Welche Aufgaben passen zu dem Term?

Möglichkeiten für den Einsatz von Rechengeschichten am Beispiel der Subtraktion und Division von Brüchen

von

Michael Kleine und Eva Fischer, Regensburg

Kurzfassung: Rechengeschichten spielen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe eine stark untergeordnete Rolle. Dabei lassen sie sich einfach und effektiv in einen Unterricht integrieren, in dem Schülerinnen und Schüler flexibel mit mathematischen Übersetzungsprozessen zwischen einer sachbezogenen Situation und einem mathematischen Modell agieren. Dieser Beitrag ordnet dazu die Rechengeschichten als eine besondere Form offener Aufgaben im Mathematikunterricht in ein theoretisches Modell zur Bearbeitung sachbezogener Aufgaben ein, die dem vorwärts gerichteten, „normalen" Aufgabentyp genau entgegengesetzt ist. Um das sich ergebende Spektrum an Rechengeschichten aufzuzeigen, werden Beispiele von Rechengeschichten zur Subtraktion und Division von Brüchen in der 6. Klasse aufgezeigt.

Abstract: Students formulating mathematical tasks is a rarely used method in secondary education. This is quite surprising because this method can be easily and effectively integrated into maths lessons especially as we are interested in the transformation between real-life situations and mathematical models. This article aims to promote the method of formulating tasks. This method is an example of a particular type of open exercise. Thereby, the cognitive demand for students is quite the opposite to the usual way of mathematical work. To show a possible spectrum of formulating tasks we hand out examples from the field of subtraction and division of fractions in grade 6.

1 Einleitung

Mathematikunterricht ist stark aufgabendominiert. Dabei lassen sich ganz unterschiedliche Typen von Aufgaben unterscheiden, die sich von sogenannten Standardaufgaben, wie Rechenaufgaben oder eingekleidete Aufgaben, bis hin zu komplexen „Problemlöseaufgaben" erstrecken, bei denen die Schülerinnen und Schüler zu selbstständigem, aktivem Arbeiten (im Sinne von Problemlösen) anregt, ihnen inhaltliches, nicht-standardisiertes Argumentieren abverlangt und Verbindungen zwischen Alltag und Mathematik verdeutlicht werden (sollen). In diesem Beitrag wollen wir Mathematikaufgaben aus dem Blickwinkel von „offenen Aufgaben" betrachten, die nach der Forderung der BLK-Expertise von 1997 die bestehende Aufgabenkultur erweitern soll (siehe Borneleit et al. 2000). Über die Thematik zu dieser „neuen" Aufgabenkultur gibt es zahlreiche Ansätze für deren Einsatz und die Gestaltung unterschiedlicher Aufgabenformen. Dabei scheinen die Aufgaben jedoch überwiegend „vorwärts gerichtet" zu sein, d. h., ausgehend von einer mehr oder weniger offenen Sachsituation, werden verschiedene Bearbeitungsmöglichkeiten eröffnet. Es lohnt sich jedoch, auch einmal den Weg zurück zu gehen, nämlich Schülerinnen und Schüler Aufgaben zu vorgegebenen Rechentermen selbst erfinden zu lassen. Dabei lassen sich zahlreiche Entdeckungen über die mentalen Verknüpfungen von Rechentermen auf der mathematischen Ebene und Sachkontexten auf der realen Ebene machen.

In diesem Beitrag soll dieses Anliegen derart umgesetzt werden, dass ausgehend von dem skizzierten Ansatz offener Aufgaben, die Rechengeschichten als eine besondere Form innerhalb dieses Typus theoretisch verankert wird. Weiterhin sollen an ausgewählten Beispielen zur Subtraktion und Division von Brüchen Möglichkeiten für den diagnostischen Einsatz dargestellt werden.

2 Rechengeschichten als offene Aufgaben

2.1 Aspekte offener Aufgaben

Zunächst einmal lassen sich offene Aufgaben ganz allgemein derart beschreiben, dass bei ihnen immer gewisse Unklarheiten auftreten. Dieses kann man beispielsweise dadurch erreichen, dass für die Lösung relevante Informationen fehlen oder im Überfluss vorhanden sind. In diesem Fall müssen Schülerinnen und Schüler die für die Lösung einer Aufgabe relevanten Daten identifizieren. Als eine Konsequenz dieser „Öffnung" wird die Anzahl möglicher Rechenwege erhöht, was sowohl richtige als auch fehlerhafte Optionen betreffen kann. Nach Blum/Wiegand (2000) ist eine offene Aufgabe grundsätzlich dadurch gekennzeichnet, dass es einen Anfangszustand A und einen Zielzustand Z gibt sowie eine Transformation T, die A in Z überführt. Eine Aufgabe kann demnach dadurch geöffnet werden, dass bei mindestens einer der beteiligten Komponenten die Freiheitsgrade erhöht werden (indem man beispielsweise die Klarheit reduziert).

Betrachtet man in diesem Zusammenhang das primäre Anwendungsfeld offener Aufgaben im Unterricht, so stehen sicherlich die Förderung mathematischer Grundbildung und ein vertieftes Verständnis für die Mathematik mit all ihren Möglichkeiten, Anwendungen und Zusammenhängen im Blickpunkt. Daneben können jedoch auch elementares Grundwissen und Rechenfertigkeiten mit offenen, weiter gefassten Aufgaben abwechslungsreich erlernt und geübt werden. Außerdem werden Fähigkeiten wie Modellieren, Problemlösen und Argumentieren unterstützt. Damit kann das Interesse für Mathematik durch Interpretationsspielräume, Entfalten eigener Ideen, Erfahrungen von Erfolg und auch Irrtum usw. bei Schülerinnen und Schülern geweckt werden.

