# „Wozu muss man denn das beweisen?“

## Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe

von

**Sebastian Kuntze, München**[1]

**Kurzfassung:** Das mathematische Beweisen und Argumentieren erfordert Metawissen über diese fachspezifische Tätigkeit. Hierzu gehört Wissen von Lernenden zu Funktionen des Beweisens auch über den Aspekt der Verifikation von Aussagen hinaus. Um solches Schülerwissen einzuschätzen, wird ein Kategoriensystem zur Beschreibung von Funktionen des Beweisens entwickelt und vor seinem theoretischen Hintergrund diskutiert. Seine Einsetzbarkeit auch für spätere empirische Studien wird anhand einer Auswertung von Textproduktionen zum Beweisen geprüft. Dabei zeigt sich, dass die Lernenden beim Darstellen von Lernergebnissen ein recht breites Spektrum an Funktionen des Beweisens ansprachen.

**Abstract:** Meta-knowledge about mathematical argumentation and proof is a prerequisite for the development of proof competence. For instance, learners should know about the functions of proof and proving. In this article, several categorial systems for functions of proof and proving are discussed and a modified categorisation is presented. The applicability of this model is examined in a rating of functions of proof and proving distinguished by students in text productions in which they describe mathematical proof.

## 1 Theoretischer Hintergrund

Im Folgenden wird anhand der Ansätze von Bell (1976), De Villiers (1990), Hanna (2000) sowie von Healy/Hoyles (1998) aufgezeigt, dass in diesen Studien eine breite Palette verschiedener Aspekte der Beschreibung von Funktionen des Beweisens identifiziert und kategorisiert wurde. Es erscheint wünschenswert, die verschiedenen Facetten in einem modifizierten und etwas verfeinerten Kategoriensystem zusammenzufassen, das bei Untersuchungen von Schüleräußerungen zu Funktionen des Beweisens genutzt werden kann und zudem auch bei der Betrachtung des Beweisens als Prozess möglichst gute Unterscheidungen zwischen Funktionen des Beweisens ermöglicht. Ein solches Kategoriensystem wird in 1.3 vorgestellt und anschließend anhand seines theoretischen Hintergrunds diskutiert. Um zu prüfen, inwiefern sich diese theoretisch abgeleitete Unterscheidung von Funktionen

[1] Die Durchführung der Studie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität von Schule“ unterstützt (RE 1247/4).

des Beweisens bei der Auswertung von Schüleräußerungen tatsächlich zur Codierung eignet, werden nachfolgend konkrete Textproduktionen ausgewertet, in denen Schülerinnen und Schüler Lernergebnisse darstellen.

## 1.1 Beweisen und Argumentieren – Aspekte der Wissenschaft Mathematik für den Mathematikunterricht

Das mathematische Argumentieren und Beweisen ist ein wesentlicher und charakteristischer Bestandteil der Wissenschaft Mathematik und wird auch als ein zentrales Ziel von Wissens- und Kompetenzaufbau im Mathematikunterricht angesehen (KMK 2003; NCTM 2000). Dabei zeichnet sich die Situation des Mathematikunterrichts zum Beweisen und Argumentieren dadurch aus, dass die Lernenden über fachspezifisches Metawissen zum Beweisen und Argumentieren verfügen müssen, um selbst Beweise entwickeln oder beurteilen zu können. Ein Beispiel für solches, letztlich auf die Wissenschaft Mathematik bezogenes Metawissen ist die beweisspezifische Methodenkompetenz (Healy/Hoyles 1998; Heinze/Reiss 2003), die Wissen über zulässige Formen des Argumentierens, zur Beweisstruktur und zur logischen Kette umfasst. Die beweisspezifische Methodenkompetenz stellt damit eine Voraussetzung für Beweis- und Argumentationskompetenz dar (Healy/Hoyles 1998; Reiss/Hellmich/Thomas 2002).

Ferner ist Wissen über die Entwicklung von Beweisen und zu Techniken der Beweisfindung für den Aufbau von Beweis- und Argumentationskompetenz hilfreich. In einer Evaluationsstudie zu einer Lernumgebung, die an der wissenschaftlichen Praxis der Beweisgenerierung orientiert ist (Reiss/Renkl 2002; Boero 1999), zeigte sich, dass Wissen über Erarbeitungsprozesse von Beweisen (vgl. Kuntze 2005) Lernenden beim eigenen Generieren von Argumentationen helfen kann. In einer weiteren Studie stellte sich heraus, dass mit Hilfe dieser Lernumgebung die Beweiskompetenz der Lernenden signifikant stärker gesteigert werden konnte als in einer Vergleichsgruppe (Heinze/Rudolph 2004), in der Übungsaufgaben zum Beweisen bearbeitet wurden.

In der Literatur zum Beweisen und Argumentieren wird der gegenseitige Bezug zwischen Unterricht und Wissenschaft Mathematik deutlich sichtbar. Äußerungen von Mathematikern über das Beweisen vermitteln einen Eindruck von der Rolle, die das Beweisen und Argumentieren für Mathematikerinnen und Mathematiker spielt. Die von hoher Kohärenz gekennzeichnete Fachpraxis (Heintz 2000) wird beschrieben, um Vorschläge für die Unterrichtspraxis abzuleiten (z. B. Wittmann/Müller 1988; Blum/Kirsch 1991; Hanna 2000; De Villiers 1990). Diese Vorschläge richten sich oft gegen ein formalistisch orientiertes Beweisen an der Schule, das durch eine einseitige Betonung einzelner Funktionen des Beweisens durch Lehrer und Schüler begünstigt zu werden scheint (De Villiers 1990; Hanna 1983; 1997; 2000; Healy/Hoyles 1998). Bemängelt wird, dass in einer einseitig formalistischen Sichtweise oft nur der Aspekt des Verifizierens von Aussagen betont wird. Eine

Lösung wird unter anderem in einer ausgewogeneren Gewichtung verschiedener Funktionen des Beweisens im Mathematikunterricht gesehen, denn auch Metawissen über die Funktionen des Beweisens für die Fortentwicklung und für die Praxis der Mathematik könnte für den Wissensaufbau der Schülerinnen und Schüler wesentlich sein (vgl. etwa De Villiers 1990; Hanna 2000; Schoenfeld 1994). So kann die Wahrnehmung von Funktionen des Beweisens etwa dadurch hilfreich für den Kompetenzaufbau sein, dass die Lernenden reichhaltigeres Wissen über Sinn und Zweck des Beweisens aufbauen können. Nicht zuletzt um abzuschätzen, über welches Wissen zu Funktionen des Beweisens Schülerinnen und Schüler verfügen können, wird dieser Bereich von beweisbezogenem Metawissen im Folgenden in einem ersten Schritt anhand bereits existierender Ansätze näher untersucht. Ziel dieser Überlegungen ist es, theoriegeleitet ein Kategoriensystem zu entwickeln, mit dem Schüleräußerungen ausgewertet werden können, wie sie in Interviews, Textproduktionen oder Fragebögen zum Beweisen vorkommen. Dieses Kategoriensystem, das auch für zukünftige Auswertungen nutzbar sein soll, wird anschließend exemplarisch anhand von Schülertexten zum Beweisen auf seine Einsetzbarkeit bei der Codierung von Lernergebnissen geprüft.

### 1.2 Kategoriensysteme für Funktionen des Beweisens

Eine Kategorisierung von Funktionen des Beweisens, auf die später andere Unterscheidungen aufgebaut wurden, stammt von De Villiers (1990), der angeregt durch Gedanken von Bell (1976) die Funktionen

- *Verifikation*,
- *Erklärung*,
- *Kommunikation*,
- *Systematisierung* und
- *Entdeckung*

unterscheidet. De Villiers merkt an, dass diese fünf Funktionen nicht erschöpfend seien, und nennt als Beispiele die ästhetische Funktion und die persönliche Selbstverwirklichung als weitere mögliche Beweisfunktionen.

