein Komma voneinander getrennt sind. Bei diesem Verständnis, das allgemein als „Komma-trennt“-Vorstellung (z. B. Günther 1987; Klika 1997; Padberg 2002) bezeichnet wird, nehmen die Schülerinnen und Schüler die Bereiche vor und nach dem Komma als etwas voneinander Getrenntes, Verschiedenartiges wahr. Dabei ist ihnen allerdings bewusst, dass der Bereich vor dem Komma einen größeren Wert besitzt als der Bereich nach dem Komma, genau wie Euro mehr wert sind als Cent und Meter länger sind als Zentimeter.

Für die Entwicklung der Komma-trennt-Vorstellung ist darüber hinaus die Sprechweise der Zahlen von Bedeutung. 3,25 m wird in der Regel als „drei-Meter-fünfundzwanzig“ gelesen; entsprechend wird 3,25 € häufig als „drei-Euro-fünfundzwanzig“ oder ganz kurz einfach als „drei-fünfundzwanzig“ gesprochen. Mitunter, wenngleich sehr viel seltener, hört man hier auch die ausführliche Form „drei-Euro-fünfundzwanzig-Cent“, in der die Intention der Sortentrennung direkt deutlich wird. Die wichtige Gemeinsamkeit all dieser Sprechweisen besteht darin, dass die Dezimalen nicht ziffernweise einzeln gelesen, sondern zu einer natürlichen Zahl zusammengesetzt werden, die als solche gesprochen wird. Der Teil nach dem Komma wird also auch hier als natürliche Zahl wahrgenommen, so dass in der beschriebenen Sprechweise eine weitere Ursache für die Komma-trennt-Vorstellung zu sehen ist. Verstärkt wird diese Problematik durch die Tatsache, dass sich diese Art zu sprechen nicht allein auf den Bereich der Größen beschränkt, sondern sich nicht selten auch bei abstrakten Zahlen durchsetzt, obwohl hier keine Sorten voneinander getrennt werden können und dementsprechend kein Anlass hierzu besteht. Trotzdem lesen viele Erwachsene 3,25 als „drei-Komma-fünfundzwanzig“ und selbst in den Medien (z. B. in den Börsennachrichten) ist diese Sprechweise häufig zu vernehmen.

Die Kenntnis der Komma-trennt-Vorstellung ist für den Unterricht von großer Bedeutung, da sie eine Reihe von Fehlern nach sich zieht. So lässt sich bei Anwendungsaufgaben häufig beobachten, dass Schülerinnen und Schüler im Sinne dieser Vorstellung die „natürlichen“ Zahlen vor und nach dem Komma getrennt voneinander behandeln. Diese Strategie kann in vielen Bereichen der Dezimalbruchrechnung zu typischen Fehlern führen, wie die folgenden Beispiele demonstrieren:

- *Größenvergleich*: 3,25 > 3,8; denn 25 > 8.
- *Addition und Subtraktion*: 3,25 + 2,7 = 5,32; denn 3 + 2 = 5 und 25 + 7 = 32.
- *Fortsetzen von Reihen*: Die Reihe 3,7; 3,8; 3,9 wird mit 3,10 fortgesetzt; denn der Nachfolger von 9 ist 10.
- *Erweitern und Kürzen*: 3,25 ≠ 3,250; denn 25 ≠ 250; aber: 3,25 = 3,025; denn 25 = 025. Es fällt auf, dass eine Übertragung des Wissens aus dem Bereich der natürlichen Zahlen zu genau gegenteiligen Auffassungen über das Erweitern und Kürzen führt, nämlich dass beim dezimalen Teil Nullen zwar vorangestellt, aber nicht angehängt werden dürfen.

Anhand derartiger Fehler lässt sich die Komma-trennt-Vorstellung bei Schülerinnen und Schülern auch in schriftlichen Tests aufdecken. So zeigen entsprechende Studien, in denen insbesondere der Größenvergleich untersucht wird, dass die Komma-trennt-Vorstellung sogar sehr weit verbreitet ist, auch noch nach der unterrichtlichen Behandlung der Dezimalbrüche. Dies gilt sowohl für deutsche Untersuchungen (z. B. Günther 1987; Klika 1997; Padberg u. a. 1990) als auch für Untersuchungen in verschiedenen anderen Ländern wie beispielsweise den USA, Israel, Frankreich (Resnick u. a. 1989), Australien (z. B. Steinle/Stacey 1998a; 1998b) und Norwegen (z. B. Brekke 1996).

Bei näherer Betrachtung der aufgeführten Beispiele fällt auf, dass alle Fehler im Zusammenhang mit einer *unterschiedlichen Anzahl an Dezimalen* stehen, während die getrennte Behandlung der Zahlen vor und nach dem Komma bei gleicher Anzahl von Nachkommastellen meist zu richtigen Ergebnissen führt. Dies gilt z. B. generell für den Größenvergleich und für alle Additionsaufgaben, in denen kein Übertrag über das Komma erforderlich ist (z. B. 4,26 + 8,47). Hierin liegt eine Gefahr, da sowohl im Alltag als auch in Schulbüchern Situationen bzw. Aufgabenstellungen dominieren, in denen die Dezimalbrüche gleich viele Nachkommastellen besitzen, was die Schülerinnen und Schüler in ihrer Vorstellung weiter bestärken kann.

