„Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“

Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik

von

Susanne Prediger, Bremen

Kurzfassung: In dem Artikel wird der fachdidaktische Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion vorgestellt und es wird an einem Beispiel zur elementaren Stochastik ausgeführt, wie er für das Restrukturierungsprogramm der Allgemeinen Mathematik fruchtbar gemacht werden kann. Die Kernidee des Ansatzes ist, durch konsequentes Gegenüberstellen von fachlichen und individuellen Perspektiven auf spezifische mathematische Inhalte wichtige Erkenntnisse über Bedeutungen, Zwecke, Ziele und Hindernisse der Inhalte zu erhalten. Mit der Betonung der Thematisierung von Diskrepanzen liefert der Zugang einen Beitrag zur international diskutierten Frage, wie nachhaltige Lernprozesse des Conceptual Change angeregt werden können.

Abstract: The article presents the research program Educational Reconstruction which has been developed in science education research. An example from elementary stochastics is used to explain how this program can be used for restructuring mathematics. The approach can also offer answers to the question of how to affiliate sustainable processes of conceptual change.

1 Einleitung: Verknüpfung verschiedener Arbeitsbereiche

In ihrem programmatischen Grundsatzartikel „Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht“ fordert Hefendehl-Hebeker, die Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin müsse

> „aus wachem Interesse an und in überzeugter Hinwendung zur Unterrichtspraxis eine eigene Forschungsqualität entwickeln; dabei sollten sich im Gesamtspektrum der Forschungslandschaft
> - die Restrukturierung des Faches unter wissensgenetischen Aspekten,
> - eine erkenntnistheoretische und lernpsychologische Grundlagenforschung (z. B. über kognitionspsychologische Bedingungen fachbezogenen Lernens) und
> - eine praxisorientierte Entwicklungsforschung (Design von Lernumgebungen sowie deren empirische Erforschung, Erprobung und Implementierung) einander ergänzen.“
>
> (Hefendehl-Hebeker 2004, S. 186, Aufzählungsformatierung eingefügt)

Damit betont Hefendehl-Hebeker die *Komplementarität* dreier zentraler Arbeitsbereiche mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit, die gerade in der Phase der Etablierung der Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin im innerdisziplinären Ringen um Ressourcen und Anerkennung immer wieder als konkurrierend begriffen und scharf voneinander abgegrenzt wurden (für einen Überblick vgl. z. B. Burscheid et al. 1992). Gerade die traditionelle „Stoffdidaktik" und die etwas jüngere empirische Unterrichts- und Lehr-Lern-Forschung wurden als gegensätzliche Pole bzgl. ihrer Ansprüche und Methoden betrachtet, bevor Grenzüberscheitungen zwischen den Bereichen eher üblich wurden. Auch zwischen beschreibender empirischer Forschung und konstruktiver Entwicklungsarbeit wurden Kontroversen ausgetragen; dessen ungeachtet haben die Arbeiten beider Bereiche in zunehmenden Maße auch die Ergebnisse unterschiedlicher Arbeitsbereiche integriert.

In Abschnitt 2.1 und 2.2 soll mit der Didaktischen Rekonstruktion ein fachdidaktischer Forschungsansatz vorgestellt werden, der sich für das Themenfeld der nachhaltigen Entwicklung von fachlichen Vorstellungen auf die konsequente *Integration* der genannten drei Arbeitsbereiche im Forschungsprozess konzentriert. Er geht also über den von Hefendehl-Hebeker formulierten Anspruch der arbeitsteiligen Komplementarität hinaus.

Für eine solche Integration unterschiedlicher fachdidaktischer Arbeitsbereiche steht auch das Zitat von Freudenthal, das diesem Artikel in der Überschrift als Motto dient:

> „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." (Freudenthal 1974, S. 124)

Dieses Zitat dreht das übliche Verhältnis von didaktischer Analyse mathematischer Inhalte und empirischer Lernforschung in zunächst irritierender Weise um: Natürlich hat Freudenthal an vielen anderen Stellen (insbesondere in der didaktischen Phänomenologie, Freudenthal 1983) den Wert einer a priori angestellten didaktischen Analyse mathematischer Inhalte (also das „Verstehen" von Mathematik) aufgezeigt, um in empirischen Studien z. B. Verständnisschwierigkeiten bzgl. bestimmter Inhalte zu untersuchen. Mit dem zitierten Satz aber spricht er die weniger nahe liegende Rückrichtung des Ineinandergreifens von fachlicher Klärung und Erfassung von Lernendenperspektiven an, dass nämlich die sorgfältige empirische Analyse von Lernprozessen umgekehrt wiederum zu einer erkenntnistheoretisch sensiblen Klärung mathematischer Inhalte beitragen kann.