Oftmals ist es möglich, dass offene Aufgaben durch geschicktes Weglassen oder Hinzufügen von Informationen aus bestehenden Schulbuchaufgaben hervorgehen. Dadurch kann sich die Anzahl der Lösungen und Lösungswege erhöhen, da die Schülerinnen und Schüler nicht durch oftmals enge Formulierungen in vorbestimmte Bahnen gelenkt werden. Sie sollen und müssen sogar selbst entscheiden, welche der (erlernten) Lösungsverfahren sie am sinnvollsten anwenden. Man kann auch bereits in der Aufgabenstellung nach mehreren Lösungsvarianten fragen oder, wie in unserem Fall, die Schülerinnen und Schüler selbst Aufgaben erfinden lassen.

Diese Sichtweise impliziert dabei eine Form der Binnendifferenzierung des Unterrichts, indem jede Schülerin und jeder Schüler die gestellte Aufgabe auf dem eigenen Niveau und mit den eigenen Ideen lösen kann. Haben Schülerinnen und Schüler anfangs Probleme beim Bearbeiten einer Aufgabe, so kann man beispielsweise zulassen, dass sie sich zunächst einer hinführenden Aufgabe widmen und diese dann anschließend erweitern, um sich auf diese Weise der Lösung der ursprünglichen Aufgabe schrittweise anzunähern (vgl. dazu beispielsweise Böhmer 2000). Somit haben Schülerinnen und Schüler auf unterschiedlichem Leistungsniveau die Möglichkeit, Mathematik zu betreiben und eigene kognitive Verbindungen aufzubauen. Aus diagnostischer und deskriptiver Sicht ist dabei interessant, dass sich durch alternative Lösungsvorschläge auch fehlerhafte Strategien, Muster oder mentale Vorstellungen frühzeitig erkennen lassen.

2.2 Rechengeschichten als besondere Form offener Aufgaben

Eine spezielle Form offener Aufgaben stellen die aus der Grundschule bekannten, in höheren Schulformen jedoch nur selten verwendeten Rechengeschichten dar. Im Primarbereich wird diese Form der Eigenproduktion gezielt für die Förderung und Differenzierung von Schülerinnen und Schülern eingesetzt (vgl. Selter 1993). Nach Krauthausen/Scherer (2001) lassen sich zum Erfinden von Rechengeschichten folgende Unterscheidungen bezüglich der Aufgabenstellung treffen: (1) Die Schülerinnen und Schüler haben eine freie Themenwahl, (2) ein Kontext oder (3) eine Rechnung ist vorgegeben sowie (4) eine Struktur wie ein Rechenbaum ist dargestellt. In diesem Beitrag beschäftigen wir uns mit Rechengeschichten in der Sekundarstufe I, bei denen ein Term den Schülerinnen und Schülern vorgegeben wird, was der dritten Kategorie von Krauthausen und Scherer entspricht. In diesem Fall lassen sich vorläufig Rechengeschichten als die Rückübersetzung eines Rechenterms in eine Kontextaufgabe charakterisieren.

Betrachten wir für eine differenzierte Einordnung der hier geforderten Rechengeschichten mathematisches Arbeiten zunächst noch einmal aus der Sichtweise des typischen „vorwärts gerichteten“ Vorgehens mit sachbezogenen Aufgaben: Bei diesen Aufgaben handelt es sich in der Schule meistens um Textaufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler ein verbal formuliertes Sachproblem zunächst mathematisieren, dann verarbeiten, schließlich interpretieren und validieren müssen. Dieser prinzipiell erwünschte Bearbeitungsprozess von der Sachsituation über die mathematische Ebene zurück zur Sachsituation lässt sich stark vereinfacht als Modellierungskreislauf beschreiben (vgl. Klieme/Neubrand/Lüdtke 2001). In diesem Modell sind die Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik von besonderer Bedeutung, die innerhalb eines didaktischen Modells traditionell als „Grundvorstellungen“ bezeichnet werden (vgl. für weitere Details vom Hofe 1995; Kleine 2004).

Häufig haben Schülerinnen und Schüler jedoch auf Grund von unzureichenden Grundvorstellungen genau bei diesen Übersetzungsprozessen Probleme. Dabei ist es bei diesem Vorgehen oftmals schwierig, die vorhandenen Vorstellungen anhand der Lösungen von Sachaufgaben zu ermitteln. Für ein solches Ansinnen erscheinen vielmehr Aufgaben geeignet, deren Ansatz dem von Textaufgaben genau entgegen gerichtet ist: Rechengeschichten.

Bei Rechengeschichten müssen Schülerinnen und Schüler zu einem vorgegebenen Term selbst eine passende Sachsituation entwerfen, die mit dem gegebenen Term gelöst werden kann. Dazu werden verschiedenste Fähigkeiten benötigt: Einerseits müssen die gegebenen Größen in einen realistischen Kontext eingebettet werden. Andererseits sind mentale Modelle notwendig, um zu eruieren, welche realen Handlungen sich beispielsweise hinter vorgegebenen Rechenoperationen verbergen.

Ebenso wie im Modell der Sachaufgaben liegen bei Rechengeschichten somit Übersetzungen zwischen der Realität und Mathematik vor. Um es noch deutlicher auszudrücken: Rechengeschichten erfordern in hohem Maße Grundvorstellungen, die zwischen diesen beiden Ebenen vermitteln. Anders als im klassischen Fall einer sachbezogenen Aufgabe erfolgen diese Übersetzungsprozesse nicht in Richtung der innermathematischen Verarbeitung hin, sondern genau anders herum.

Der Bearbeitungsprozess bei Rechengeschichten ist somit dem Mathematisierungsvorgang entgegen gerichtet, setzt also beim mathematischen Modell an und übersetzt dieses Modell in eine geeignete Sachsituation. Diese Antiparallelität zwischen Rechengeschichten und dem Prozess des Mathematisierens ist in Abbildung 1 dargestellt. In Anlehnung an die spezifische Übersetzung eines Rechenterms in eine Sachsituation wird dieser entgegen gesetzte Vorgang des Mathematisierens als *Konkretisieren* bezeichnet (vgl. Fischer 2005). Rechengeschichten zeichnen sich somit durch ihre besondere Stellung innerhalb des Modellierungskreislaufs aus. Nach diesem Verständnis lassen sich Rechengeschichten kurz als die Konkretisierung eines Rechenterms in einem Sachkontext charakterisieren.