Darüber hinaus verhindert die fehlerhafte Komma-trennt-Vorstellung bei den betreffenden Schülerinnen und Schülern auch grundlegende Einsichten und Zahlvorstellungen. Dies gilt zum einen für das Bruchverständnis, das eine zentrale Voraussetzung für eine anschauliche Größenvorstellung bildet: Eine anschauliche Vorstellung der Größe 0,3 kann sich jedenfalls nicht entwickeln, wenn man aus der Darstellung 0,3 nur auf abstraktem Niveau die natürlichen Zahlen 0 und 3 herausliest. Insofern behindert diese Fehlvorstellung die Entwicklung *inhaltlicher Vorstellungen*.

Ein besonders großes Defizit betrifft zum anderen das Verständnis für die *Stellenwerte*. Wenn nämlich die Schülerinnen und Schüler die Dezimalen zu *einer* natürlichen Zahl zusammenfassen, so vermittelt dies ein völlig falsches Bild von den Stellenwerten der Nachkommastellen, wie an folgendem Beispiel deutlich wird: In dem Dezimalbruch 3,25, gedeutet als „drei-Komma-fünfundzwanzig“, scheint der dezimale Teil aus 2 Zehnern und 5 Einern zu bestehen. Oft haben die Schülerinnen und Schüler bereits von „Zehnteln“ gehört, und bezeichnen die 2 Zehner deshalb als 2 Zehntel (was in diesem Fall sogar zutreffend ist). Die Unterschiede bei den Stellenwertbezeichnungen scheinen sogar logisch, da hierdurch eine Unterscheidung zu der Ziffer vor dem Komma möglich wird, die ja einen größeren Wert besitzt. Gegebenenfalls werden aus dem gleichen Grund die Einer entsprechend als „Eintel“ bezeichnet. Interessant ist nun, dass gleichzeitig im gleichwertigen Dezimalbruch 3,250, gedeutet als „drei-Komma-zweihundertfünfzig“, der dezimale Teil analog aus 2 Hundertsteln und 5 Zehnteln zu bestehen scheint. Dieser Zahlauffassung zu Folge würde es keine feste Anordnung der Stellenwerte geben, weil der gleichen Position – abhängig von der Anzahl der Nachkommastellen – unterschiedliche Stellenwerte zugeordnet werden können.

Dieses Problem betrifft auch den Zusammenhang der Stellenwerte, der bei diesem Verständnis quasi umgekehrt wird. So wirken z. B. Zehntel kleiner als Hundertstel, weil Entsprechendes für die Stellenwerte der natürlichen Zahlen Zehner und Hunderter gilt. Statt von *inhaltlichen Vorstellungen* (z. B. Zehntel als zehnter Teil eines Ganzen) auszugehen, lassen sich die Schülerinnen und Schüler von der sprachlichen Nähe der Stellenwertbezeichnungen (Zehner – Zehntel; Hunderter – Hundertstel) zu den beschriebenen fehlerhaften Transfers verleiten.

2.4 Fazit

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die gebräuchliche Verwendung des Kommas als Trennzeichen zwischen zwei Größeneinheiten in Verbindung mit der zugehörigen Sprechweise im Hinblick auf das Dezimalbruchverständnis die Gefahr birgt, dass Schülerinnen und Schüler in Folge fehlerhafter Transfers falsche Vorstellungen von diesen Zahlen entwickeln. Deshalb sollten die angesprochenen Aspekte im Unterricht unbedingt angemessen thematisiert werden, um durch die kognitive Auseinandersetzung unreflektierten Übertragungen vorzubeugen. Bezüglich der Sprechweise sollte zumindest bei abstrakten Zahlen stets ziffernweise gesprochen werden, weil dies keine fehlerhaften Übertragungen nahe legt.

3 Eine eigene empirische Untersuchung zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses

3.1 Untersuchungsdesign

Ausgehend von den im Abschnitt 2 beschriebenen Befunden wurde im Schuljahr 2001/2002 eine eigene empirische Untersuchung zu Dezimalbrüchen durchgeführt. Ziel der Untersuchung war es, inhaltliche Vorstellungen bzw. Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zum Dezimalbruchbegriff aufzudecken. Von besonderem Interesse war dabei auch die Bedeutung und Entwicklung dieser Fehlvorstellungen.