Freudenthals Motto mit der hier skizzierten Interpretation liefert die Kernidee dafür, den Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion für die Restrukturierung von Mathematik im Sinne von Hentigs (1974) zu nutzen. Zur Erläuterung dieser Kernidee in Abschnitt 2.4 wird in Abschnitt 2.3 zunächst das Restrukturierungsprogramm vorgestellt.

Auch wenn der Artikel hauptsächlich intendiert, einen Überblick über den Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion zu geben, soll danach dessen Nutzen für Mathematikdidaktik und Restrukturierung in einem Beispiel dargestellt werden. Das Beispiel dokumentiert zugleich die singuläre Annäherung der Autorin an den Forschungsansatz. Lesende, die lieber vom Singulären zum Regulären, vom Konkreten zum Allgemeinen lesen, sollten daher im dritten Abschnitt beginnen.

2 Didaktische Rekonstruktion und ihre Einbettung

2.1 Lerntheoretischer Hintergrund: Conceptual Change

Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion ist als theoretischer und methodischer Rahmen für Forschungsarbeiten zu der Frage entwickelt worden, „wie bestimmte Inhaltsbereiche sinnvoll und fruchtbar unterrichtet werden können“ (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 182).

Dabei gilt das besondere Interesse dem Aufbau adäquater fachlicher Vorstellungen, wobei unter ‚Vorstellungen‘ alle kognitiven Konstrukte verstanden werden, „die Schüler zur Deutung ihrer Erfahrungen anwenden“ (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 182). Diese Konstrukte finden sich auf unterschiedlichen Komplexitätsebenen, dazu gehören sowohl ‚Begriffe‘, ‚Konzepte‘, ‚Denkfiguren‘ als auch Theorien (Gropengießer 2001, S. 30 ff.).

Seit Beginn der 1980er Jahre beschäftigte sich die naturwissenschaftliche Lernforschung mit der Identifikation von Lernschwierigkeiten und ihrer Überwindung, weil viele empirische Studien gezeigt hatten, „dass der naturwissenschaftliche Unterricht es in der Regel nicht leistet, Schülerinnen und Schüler mit seinen Prinzipien und Grundbegriffen vertraut zu machen.“ (Duit/von Rhöneck 1996, S. 7). Insbesondere zeigte sich, dass der Aufbau fachlicher Konzepte innerhalb des Unterrichts noch keine Gewähr für ihre Aktivierung in außerschulischen Zusammenhängen bietet. Diese Erfahrungen teilen Naturwissenschafts- und Mathematikdidaktik (vgl. Lenné 1969 zum Transferproblem).

Als Ursache wurde in der naturwissenschaftsdidaktischen Lernforschung die Hartnäckigkeit der vorunterrichtlichen Vorstellungen von Lernenden ausgemacht:

> „Die vorunterrichtlichen Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler in den Unterricht mitbringen, haben sich … als der wichtigste Faktor erwiesen, von dem die Lernprozesse abhängig sind. Diese Vorstellungen bestimmen, wie vom Lehrer oder Lehrbuch dargebotene Inhalte interpretiert und folglich verstanden werden. Häufig stehen die vorunterrichtlichen Vorstellungen und die zu erlernenden Vorstellungen im Gegensatz zueinander. Viele Lernschwierigkeiten, die insgesamt zu einem eher bescheidenen Erfolg des naturwissenschaftlichen Unterrichts führen, finden damit eine Erklärung.“ (Duit/von Rhöneck 1996, S. 7)

Begründen lässt sich die Bedeutung der vorunterrichtlichen Vorstellungen durch konstruktivistische Lerntheorien, nach denen sich Lernen immer nur als individuelle, aktive Konstruktion mentaler Strukturen vollziehen kann, wobei die individuell entwickelten Vorstellungen und Konzepte ganz erheblich mitgeprägt werden von den Vorerfahrungen und dem Vorwissen, auf das diese neuen Vorstellungen aufbauen können (z. B. Gerstenmaier/Mandl 1995).

Als Kennzeichen neuer, konstruktivistisch orientierter Sichtweisen vom Lehren und Lernen entstand der Theorieansatz des Conceptual Change (Posner et al. 1982), nach dem Lernen „in aller Regel ‚Umlernen' bedeutet, da vorunterrichtliche Vorstellungen und naturwissenschaftliche Vorstellungen zumindest in wesentlichen Aspekten einander konträr gegenüber stehen." (Duit/von Rhöneck 1996, S. 158)

Die angestrebten Vorstellungsänderungen finden ihre Grenze in der Bereichsspezifität des Denkens: Empirischen Studien zufolge können die im Fachunterricht erworbenen Vorstellungen in vielen Fällen die zuvor im Alltag erworbenen Vorstellungen nicht ablösen, sondern bleiben als alternative Wissensstrukturen neben den neuen bestehen und werden jeweils bereichsspezifisch aktiviert. Deswegen zielt Conceptual Change nicht darauf, die alltäglichen Vorstellungen durch das im Unterricht Erarbeitete auszumerzen; statt dessen geht es um eine Verschiebung der Kontexte, in denen die jeweiligen Konstrukte aktiviert werden (Duit/von Rhöneck 1996, S. 146).