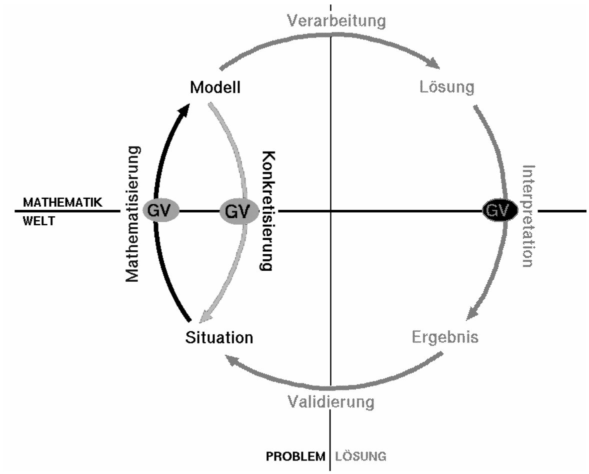

Abbildung 1: Einordnung von Rechengeschichten in den Modellierungskreislauf (GV: Grundvorstellungen)

Betrachtet man den praktischen Einsatz von Rechengeschichten, so sollten nach dieser Ansicht im Unterricht insbesondere solche Lösungsvarianten besprochen werden, die auf unterschiedlichen Grundvorstellungen beruhen, sowie diejenigen, die aus Fehlvorstellungen resultierende Mängel aufzeigen, um diese zu beheben. Dabei sollte außerdem auf den Realitätsbezug geachtet werden. Damit hat das „Erfinden" von Rechengeschichten im Idealfall zur Folge, dass den Schülerinnen und Schülern ihr eigenes Vorgehen bewusst (gemacht) wird und die Lehrkraft Hinweise auf die zugrunde liegenden mentalen Modelle erhält. Abschließend ist zu vermuten, dass sich Rechengeschichten positiv durch die zugrunde liegenden kognitiven Anforderungen auf Schlüsselqualifikationen wie Kreativität und sprachliche Fähigkeiten auswirken können. Im folgenden Abschnitt soll anhand einer schriftlichen Untersuchung exemplarisch das Spektrum beim Einsatz von Rechengeschichten aufgezeigt werden.

3 Rechengeschichten als diagnostisches Instrument: Theoretische Ansätze und empirische Befunde

Im Folgenden sollen Aspekte des Potentials von Rechengeschichten dargestellt werden. Als Beispiele werden dazu schriftlich dokumentierte Rechengeschichten von Schülerinnen und Schülern herangezogen, die diese in einem ergänzenden Teil der mathematischen Längsschnittstudie PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik, vgl. vom Hofe et al. 2002) bearbeitet haben. Zunächst werden die Rechengeschichten vorgestellt sowie das kognitive Potenzial aus normativer Sicht analysiert. Nach der Darstellung der untersuchungstechnischen Details werden empirische Befunde präsentiert und diskutiert. Vertiefende Details zu den Ausführungen sind bei Fischer (2005) dargestellt.

3.1 Rechengeschichten zur Subtraktion und Division von Brüchen

Bei den hier ausgeführten Beispielen handelt es sich um jeweils einen Rechenterm zur Subtraktion und zur Division von Brüchen. Die Aufgaben wurden Schülerinnen und Schülern im Anschluss an einen mathematischen Test ergänzend gegeben, sodass alle Ausführungen in schriftlicher Form vorliegen. Da zu erwarten war, dass nicht allen Schülerinnen und Schülern Rechengeschichten aus dem Unterricht bekannt sind, wurde eingangs ein Beispiel einer Rechengeschichte präsentiert, um sicherzustellen, dass die Aufgabenform verstanden wird. Abbildung 2 zeigt die Arbeitsanweisungen und das Beispiel aus dem Aufgabenteil der Schülerinnen und Schüler. Somit bestand die vollständige Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler darin, nach der Entwicklung einer geeigneten Sachsituation (Rechengeschichte) den Modellierungskreislaufs (Abbildung 1) nochmals zu durchlaufen, also sowohl zu „konkretisieren“ („rückwärts gerichtet“) als auch den Kreislauf „vorwärts gerichtet“ zu vollenden. In diesem Beitrag soll die Formulierung einer Rechengeschichte, also der erste Teil der Aufgabe, im Mittelpunkt stehen.

Im Folgenden sollen zunächst die kognitiven Anforderungen bei der Übersetzung zwischen realer Halbebene und mathematischer Halbebene (vgl. Abbildung 1) betrachtet werden, die notwendig erscheinen, um die Rechenterme der Subtraktion und der Division zu bearbeiten. Dazu werden im weiteren Verlauf notwendige Grundvorstellungen skizziert, die zwischen den beiden Halbebenen vermitteln.

Aufgabe Rechengeschichte

Ein Beispiel:

Term: 36 m – 28 m

Rechengeschichte zu diesem Term:
Bei den Bundesjugendspielen wirft Susi den Ball 36 m weit. Linda schafft nur 28 m. Wie viel Meter wirft Susi weiter als Linda?

Rechnung: 36 m – 28 m = 8 m

Ergebnis: Susi wirft den Ball 8 m weiter als Linda.