Nach De Villiers (1990) umfasst die Beweisfunktion der *Verifikation* die Überzeugung von der Richtigkeit eines Satzes oder deren Rechtfertigung („conviction or justification", ebd., S. 17). Der Beweis wird benutzt, „to remove either personal doubt and/or those of sceptics" (ebd., S. 17). Die drei Aspekte einer Unterscheidung von Tall (1989), der die Entwicklung eines überzeugenden Arguments in den drei Phasen „convincing oneself", „convincing of a friend" und „convincing of an enemy" sieht, werden von De Villiers (1990) unter die Verifikationsfunktion subsumiert. Die Aspekte des Überzeugtseins, der Überzeugung und des Überzeugens anderer werden also alle der Verifikationsfunktion zugeordnet. Zum Entwicklungsprozess von Beweisen merkt De Villiers an, dass ein eigenes Überzeugtsein dem Beweis oft eher vorausgeht als erst durch ihn möglich wird („Proof is not necessarily a prerequisite for conviction – […] conviction is […] far more frequently a prerequisite for finding a proof“, ebd., S. 18). Im Kategoriensystem der Beweisfunktionen werden jedoch Teilaspekte der Verifikationsfunktion, die mit einzelnen Phasen des Entwicklungsprozesses von Beweisen assoziiert sind, nicht unterschieden.

Bei der *Erklärungsfunktion* des Beweisens nach De Villiers (1990) steht die Einsicht bzw. das Verstehen, warum eine Aussage wahr ist, im Mittelpunkt. Offenbar wird die Abgrenzung vom Bereich „conviction“ innerhalb von De Villiers’ Verifikationsfunktion aus der Perspektive des bereits fertigen Beweises verstanden. Bezieht man den Prozess der Entwicklung von Beweisen mit ein, so scheinen jedoch für die Bereiche „Sich-selbst-Überzeugen“ und „Überzeugen eines Freundes“ explanatorische Betrachtungen und explorative Einsichten in zugrundeliegende Probleme eine große Rolle zu spielen.

Die Beweisfunktion der *Kommunikation* betont nach De Villiers (1990) den Charakter des Austauschs von Gedanken und geteiltem Wissen („shared meaning“, ebd., S. 22) zwischen Mathematikern sowie das Aushandeln der Bedeutung nicht nur der betrachteten mathematischen Konzepte, sondern auch der an eine strenge Argumentation zu stellenden Anforderungen. Auch hier ergibt sich im Prozess der Beweisgenerierung und -begutachtung ein Überschneidungsbereich zu Prozessen des Überzeugens, die nach De Villiers der Verifikationsfunktion zuzuordnen sind.

Zusammenfassend sei festgestellt, dass die Verifikationsfunktion innerhalb des Kategoriensystems von De Villiers (1990) auch mit anderen Beweisfunktionen zusammenzuhängen scheint. Diese Überschneidungen ergeben sich insbesondere, wenn das Beweisen als Prozess betrachtet wird. Ein Grund dafür ist, dass der Aspekt „conviction“ vollständig der Verifikationsfunktion untergeordnet wird.

Die Gedanken von De Villiers erweitert Hanna (2000) in ihrer Aufstellung von „functions of proof and proving“ (ebd., S. 8) um drei weitere Aspekte:

- *Aufbaufunktion* („construction of an empirical theory“): Mathematische Behauptungen werden bewiesen, damit andere Theorieelemente darauf aufgebaut werden können.
- *Explorationsfunktion* („exploration“): Im Zentrum steht das Erkunden etwa der Bedeutung von Definitionen oder möglicher Folgerungen aus einer Annahme.
- *Eingliederungsfunktion* („incorporation“): Angesprochen ist die Integration einer bekannten Tatsache in einen neuen Rahmenzusammenhang und der damit verbundene Perspektivenwechsel.

Eine etwas gröbere Einteilung für Funktionen des Beweisens wurde in der empirischen Studie von Healy und Hoyles (1998) verwendet. In dieser Untersuchung wurde 2459 Lernenden der 10. Jahrgangsstufe die Frage „What is proof for?“ gestellt. Der Auswertung der Schülerantworten lagen die in Tabelle 1 wiedergegebenen Codes zugrunde. Bei Schülerantworten, die mehreren Kategorien zugeordnet werden konnten, wurde eine mehrfache Kodierung vergeben.

| **Student response** | **Code** |
|---|---|
| Not answered | 0 |
| Answers relating to verification/„truth“ | 1 |
| Answers relating to explanations, reasons | 2 |
| Answers relating to providing evidence | 3 |
| Answers relating to communicating to others | 4 |
| Answers relating to discovering new theories/ideas | 5 |
| Answers relating to ability/achievement | 6 |
| Answers relating to general validity, completeness | 7 |
| Answers including some reference to logical thinking | 8 |
| Other | 9 |

Tabelle 1: Kodierungsschema zu Beweisfunktionen (Healy/Hoyles, 1998, S. 12)

Healy und Hoyles fassten diese Codes zu vier Kategorien zusammen:

- *Wahrheit* („truth“): Codes 1, 3, 7 und 8
- *Entdeckung* („discovery“): Code 5
- *Erklärung* („explanation“): Codes 2 und 4
- Weitere/keine Antwort („other/none“): Codes 0, 6 und 9

In groben Zügen scheinen die ersten beiden dieser Sammelkategorien der Verifikationsfunktion und der Entdeckungsfunktion nach De Villiers (1990) und Hanna (2000) zu entsprechen. Die Sammelkategorie „explanation“ ähnelt der Erklärungsfunktion nach De Villiers und Hanna und umfasst auch deren Kommunikationsfunktion. Unter diesem Blickwinkel erscheint die Zuordnung von Code 3 („providing evidence”) zur Sammelkategorie „truth“ nicht unbedingt zwingend, da hier möglicherweise auch der Sinnbereich „explanation“ mit angesprochen sein könnte.

Vor dem Hintergrund der vorangegangenen Überlegungen zum Sinnbereich „conviction“ stellt sich die Frage, welcher Kategorie etwa hypothetische Schülerantworten zugeordnet werden müssten, die entsprechend der oben beschriebenen Aspekte von Tall (1989) auf das Überzeugen anderer Menschen ausgerichtet sind. Einen Code speziell für das Überzeugen anderer, wie es von De Villiers als Teilaspekt seiner Funktion „verification“ angesprochen wurde, gibt es bei Healy/Hoyles offenbar nicht. Fiktive Äußerungen wie „Ein Beweis ist dazu da, dass ich mit meiner Argumentation selbst meine ärgsten Kritiker von der Wahrheit einer Aussage überzeugen kann“ könnten etwa den Codes 1, 4, 7 und 9 zugeordnet werden, was den Sammelkategorien „truth“, „explanation“ und „other/none“ entspräche.

Die von Healy und Hoyles (1998, S. 17) innerhalb ihres Kategoriensystems beobachtete Verteilung der Schülerantworten ergab, dass

- 50% der Schülerinnen und Schüler Antworten gaben, die auf eine Wahrnehmung der Verifikationsfunktion hindeuteten,
- 35% der Lernenden eine Erklärungsfunktion für Beweise sahen,
- nur 1% eine Entdeckungsfunktion erkannten,
- und 28% der Schülerantworten der Kategorie „weitere/keine Antwort“ zugeordnet wurden.

In der Grundtendenz entsprechen diese Befunde der Wahrnehmung von De Villiers (1990), der bei von ihm untersuchten südafrikanischen Lehrern und Studenten ein weitgehendes Vorherrschen einer auf die Verifikationsfunktion eingeschränkten Sichtweise beobachtet. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt auch Knuth (2002) in einer Interviewstudie mit 17 Lehrpersonen der Sekundarstufe.

Über den Konsens hinaus, dass das Beweisen im Mathematikunterricht nicht nur in seiner Verifikationsfunktion wahrgenommen werden sollte, ergeben sich aus den Gedanken dieses Abschnitts Implikationen, die eine Weiterentwicklung der beschriebenen Unterscheidungen wünschenswert erscheinen lassen. Insbesondere sollte ein Kategoriensystem, das bei Untersuchungen von Schüleräußerungen zu Funktionen des Beweisens genutzt werden kann, auch bei der Betrachtung des Beweisens als Prozess möglichst gute Unterscheidungen zwischen Funktionen des Beweisens ermöglichen. Ein solches Kategoriensystem wird in 1.3 vorgeschlagen.

## 1.3 Modifiziertes Kategoriensystem zu Funktionen des Beweisens

Die im Folgenden dargestellte, nach der oben angesprochenen Zielsetzung modifizierte Zusammenstellung von Funktionen des Beweisens orientiert sich insgesamt an den in 1.2 beschriebenen Kategorisierungen. Es sei angemerkt, dass die aufgeführten Funktionen des Beweisens verschiedene Gesichter eines Gesamtprozesses beschreiben, die sich je nach Fall in ganz unterschiedlicher Intensität zeigen können. Deshalb sind die Kategorien nicht völlig disjunkt und können Überschneidungen aufweisen.