Vor dem Hintergrund des Theorieansatzes des Conceptual Change ist die zentrale Frage für die Gestaltung von Lernarrangements, wie für ein spezifisches Themengebiet die Lernwege von vorunterrichtlichen individuellen Vorstellungen zu fachlich erwünschten Vorstellungen angelegt werden können, um die skizzierte Verschiebung der Aktivierungskontexte nachhaltig zu erreichen (Posner et al. 1982, Conceptual-Change-Ansätze für Mathematik beschreiben Vosniadou/Verschaffel 2004).

Um dazu Vorschläge machen zu können, sind intensive Kenntnisse der vorunterrichtlichen Vorstellungen ebenso notwendig wie eine solide Klärung der anzustrebenden fachlichen Vorstellungen.

2.2 Aufgabenbereiche im Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion

Vor dem lerntheoretischen Hintergrund und der Zielsetzung des Conceptual Change kommt der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung die zentrale Aufgabe zu, Bezüge zwischen Vorstellungen und Perspektiven der Lernenden einerseits und den fachlichen Perspektiven andererseits herzustellen und diese Bezüge für die Konstruktion eines lernförderlichen Unterrichts zu nutzen.

Um dabei sowohl der Sache als auch den Menschen möglichst gerecht zu werden, wird großer Wert darauf gelegt, die entsprechenden Entwicklungsarbeiten eng zu verknüpfen mit der empirischen Erfassung der Lernendenperspektiven und der fachlichen Klärung der Inhaltsbereiche. In dieser Verknüpfung liegt die Kernidee des Forschungsansatzes:

> „Aus fachdidaktischer Perspektive wird der wissenschaftliche Gegenstand in seinen bedeutsamen Bezügen wieder hergestellt, und es wird durch Rückbezug auf die verfügbaren Schülervorstellungen ein Unterrichtsgegenstand konstruiert." (Kattmann et al. 1997, S. 4)

Der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung werden also drei Aufgabenbereiche zugewiesen, denen im engen Bezug aufeinander nachgegangen werden soll (vgl. Abb. 1): Fachliche Klärung, Erfassung von Lernendenperspektiven und Didaktische Strukturierung.

Unter fachlicher Klärung wird das verstanden, was man in der Mathematikdidaktik als stoffdidaktische Arbeit im weiteren Sinne bezeichnen würde, nämlich die didaktische Analyse und die stoffliche Konstruktion in ihren weit gefassten Bedeutungsbezügen. Für den Forschungsansatz entscheidend ist die Ausgangsannahme, dass die Gegenstände des Schulunterrichts nicht per se vom Wissenschaftsbereich vorgegeben sind, sondern erst in pädagogischer Zielsetzung hergestellt werden müssen, insbesondere weil wissenschaftliche Konzepte als Gegenstände des Unterrichts konsequenter in ihre lebensweltlichen Bezüge, ihre Entstehensbedingungen und Sinnzusammenhänge eingebettet werden müssen (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 181).

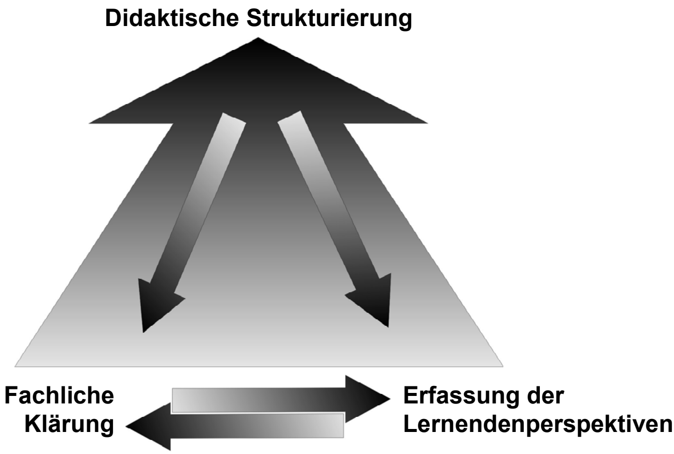


Abbildung 1: Verknüpfung dreier fachdidaktischer Aufgabenbereiche im Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion

Das empirische Erfassen der Lernendenperspektiven in seinen ganz unterschiedlichen Facetten ist für das auf konstruktivistischen Lerntheorien basierende Modell ein wichtiger Bereich, um die Voraussetzungen des Lernprozesses adäquat in die Überlegungen zur Didaktischen Strukturierung einbeziehen zu können. Die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden dienen dabei nicht nur als möglichst schnell zu überwindende Zustände, sondern als Ressourcen, die im Lernprozess genutzt werden müssen.