Erfinde selbst Rechengeschichten zu den folgenden Termen:

a) 2½ Stunden – ¾ Stunden b) ¾ l– ¼ l

Abbildung 2: Beispielaufgabe und Arbeitsanweisung zur Rechengeschichte

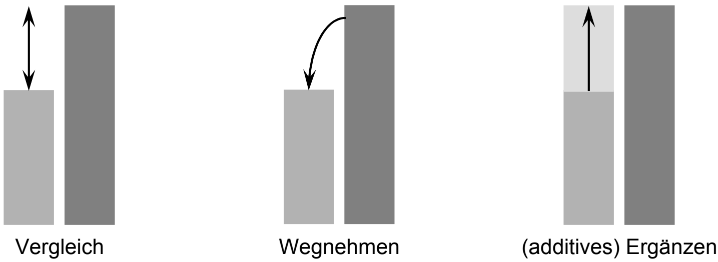

Abbildung 3: Grundvorstellungen zur Subtraktion.

Ausgehend von der *Subtraktion* von Größen mit natürlichen Zahlen als Maßzahl, lassen sich nach Padberg (1996) drei Grundvorstellungen unterschieden, die jeweils am Beispiel „7 – 3“ erläutert werden:

- *Vergleichen*: Stefan hat 7 Asterix-Hefte, seine Schwester hat nur 3. Wie viele Hefte hat Stefan mehr als seine Schwester?
- *Wegnehmen*: Stefan hat 7 Asterix-Hefte. Er schenkt 3 davon seiner Schwester. Wie viele Hefte bleiben für Stefan übrig?
- *Ergänzen*: Stefan hat 7 Asterix-Hefte, seine Schwester nur 3. Zu ihrem Geburtstag bekommt sie so viele Hefte dazu, dass beide Geschwister gleich viele haben. Wie viele Hefte bekommt die Schwester?

Betrachtet man diese Vorstellungen genauer, so ist die Vorstellung des Ergänzens sehr eng mit der Addition verbunden: Man spricht deshalb auch oft von „additivem Ergänzen“. Für Zusammenhänge zwischen den Vorstellungen lässt sich feststellen, dass ein Vergleich stets auch durch Wegnehmen oder Ergänzen interpretieren werden kann. Die Vergleichsvorstellung liegt also gewissermaßen zwischen der des Wegnehmens und der des Ergänzens, kann also mit verschiedenen Handlungen assoziiert werden. Abbildung 3 visualisiert die drei Grundvorstellungen mit Hilfe von Balkendiagrammen.

Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen lassen sich nach Padberg (1996) ebenfalls drei Grundvorstellungen der *Division* unterscheiden. Diese sollen am Beispiel „32 : 4“ verdeutlicht werden:

- *Aufteilen*: Die 32 Spielkarten eines Kartenspiels sollen auf Stapel zu je 4 Karten aufgeteilt werden. Wie viele Stapel erhält man?
- *Verteilen*: Ein Kartenspiel hat 32 Spielkarten. Es wird so lange reihum an alle vier Spieler eine Karte ausgeteilt, bis alle Karten verteilt sind. Wie viele Karten bekommt jeder Spieler?

- *Ausmessen*: Ein Quartett besteht aus 4 Karten. Für ein vollständiges Quartettspiel benötigt man 32 Karten. Wie viele Quartette braucht man, um ein vollständiges Spiel zu erhalten?

Betrachtet man die Vorstellungen wiederum genauer, so kann man das Aufteilen auch als Zerlegung einer Grundmenge in gleichmächtige, paarweise disjunkte Teilmengen betrachten. Gesucht ist dabei die Anzahl der entstandenen Teilmengen. Im Gegensatz dazu stellt das Ausmessen ein Zusammenfassen von disjunkten Mengen zu einer Vereinigungsmenge dar. Man geht also von kleinen gleichmächtigen Mengen aus und gelangt zu einer großen Menge, wohingegen man beim Aufteilen von der Grundmenge ausgeht. Schon an dieser Stelle soll betont werden, dass die Vorstellung des Verteilens nur dann sinnvoll ist, wenn es sich beim Divisor um eine natürliche Zahl handelt. Außerdem ist hierbei entscheidend, dass von einem gleichmäßigen, „gerechten“ Verteilen die Rede ist; im Beispiel soll dies schon durch die Formulierung deutlich werden. Alle oben genannten Vorstellungen ergeben streng genommen nur dann einen „schlichten“ Sinn, wenn der Dividend ein ganzzahliges Vielfaches des Divisors ist. Ansonsten muss man im obigen Beispiel in Kauf nehmen, dass ein oder mehrere Stapel unvollständig sind, nicht alle Karten verteilt werden beziehungsweise Teilquartette im Spiel eingesetzt werden müssen.

Da es sich in den hier angegebenen Rechentermen nicht um das Arbeiten mit natürlichen Zahlen handelt, sondern um *Brüche*, müssen zusätzlich noch Grundvorstellungen von Brüchen bei den Schülerinnen und Schülern aktiviert werden. Bei Bruchzahlen wird in Anlehnung an Hefendehl-Hebeker (1996) und Malle (2004) für den hier dargestellten Zusammenhang insbesondere zwischen folgenden Grundvorstellungen unterschieden, die alle anhand des Beispiels „¾“ beschrieben werden:

- *Bruch als Teil eines Ganzen*: Das Ganze kann ein Objekt oder eine Größe sein. Der Teil erhält selbst den Charakter eines eigenständigen Objekts. Beispiel: Eine Dreivierteltorte.
- *Bruch als absoluter Anteil*: ¾ bedeutet in diesem Sinne „drei von vier“. Diese Vorstellung wird häufig in der Praxis vor allem bei statistischen Erhebungen verwendet.
- *Bruch als Operator bzw. Bruch als relativer Anteil*: Die Bruchzahl ist hier also der relative Anteil einer Größe. Beispiel: ¾ von 1000 Personen.
- *Bruch als Quasikardinalzahl*: Mit Hilfe dieser Grundvorstellung kann man das Rechnen mit Bruchzahlen häufig auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückführen. Beispiel: Dreiviertel einer Torte bedeutet dasselbe wie dreimal eine Viertel-Torte. Ein „Viertel“ wird dadurch zu einer neuen Einheit.