Das Beweisen hat die Funktion,

(1) Aussagen zu *verifizieren*. Ziel dieses Aspekts des Beweisprozesses ist es, dass der Beweisende weiß, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

(2) ein oder mehrere *zu Grunde liegende Probleme zu reflektieren*. Ziel ist, Einsicht in das Problem oder die Probleme zu gewinnen, das Problem oder die Probleme verstanden zu haben und zu wissen, warum die Aussage wahr oder falsch ist (vgl. auch die Funktion „explanation" von De Villiers 1990 und Hanna 2000).

(3) *andere Menschen* von der Wahrheit oder Falschheit der Aussage zu *überzeugen*. Ziel dieses sozialen Prozesses ist es, dass der Beweis anerkannt wird bzw. dass der Beweisende sich erfolgreich gerechtfertigt hat.

(4a) die *Ordnung mathematischen Wissens zu erkunden*. Ziel ist, nach einer Explorationsphase ein „Gefühl" für die Implikationszusammenhänge des zugrunde liegenden Problems zu haben. Diese Funktion des Beweisens entspricht in etwa dem Aspekt „exploration" von Hanna (2000).

(4b) eine *systematische Ordnung mathematischen Wissens herzustellen*. Ziel dieses Aspekts des Beweisens ist es, ein größeres Implikationsnetz hergestellt zu haben und zu wissen, welcher Teil der Voraussetzung ggf. wie wirkt bzw. welche Folgen Änderungen in Voraussetzung und Behauptung innerhalb einer systematischen, in einen mathematischen Teilbereich eingebetteten Betrachtung haben. Diese Funktion des Beweisens entspricht in etwa dem Aspekt „systematisation" von Hanna (2000).

(4c) mathematisches Wissen im Sinne des Gewinnens einer neuen Perspektive *neu zu ordnen*. Ziel ist es hier, neue Verknüpfungen zwischen verschiedenen Bereichen der Mathematik herzustellen. Dies entspricht in etwa der Funktion „incorporation" von Hanna.

(5a) mathematisches Wissen (d. h. neue Zusammenhänge, Sätze, Begriffe) zu *entdecken*. Ziel ist es hier, aus dem Beweisprozess Anregungen und Ideen für ggf. für den Beweis nötige, neue mathematische Objekte, sinnvolle Definitionen, weitere Beweise oder neue Sätze zu gewinnen. Diese Funktion des Beweisens entspricht der Kategorie „discovery" von Hanna (2000).

(5b) auf neu bewiesene Aussagen für das Beweisen anderer Behauptungen *aufbauen* zu können. Im Sinne dieser Funktion ist es Ziel des Beweisens, im Rahmen eines Theorieaufbaus gleichsam „Pfeiler" zu errichten, auf die sich andere Argumentationen stützen können. Diese Funktion des Beweisens umfasst in etwa den Aspekt „construction" von Hanna (2000).

(6) *mathematisches Wissen* in einer weltweit geteilten mathematischen Sprache *mitteilbar zu machen*. Ziel ist es mithin, eine gesicherte Aussage zusammen mit ihrer Sicherung kommunizierbar und (auch über Zeiträume hinweg) tradierbar zu machen (vgl. die Funktion „communication" von Hanna und De Villiers mit im Hinblick auf (3) verschobener Akzentsetzung).

(7a,b) *sich selbst* an einem Beweisproblem „*zu beweisen*". Dies kann einen individuellen (7a) oder einen sozialen (7b) Bezug haben. Ziel dieser individuell gesehenen Funktion des Beweisens (7a) ist es, angesichts des gemeisterten Beweisproblems persönliche Befriedigung zu erzielen und Selbstbestätigung zu ernten (vgl. auch die Funktion der „self-realisation" von De Villiers 1990, S. 23). Ziel der sozial gesehenen Funktion der personellen Bestätigung des Beweisenden (7b) könnte es sein, sich vor einer fachlichen Community bestätigt zu sehen, den Ruhm einzustreichen, ein bekanntes Problem gelöst zu haben, evtl. sogar, die wissenschaftliche Karriere von Mathematikern zu befördern oder den Initiationsritus in die wissenschaftliche Community, selbst einen „richtigen Satz" bewiesen zu haben, hinter sich gebracht zu haben.

(8) *Schönes zu entdecken oder Schönes zu erschaffen*. Ziel ist hier, durch einen besonders ästhetischen, „elegant geführten" oder „schönen" Beweis einen ästhetischen Gewinn zu erzielen (vgl. auch „aesthetic function" von De Villiers 1990, S. 23).

(9) eine *sichere Grundlage für Entscheidungen oder Verfahren der Praxis zu schaffen*. Auch wenn diese Funktion des Beweisens in der Mathematik zunächst nicht allzu deutlich hervorzutreten scheint, gibt diese Funktion als Hauptfunktion des Beweisens in juristischen Prozessen einen starken Hinweis darauf, dass es sich hier auch um einen Aspekt mathematischen Beweisens handeln könnte. Vergegenwärtigt man sich z. B. die Anwendungen der Kryptographie, so wird deutlich, dass mit Beweisen untermauerte Erkenntnisse zu Ver- oder Entschlüsselungsalgorithmen durchaus Auswirkungen auf praktische Entscheidungen über den Einsatz dieser Algorithmen haben können.

Diese Funktionen des Beweisens unterscheiden sich in einem Punkt wesentlich von den von De Villiers (1990) und Hanna (2000) vorgeschlagenen Kategoriensystemen: Es handelt sich um die Aufgliederung der Kategorie „verification" in die oben beschriebenen Funktionen (1) und (3), die aus den folgenden Gründen vorteilhaft erscheint:

Die Unterscheidung der drei Aspekte „convincing oneself", „concincing of a friend" und „convincing of an enemy" von Tall (1989) wird auf der Basis der oben vorgestellten Funktionen des Beweisens so interpretierbar, dass „convincing oneself" dem Aspekt (1) zuzuordnen wäre, erklärende Bemerkungen zum Beweisproblem nach Aspekt (2) ggf. geeignet wären, einen „Freund" zu überzeugen, während Funktion (3) den Sinnbereich „convincing of an enemy" umfasste.

Auch der interdisziplinäre Vergleich mit Beweisverfahren aus dem juristischen Bereich, der unter Umständen im Mathematikunterricht thematisiert wird, spricht für die Trennung der Verifikationsfunktion in (1) und (3). Im Straf- oder Zivilprozess kommt es für die Prozessparteien ja gerade darauf an, die eigene Überzeugung von der Lage der Dinge so vom Gericht würdigen zu lassen, dass die als „Beweise“ für die eigene Position vorgelegten Dokumente, Zeugenaussagen usw. als solche auch anerkannt werden.

## 1.4 Funktionen des Beweisens in Phasen der Beweisentwicklung

Die Unterscheidung der Aspekte (1) und (3) trägt ferner dem Umstand Rechnung, dass Beweise in der Mathematik meist nicht schlagartig entstehen und auch zunächst keine fertigen Produkte sind, sondern in einem oft langwierigen Prozess entwickelt werden. Das Generieren mathematischer Beweise hat nicht erst mit der Fertigstellung von Beweisen, sondern bereits während des Beweisentwicklungsprozesses wichtige Funktionen. Von Interesse ist daher auch die Frage, welche Funktionen in bestimmten Phasen des Beweisens vorherrschen. Hilfreich ist hier das Beweisentwicklungsmodell von Boero (1999), der für das Generieren von Beweisen in der Mathematik sechs Phasen nennt. Dieses Phasenmodell ist nicht im Sinne einer streng linearen Abfolge zu verstehen, sondern es sollen Rückgriffe und Sprünge zwischen Phasen zugelassen sein. In Tabelle 2 werden einige der in 1.3 zusammengestellten Funktionen des Beweisens den Phasen des Beweisentwicklungsmodells von Boero zugeordnet, die im Folgenden näher erläutert werden.

| | | Funktion des Beweisens (vgl. 1.3) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | (1) | (2) | (3) | (4a) | (4b) | (4c) | (5) | (6) |
| Phase (Boero 1999) | I. Entwicklung einer Behauptung/ Identifikation möglicher Argumente | X | X | | X | | | X | |
| | II. Formulierung einer Behauptung, die formalen Konventionen entspricht | | | (X) | (X) | X | (X) | (X) | X |
| | III. Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen | X | X | | X | (X) | (X) | (X) | |
| | IV. Auswahl von Argumenten und ihre Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen | (X) | X | | X | X | (X) | (X) | |
| | V. Organisation der Argumente in einem Beweis (der mathematischen Publikationsstandards entspricht) | | X | X | X | X | (X) | (X) | X |
| | VI. Annäherung an einen formalen Beweis | | (X) | (X) | (X) | (X) | (X) | | X |

X : in der Regel Funktion der Phase (X): eventuell Funktion der Phase

Tabelle 2: Funktionen des Beweisens im Beweisentwicklungsprozess

Die erste Phase beim Generieren von Beweisen durch Experten beinhaltet die *Entwicklung einer Behauptung und die Identifikation möglicher Argumente*. Während dieses in der Regel längeren Explorationsprozesses eines mathematischen Problembereichs werden auch eher empirische, induktive Denkschritte genutzt, um sich vom Vorliegen einer Tatsache zu überzeugen. Beim Reflektieren des zugrunde liegenden Problems werden meist inhaltsbezogene Informationen gesammelt und erste mögliche Argumente gefunden.