An der Studie nahmen drei Realschulen der Region mit jeweils zwei Klassen der Jahrgangsstufe 6 teil, die im Hinblick auf die Frage nach der Entwicklung von Vorstellungen und Fehlvorstellungen zu drei Zeitpunkten (T1, T2, T3) getestet wurden. Die ersten beiden Testzeitpunkte lagen *vor* der unterrichtlichen Behandlung der Dezimalbrüche, so dass hier die *Vorkenntnisse* der Schülerinnen und Schüler erhoben wurden. Während allerdings beim ersten Testzeitpunkt (T1) zu Beginn des Schuljahres Brüche bislang noch nicht systematisch thematisiert wurden, wurden zum zweiten Testzeitpunkt (T2) gegen Mitte des Schuljahres in den Klassen bereits seit einiger Zeit die gemeinen Brüche behandelt. Der letzte Testzeitpunkt (T3) dokumentiert schließlich den Unterrichtserfolg, da er gegen Ende des Schuljahres, und somit zugleich gegen Ende der Dezimalbruchrechnung, durchgeführt wurde. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurden jeweils die gleichen Aufgaben gestellt, obwohl hierbei natürlich eine gewisse Gefahr von Lern- oder Wiederholungseffekten besteht.

Der Hauptteil der Untersuchung bestand aus einem schriftlichen Test mit Aufgaben aus den verschiedenen Bereichen der Dezimalbruchrechnung, der von allen teilnehmenden Schülerinnen und Schülern (ca. 160 mit geringfügigen Schwankungen zu den drei Testzeitpunkten) bearbeitet wurde. In Ergänzung zu dem schriftlichen Test wurden zu jedem Testzeitpunkt pro Klasse zwei bis drei videodokumentierte Einzelinterviews durchgeführt. Ziel der Interviews war es,

- aus der Literatur bekannte Fehlerstrategien zu belegen,
- unklare Lösungen aufzuklären und somit möglicherweise neue Fehlerstrategien aufzudecken,
- unterschiedliche Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler bei richtigen Lösungen herauszuarbeiten.

1) Wie liest du die Kommazahl **3,25**? Kreuze nur *eine* Antwort an!

Ich weiß es nicht	○
dreihundertfünfunzwanzig	○
drei – Rest – fünfundzwanzig	○
drei – und – fünfundzwanzig	○
drei – Komma – fünfundzwanzig	○
drei – Komma – zwei – fünf	○
drei – ein – fünfundzwanzigstel	○

2) Wer hat den längsten Schal? Kreuze an!

Kerstin:	1,25 m	○
Jonas:	1,185 m	○
Miriam:	1,42 m	○
David:	1,3 m	○
Ich weiß es nicht		○

3) Kreuze jeweils die längere Strecke an!

a)	5,2 m	○	5,4 m	○
b)	8,2 m	○	7,8 m	○
c)	6,2 m	○	6,19 m	○

Kannst du deine Antwort bei c) begründen?

Begründung:

Abbildung 1: Drei Aufgaben des schriftlichen Tests

Für die Interviews des ersten Testzeitpunktes wurden die Schülerinnen und Schüler ausgewählt, deren Lösungen hinsichtlich dieser Zielsetzungen am ergiebigsten schienen. Im Hinblick auf die Frage nach der Entwicklung von (Fehl-)Vorstellungen wurden in den darauf folgenden Testzeitpunkten – sofern dies möglich war – die gleichen Schülerinnen und Schüler befragt.

Die halbstandardisierten Interviews fanden jeweils am gleichen Tag wie der schriftliche Test statt. Hier wurde den Schülerinnen und Schülern ihr Testbogen noch einmal vorgelegt mit der Aufforderung, ihre Lösungswege zu den einzelnen Aufgaben zu erläutern und ihr Vorgehen gegebenenfalls ausführlicher zu begründen.

3.2 Untersuchungsergebnisse

Im Folgenden werden die Untersuchungsergebnisse zu drei Testaufgaben (Abb. 1) der eingangs beschriebenen empirischen Untersuchung vorgestellt. Sie verdeutlichen, dass die zuvor diskutierten Probleme auch in dieser Stichprobe eine große Relevanz besitzen.

3.2.1 Sprechweise von Dezimalbrüchen

Die Ergebnisse zu Aufgabe 1 bestätigen, dass die bei Größen übliche Sprechweise tatsächlich zunächst häufig auch für abstrakte Dezimalbrüche übernommen wird (Tab. 1): Zum ersten Testzeitpunkt, also vor Einführung der Bruchzahlen, kreuzen fast genauso viele Schülerinnen und Schüler die problematische Sprechweise „drei-Komma-fünfundzwanzig“[1] wie das ziffernweise Sprechen „drei-Komma-zwei-fünf“ an. Im Laufe des Schuljahres verlagert sich das Gewicht erwartungsgemäß zunehmend in Richtung der letzteren, angemessenen Sprechweise. Als positives Ergebnis ist festzuhalten, dass im Unterricht offenbar viel Wert auf diese Sprechweise gelegt wird, wie der hohe Schüleranteil von 94 % zum letzten Testzeitpunkt gegen Ende der Dezimalbruchrechnung deutlich macht.