Zusammenfassend lässt sich aus den bisherigen Überlegungen für die kognitiven Anforderungen festhalten, dass für das Erfinden einer Rechengeschichte in diesem Zusammenhang eine Grundvorstellung zur Rechenoperation aktiviert werden muss, die mit einer Vorstellung zum Zahlenbereich verknüpft wird. Dabei sind in diesem Beitrag die Anforderungen durch den Zahlenbereich weniger anspruchsvoll als die der Rechenoperation. Darüber hinaus muss das Ganze in einem Kontext geschehen, der sachadäquat ist, das heißt im sachbezogenen Sinn plausibel erscheint.

Betrachtet man vor diesem Hintergrund mögliche Lösungsvarianten, so könnten für die angegebenen Terme einfache Rechengeschichten wie folgt aussehen:

- *Subtraktion*: (1) – Vergleich: Max trödelt bei seinen Hausaufgaben gerne herum. Gestern brauchte er insgesamt 2½ Stunden, bis er fertig war. Sein Freund Moritz dagegen hat sich gestern besonders beeilt und war schon nach einer ¾ Stunde fertig. Um wie viele Stunden war Moritz gestern schneller als Max mit den Hausaufgaben? (2) – Wegnehmen: Max und Moritz haben gestern eine Fahrradtour in die Berge unternommen. Für den Hinweg haben sie 2½ Stunden gebraucht. Für den Weg bergab brauchten sie jedoch eine ¾ Stunde weniger als bergauf. Wie lange war die Fahrzeit bergab? (3) – Ergänzen: Die Mutter erlaubt Max heute Nachmittag 2½ Stunden bei Moritz zu spielen. Nach einer ¾ Stunde muss Moritz jedoch zum Fußballtraining. Wie lange hätte Max noch bleiben dürfen?
- *Division*: (1) – Aufteilen: Julia hat eine Flasche mit ¾ Liter Wasser. Sie will den Inhalt gleichmäßig in Gläser füllen, die jeweils ¼ Liter Wasser fassen. Wie viele Gläser kann Julia abfüllen? (2) – Verteilen: nicht möglich, da Divisor mit einer Einheit ist. (3) – Ausmessen: Julia möchte eine Flasche füllen, die ¾ Liter fasst. Dazu stehen ihr Gläser zur Verfügung mit jeweils ¼ Liter Inhalt. Wie viele solcher Gläser benötigt sie?

3.2 Stichprobe

Das Arbeitsblatt (Abbildung 2) wurde Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 6 in Bayern als Zusatzaufgabe in dem mathematischen Test vorgelegt, wenn die Bearbeitungszeit für den Test noch nicht ausgeschöpft war. Es war somit nicht damit zu rechnen, dass alle 1064 Teilnehmer des Tests auch eine Rechengeschichte erfinden. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Anzahl der vorliegenden Rechengeschichten, aufgeteilt nach den Schulformen.

Berücksichtigt man, dass in der Ausgangsstichprobe zu dem mathematischen Test die einzelnen Schulformen etwa in gleichen Teilen vertreten sind, so ergibt sich bei der Bearbeitung der Rechengeschichten ein deutliches Übergewicht des Gymnasiums gegenüber Real- und Hauptschule. Dieses mag sicherlich daran liegen, dass die Arbeitsgeschwindigkeit für den vorangegangenen mathematischen Test bei Gymnasiasten in der Regel höher liegt als an den anderen Schulformen. Ebenfalls fällt auf, dass die Divisionsaufgabe schlechter bearbeitet wird als die Subtraktionsaufgabe. Neben einem höheren Schwierigkeitsgrad der Division lag das sicherlich auch an dem Umstand, dass dem vorgegebenen Beispiel ebenfalls eine Subtraktion zugrunde lag.

	Hauptschule	Realschule	Gymnasium	gesamt
Subtraktion	147	197	310	654
Division	112	114	223	479

Tabelle 1: Darstellung der Stichprobe

3.3 Empirische Befunde

3.3.1 Empirische Befunde zur Subtraktion

Im Folgenden sollen zunächst Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler zum Subtraktionsterm betrachtet werden. Dazu werden die Lösungen zunächst klassifiziert, d. h., es wird anhand der empirischen Befunde ein Klassifikationsschema erstellt, in das die Rechengeschichten eingeordnet werden. Die Lösungen werden in Bezug auf zwei Dimensionen kategorisiert:

1. Klassifikation der erkennbaren Grundvorstellung zur Rechenoperation (vgl. Abschnitt 3.1);
2. Einordnung des Sachkontextes nach dem Merkmalen realistisch vs. unrealistisch.

Für die folgende pragmatische Beurteilung der Rechengeschichte sollen die Schülerinnen- und Schülerlösungen in diesem Beitrag vorrangig nach der erkennbaren Vorstellung geordnet werden. Prototypische Beispiele von Schülerinnen und Schülern zu jeder Kategorie ergänzen die Ausführungen.

Unterscheiden wir vor diesem Hintergrund die Lösungswege, so lassen sich für den Subtraktionsterm zunächst folgende adäquaten Lösungsansätze identifizieren:

- *Vergleiche mit realistischem Kontext*: Dieser Kategorie werden sämtliche Rechengeschichten zugeordnet, zu deren Konstruktion die Grundvorstellung des Vergleichens notwendig ist und denen eine realistische Vorstellung der Größen zugrunde liegt. Schülerbeispiel: „Balduin und Luisa gehen auf einen Berg. Balduin braucht 2½ und Luisa ¾ Stunde. Wie viele Stunden war Luisa schneller?“
- *Wegnehmen mit realistischem Kontext*: Hierzu zählen alle Lösungen, die auf der Grundvorstellung des Wegnehmens basieren und die verwendeten Größen in einem realistischen Kontext wiedergeben. Schülerbeispiel: „Für eine Strecke

mit dem Fahrrad braucht Peter 2½ Stunden. Moritz braucht für die gleiche Strecke ¾ Stunden weniger. Wie lange brauchte Moritz?“