Während der zweiten Phase wird eine *Behauptung formuliert, die den formalen Konventionen entspricht*. Ziel dieser Phase ist es, Struktur und Ordnung in das Beweisproblem zu bringen und eine Basis für seine formale Einpassung in bereits existierende Anknüpfungspunkte der Theorie zu legen. Als Bestandteil der Veröffentlichung des entstehenden Beweises dient die an den formalen Konventionen ausgerichtete Formulierung der Behauptung auch der Anerkennung der Aussage durch die Fach-Community. Die Behauptung wird dadurch auch mitteilbar. Gedankenschritte, die dem eigenen Überzeugen vom Zutreffen der Behauptung dienen, werden in dieser Phase eher in den Hintergrund treten.

Die eigentliche Prüfung der Hypothese findet in der nun einsetzenden dritten Phase statt, während derer die *Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen* im Mittelpunkt steht. Das Zusammenspiel induktiver und deduktiver Denk- und Lösungsschritte ist für diese Phase charakteristisch. Die Expertin bzw. der Experte überzeugt sich in einem explorativen Prozess in der Regel zunächst selbst von möglichen Implikationszusammenhängen, Verallgemeinerungsmöglichkeiten, Einschränkungen und informiert sich über Spezialfälle. Die Suche nach Erklärungen, warum die Hypothese zutreffen könnte, motiviert diese Arbeitsschritte.

Die vierte Phase, die *Auswahl von Argumenten und ihre Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen*, dient der Vorbereitung einer Beweisformulierung nach wissenschaftlichen Standards. Zielgerichteter als in der dritten Phase werden die Argumente geordnet und auf Relevanz hin sortiert. Dabei gewinnt der Beweisende weitere Einsicht, auf der Basis welcher Tatsachen die Hypothese wahr ist. Aspekte des Ordnens und des Systematisierens gewinnen im Vergleich zu den vorangehenden Phasen in der Regel weiter an Bedeutung.

Die fünfte Phase des Modells stellt die *Organisation der Argumente in einem Beweis* dar. Nun erst wird das Produkt hergestellt, das durch seine Publikation andere Mathematiker überzeugen soll und der Anerkennung des entstandenen Beweises durch die fachliche Community dient. Dazu wird die Argumentation in Form einer den mathematischen Publikationsstandards entsprechenden kohärenten deduktiven Kette der Begutachtung zugänglich gemacht. Benutzte Voraussetzungen und zitierte Ergebnisse werden in der Regel expliziert. Mit Ausnahme des bereits abgeschlossenen eigenen Überzeugens können in dieser Phase alle in 1.3 aufgeführten Funktionen des Beweisens eine Rolle spielen.

Die sechste Phase der *Annäherung an einen formalen Beweis* tritt nicht immer auf. Eine Verarbeitung der deduktiven Argumentationskette zu einer detaillierten, elementarlogischen Darstellung wird eher selten angestrebt. Für das Überzeugen von Experten in Frage kommender mathematischer Spezialbereiche, für das Mitteilen oder das Tradieren des Beweises könnte diese Phase eine Funktion übernehmen.

In Tabelle 2 kann eine wichtige Beobachtung gemacht werden: Es fällt auf, dass die Funktionen des Beweisens (1) *Verifizieren* und (3) *Überzeugen* in keiner der Phasen nach Boero (1999) gleichzeitig auftreten. Die Unterscheidung dieser beiden Funktionen im Kategoriensystem scheint daher gerechtfertigt zu sein.

### 1.5 „Verifizieren“ versus „Überzeugen“: Funktionen des Beweisens im Unterricht

Im Hinblick auf den Mathematikunterricht dürfte die Betonung des Beweisfindungsprozesses im Zusammenhang mit Funktionen des Beweisens ebenfalls sinnvoll sein: Überzeugung von der Wahrheit einer Aussage (vgl. Funktion (1)) entsteht bei Schülerinnen und Schülern oft sehr schnell, nicht selten zu schnell: Einschränkungen im präadoleszenten wissenschaftlichen Denken (Kuhn 1989; Bullock/Ziegler 1994; Dunbahr/Klahr 1989; Tschirigi 1980; Thomas 1997), die auch bei jungen Erwachsenen noch nachweisbar sind (Reiss/Thomas 2000) führen beim Beweisen und Argumentieren unter anderem dazu, dass Hypothesen verfrüht angenommen werden, obwohl Alternativen noch nicht ausgeschlossen sind (vgl. auch Kuntze 2004). Eine Selbstkontrolle nach dem Motto „Begründe so genau, dass du auch deinen schärfsten Kritiker überzeugst“ entsprechend der Funktion (3) könnte hilfreich sein. Eine unterscheidende Betonung der beiden Funktionen (1) und (3) kann also für das Lernen unmittelbar nutzbar gemacht werden.

Das oben vorgeschlagene Kategoriensystem wurde entwickelt, um Äußerungen von Schülerinnen und Schülern zu Funktionen des Beweisens zu untersuchen. Im Folgenden soll geprüft werden, inwiefern das Kategoriensystem sinnvoll einsetzbar ist. Bei der Untersuchung geht es also zunächst nicht um die Erhebung eines repräsentativen Status Quo von Schülervorstellungen zu Funktionen des Beweisens oder um die Evaluation einer Lernumgebung (für erste Ergebnisse in diesen beiden Bereichen vgl. Linder 2004), sondern um die empirische Prüfung des theoretisch abgeleiteten Kategoriensystems am Beispiel von Schüleräußerungen über das Beweisen in Textproduktionen. Diese Texte stammen aus Themenstudien der Lernenden (vgl. Kuntze 2003). Die Lernumgebung, in der die Schülertexte entstanden, war auf das durch Materialienfragmente angeregte Reflektieren über das Thema „Beweisen und Argumentieren“ ausgerichtet. Die Materialien waren nicht ausschließlich auf Wissensaufbau zu Funktionen des Beweisens abgestimmt, sondern repräsentierten eine größere interdisziplinäre Palette von Aspekten.

Im Sinne der oben geführten Diskussion, dass es sinnvoll ist, die Kategorie der „verification" nach De Villiers (1990) und Hanna (2000) in die Funktionen des Beweisens (1) *Verifizieren* und (3) *Überzeugen* aufzuteilen, ist von Interesse, ob sich Äußerungen von Lernenden nach diesen beiden Funktionen auch empirisch unterscheiden lassen. Andererseits stellt sich die Frage, inwiefern Schüleräußerungen zum Spektrum der einzelnen Funktionen des Beweisens überhaupt beobachtet werden können. Die im Folgenden untersuchten Fragen lauten also:

- Kann die Unterscheidung der beiden Funktionen des Beweisens (1) *Verifizieren* und (3) *Überzeugen* auch in Schüleräußerungen nachvollzogen werden?
- Können die weiteren im Kategoriensystem enthaltenen Funktionen des Beweisens in Schüleräußerungen nachgewiesen werden?

## 2 Informationen zur Untersuchung

Die im Folgenden betrachteten Ausschnitte aus Textproduktionen wurden von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums erstellt. In Themenstudien sollten die Lernenden auf der Basis der zur Verfügung gestellten Quellmaterialien und eigener Rechercheergebnisse unter anderem beschreiben, was sie unter dem Beweisen in Mathematik einerseits und im rechtlichen Strafverfahren andererseits verstehen. Die Lernenden diskutieren in ihren Arbeiten meist, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sie zwischen diesen beiden Beweisverfahren sehen. In diesem Zusammenhang fallen oft Äußerungen, welchem Zweck das Beweisen dient, wofür Beweise da sind oder warum Mathematiker Aussagen beweisen, also zu Funktionen des Beweisens. Die Auswertung von Textprodunktionen als Erhebungsmethode für individuelle Wahrnehmungen zu Funktionen des Beweisens wurde gewählt, da sie vertiefte Einblicke in Schülervorstellungen zu mathematischen Inhalten ermöglichen kann (Morgan 2001; Maier 2000; Pimm 1987).