	„drei-Komma-zwei-fünf“	**„drei-Komma-fünfundzwanzig“**
T1	46 %	41 %
T2	62 %	28 %
T3	94 %	6 %

Tabelle 1: Sprechweise von 3,25

[1] Die anderen Sprechweisen, die hier als Antwortmöglichkeiten angeboten werden, spielen erfreulicherweise zu keinem Zeitpunkt eine nennenswerte Rolle.

3.2.2 Größenvergleich

Bei der ersten Testaufgabe zum Größenvergleich von Dezimalbrüchen (Aufgabe 2) bestätigt sich, dass die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler sehr häufig zur Entwicklung der Komma-trennt-Vorstellung führen (Tab. 2). Unter den falschen Schülerlösungen dominiert die Antwort 1,185 m, die auf die Anwendung der Komma-trennt-Strategie hindeutet. Es fällt auf, dass diese Antwort zu Beginn des Schuljahres (T1) von jedem zweiten Schüler, und damit sogar häufiger als die richtige Antwort 1,42 m, gegeben wird. Zwar entspricht es einerseits der Erwartung, dass der Fehleranteil im Laufe des Schuljahres sinkt; andererseits fällt der Rückgang von T2 nach T3 überraschend gering aus, wenn man bedenkt, dass zu dieser Zeit Dezimalbrüche im Unterricht thematisiert werden. Die entsprechende Fehlerquote von 22 % gegen Ende der Dezimalbruchrechnung (T3) ist erschreckend und deutet auf eine große Beständigkeit der Komma-trennt-Vorstellung hin. Offensichtlich haben sich die Vorerfahrungen der vergangenen Jahre bei vielen Schülerinnen und Schülern bereits so stark in dieser Fehlvorstellung gefestigt, dass es nicht einmal die systematische Behandlung der Dezimalbrüche vermag, diese durch ein richtiges Verständnis zu ersetzen. Es gelingt auch keine Überlagerung durch richtige syntaktische Regeln zum Größenvergleich (z. B. Vergleich ziffernweise). Allerdings sei an dieser Stelle bemerkt, dass der Anteil der Komma-trennt-Antworten bei dieser Aufgabe in den einzelnen Klassen mit Werten zwischen 4 % und 46 % sehr unterschiedlich ist. Dies legt die Vermutung nahe, dass es durch angemessenen Unterricht sehr wohl möglich ist, effektiv gegen diese Fehlvorstellung vorzugehen.

	Wer hat den längsten Schal? Kreuze an!				
	Miriam: 1,42 m	**Jonas: 1,185 m**	**David: 1,3 m**	**Kerstin: 1,25 m**	**Ich weiß es nicht**
T1	43 %	50 %	5 %	0 %	2 %
T2	51 %	37 %	8 %	2 %	2 %
T3	71 %	22 %	4 %	1 %	1 %

Tabelle 2: Untersuchungsergebnisse zu Aufgabe 2

Darüber hinaus gibt die Testaufgabe einen Hinweis darauf, dass andere fehlerhafte Vorstellungen im Vergleich zur Komma-trennt-Vorstellung nebensächlich zu sein scheinen, da andere Fehler vergleichsweise selten auftreten. Allerdings deutet die Tatsache, dass hierbei die Zahl 1,3 m zu allen Zeitpunkten häufiger angekreuzt wird als die Zahl 1,25 m, darauf hin, dass auch die „Kürzer-ist-größer-Strategie“, bei der die Schülerinnen und Schüler den Dezimalbruch mit den wenigsten Dezimalen für den größten halten[2], eine gewisse Rolle spielt. Erwähnenswert ist auch die Tatsache, dass nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler angeben, die Antwort nicht zu wissen, was darauf hindeutet, dass sie sich in ihren jeweils verwendeten Strategien recht sicher fühlen.

Vergleicht man diese Aufgabe mit der Aufgabe zur Sprechweise (Tab. 1), so fällt auf, dass es keine eindeutige Entsprechung zwischen der Komma-trennt-Antwort 1,185 m und der Sprechweise „drei-Komma-fünfundzwanzig" gibt, deren Anteil zu allen Zeitpunkten geringer ist und die darüber hinaus im Untersuchungszeitraum stärker rückläufig ist, insbesondere beim Übergang zu T3. Dies lässt vermuten, dass die Vermittlung einer angemessenen Sprechweise allein nicht ausreicht, um fehlerhafte Vorstellungen zu verändern. Begründungen sind notwendig!