- *Ergänzen mit realistischem Kontext*: In diese Kategorie fallen diejenigen Rechengeschichten, bei denen die Grundvorstellung des Ergänzens sichtbar wird und die Schülerinnen und Schüler die vorgegebenen Größen in einen realistischen Kontext einordnen konnten. Schülerbeispiel: „Susi braucht 2½ Stunden um eine Mathe-Schulaufgabe zu schreiben. Eigentlich dürfte sie aber nur eine ¾ Stunde schreiben. Wie viel Zeit hätte sie noch gebraucht?“
- *Vergleichen mit unrealistischem Kontext*: Allen hier eingeordneten Rechengeschichten liegen zwar jeweils die richtige Vorstellung des Vergleichens zugrunde, jedoch ordnen die Schülerinnen und Schüler die Größen nicht in einen realistischen Kontext ein. Schülerbeispiel: „Linda schafft es 2½ h die Luft anzuhalten. Mona nur ¾ h. Wie lang hat Linda es geschafft die Luft länger als Mona anzuhalten?“
- *Wegnehmen mit unrealistischem Kontext*: Ebenso wie unter Vergleichen mit unrealistischem Kontext erfinden die Schülerinnen und Schüler, deren Lösungen sich in dieser Kategorie befinden, keinen realistischen Kontext für ihre Geschichten, haben aber die Grundvorstellung des Wegnehmens richtig aktiviert. Schülerbeispiel: „Susi braucht am Sportfest für 50 m 2½ Stunden. Birgit braucht eine ¾ Stunde weniger. Wie schnell war Birgit?“

Auftretende Lösungen, die keine Vorstellungen bzw. keine Subtraktionsvorstellungen erkennen lassen, werden wie folgt klassifiziert:

- *Nur Rechnung*: Schülerinnen und Schüler konnten keine Rechengeschichte zu dem vorgegebenen Term formulieren, ihn jedoch berechnen.
- *Qualitativer Vergleich*: Diese Kategorie besteht aus Schülerinnen und Schülerlösungen, die zwar auf der Grundvorstellung des Vergleichens basieren, bei denen jedoch der Vergleich rein qualitativer Art ist und es zur Lösung der Rechengeschichte nicht notwendig ist, die Rechenoperation auszuführen. Schülerbeispiel: „Tobi braucht 2½ h, Michi braucht ¾ h für die Radtour. Wer ist schneller?“
- *Addition*: Hier sind diejenigen Lösungen vertreten, bei denen die Schülerinnen und Schüler eine Rechengeschichte geschrieben haben, bei der eine Addition anstatt einer Subtraktion verwendet wird. Schülerbeispiel: „Familie Maurer fährt mit dem Auto nach Hamburg. Sie brauchen 2½ h. Wenn sie mit dem Zug gefahren wären, hätten sie eine ¾ h länger gebraucht. Wie lange hätten sie mit dem Zug gebraucht?“

Betrachtet man die vorliegenden Lösungen der Schülerinnen und Schüler zu dieser Aufgabe, so liegt etwa drei Viertel der Rechengeschichten eine adäquate Grundvorstellung zugrunde, von denen wiederum zwei Drittel der Schülerinnen und

Schülern die Grundvorstellung des Vergleichens gewählt haben. Vereinzelt wurde die Vorstellung des Ergänzens ausgesucht; der Rest hat sich für einen Sachkontext zum Wegnehmen entschieden. Nennenswerte Unterschiede zwischen den Schulformen lassen sich nicht feststellen. In Bezug auf die Kontextdimension haben fast alle Schülerinnen und Schüler mit adäquaten Grundvorstellungen einen weitgehend realistischen Kontext für ihre Rechengeschichte gewählt.

Die Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler die Größen 2½ Stunden und ¾ Stunden anscheinend ohne Probleme in einen realistischen Kontext einbinden können, ist vermutlich auch darauf zurückzuführen, dass es sich hierbei um Größen handelt, mit denen die Schülerinnen und Schüler mindestens schon seit der Grundschulzeit regelmäßig im Alltag konfrontiert sind und die sie somit täglich auf Grund eigener Erfahrungen mit Sinn füllen müssen. Man kann also davon ausgehen, dass die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit ihnen relativ routiniert sind.

Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen auch Altevogt/Lager/Viet (1996), die in ihrer Studie herausfinden, dass es bestimmte Brüche gibt, mit denen schon Grundschülerinnen und Grundschüler gut umgehen können, da sie den im täglichen Leben auftretenden Brüchen entsprechen. Die untersuchten Grundschülerinnen und Grundschüler kennen somit eine Vielzahl von Situationen, in denen sie bestimmte Brüche routiniert einsetzen. Weiterhin kommt hier sicherlich besonders die Anteilsvorstellung mit der Einheit Stunde zum Tragen, die „den Vorteil der Nähe zu vielen Anwendungen der Brüche im täglichen Leben und damit gute Rückgriffmöglichkeiten auf Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler“ (Padberg 2002, S. 18) bietet.

Bei den „fehlerhaften“ Lösungen dominiert der Typus, der nur aus einer Rechnung besteht. Hier spielte möglicherweise die unbekannte Aufgabenform eine Rolle, gepaart mit einer zu flüchtigen Betrachtung der Aufgabenstellung. Deutlich seltener ist ein qualitativer Vergleich bzw. eine Umkehrung der Rechenoperation zu einer Addition zu erkennen. Der letzte Fall kann in einigen Fällen möglicherweise auch darauf zurückgeführt werden, dass eine fehlerhafte Geschichte mit einer Vorstellung des Ergänzens zu Grunde liegt. Anstatt sich jedoch zu überlegen, wie viel man zu ¾ Stunden ergänzen beziehungsweise addieren muss, um 2½ Stunden zu erhalten, wird die Summe dieser beiden Größen gebildet. Der korrekte Term ¾ Std. + ☐ = 2½ Std. wird so zu ¾ Std. + 2½ Std. = ☐. Sonstige Lösungswege konnten nicht identifiziert werden.