Die Aufgabenstellung an die Lernenden bestand insgesamt aus dem recht offenen Arbeitsauftrag, einen Aufsatz über das Beweisen zu schreiben, sowie aus ergänzenden instruktionalen Hilfsangeboten wie z. B. einem Gliederungsvorschlag, Beispielfragen zum Thema und Hilfen zur Strukturierung von Arbeitsprozessen.

In die Auswertung einbezogen wurden Themenstudien aus insgesamt sechs Klassen. Die Äußerungen wurden von zwei Beurteilenden eingeschätzt. Dabei wurden einem interpretativen Paradigma folgend auch Kontextinformationen aus anderen Passagen der schriftlichen Arbeiten einbezogen, um in einem Konsensverfahren Vorstellungen der Lernenden über Funktionen des Beweisens zu rekonstruieren und zu kodieren. Codes im Sinne des Kategoriensystems in 1.3 wurden vergeben, wenn hinreichend Evidenz für entsprechende Sinngehalte gefunden werden konnte.

Die individuellen Äußerungen der Lernenden zu Funktionen des Beweisens bezogen natürlich auch Ergebnisse der Beschäftigung mit den Themenstudienmaterialien mit ein. Aus diesem Grund wurde zur Kontrolle ein Rating durchgeführt, auf welche Weise die Materialien von den Lernenden in den Textproduktionen genutzt wurden. Unterschieden wurde zwischen

- *reproduktiven Äußerungen*, in denen Inhalte weitgehend untransformiert den Materialien entnommen und wiedergegeben wurden,
- *Rekonstruktionen von Inhalten der Materialien*, bei denen eine sprachlich eigenständige Formulierung darauf hindeutet, dass Ideen aus den Materialien von den Lernenden in eigenen Gedanken aufgegriffen wurden,
- *eigenproduktiven Äußerungen*, in denen im Bezug auf die Materialien eigenständige und über diese hinaus gehende Überlegungen ausgedrückt wurden. Diese Überlegungen können prinzipiell von den Materialien angeregt, aber auch von diesen weitgehend unabhängig sein.

Im Sinne einer empirischen Prüfung der Einsetzbarkeit des in 3.1 vorgestellten Kategoriensystems wurde auf diese Weise mit berücksichtigt, in welchem Maße die Äußerungen der Lernenden als eigenständige Darstellungen von Lernergebnissen angesehen werden können.

# 3 Ergebnisse

## 3.1 „Verifizieren“ und „Überzeugen“

Im Folgenden werden Ausschnitte aus Schülertexten vorgestellt, in denen einzelne Funktionen des Beweisens angesprochen werden. Ergänzend werden auch Texte besprochen, die auf indirektem Wege Rückschlüsse auf Vorstellungen von Lernenden zu Funktionen des Beweisens zulassen.

Ein erster Ausschnitt aus einer der schriftlichen Arbeiten stammt von Christopher:

> „In der Rechtswissenschaft gibt es ein Gesetzbuch für Beweise, und in der Mathematik nicht.
> Gemeinsamkeiten:
> – Bei beiden kommt es darauf an die Wahrheit durch Beweise herauszufinden.
> – Wie in der Mathematik, so auch in der Rechtswissenschaft würden wir ohne Beweise die Wahrheit nie ans Licht bringen.
> Ich finde beweisen sehr wichtig, weil man (wie schon oben genannt) ohne beweisen nie feststellen würde ob etwas wahr oder falsch ist.“ (Christopher)

Christopher vertritt in dieser als Eigenproduktion eingestuften Passage eine Sichtweise, bei der offenbar der Aspekt (1) *Verifizieren* im Vordergrund steht. In dem Ausschnitt vergleicht er mathematische mit juristischen Beweisverfahren und stellt als Gemeinsamkeit fest, dass es jeweils darauf ankommt, „die Wahrheit herauszufinden“. Beweise sind für Christopher dazu da, festzustellen, „ob etwas wahr oder falsch ist“. In den Formulierungen „herausfinden“ und „ans Licht bringen“ klingt bei Christopher entfernt auch die Funktion (5a) *Entdecken* mit an.

Auf andere Weise scheint Matthias das Beweisen in der Mathematik zu charakterisieren:

> „In der Mathematik werden mathematische Fragestellungen analysiert, beschrieben und durch Axiome und bestehende Sätze bewiesen und anderen damit überzeugend mitgeteilt, damit sie als Beweis anerkannt werden. Die Gemeinsamkeiten von Beweisen in der Mathematik und Beweisen außerhalb der Mathematik besteht darin, dass Behauptungen immer begründet und bewiesen werden müssen um sie glaubhaft anderen verkaufen zu können.“ (Matthias)

Diese Äußerung weist übrigens aus Sicht des Kontroll-Ratings ebenfalls eigenproduktive Elemente auf, die vermutlich auf Anregungen durch die Materialien zurückzuführen sein könnten.

Matthias hebt in erster Linie die Funktion (3) *Überzeugen* hervor: In seinem Text ist nicht davon die Rede, dass sich einzelne Beweisende einer objektiven Wahrheit von Behauptungen vergewissern. Stattdessen beschreibt Matthias, dass durch das Beweisen mit Hilfe von „Axiomen und bestehende[n] Sätze[n]“ anderen Menschen mathematisches Wissen „überzeugend mitgeteilt“ wird, wobei auch die Funktion *mathematisches Wissen mitteilbar machen* anklingt. Ziel ist die Anerkennung von Überlegungen als Beweis. Noch deutlicher wird dies in dem Satz, dass Behauptungen bewiesen werden müssen, um sie „glaubhaft den anderen verkaufen zu können“.

Einen ähnlichen Standpunkt wie Matthias nimmt Ralf ein:

> „Im Allgemeinen geht es beim ‚Beweisen‘, darum jemanden von seiner eigenen Meinung zu überzeugen. Sei es nun in der Mathematik oder bei der Verhandlung im Gericht, man versucht, wie schon oft zitiert ‚seinen Feind zur Überzeugung zu zwingen‘.“ (Ralf)

Ralf unterstreicht seine Sichtweise durch ein sinngemäßes Zitat aus den Themenstudienmaterialien, das er offenbar aus zwei Quellen zusammensetzt („Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen“ (Pierre de Fermat) und „Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind – letzteres ist das, was man beim Beweisen machen muss“, sinngemäß vgl. Tall 1989). Der Ausschnitt von Ralf zeigt nach dem Kontroll-Rating Merkmale reproduktiver Äußerungen. In der von dem Schüler vorgenommenen Anordnung der sinngemäßen Zitate mit von ihm eingeführtem interdisziplinären Bezug kann jedoch auch eine eigene Leistung gesehen werden, die Rückschlüsse auf ein individuelles Lernergebnis erlaubt.

Zwei weitere Beispiele für Meinungsäußerungen von Lernenden, bei denen auf die Wahrnehmung der Funktion des Überzeugens geschlossen werden kann, finden sich bei Alex und bei Kai:

> „Wir persönlich sind der Meinung, dass es beim Beweisen nicht darum geht Überzeugung zu erzwingen, sondern Überzeugung zu vermitteln und das geht nur wenn man Beweise nachvollziehbar und klar zu verstehen erstellt.“ (Alex)

> „Ich finde Beweise eigentlich wichtig, um jemanden zu überzeugen.“ (Kai)

Während Kai die Funktion des Überzeugens anderer mit eigenen Worten anspricht, differenziert Alex in seiner eigenproduktiven Äußerung zwischen dem „Erzwingen“ und dem „Vermitteln“ von Überzeugung. Dass er aus diesem Verständnis der Funktionen des Beweisens heraus die Anforderung der Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit von Beweisen ableitet, kann als Anzeichen für ein individuelles Vernetzen von beweisbezogenem Wissen mit Vorstellungen über Funktionen des Beweisens angesehen werden.

Auch Monika spricht die Funktion (3) *Überzeugen* an:

> „In vielen Situationen müssen wir etwas beweisen um eine Person zu überzeugen, dass etwas wahr oder falsch ist. Die meisten Beweise gibt es in der Mathematik und in der Rechtswissenschaft.“ (Monika)

Anders als bei Matthias, Ralf, Alex und Kai schwingt in dem Nebensatz, „dass etwas wahr oder falsch ist“ auch die Funktion (1) *Verifizieren* mit. Der Ausschnitt wurde als rekonstruktive Äußerung eingestuft, da vermutlich bei der Beschäftigung mit den Materialien der Lernumgebung ein eigenes Verständnis aufgebaut wurde.