Die zweite Testaufgabe zum Größenvergleich (Aufgabe 3) liefert sehr ähnliche Ergebnisse. Der größte Unterschied betrifft die Anzahl der ungelösten Aufgaben, die in dieser Aufgabe zum ersten Testzeitpunkt deutlich höher liegt, was allerdings hauptsächlich durch eine Fehlinterpretation der Aufgabenstellung bedingt ist: Trotz des Wortes „jeweils" und der Nummerierungszeichen erkennen die betreffenden Schülerinnen und Schüler die Untergliederung in drei Aufgabenteile *nicht* und kreuzen daher die größte *aller* gegebenen Dezimalbrüche an (nämlich 8,2 m bei Aufgabenteil b; s. Abb. 1), anstatt die Zahlen jeweils zeilenweise zu vergleichen.

	Kreuze die längere Strecke an!		
	6,2 m	**6,19 m**	**Keine Lösung**
T1	45 %	44 %	11 %
T2	64 %	34 %	2 %
T3	79 %	19 %	2 %

Tabelle 3: Untersuchungsergebnisse zu Aufgabe 3

Abgesehen hiervon ist bei den Tabellenwerten eine starke Ähnlichkeit zu den jeweils entsprechenden Werten aus Tab. 2 zu erkennen. Es fällt allerdings auf, dass der Anteil der Komma-trennt-Antwort 6,19 m hier (Tab. 3) zu allen Zeitpunkten trotz der geringeren Zahl der Antwortmöglichkeiten geringfügig niedriger liegt. Während dies zum ersten Testzeitpunkt zum Teil wohl auch mit der größeren Anzahl ungelöster Aufgaben zusammenhängt, kann diese Erklärung für die folgenden

[2] Ursachen für diese Fehlerstrategie werden unter anderem bei Padberg (2002), Sackur-Grisvard/Léonard (1985), Steinle/Stacey (1998b) sowie sehr ausführlich bei Resnick u. a. (1989) diskutiert.

Testpunkte T2 und T3 nicht mehr zutreffen. Das lässt darauf schließen, dass es noch (mindestens) eine grundlegende Ursache für die unterschiedliche Anzahl der Komma-trennt-Fehler bei den beiden Aufgaben zum Größenvergleich gibt. Diese Ursache liegt meines Erachtens darin, dass bei der ersten Aufgabe der „längste“ Dezimalbruch 3 Dezimalen besitzt, während bei dieser Aufgabe maximal 2 Dezimalen auftreten: Aufgrund entsprechender Vorerfahrungen (vgl. 2.2) ist anzunehmen, dass den Schülerinnen und Schülern der Umgang mit (bis zu) 2 Dezimalen einfacher fällt als der Umgang mit einer größeren Anzahl von Dezimalen. Konkret bedeutet dies, dass vermutlich einige Schülerinnen und Schüler bei der letzteren Testaufgabe 6,2 m richtig als 6,20 m erkennen (und darüber hinaus bei der ersten Testaufgabe 1,3 m richtig als 1,30 m), jedoch die Zahl 1,185 m bei der vorigen Testaufgabe nicht richtig deuten können.

3.2.3 Begründungen von Schülerinnen und Schülern

Im Hinblick auf die Analyse des Dezimalbruchverständnisses erweist sich die zuletzt genannte Aufgabe als besonders wertvoll, da die Schülerinnen und Schüler hier zusätzlich zu einer Begründung ihrer Antwort aufgefordert werden (Tab. 4). Anhand der vorliegenden Schülerbegründungen lässt sich nämlich ausschließen, dass möglicherweise eine andere fehlerhafte Denkweise, die zufällig zum gleichen falschen Ergebnis führt, eine entscheidende Rolle spielt. Dies gilt insbesondere für die so genannte „Kein-Komma“-Vorstellung, die in anderen Untersuchungen (z. B. Günther 1987; Klika 1997; Padberg u. a. 1990) als weitere wichtige Fehlvorstellung beschrieben wird. Die zugehörige Fehlerstrategie besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler das Komma ignorieren und die dadurch entstehende natürliche Zahl betrachten, was in diesem Fall zum Vergleich der natürlichen Zahlen 619 und 62, und damit ebenfalls zu der fehlerhaften Antwort 6,19 m, führt. Interessant ist, dass dieses Vorgehen – im Gegensatz zu anderen Studien (z. B. Günther 1987; Padberg u. a. 1990) – in dieser Stichprobe aus keiner einzigen Schülerantwort hervorgeht. Das bedeutet allerdings nicht, dass diese Fehlvorstellung hier überhaupt keine Rolle spielt. Zu bedenken ist nämlich, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die zu Grunde liegende Denkweise geben, da einige der Aufforderung nicht nachkommen und ihre Antworten nicht begründen, und andere nicht-aussagekräftige Begründungen wie z. B. „weil die Strecke länger ist“ abgeben.