Für die Didaktische Strukturierung geeigneter Lernarrangements werden im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion die Ergebnisse der fachlichen Klärung mit denen der Erhebung von Lernendenperspektiven verknüpft:

> „Die verallgemeinerten Vorstellungen der Wissenschaftler werden mit denen der Schüler verglichen. Zwischen den Konzepten, Denkfiguren und Theorien beider Seiten werden systematisch und strukturiert Beziehungen hergestellt. Dabei sollen zum einen die Charakteristika beider Perspektiven deutlich werden und zum anderen die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten. Auf diese Weise wird die mit dem iterativen Vorgehen implizierte wechselseitige Interpretation zu einem Abschluss gebracht." (Kattmann et al. 1997, S. 12)

So werden die verschiedenen fachdidaktischen Arbeitsbereiche aufeinander bezogen und Lernarrangements entwickelt, die es im Sinne einer konstruktivistischen Lerntheorie ermöglichen sollen, ausgehend von den Lernendenperspektiven hin zu den mit Hilfe der fachlichen Klärung konstruierten Lerngegenständen zu kommen.

Für die einzelnen Aufgabenbereiche des Forschungsmodells gibt es auch in der mathematikdidaktischen Forschungs- und Entwicklungslandschaft bereits viele interessante und wichtige Ansätze. Sie noch stärker aufeinander zu beziehen, Ergebnisse gegenseitig nutzbar und sie in einem iterativen Forschungs- und Entwicklungsprozess in einem theoretisch gestützten Gesamtrahmen fruchtbar zu machen, ist der Kerngedanke des Forschungsansatzes der Didaktischen Rekonstruktion.

Die Forschungsfrage und die Herangehensweisen zu ihrer Beantwortung lassen sich breiter einordnen in das Darmstädter Restrukturierungsprogramm, das im wissenschaftsphilosophischen Rahmen der Allgemeinen Mathematik seit vielen Jahren das Ziel verfolgt, Mathematik durch Anbindung an allgemeine Denk- und Wahrnehmungsmuster für die Allgemeinheit besser lernbar, verfügbar und kritisierbar zu machen. Im nächsten Abschnitt wird diese Beziehung genauer erläutert und ausgeführt, inwiefern Didaktische Rekonstruktion einen spezifischen Beitrag zur Restrukturierung aus empirisch-fachdidaktischer Sicht leisten kann.

2.3 Einbettung in das Restrukturierungsprogramm der Allgemeinen Mathematik

Der Ausgangspunkt des Restrukturierungsprogramms sind grundsätzliche philosophische Erwägungen zu zentralen gesellschaftlichen Problemen:

> „Dieses Buch handelt von einem Problem, über dem wir die Geduld zu verlieren drohen, noch bevor wir es hinreichend verstanden und wirklich angepackt, geschweige denn gelöst haben. Es geht aus von der Tatsache, dass unsere Wissenschaften immer schwerer zu verstehen und zu lernen und – ihrer Absicht zum Trotz – fast nur noch für Experten verfügbar sind.“ (von Hentig 1974, S. 9)

So begann von Hentig vor über dreißig Jahren sein Buch „Magier oder Magister. Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß“, in dem er dieses Problem im Kontext der fortschreitenden Spezialisierung und Instrumentalisierung der Wissenschaften ausführlich beschreibt.

Da er dagegen aus grundlegenden gesellschaftstheoretischen Erwägungen ein demokratisch aktivierbares Allgemeinverständnis wissenschaftlichen Tuns für notwendig erachtete, forderte er die Wissenschaften auf, sie sollten ihren Erkenntnisweg und ihre Ergebnisse einer breiten Öffentlichkeit zugänglich machen. Die dazu notwendige Arbeit, die unbewussten Zwecke der Disziplin aufzudecken, ihre bewussten Zwecke zu deklarieren, ihre Mittel danach zu begründen und auch für Laien transparent zu machen, nennt von Hentig *Restrukturierung* der Wissenschaften (von Hentig 1974, S. 136 f.).

Von Hentigs Forderungen wurden in dem von Wille formulierten wissenschaftsphilosophischen Programm der Allgemeinen Mathematik aufgegriffen (Wille 1981, 2001). Zur Allgemeinen Mathematik gehören alle Bemühungen, die wissenschaftliche Disziplin Mathematik in demokratischer Zielrichtung offenzulegen und zugänglich zu machen, damit sich die Allgemeinheit insbesondere mit den Zielen und Geltungsansprüchen sowie den möglichen Folgen und Auswirkungen wissenschaftlichen Tuns kritisch auseinandersetzen kann.