Aus Monikas Textstelle geht weniger deutlich hervor, inwiefern sie zwischen der eigenen Überzeugung von der Wahrheit der zu beweisenden Aussage und dem Überzeugen anderer Menschen trennt. Hier wurden daher beide Codes vergeben.

Der folgende Ausschnitt von Stephanie soll demgegenüber zeigen, dass die Funktionen des Beweisens (1) *sich von der Wahrheit überzeugen/verifizieren* und (3) *andere überzeugen* entlang der Entwicklungsstufen überzeugender Argumente nach Tall (1989) von Lernenden mit eigenen Worten so in die eigene Argumentation eingebracht werden können, dass die Funktionen jeweils einzeln hervortreten:

> „Ein Mathematiker hat mal gesagt: ‚Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind – letzteres ist das, was man beim Beweisen machen muss!‘ Dies entspricht auch meiner Meinung. Zuerst sollte man selbst total überzeugt sein. Dann sollte man seine Überzeugung so begründen können, dass sie andere nachempfinden können. Zum Schluss kommt der schwierigste Teil. Die Begründungen müssen so hieb- und stichfest gemacht werden, dass selbst der ärgste Gegner dieser Behauptung kein Gegenargument mehr hat und ebenso überzeugt ist wie man selbst.“ (Stephanie)

Ausgehend von einem – reproduktiven – Zitat aus den Materialien rekonstruiert Stephanie die Aussage des Zitats mit eigenen Worten. In den letzten beiden Sätzen finden sich darüber hinaus individuelle Deutungen, die als Eigenproduktion eingestuft wurden (z. B. Interpretation von „dein Feind“ als „Gegner der Behauptung“). Stephanie beschreibt einen Prozess, der zu einem Beweis führt. Sie deutet das Zitat aus den Themenstudienmaterialien als zeitliche Abfolge, die von der eigenen

Überzeugung ausgehend (dies ist mit Funktion (1) zu assoziieren) über das „Nachempfinden“ der Überzeugung durch andere aufgrund von Begründungen bis hin zum Überzeugen durch hieb- und stichfeste Begründungen (Funktion (3) *Überzeugen*) verläuft.

Eine eigenproduktive Schilderung des Beweisens als Prozess, in dem unterschiedlichen Phasen verschiedene Funktionen zugeschrieben werden, findet sich bei Stefan. Stefan scheint zunächst zwei Szenarien des Beweisens zu sehen:

> „Unter einem mathematischen Beweis verstehe ich: 1. einen Satz, bzw. seinen Kehrsatz, der mit einer bestimmten Formulierung zu beweisen ist. Oder 2., wenn ein Mathematiker sich auf die Beweisschritte einer großen Aufgabe konzentriert, die ihn dann am Schluss zum Ergebnis führen. Und wenn er es genauso, wie er das Ergebnis entdeckt hat, es auch einem anderen zeigt und wenn nun dieser es auch so sieht, ist es bewiesen.“ (Stefan)

Das erste Szenario ist eine Beweisaufgabe, die in einer bestimmten (formalsprachlichen?) Form zu bearbeiten ist. Möglicherweise spielt Stefan hier auf seine Erfahrungen im Mathematikunterricht an. Das zweite Szenario beschreibt offenbar Stefans Sicht der mathematischen Forschungspraxis: Ein Mathematiker überzeugt zunächst sich selbst von einem Ergebnis und dorthin führenden Beweisschritten (Funktion 1), bevor er einen Fachkollegen mit seiner fertigen Argumentation zu überzeugen versucht, damit sie als Beweis anerkannt wird (Funktion 3).

Ein Ausschnitt, in dem wiederum die Funktion (1) *sich von der Wahrheit überzeugen/verifizieren* den Schwerpunkt bildet, stammt von Nicola:

> „Meiner Meinung nach sind alle mathematischen Beweisarten sehr wichtig, da man ohne sie in der Mathematik (Geometrie und Algebra) nichts machen könnte, von dem man sicher sein kann, dass es stimmt.
> Genauso bei allen anderen Beweisen. Egal ob bei physikalischen, chemischen, wissenschaftlichen, juristischen, usw. kann man ohne etwas zu beweisen nicht wissen, was für Behauptungen oder Vermutungen stimmen.
> Man sollte nur darauf achten, dass der Beweis einer Behauptung logisch und sinnvoll aufgebaut ist, sonst könnte es dazu führen, dass ein richtiger Satz als falsch oder ein falscher Satz als richtig bewertet wird.
> Beweise sollten meiner Meinung nach weiterhin verwendet werden, um Neues zu erfahren und zu Erforschen, und natürlich, um die richtigen Straftäter zu finden.“ (Nicola)

Sie drückt durch Verneinung aus, dass Beweise dazu da sind, Sicherheit zu gewinnen, ob Aussagen „stimmen“. Das Überzeugen anderer wird von Nicola in dem Ausschnitt nicht angesprochen. Zusätzlich zur Funktion des Verifizierens spricht Nicola am Ende des Ausschnitts auch die Funktion (5) *Neues entdecken* an.

Schließlich sei noch ein Auszug von Andrea wiedergegeben: Andrea dreht gewissermaßen den Spieß um und versucht, die Funktion (3) des Beweisens *andere überzeugen* ad absurdum zu führen:

> „Jetzt wollten sie doch zum Schluss noch ein paar weiterführende Gedanken, oder? Ich habe diese Gedanken meinem Mathematik Lehrer gesagt und der hat nur gelacht, (was er selten tut). Hier kommts: Eigentlich müsste man doch, wenn jemand sagt beweisen sie, dass das der Beweis ist, es beweisen, aber wie? Jetzt kommt noch einer und sagt beweisen sie, das der Beweis des Beweises ein Beweis ist. So könnte man doch ewig weiter machen, oder? Man könnte nie jemandem sagen, dass der Beweis ein Beweis ist. Also könnte man doch bis man tot ist einem versuchen zu beweisen, dass der Beweis ein Beweis ist, usw.“ (Andrea)

Andrea hat offenbar erkannt, dass die Argumentationsbasis und auch die Art und Weise, auf die bewiesen wird, relativ sind. Hätte Andrea bei ihrer Überlegung an die Funktion (1) *Verifizieren* gedacht, so hätte sie beschreiben müssen, wie ein beweisendes Individuum eine eigene Einsicht in die Wahrheit einer Aussage immer weiter hinterfragt – ein Prozess, der enden könnte, wenn die zu beweisende Aussage bis auf die zugrunde liegenden Axiome zurückverfolgt wäre.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass anhand der besprochenen Auszüge aus Themenstudien zunächst eine gewisse Vielfalt an Möglichkeiten beobachtet werden kann, wie die Lernenden Funktionen des Beweisens in Textproduktionen schilderten. Außerdem wird deutlich, dass die von den Schülerinnen und Schülern direkt oder auch indirekt angesprochenen Funktionen des Beweisens mit Hilfe des vorgestellten Kategoriensystems insgesamt eingeordnet werden können. Insbesondere ist es bei den Schüleräußerungen möglich, zwischen der Funktion (1) *sich von der Wahrheit überzeugen/verifizieren* und der Funktion (3) *andere überzeugen* zu unterscheiden. Dies ist gerade auch dann der Fall, wenn von den Lernenden das Beweisen als Prozess beschrieben wird.

### 3.2 Schüleräußerungen zu weiteren Funktionen des Beweisens

Nachdem bereits Beispiele für Schüleräußerungen diskutiert wurden, die den Funktionen (1) *Verifizieren* und (3) *Überzeugen* entsprechen, wird im Folgenden ein Überblick über weitere, bei Schülerinnen und Schülern beobachtbare Äußerungen zu Funktionen des Beweisens gegeben.