Die aussagekräftigen Schülerantworten lassen zumindest tendenzielle Aussagen zu den Fehlerursachen zu. In der vorliegenden Untersuchung zeigen sie, dass tatsächlich die Komma-trennt-Vorstellung die entscheidende Rolle spielt. Interessant ist hierbei, dass die Komma-trennt-Vorstellung in den beiden theoretisch diskutierten Varianten auftritt, nämlich zum einen „klassisch“ mit abstrakten Zahlen (19 > 2) und zum anderen in Verbindung mit Größen (19 cm > 2 cm / 17 cm länger). Neben der Studie von Klika (1997) ist dies als weiterer Beleg dafür zu werten, dass die

Verwendung des Kommas im Sinne der Sortentrennung nicht nur für die Entwicklung des Dezimalbruchbegriffs problematisch ist, sondern bereits im Bereich der Größen des Öfteren fehlerhafte Verallgemeinerungen nach sich zieht. Dies geht übrigens auch bei der ersten Testaufgabe zum Größenvergleich aus einem Interview hervor, in dem der Schüler 1,185 m als 1 m und 185 cm deutet und erklärt, dass 100 cm immer einen Meter ergeben, so dass 1,185 m eigentlich 2,85 m (und insofern größer als 1,42 m) seien.

6,19 m > 6,2 m; denn …	**T1 (N = 72)**	**T2 (N = 54)**	**T3 (N = 30)**
Keine Begründung	29 (40 %)	18 (33 %)	9 (30 %)
Nichts-sagende Begründung	15 (21 %)	7 (13 %)	4 (13 %)
19 > 2	11 (15 %)	14 (26 %)	8 (27 %)
19 cm > 2 cm / 17 cm länger	12 (17 %)	7 (13 %)	3 (10 %)
6,19 = 7,9	1 (1 %)	4 (7 %)	2 (7 %)
Sonstiges	4 (6 %)	4 (7 %)	4 (13 %)

Tabelle 4: Begründungen zu der Antwort „6,19 m > 6,2 m“ (Prozentzahlen bezogen auf die Anzahl der Schülerinnen und Schüler mit dieser falschen Antwort)

Neben diesen beiden Varianten der Komma-trennt-Vorstellung ist nur noch ein einziges weiteres Fehlverständnis mehrfach – wenn auch vergleichsweise selten – zu beobachten, nämlich die Vorstellung, dass 6,19 m mit 7,9 m gleichzusetzen sei. Es ist anzunehmen, dass hier entsprechende Erfahrungen mit dem schriftlichen Rechnen fehlerhaft übertragen werden, nämlich dass nach 10 immer in die nächste Stelle umgebündelt wird. Eine wichtige Gemeinsamkeit mit der Komma-trennt-Vorstellung besteht darin, dass auch hier die Dezimalen zu der natürlichen Zahl 19 zusammengefasst werden, was darauf schließen lässt, dass diese Denkweise ebenfalls im Zusammenhang mit den in Abschnitt 2.3 beschriebenen Vorerfahrungen steht.

4 Konsequenzen für den Unterricht

Zusammenfassend zeigen die Untersuchungsergebnisse anhand der hohen Fehlerquoten, dass Schülerinnen und Schüler große Probleme beim Umgang mit Dezimalbrüchen haben, die zum größten Teil in Zusammenhang mit der Komma-trennt-Vorstellung stehen, und dass sich dieses Fehlverständnis nicht selten bereits gefestigt zu haben scheint. Dies stimmt mit den Ergebnissen der in Abschnitt 2.3

erwähnten empirischen Studien überein und verdeutlicht damit, dass diese Problematik nach wie vor von großer Relevanz ist.

Weil es sich bei der Komma-trennt-Vorstellung um eine rein *formale* Zahlbetrachtung handelt, sollte ein Hauptziel des Unterrichts meines Erachtens darin bestehen, den Schülerinnen und Schülern geeignete *inhaltliche* Vorstellungen von Dezimalbrüchen zu vermitteln. Eine wichtige Grundlage hierfür ist das Stellenwertverständnis, so dass zu Beginn der Dezimalbruchrechnung zunächst ausführlich auf die Stellenwerte eingegangen werden muss. Wichtig ist es zu verdeutlichen, dass die Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen darin besteht, dass der Zusammenhang zwischen den Stellenwerten über das Komma fortgesetzt wird: Für den nächsten Stellenwert werden Einer entsprechend in 10 gleiche Teile geteilt, so dass jedes Teil ein *Zehntel* eines Ganzen darstellt und dementsprechend auch als „Zehntel" bezeichnet wird. Analog lassen sich die folgenden Stellenwerte einführen.

Entscheidend bei der Behandlung der Stellenwerte ist es, die *inhaltlichen* Aspekte herauszustellen, damit die Schülerinnen und Schüler nicht durch die sprachliche Nähe zu den Stellenwerten der natürlichen Zahlen zu fehlerhaften Vorstellungen verleitet werden.

Diesbezüglich macht eine inhaltliche Sichtweise verständlich,

- dass die Stellenwerte eine feste Ordnung haben und nicht von der Anzahl der Nachkommastellen abhängen (vgl. 2.3),
- dass es keine Eintel gibt und
- dass z. B. Hunderter größer sind als Zehner, Hundertstel jedoch kleiner sind als Zehntel.