An der geforderten Restrukturierung wurde für verschiedene Teilbereiche der Mathematik insbesondere im Darmstädter Seminar Allgemeine Mathematik intensiv gearbeitet, was sich sowohl in der Lehre als auch der Forschung als sehr fruchtbar erwiesen hat (vgl. z. B. Wille 1981, Ganter/Wille 1996, Lengnink et al. 2001). Konkret wurde dabei gemäß der von Hentig’schen Forderungen angestrebt,

> „für mathematische Gebiete bezogen auf deren Begriffe, Aussagen, Methoden und Verfahren
> - Anlässe und Auswirkungen zu beschreiben,
> - Zwecke und Ziele darzustellen,
> - Bedeutungen und Interpretationen aufzudecken,
> - Beziehungen und Zusammenhänge aufzuzeigen,
> - Denk- und Anwendungsmuster auszuarbeiten,
> - konkrete Sachverhalte theoriegerichtet zu analysieren,
> - Grenzen und Gefahren zu benennen,
> - historische Auffassungen und Bedingtheiten zu berücksichtigen,
> - unangemessene Behinderungen offen zu legen,
> - reichhaltige Ausdrucksmittel einzusetzen, insbesondere die Gemeinsprache.“
>
> (Wille 1995, S. 45)

Allgemeine Mathematik teilt mit vielen mathematikdidaktischen Ansätzen die Orientierung an einer demokratischen Gesellschaft und dem Ziel eines mündigen Umgangs mit Mathematik (z. B. Fischer 1984, 2001, Skovsmose 1994). Da die durch die Allgemeine Mathematik angestrebte Kommunikation zwischen Wissenschaft und Allgemeinheit auf Seiten der Allgemeinheit durch eine für dieses Ziel angemessene mathematische Bildung vorbereitet werden muss, ist es naheliegend und notwendig, diese Kommunikationsfähigkeit (Fischer 2001) und das dahinterliegende Bild einer restrukturierten Mathematik auch dem Bildungskonzept zugrunde zu legen (Wille 1995, Lengnink 2004). Es zeigt sich, wie eng Mathematikdidaktik und Allgemeine Mathematik aus der Bildungsperspektive verwoben werden können und sollten.

In diesem Feld sind auch die Berührungspunkte zu sehen zwischen den Restrukturierungsbemühungen der Allgemeinen Mathematik und zahlreichen anderen didaktischen Bemühungen um eine Vermittlung von Mathematik in Realitätsbezügen, Sinnzusammenhängen und Bedeutungen. Auch wenn diese nicht explizit von der Idee der Allgemeinen Mathematik getragen sind, sind sie gleichwohl charakterisierbar durch das Ziel eines mündigen und kompetenten Umgangs mit Mathematik (z. B. Niss 1996, Skovsmose 1994).

Auch Sesink betont die so formulierte Aufgabe der Didaktik; mit seiner Formulierung „Didaktik als Reflexionsinstanz der Wissenschaft“ (Sesink 1997) lässt sich die Beziehung zwischen Allgemeiner Wissenschaft und Didaktik jedoch auch noch tiefergehend in der umgekehrten Richtung beschreiben (vgl. Abb. 2): Nimmt die Didaktik ihre Aufgabe als *Reflexionsinstanz der Wissenschaften* ernst, so kann sie erhebliche Rückwirkungen auf die Allgemeine Wissenschaft und die Fachdisziplin im engeren Sinne haben, indem sie ihr Anlässe, Zugänge und Methoden liefert. *Anlässe* für eine Restrukturierung liefert die Didaktik durch ihre Aufgabe der Vermittlung von Wissenschaft, denn Vermittlungsnotwendigkeiten sind oft der Ausgangspunkt für die Fragen nach Sinn und Bedeutung und nach den zentralen Ideen eines Gebietes. Dagegen bedarf die Behauptung, die Didaktik könne der Allgemeinen Wissenschaft *Zugänge und Methoden* liefern, einer genaueren Erläuterung, die im folgenden Abschnitt gegeben werden soll.

Zwar liegt der Restrukturierung der wissenschaftsphilosophische Ansatz zugrunde, die Wissenschaften verändern zu wollen, und der Didaktischen Rekonstruktion das Anliegen, Lernprozesse nachhaltig zu gestalten, aber sie treffen sich genau in dem Verständnis, dass sich – mit Blick auf die Vermittlung – die *Gegenstände an sich* verändern (müssen), um für die Allgemeinheit zugänglicher zu sein (vgl. Gropengießer 2001, S. 15). Doch während sich die Didaktische Rekonstruktion in ihrem Wirkungsanspruch auf das schulische Fach beschränkt und so nicht den Anspruch erhebt, die Wissenschaft an sich zu verändern, zielt die Restrukturierung genau darauf ab.