3.3.2 Empirische Befunde zur Division

Analog zu der Klassifikation der Subtraktionsaufgabe wird an dieser Stelle kurz ein Klassifikationsschema für die Schülerinnen und Schülerantworten bei der Divisionsaufgabe dargestellt. Dadurch wird schließlich eine Analyse der auftretenden

Schülerinnen und Schülerlösungen möglich. Als adäquate Bearbeitungen lassen sich insbesondere folgende Kategorien empirisch belegen:

- *Aufteilen mit realistischem Kontext*: In diese Kategorie werden sämtliche Lösungen eingeordnet, denen die Grundvorstellung des Aufteilens in gleich große Stücke zu Grunde liegt und bei denen es den Schülerinnen und Schülern zusätzlich gelungen ist, ihre Geschichte in einem realistischen Kontext zu formulieren. Schülerbeispiel: „¾ l Wein sollen in ¼-l-Gläser gefüllt werden. Wie viele Gläser braucht man?“
- *Ausmessen mit realistischem Kontext*: Diese Kategorie enthält diejenigen Antworten, die auf der Grundvorstellung des Ausmessens beruhen. Zusätzlich konnten die Schülerinnen und Schüler hier die vorgegebenen Größen mit einem realistischen Sinn füllen. Schülerbeispiel: „Linda soll einen ¾ l Orangensaft kaufen. Da der Supermarkt nur ¼-l-Flaschen hat, kauft Linda ¼-l-Flaschen. Wie viele muss sie kaufen?“
- *Aufteilen mit unrealistischem Kontext*: In den Lösungen, die in diese Kategorie eingeordnet werden, ist zwar die Vorstellung des Aufteilens zu erkennen, den Schülerinnen und Schülern gelang es jedoch nicht, einen realistischen Rahmen für ihre Geschichte zu finden. Schülerbeispiel: „Der Zoo darf für die Pferde zum Trinken nur insgesamt ¾ l Wasser benutzen, aber jedes Pferd im Stall bekommt ¼ l. Wie viele Pferde haben sie?“
- *Umwandlung des Terms*: Den Schülerinnen und Schülern, deren Rechengeschichten in diese Kategorie fallen, ist es nicht gelungen, eine Geschichte zum eigentlichen Term zu formulieren. Stattdessen haben sie den ursprünglichen Term in den Term „¾ Liter : 3“ umgewandelt. In diesem Fall wird dann die Grundvorstellung des Verteilens aktiviert. Schülerbeispiel: „Drei Kinder bekommen eine Flasche O-Saft mit ¾ Liter geschenkt. Sie wollen es gerecht aufteilen. Wie viel l bekommt jeder?“

Diejenigen Lösungen, die als nicht adäquat eingestuft wurden, lassen sich folgendermaßen klassifizieren:

- *Nur Rechnung*: Vielen Schülerinnen und Schülern gelang es nicht, eine Rechengeschichte zu dem vorgegebenen Term zu formulieren, sie konnten ihn jedoch berechnen.
- *Qualitativer Vergleich*: Diese Kategorie besteht aus Lösungen, bei denen die beiden Größen ¾ Liter und ¼ Liter rein qualitativ verglichen wurden. Ohne eine Grundvorstellung der Division zu verwenden, wurde gefragt, welche der beiden Größen größer beziehungsweise kleiner ist. Schülerbeispiel: „In ein Glas passt ein ¾ l und in ein anderes ¼ l. Welches Glas ist größer?“
- *Subtraktion*: In dieser Kategorie sind sämtliche Rechengeschichten erfasst, zu deren Lösung man die beiden Größen subtrahieren würde, anstatt sie zu divi-

dieren. Schülerbeispiel: „Eine Trinkflasche der Firma McKinley fasst ¾ Liter. Eine der Firma Sigg nur ¼ Liter. Wie viel Liter fasst die McKinley mehr als die Sigg?“

Bei der Analyse der Lösungen fällt auf, dass (1) weniger Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe bearbeitet haben, von denen (2) nur etwa ein Viertel eine richtige Rechengeschichte angeben kann. Wenn jedoch eine passende Rechengeschichte erfunden wurde, so lag dieser Geschichte in zwei Drittel der Fälle eine Vorstellung des Aufteilens zugrunde. Der Rest der Lösungen fußte auf dem Ausmessen, vereinzelt lässt sich eine Umwandlung des Terms feststellen. In Bezug auf die Kontextdimension fällt wieder auf, dass fast alle Kontexte bei richtigem Grundvorstellungsbezug auch realitätsnah formuliert sind.

Nun gelten die obigen Aussagen zwar für die gesamte Stichprobe, zwischen den einzelnen Schulformen treten jedoch tendenzielle Unterschiede auf: So finden sich die vereinzelten Umwandlungen des Rechenterms ausschließlich bei Realschülern wieder; die Grundvorstellung des Ausmessens wird eher bei Gymnasiasten aktiviert. In allen Schulformen dominiert jedoch eine Aufteilsituation in der Rechengeschichte. Bei der Divisionsaufgabe neigen zudem eher die Realschüler zum unrealistischen Kontext als Schülerinnen und Schüler der anderen Schulformen.