All diese Aspekte sollten im Unterricht explizit angesprochen werden, was beispielsweise in Form von provokativen Aussagen bzw. Fragen geschehen kann, die von den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden sollen (z. B.: „Wo stehen eigentlich in einem Dezimalbruch die Eintel?").

Für die Ausbildung einer inhaltlichen Vorstellung von Dezimalbrüchen ist der Umgang mit anschaulichen Modellen (z. B. Skalen oder Flächenmodelle) als sehr hilfreich anzusehen. Übungen zum Ablesen und Darstellen von Dezimalbrüchen oder zur Lösung von Aufgaben anhand anschaulicher Modelle sollten ein wichtiger Bestandteil des Unterrichts sein (vgl. hierzu auch Klika 1997). Dies gilt nicht nur für die Einführungsphase, sondern auch bei späteren Anwendungen, damit die inhaltlichen Vorstellungen nicht durch zu starke Automatisierung verloren gehen. Aus diesem Grund sollte man auch nach Einführung der Rechenregeln Aufgaben zwischendurch immer wieder begründen und veranschaulichen lassen.

Um ein inhaltliches Zahlverständnis zu vermitteln, empfiehlt es sich weiterhin, häufig Beziehungen zu den gemeinen Brüchen herzustellen. Eine inhaltliche Vorstellung von z. B. 0,23 ist sehr viel einfacher, wenn man die Zahl als 23/100 (Teile ein Ganzes in 100 Teile und nimm 23 hiervon) deutet, als wenn man die Stellenwerte einzeln betrachtet (2 Zehntel + 3 Hundertstel). Dies fördert gleichzeitig das Verständnis für den Zusammenhang zwischen den Stellenwerten (2 Zehntel = 20 Hundertstel) und führt zu einem komplexeren Zahlverständnis, das die *lokale* (2 Zehntel + 3 Hundertstel) und die *globale* Sichtweise (23 Hundertstel) von Dezimalbrüchen (Padberg 2002, S. 191 f.) integriert.

Beziehungen zu den gemeinen Brüchen lassen sich besonders einfach herstellen, wenn beide Notationsformen im Unterricht parallel behandelt werden. So fordert z. B. auch Padberg (2002, S. 276 ff.) eine parallele Behandlung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen statt einer getrennten Behandlung in zwei Blöcken, wie es in Deutschland die gängige Praxis ist. Dies bietet weiterhin den Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler gemeine Brüche und Dezimalbrüche als verschiedene Darstellungen der *gleichen* Zahlen begreifen und nicht für „zwei verschiedene Welten halten, die nichts miteinander zu tun haben“ (Padberg 2002, S. 279).

Schließlich sollten meines Erachtens auch die Komma-trennt-Vorstellung und ihre Ursachen im Unterricht bewusst angesprochen und diskutiert werden. Durch das Kontrastieren mit den Stellenwerten lässt sich dann begründen, weshalb diese Vorstellung nicht zutreffend ist. Als Anlass zur Diskussion bieten sich entsprechende Fehler an, wie etwa im Arbeitsauftrag in Abbildung 2.

Christian ordnet von klein nach groß:

0,65 – 1,3 – 1,44 – 1,68 – 1,125 – 2,4

Was hat sich Christian wohl dabei gedacht?
Was ist an Christians Vorstellung falsch? Wie kann man ihm helfen?
Bringe die Zahlen in die richtige Reihenfolge!

Abbildung 2: Arbeitsauftrag zur Thematisierung der Komma-trennt-Strategie

Anknüpfend an diese Aufgaben kann man die Schülerinnen und Schüler weitere Aufgaben aus anderen Bereichen der Dezimalbruchrechnung finden lassen, in denen die Komma-trennt-Vorstellung ebenfalls zu falschen Ergebnissen führt. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass diese Fehlvorstellung bei einer gleichen Anzahl von Dezimalen häufig zu richtigen Ergebnissen führt, während sie bei einer unterschiedlicher Anzahl von Dezimalen Fehler zur Folge hat.

Dies soll bewirken, dass die Schülerinnen und Schüler an diese Problemfälle zukünftig mit erhöhter Aufmerksamkeit herangehen.

Insgesamt zielt das explizite Thematisieren der Komma-trennt-Vorstellung darauf ab, bei den Schülerinnen und Schülern ein Bewusstsein für diese weit verbreitete Fehlvorstellung zu erzeugen, das vor entsprechenden Fehlern bewahren soll.