So machen Carla und Marie eine eigenproduktive Bemerkung, die der Funktion (2) *zugrunde liegende Probleme reflektieren* zugeordnet wurde:

> „Wir finden dass man Beweise im alltäglichen Leben braucht um jemandem etwas zu erklären oder verstehen zu geben.“ (Carla/Marie)

Neben dem verständnisorientierten Erklären schwingt bei Carla und Marie auch ein wenig der Aspekt des *Kommunizierens* mit. Noch deutlicher bringt Daniela zum Ausdruck, dass das Beweisen zum „Nachvollziehen“ und „Verstehen“ dient:

> „Kommen wir aber nun zurück zur Mathematik. In diesem Fachgebiet ist das Beweisen hauptsächlich dazu da, etwas zu verstehen und nachvollziehen zu können.“ (Daniela)

Beispiele für Schüleräußerungen zum Bereich der Funktion (4) *Ordnung erkunden/ Wissen neu ordnen* sind die Folgenden:

> „Beim Beweisen geht es hauptsächlich darum, eine Reihe von Sachverhalten zu verketten. Zuerst stellt man Axiome.“ (Manuela)

> „Beweise sind dazu dass Mathematiker Gewissheit haben das irgendwelche Behauptungen richtig sind und ob diese Behauptungen auch auf andere Figuren aus der Geometrie zutreffen.“ (Philipp)

Bei diesen Beispielen geht es offenbar darum, dass Sachverhalte „miteinander verkettet“ und Aussagen auf „andere Figuren“ generalisiert werden. Im Textauschnitt von Philipp wird auch der Aspekt des *Verifizierens* mit angesprochen. Auch wenn beide dieser Textstellen von reproduktiven Äußerungen umgeben sind, wurden die oben angesprochenen Äußerungen selbst jeweils als Eigenproduktionen eingestuft, da sie inhaltlich so nicht in den Materialien enthalten waren.

Beispiele für Funktion (5) *Neues entdecken/aufbauen* finden sich in dem bereits besprochenen Ausschnitt von Nicola und in den folgenden Textpassagen:

> „Bei Beweisen versucht man andere von seiner eigenen Entdeckung zu überzeugen sodass er deine Entdeckung vollkommen versteht und schließlich deiner Meinung ist“. (Bernd)

> „Beweise sind dazu da, um sie zu erforschen. Je mehr man beweisen kann, desto mehr kann man herausfinden.“ (Antonia)

> „Was ist ein geometrischer Beweis? In mathematischen Beweisen beweist man einen Satz um auf diesem Satz weitere Beweise auf zu bauen.“ (Lars)

> „Demnach ist die Mathematik ein einziger allgemein anerkannter abstrakter Beweis, welcher auf sich selber stetig aufbaut.“ (Doro)

Aus dem Blickwinkel der Materialien wurden diese Ausschnitte alle als Eigenproduktionen codiert. Nicht auszuschließen ist natürlich, dass die Lernenden in den Texten auf frühere Äußerungen von Lehrpersonen Bezug nahmen. Der Aspekt der Entdeckung neuen Wissens kommt bei Nicola, Bernd und Antonia vor. In der Äußerung von Bernd kann neben der Funktion *Neues entdecken* auch auf ein Wahrnehmen der Funktionen (3) *Überzeugen* und (2) *zugrunde liegende Probleme reflektieren* geschlossen werden.

Beispiele für Schüleräußerungen zum Aufbauaspekt finden sich bei Lars und auch bei Doro: Doro hatte bereits vorher im Text davon gesprochen, dass schon vor Jahrhunderten Mathematiker mathematische Regeln aufgestellt und bewiesen haben, mit welchen wir heute noch umgehen. Daraus leitet sie ab, dass Mathematik als einheitliches und argumentativ schlüssiges Ganzes beschrieben werden kann. Doro fasst die ganze Mathematik als einen einzigen „abstrakten Beweis“ auf.

Ein Beispiel für eine Schüleräußerung zur Funktion (6) *Wissen mitteilbar machen* wurde bereits bei Matthias (zweites besprochenes Textbeispiel) beobachtet. Ein weiteres Beispiel stammt von Roxane:

> „Beweise dienen in erster Linie dazu, eine mathematische Feststellung zu begründen und anderen Menschen zeigen zu können. Da ist es sinnvoll, die internationalen Zeichen

> und Benennungen zu verwenden, damit jeder Mensch in jedem Land, sofern er auch diese Zeichen versteht, weiß, worum es in dem Beweis geht und ihn verstehen kann. Ich finde die Beweise mit den internationalen Richtlinien zwar auf dem internationalen Markt sinnvoll, finde es aber übertrieben, dass nur noch er verwendet wird. Zum Beispiel finde ich es einfacher einen geschriebenen Beweis zu lesen, als einen, der nach den Richtlinien geschrieben ist.“ (Roxane)

Roxane thematisiert hier die Kommunizierbarkeit mathematischer Feststellungen mit Hilfe von Beweisen über Länder- und Kulturgrenzen hinweg. Sie plädiert jedoch auch für eine aus ihrer Sicht verständlichere und damit persönlich „kommunizierbarere“ Form, Beweise abzufassen.

Zwei Beispiele für eigenproduktive Äußerungen, die Funktion (7) *sich beweisen* zugeordnet wurden, sind im Folgenden wiedergegeben.

> „Durch richtige Beweise erweitert sich das menschliche Wissen und viele sehen in den Beweisen auch eine Herausforderung, ein Ziel zu erreichen.“ (Karl)

> „Der Mensch braucht Beweise um seine Neugier zu befriedigen.“ (Jane)

Karl sieht beim Beweisen nicht nur die Funktion *Neues entdecken*, sondern er spricht auch davon, dass das Beweisen als Herausforderung gesehen wird, um „ein Ziel zu erreichen“. Die Teilfacette der „Neugier“ (Jane) und deren Befriedigung durch das Beweisen dürfte ebenfalls mit dem Aspekt *sich beweisen* zu assoziieren sein.

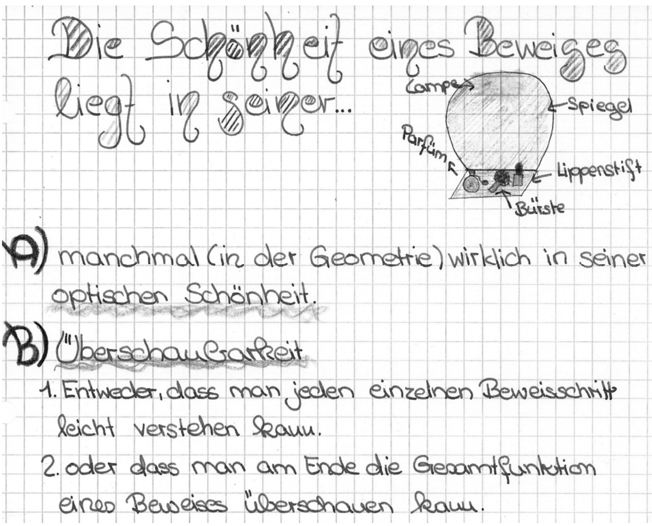


Abbildung 1: Auszug aus der Arbeit von Sandra

Dass für das Beweisen auch die Funktion (8) *Schönes entdecken oder erschaffen* wahrgenommen werden kann, geht aus Abb. 1 hervor, in der Sandra auf der Basis eigener Recherche Kriterien für die „Schönheit" von Beweisen zusammenfasst. Dabei spielt für Sandra offenbar auch die Überschaubarkeit und Verständlichkeit eine wesentliche Rolle.

Schließlich seien Beispiele zur Funktion (9) *Entscheidungen absichern* gegeben:

> „Mathematische Beweise werden vor allem logischerweise in der Mathematik verwendet und haben meistens keinen Einfluss aufs alltägliche Leben. Es gibt auch Ausnahmen, wie in Dokument 9 gezeigt wird, wo eine Studentin mit einem mathematischen Beweis versucht herauszufinden, mit welchen regelmäßigen Vierecken, man eine Ebene pflastern kann". (Xenia)

> „In der Mathematik sind Beweise vielleicht dazu da Grundlagen für Ingenieure zu schaffen, die mit Hilfe dieser Beweise Pläne für verschiedene Bauwerke ausarbeiten." (Verena)

Xenia behandelt in dem ersten Ausschnitt die Frage, inwiefern mathematische Beweise einen Einfluss auf das alltägliche Leben haben bzw. dafür verwertbar sind. Als eine Ausnahme führt Xenia ein Beispiel aus den Themenstudienmaterialien an, in dem sie persönlich einen Beweis als Grundlage für Entscheidungen bzw. Verfahrensweisen sieht – eine Deutung, die in den Materialien nicht nahe gelegt wurde. Verena sieht in dem zweiten Textbeispiel einen Anwendungsbezug im Ingenieurwesen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass im Wesentlichen aus den Sinnbereichen aller im Theorie-Teil dieses Beitrags zusammengestellten Kategorien von Funktionen des Beweisens Schüleräußerungen beobachtet werden konnten, von denen auf einschlägige Vorstellungen und Lernergebnisse zu schließen war.