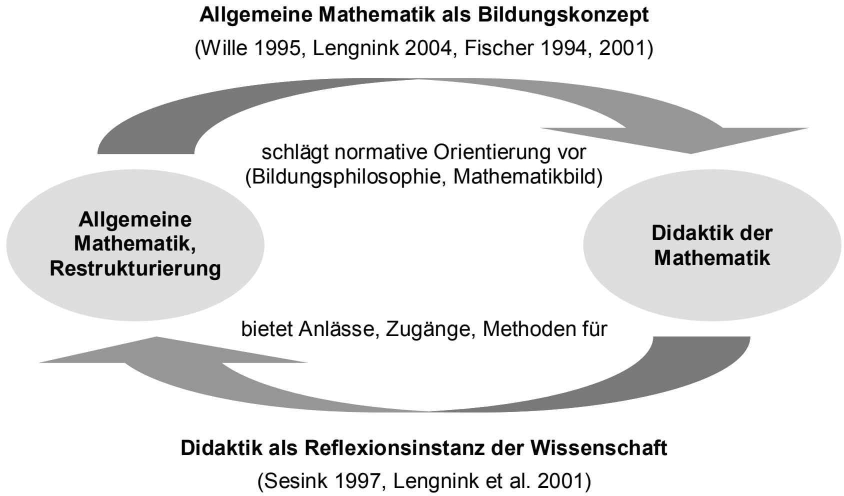


Abbildung 2: Bezüge zwischen Allgemeiner Mathematik und Didaktik

So kann die Didaktische Rekonstruktion eine Brücke liefern, durch die sich das zunächst wissenschaftsphilosophisch inspirierte Restrukturierungsanliegen organisch in die mathematikdidaktische Forschungslandschaft einbetten lässt. Denn mit Hilfe der Didaktischen Rekonstruktion lässt es sich mit verschiedenen Forschungs- und Entwicklungstraditionen in den Fachdidaktiken verknüpfen (vgl. Prediger 2004).

In der Formulierung der konkreten Arbeitsbereiche unterscheiden sich beide Programme stärker: Die Didaktische Rekonstruktion ist sehr viel direkter auf die praktische Konstruktion von Lernarrangements ausgerichtet als das Restrukturierungsprogramm. Gleichzeitig ist sie um eine wesentliche Facette ärmer, weil sie die Klärung normativer Fragen nach den Bildungshorizonten zumindest nicht explizit als Teil des Forschungsprozesses ausweist. Eine Erweiterung des Forschungsansatzes um eine normative Dimension wäre daher wünschenswert, weil ohne explizierte normative Orientierung kein Auswahlkriterien offen liegt für die fachlichen Inhalte und Konzepte, auf die sich die Rekonstruktion bezieht. Eine zum Programm der Didaktischen Rekonstruktion sehr gut passende bildungsphilosophische Grundposition ist in den letzten Jahren im Rahmen der Allgemeinen Mathematik ausgearbeitet worden (insbesondere von Lengnink 2004). Sie kann als Basis dienen für die Entwicklung normativer Orientierungen in Bezug auf einzelne mathematische Inhalte und das Spannungsverhältnis zwischen Lernendenperspektiven und fachlichen Perspektiven (erste Beispiele geben Lengnink/Peschek 2001 sowie Prediger 2004, Kap. 3.1 und 3.2).

2.4 „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ – Didaktische Zugänge und Methoden für Restrukturierung

Wie nun kann die Fachdidaktik der Restrukturierung Zugänge und Methoden liefern, wenn sie didaktisch rekonstruktiv vorgeht? Von Hentig (1974) hat als zentrale Vorgehensweise für Restrukturierungen vorgeschlagen, Wissenschaft wieder konsequenter an allgemeine Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen anzubinden.

> „Die immer notwendiger werdende Restrukturierung der Wissenschaften in sich – um sie besser lernbar, gegenseitig verfügbar und allgemeiner (d. h. auch jenseits der Fachkompetenz) kritisierbar zu machen – *kann und muss nach Mustern vorgenommen werden, die den allgemeinen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsformen unserer Zivilisation entnommen sind*.“ (von Hentig 1974, S. 33 f., Hervorhebung eingefügt)

So gut die Forderung der Rückbindung an allgemeine Denk- und Handlungsformen theoretisch-philosophisch abzusichern ist (etwa durch den Methodischen Kulturalismus, vgl. Hartmann/Janich 1997), so schwierig ist sie doch in der Restrukturierungspraxis konkret umzusetzen, weil sie schwer in methodisch abgesicherte Bahnen zu lenken ist.

Im Rahmen der Bemühungen in der Allgemeinen Mathematik hat es sich immer wieder als *methodische Herausforderung* erwiesen, die allgemeinen Denk- und Handlungsformen konkret zu spezifizieren, an die ein wissenschaftliches Konzept wieder rückgebunden werden kann. Dass sich dies als schwieriger herauszustellen scheint als in den Naturwissenschaften, liegt nicht zuletzt in der spezifischen ontologischen Natur mathematischer Objekte begründet, deren lebensweltliche Verankerung z. T. nicht mehr offensichtlich ist.