Zu diskutieren ist schließlich auch der Umgang mit „Kommazahlen" in der Primarstufe. So ist im Hinblick auf die Komma-trennt-Vorstellung fraglich, ob die Verwendung des Kommas im Sinne der Sortentrennung zusammen mit der zugehörigen Sprechweise aufrecht erhalten werden sollte, oder ob nicht bereits in der Grundschule auf die Bedeutung der Stellenwerte eingegangen werden sollte. Es ist anzunehmen, dass der Übergang zu den Dezimalbrüchen weniger problematisch verläuft, wenn bereits bei der Behandlung von Größen die erste Dezimale allgemein als zehnter Teil einer Einheit (eines Meters, eines Zentimeters, eines Euros, …) herausgestellt wird (und analog für weitere Dezimalen). Allerdings ist zu berücksichtigen, dass diese Auffassung von Größen *nicht* den außerschulischen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schülern entspricht, da im täglichen Umgang mit Geld die Deutung des Kommas als Trennzeichen zwischen Euro und Cent nahe liegend ist. Da sich diese Vorerfahrungen im Unterricht nicht ausblenden lassen, sollte herausgestellt werden, dass diese Trennung nur jeweils für eine ganz bestimmte Anzahl von Nachkommastellen gilt, was sich über die Bedeutung der einzelnen Stellen vermitteln lässt: So steht z. B. bei Meterangaben die erste Dezimale für jeweils 10 cm und die zweite für einzelne Zentimeter, so dass die Gesamtzahl der Zentimeter nur direkt bei Dezimalbrüchen mit genau 2 Nachkommastellen abgelesen werden kann.

Weiterhin wäre es wünschenswert, bereits in der Grundschule die Größenbereiche der Gewichte und Volumina auch in Sachaufgaben in stärkerem Maße einzubeziehen, um der Vorstellung vorzubeugen, Dezimalbrüche bestünden stets aus zwei Dezimalen.

Schließlich ist später dafür Sorge zu tragen, dass der Übergang von den konkreten Größen zu den abstrakten Zahlen gelingt. Hierfür ist wichtig, diesen Übergang nicht als selbstverständlich vorauszusetzen, sondern die hier beschriebenen Probleme im Unterricht angemessen zu berücksichtigen.

Literatur

Brekke, G. (1996): A decimal number is a pair of whole numbers. In: Puig, L./Gutiérrez, A. (Hrsg.): Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 2. Valencia University, S. 137–144

Eidt, H. u. a. (2002): Denken und Rechnen 3. Braunschweig: Westermann

Eidt, H. u. a. (2003): Denken und Rechnen 4. Braunschweig: Westermann

Günther, K. (1987): Über das Verständnis der Schüler von Dezimalzahlen und auftretende Schülerfehler. In: Mathematische Unterrichtspraxis 8(1), S. 25–40

Klika, M. (1997): „0,5 m sind doch 5 cm, oder?“ Untersuchungen zum Verständnis der Dezimalschreibweise bei Größen. In: mathematica didactica 20(1), S. 25–46
Mahlstedt, K.-O./Jannack, W. (1986): Dezimalrechnung statt Bruchrechnung, Appelshülsen/Mühlheim: MUED
Padberg, F. (1989): Dezimalbrüche – problemlos und leicht? In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 42(7), S. 387–395
Padberg, F. u. a. (1990): Typische Schülerfehler bei Dezimalbrüchen. In: Mathematische Unterrichtspraxis 11(4), S. 31–42
Padberg, F. (1991): Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen – eine empirische Untersuchung an Gymnasialschülern. In: Der Mathematikunterricht 37(2), S. 39–69
Padberg, F. (1992): Über Probleme von Gymnasialschülern mit dem Dezimalbruchbegriff. Eine empirische Untersuchung. In: mathematica didactica 15(1), S. 48–61
Padberg, F. (2002[3]): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg/Berlin: Spektrum
Postel, H. (1991): Konzeptionen zur Behandlung der Dezimalbruchrechnung in der Bundesrepublik Deutschland. In: Der Mathematikunterricht 37(2), S. 5–21
Resnick, L. B. u. a. (1989): Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. In: Journal for Research in Mathematics Education 20(1), S. 8–27
Sackur-Grisvard, C./Léonard, F. (1985): Intermediate Cognitive Organizations in the Process of Learning a Mathematical Concept: The Order of Positive Decimal Numbers. In: Cognition and Instruction, 2(2) S. 157–174
Steinle, V./Stacey, K. (1998a): Students and Decimal Notation: Do They See What We See? In: Gough, J./Mousley, J. (Hrsg.): Mathematics: exploring all angles. Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematical Association of Victoria, Brunswick, S. 415–422
Steinle, V./Stacey, K. (1998b): The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. In: Kanes, C. u. a. (Hrsg.): Teaching Mathematics In New Times. Conference Proceedings MERGA 21. Volume 2. Ascot Vale, S. 548–555
Wellenreuther, M./Zech, F. (1990): Kenntnisstand und Verständnis in der Dezimalbruchrechnung am Ende des 6. Schuljahres. In: mathematica didactica 13(3/4), S. 3–30

Anschrift der Verfasserin

Kirsten Heckmann
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
33615 Bielefeld
kirsten.heckmann@arcor.de

Eingang Manuskript: 28.03.2005 (überarbeitetes Manuskript: 21.12.2005)