## 4 Diskussion und Ausblick

Das vorgestellte modifizierte Kategoriensystem eignet sich offenbar für die Auswertung von Textproduktionen zum Beweisen und Argumentieren, um indikatorenartig abschätzen zu können, wie breit im Sinne des theoretischen Hintergrundes das individuelle Spektrum der von den Schülerinnen und Schülern angesprochenen Funktionen des Beweisens ist. Über die vorgestellten Befunde hinaus ist es prinzipiell denkbar, dass die Lernenden dem mathematischen Beweisen weitere, etwa mit Wahrnehmungen von Unterrichtsrealität im Zusammenhang stehende Funktionen zuschreiben, die in dem theoretisch abgeleiteten Kategoriensystem nicht enthalten sind (denkbar wäre z. B. „Beweise dienen in der Schule der Benotung und Selektion von Schülern", „Beweise dienen der Übung logischen Denkens" usw.). Derartige Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern über das Beweisen, die in der vorliegenden Studie nicht in die Codierung miteinbezogen wurden, könnten in einem breiteren Rahmen untersucht werden: Um beweisbezogenes Metawissen der

Lernenden umfassender einschätzen zu können, erscheint es zusätzlich lohnend, über Funktionen des Beweisens hinaus weitere beweisbezogene Vorstellungen der Lernenden zu untersuchen. Hier könnten Beschreibungen der Lernenden von „Beweiskontexten“ von Interesse sein, d. h. Charakterisierungen von Situationen, in denen Beweise entstehen oder verwendet werden.

Wie bereits angesprochen, entstammen die diskutierten Beispiele für Schüleräußerungen einer Unterrichtssequenz, in der die Lernenden Ergebnisse beweisbezogenen Reflektierens auf der Basis von Themenstudienmaterialien darstellten. Prinzipiell ist bei den Ausschnitten nicht immer eindeutig entscheidbar, in welchem Maße die Gedanken der Lernenden Vorstellungen aus dem Bereich des Vorwissens, den Materialien der Lernumgebung, dem vorangegangenen Unterricht, Äußerungen von Lehrpersonen oder etwa eigener Recherche zuzuschreiben sind. Eine gewisse Orientierung im Hinblick auf Anregungen der Lernumgebung liefert aber das Kontroll-Rating zu eigenproduktiven, rekonstruktiven und reproduktiven Elementen. Vor diesem Hintergrund konnte abgeschätzt werden, inwiefern die Textproduktionen individuellen Vorstellungen, auch in der Auseinandersetzung mit den Materialien der Lernumgebung, entsprachen. Zum Forschungsinteresse, auf welche Weise die Lernenden Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens darstellen können, offenbaren die Ergebnisse, dass das gesamte Spektrum des Kategoriensystems beobachtet werden konnte, wodurch dessen Aspektvielfalt grundsätzlich auch empirisch gerechtfertigt erscheint. Die Befunde zeigen auch, dass es prinzipiell möglich ist, dass Schülerinnen und Schüler in der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums in der vorgestellten Weise über Funktionen des Beweisens sprechen. Mit Hilfe des entwickelten Kategoriensystems ist es nun möglich, der weiterführenden Frage nachzugehen, inwiefern derartige Äußerungen auch mit anderen Untersuchungsinstrumenten wie Fragebögen oder Interviews und ohne die Konfrontation mit Themenstudienmaterialien nachgewiesen werden können.

Die mit Hilfe des Kategoriensystems gewonnenen Daten können auch dazu genutzt werden, Wahrnehmungen zu Funktionen des Beweisens quantitativ mit anderen Schülerdaten in Beziehung zu setzen, um statistische Erkenntnisse über Zusammenhänge zwischen Komponenten beweisbezogenen Wissens, mit der Beweis- und Argumentationskompetenz der Lernenden und auch dem Bereich von Motivation und Interesse zu gewinnen (für erste Befunde vgl. Linder 2004).

**Literatur**

Bell, A. (1976): A Study of Pupil’s Proof-Explanations in Mathematical Situations. In: Educational Studies in Mathematics 7, S. 23–40

Blum, W./Kirsch, A. (1991): Preformal Proving: Examples and Reflections. In: Educational Studies in Mathematics 22, S. 183–203

Boero, P. (1999): Argumentation and Mathematical Proof: A Complex, Productive, Unavoidable Relationship in Mathematics and Mathematics Education. In: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, S. 7–8

Bullock, M./Ziegler, A. (1994): Scientific Thinking. In: Weinert, F. E./Schneider, W. (Hrsg.): The Munich Longitudinal Study on the Genesis of Individual Competencies (LOGIC). München: Max-Planck-Institut für psychologische Forschung

De Villiers, M. (1990): The Role and Function of Proof in Mathematics. In: Pythagoras 24, S. 17–24

Dunbahr, K./Klahr, D. (1989): Developmental Differences in Scientific Discovery Strategies. In: Klahr, D./Kotovsky, K. (Hrsg.): Complex Information Processing: The Impact of Herbert A. Simon. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum

Healy, L./Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on thee Nationwide Survey. Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London

Hanna, G. (1983): Rigorous Proof in Mathematics Education. Toronto, Ontario: OISE Press

Hanna, G. (1997): The Ongoing Value of Proof. In: Journal für Mathematik-Didaktik 18, S. 171–185

Hanna, G. (2000): Proof, Explanation and Exploration: An Overview. In: Educational Studies in Mathematics 44, S. 5–23

Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien: Springer

Heinze, A./Reiss, K. (2003): Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Spring 2003 [www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf]

Heinze, A./Rudolph, F. (2004): Beweisen lernen: Erste Ergebnisse einer Interventionsstudie in der Jahrgangsstufe 8. Vortrag auf der 65. Tagung der AEPF, Nürnberg

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss [www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf]

Knuth, E. (2002): Teacher's Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. In: Journal of Mathematics Teacher Education 5, S. 61–88

Kuhn, D. (1989): Children and Adults as Intuitive Scientists. In: Psychological Review 96, S. 674–689

Kuntze, S. (2003): Themenstudienarbeit im Mathematikunterricht als Vorbereitung auf die Facharbeit. In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 56(8), S. 490–495

Kuntze, S. (2004): Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie – Ergebnisse einer Untersuchung textlicher Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums. In: Journal für Mathematik-Didaktik 25(3/4), S. 245–268

Kuntze, S. (2005): Förderung von Wissensaufbau zu Problemlösetechniken und Beweisstrategien mit heuristischen Lösungsbeispielen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker, S. 327–330

Linder, M. (2004): Funktionen des Beweisens in textlichen Produktionen von Schülerinnen und Schülern der gymnasialen 8. Jahrgangsstufe im Rahmen einer Themenstudienar-

beit zum Thema Beweisen, Begründen, Argumentieren [Zulassungsarbeit zum 1. Staatsexamen]. Universität Augsburg
Maier, H. (2000): Schreiben im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 99, S. 10–13
Morgan, C. (2001): The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. In: Gates, P. (Hrsg.): Issues in Mathematics Teaching. London: Routledge Falmer, S. 232–244
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM
Pimm, D. (1987). Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classroom. London/New York: Routledge/Keagan Paul
Reiss, K./Hellmich, F./Thomas, J. (2002): Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In: Prenzel, M./Doll, J. (Hrsg.): 45. Beiheft zur Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim: Beltz, S. 51–64
Reiss, K./Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. In: mathematica didactica 23, S. 96–112
Reiss, K./Renkl, A. (2002): Learning to Prove: The Idea of Heuristic Examples. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34(1), S. 29–35
Schoenfeld, A. (1994): What Do We Know about Mathematics Curricula? In: Journal of Mathematical Behaviour 13(1), S. 55–80
Tall, D. (1989): The Nature of Mathematical Proof. In: Mathematics Teaching 127, S. 28–32
Thomas, J. (1997): Wissenschaftliches Denken im Jugendalter. [Habilitationsschrift] Mainz: Johannes-Gutenberg-Universität
Tschirigi, J. (1980). Sensible Reasoning: A Hypothesis about Hypotheses. In: Child Development 51, S. 1–10
Wittmann E./Müller, G. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, S. 237–257

**Anschrift des Verfassers**

Sebastian Kuntze
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München
Theresienstr. 39, 80333 München
E-Mail: kuntze@math.lmu.de

Eingang Manuskript: 17.02.2005 (überarbeitetes Manuskript: 06.12.2005)