Bislang wurde die Rückbindung vorrangig auf dem Weg der philosophischen Klärung vollzogen, was so lange gut gelingt, wie man sich auf der Ebene der allgemeinen Denkweisen bewegt. So hat sich beispielsweise der Vorschlag von Wille als fruchtbar erwiesen, die mathematische Logik zu ihrer Restrukturierung rückzubinden an die klassischen Denkformen von Begriff, Urteil, Schluss (vgl. Prediger 2000). Dem Ansatz kam zugute, dass die philosophische Logik über eine ausgearbeitete Theorie der Lehre von Begriff, Urteil, Schluss verfügt, mit der traditionell menschliches Denken philosophisch beschrieben wurde.

Die Methode der philosophischen Klärung stößt jedoch dort an ihre Grenzen, wo es um speziellere mathematische Konzepte geht. Denn erstens hat dazu die Philosophie meist keine Aussagen gemacht, und zweitens sind die anschlussfähigen „allgemeinen Denk- und Handlungsformen“ nicht mehr immer im direkten Sinne Formen des Alltags. Statt dessen muss die Anbindung z. T. eher als Anschluss an vorherige Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht begriffen werden.

An solchen Stellen ist statt des philosophischen Zugriffs der eher psychologisch orientierte Zugriff der Didaktischen Rekonstruktion interessant, durch (meist qualitative) empirische Forschung die Lernendenperspektiven zu erfassen. Denn hier stehen methodisch gesicherte Wege zur Verfügung, um Anknüpfungspunkte und Widersprüche aufzuspüren, die dann zum Ausgangspunkt der Restrukturierung gemacht werden können.

Wie vorangehende Arbeiten, etwa zu Vorstellungsumbrüchen bei Brüchen (Prediger 2003; i. V.) oder zu negativen Zahlen (Hefendehl-Hebeker 1989) gezeigt haben, kann es durch das konsequente Gegenüberstellen von Lernendenperspektive und fachlicher Perspektive gelingen, die entscheidenden Anlässe, Zwecke und Hindernisse der fachlichen Inhalte (in diesem Fall der Zahlbereichsweiterungen) aufzuspüren. Genau dies ist die mit Freudenthals Motto „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." verbundene Kernidee. Dabei wird hier Freudenthals Ausdruck *verstehen* im Sinne von Maier (1991) interpretiert als das Erfassen von Sinn und dahinter liegenden Zwecken, sowie darüber hinaus als das Erfassen der spezifischen Schwierigkeiten und Besonderheiten eines mathematischen Inhalts, etwa auch im Sinne der epistemologischen Denkhürden (Hefendehl-Hebeker 1997, Prediger 2003).

Im Folgenden soll die durch dieses Motto ausgedrückte Idee, dass Didaktische Rekonstruktion Methoden und Zugänge zur Restrukturierung liefern kann, an einem Beispiel aus der elementaren Stochastik etwas ausgeführt werden. Das Beispiel dient im Wesentlichen der Illustration eines Zugangs und dokumentiert die singuläre Annnäherung der Autorin an das Themenfeld.

3 Vom Sinn elementarer Stochastik – ein Beispiel für eine singuläre didaktisch-rekonstruktive Annäherung

3.1 Das Ausgangsproblem

Das individuelle Forschungsinteresse der Autorin erwuchs nicht nur aus der Auseinandersetzung mit der didaktischen Literatur, sondern auch aus einer singulären, aber wiederholten Spielerfahrung:

> „Auch wenn die 8 angeblich wahrscheinlicher ist, sie kommt ja trotzdem nicht, guck! Dann nehme ich lieber gleich meine Glückszahl 12."

Solche oder ähnliche Argumente habe ich beim Spielen strategischer Würfelspiele immer wieder gehört, und zwar auch von akademisch gebildeten Bekannten, die im Schulunterricht Stochastik absolviert haben.

Diese Argumente fallen auch in Spielen wie „Die Siedler von Catan", in der die für die Setzentscheidung wesentliche Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Zahl zwischen 2 und 12 als Augensumme zweier Würfel auftaucht, durch die Größe der Ziffern auf den Spielplättchen explizit vorgegeben wird (vgl. Abb. 3).

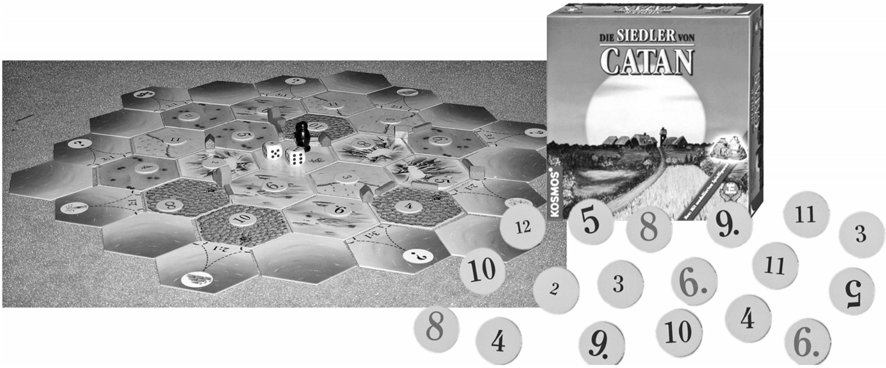


Abbildung 3: Spielsituation und Spielplättchen bei „Die Siedler von Catan“

Die Autoren des durchaus strategisch angelegten Spiels meinen also, den Spielenden die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Augensummen-Ereignissen abnehmen zu müssen (obwohl diese Kompetenz z. B. in den Bildungsstandards der KMK bereits für Klasse 4 gefordert wird, vgl. Beispielaufgaben in KMK 2004).