Wie auch schon für die Größen bei der Subtraktion werden auch die Größen in diesem Fall im täglichen Leben ständig verwendet und sind den Schülerinnen und Schülern darum wohl geläufig. Sie mit Inhalten zu füllen und sinnvoll in vorhandene Sachkontexte einzugliedern, bereitet wenig Schwierigkeiten. Bei den fehlerhaften Lösungen ist etwa jede Vierte wiederum nur eine ausgeführte Rechnung. Es dominiert in diesem Fall eindeutig der Subtraktionsfehler. Fast jede zweite fehlerhafte Lösung lässt sich entsprechend bezeichnen. Andere Lösungswege sind nicht in einem bedeutsamen Umfang feststellbar.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Rechengeschichten eine alternative Aufgabenform darstellen, mit denen sich Grundvorstellungen erkennen lassen. Bei den beiden Rechengeschichten in diesem Beitrag fällt auf, dass die Kontextdimension bei einer adäquat aktivierten Grundvorstellung keine unabhängige Dimension zu sein scheint: Der richtige Einsatz von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen geht fast immer mit einem realitätsbezogenen Kontext einher. Einschränkend zu den hier dargestellten Befunden soll jedoch noch einmal betont werden, dass es sich bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern in diesem Beitrag um eine Positivselektion in dem Sinne handelt, dass diese Schülerinnen und Schüler einen vorgeschalteten Mathematiktest vollständig bearbeitet und noch Zeit für diese „Zusatzaufgabe“ haben. Um so interessanter sind jedoch die Befunde zur Division: Obwohl die Grundvorstellungen in diesem Bereich bereits seit der Grundschule aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bekannt sind, wenden sich deutlich weniger Schülerinnen und Schüler dieser Rechenoperation zu als der Subtraktion. Diese

Befunde belegen damit beispielsweise auch die Analysen von Padberg (1996), der in seinen Untersuchungen ebenfalls für die Division die größten Ausfälle beschreibt. Erstaunlich ist es in unserem Fall jedoch, dass auch am Ende der 6. Jahrgangsstufe von den positiv selektierten Schülerinnen und Schülern nur ein geringer Anteil in der Lage zu sein scheint, eine adäquate Sachsituation einem Rechenterm zuzuordnen. Diese Befunde sind unserer Meinung nach nicht ausschließlich dadurch erklärbar, dass es sich um eine Zusatzerhebung nach einem Leistungstest handelt. Vielmehr scheint hier eine intensivere Förderung elementarer Grundvorstellungen notwendig zu sein.

4 Ausblick

In unserem Beitrag stand die Rechengeschichte als besondere Form offener Aufgaben im Mittelpunkt. Um ein Plädoyer für diese Übungsform zu halten, weisen wir abschließend noch einmal auf ihre Bedeutsamkeit für den mathematischen Erkenntnisprozess hin: Um neue Inhalte im Mathematikunterricht zu festigen und mit bekanntem Wissen zu vernetzen, bietet sich der Einsatz offener Aufgaben an. Dabei sind zur Bearbeitung offener Aufgaben nicht nur Kenntnisse und Anwendungen von erarbeiteten Rechenregeln erforderlich, vielmehr müssen die Schülerinnen und Schüler in anwendungsbezogenen Kontexten ausreichende Grundvorstellungen über die jeweilige Rechenoperation sowie den verwendeten Zahlenraum ausgebildet haben. Offene Aufgaben können ferner zu einer stärkeren Binnendifferenzierung in der Klasse beitragen. Ist es das Ziel eines Mathematikunterrichts in diesem Umfeld, tragfähige kognitive Netzwerke mathematischer Inhalte aufzubauen, so ist der Einsatz von offenen Aufgaben in unseren Augen unerlässlich. Dabei ist dieses Ziel für uns jedoch nur unzureichend erreicht, wenn man mathematische Bearbeitungsprozesse nur einseitig durch „vorwärts gerichtetes“ Arbeiten fördert. Unserer Meinung nach verlangt eine tragfähige Vernetzung mathematischer Inhalte ein flexibles Agieren, das auch ein „rückwärts gerichtetes“ Arbeiten umfasst, wie es durch Rechengeschichten gefordert wird. So kann dafür Sorge getragen werden, dass sich mathematische Inhalte und insbesondere mathematische Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern im Laufe der kognitiven Entwicklung miteinander vernetzen. Aus unserer Sicht ist es darum unverständlich, warum Rechengeschichten, die in der Grundschule eine viel größere Verbreitung haben, um flexibles Denken zu fördern, in der Sekundarstufe praktisch völlig aus dem Unterrichtsgeschehen ausgeblendet werden. Ihr Einsatz erscheint so einfach wie effektiv. Darüber hinaus geben sie dem einzelnen Lehrer eine weitere Möglichkeit, um die Fähigkeiten und insbesondere vorhandene Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu diagnostizieren und in den Unterricht einzubinden.

Literatur

Altevogt, B./Lager, M./Viet, U. (1996): Warum ist ¼ von 32 gleich 7? In: mathematik lehren 73, S. 8–11

Blum, W./Wiegand, B. (2000): Offene Aufgaben, wie und wozu? In: mathematik lehren 100, S. 52–55

Borneleit, P./Danckwerts, R./Henn, H.-W./Weigand, H.-G. (2000): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Bonn: KMK

Böhmer, A. (2000): Variationen einer Textaufgabe. In: mathematik lehren 100, S. 15–16

Fischer, E. (2005): Ausgewählte Analysen beim Lösen von Rechengeschichten im Bereich der Bruchzahlen bei Schülerinnen und Schülern der Klasse 6. Unveröffentlichte Zulassungsarbeit. Universität Regensburg: NWF 1 – Mathematik

Hefendehl-Hebeker, L. (1996): Brüche haben viele Gesichter. In: mathematik lehren 78, S. 20–48

Kleine, M. (2004): Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I. Hildesheim: Franzbecker

Klieme, E./Neubrand, M./Lüdtke O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 139–190

Krauthausen, G./Scherer, P. (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: mathematik lehren 123, S. 4–8

Padberg, F. (1996): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum

Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum

Selter, C. (1993): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum

vom Hofe, R./Pekrun, R./Kleine, M./Götz, T. (2002): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA). Konstruktion des Regensburger Mathematiktests für 5.–10. Klassen. In: Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, S. 83–100

Anschrift der Verfasser

Michael Kleine und Eva Fischer
Universität Regensburg
NWF I – Mathematik, Didaktik der Mathematik
93040 Regensburg
michael.kleine@mathematik.uni-regensburg.de

Eingang Manuskript: 16.10.2005 (überarbeitete Fassung: 22.12.2005)