In Bezug auf den Stand mathematischer Bildung noch wichtiger erscheint jedoch, dass selbst, wenn die Information vorgegeben wird, eine Zahl sei als Augensumme wahrscheinlicher als eine andere, dies für strategische Setzentscheidungen zumindest von meinen Bekannten keineswegs automatisch verwendet wird. (Davon unbenommen sind andere für das Spiel wichtige strategische Überlegungen und die bewusste Entscheidung, ohne mathematisch gestützte Strategie zu spielen; auf beides soll hier nicht eingegangen werden).

Damit wird ein zentrales Ziel mathematischer Bildung nicht erreicht, nämlich mathematische Begriffe, Strukturen und Ideen „als Werkzeuge [zu erwerben], um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen“ (Freudenthal 1983, S. IX). Denn in dem Beispiel geht es ja nicht um komplizierte probabilistische Paradoxien, sondern ganz elementar überhaupt um die Aktivierung stochastischen Denkens für eine Spielsituation.

Wieso also gelang es dem Stochastikunterricht hier nicht, das Konzept der Wahrscheinlichkeit als strategische Hilfe für Auswahlentscheidungen in Zufallssituationen im außerschulischen Denken zu verankern?

Diese Frage ist insofern über die singuläre Spielerfahrung hinaus von großer Bedeutung, als die hier angesprochene Schwierigkeit als paradigmatisch gelten kann für das in Abschnitt 2.1 beschriebene Phänomen, dass es dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht nur partiell gelingt, mathematisch-naturwissenschaftliche Vorstellungen und Konzepte so stabil im Denken der Lernenden zu verankern, dass sie auch in außerunterrichtlichen Kontexten aktiviert werden.

Das Phänomen verdichtete sich durch eine erste systematischere Untersuchung in einer Unterrichtseinheit zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer 10. Gymnasialklasse (Schreiber 2003), in der die Frage thematisiert wurde, welche Augensumme beim Spiel zweier Würfel wohl am häufigsten erscheint. Durch die Analyse von Lerntagebüchern konnte der Frage nachgegangen werden, wie Lernende im Unterricht mit ähnlichen Situationen umgehen.

Für die Analyse wurde kategorienentwickelnd vorgegangen, was hier nicht im Einzelnen dargestellt werden soll. Die Analyse ergab große Unterschiede in den Herangehensweisen und Lösungswegen, vor allem hinsichtlich

- der Kompetenz und der Motivation, die eigenen Denkwege auszuformulieren,
- der Nutzung effektiver Darstellungsformen,
- der Beachtung der Reihenfolge bei Betrachtung der möglichen Ausfälle (d. h. der Wahl eines geeigneten Ereignisraumes) und
- dem Umgang mit dem Wechsel zwischen theoretischer und empirischer Ebene der Betrachtungen.

Trotz all dieser Unterschiede gab es in der Rahmung des schulischen Stochastikunterrichts bemerkenswerter Weise keine einzige Person, die (so wie die Spielenden außerhalb des Mathematikunterrichts) wegen grundsätzlicher Zweifel an der Sinnhaftigkeit von Wahrscheinlichkeits-Aussagen erst gar keine stochastischen Überlegungen anstellten. Offensichtlich hat schon in der zweiten Stunde der ersten Unterrichtseinheit zur Stochastik der implizite didaktische Kontrakt im Klassenzimmer hinreichend Klarheit darüber hergestellt, dass hier Wahrscheinlichkeitsüberlegungen anzustellen sind.

Die deutliche Diskrepanz zwischen der Selbstverständlichkeit, mit der Wahrscheinlichkeitskonzepte im Stochastikunterricht nach nur wenig Vorlauf aktiviert werden, und der Entschiedenheit, mit denen sie z. T. außerhalb des Unterrichts abgelehnt werden, bildet ein eindrucksvolles Beispiel für die Bereichsspezifität des Denkens. Sind stochastische Überlegungen tatsächlich nur für den Stochastikunterricht gut und außerhalb dessen selten aktiviert? Im Unterricht schienen sie doch sehr leicht lernbar, wieso sind sie dann außerhalb des Unterrichts nicht verfügbar?

Im Sinne des angesprochenen Bildungsanspruchs sollte Ziel des Unterrichts sein, diese Diskrepanz zu überwinden und damit stochastische Konzepte auch für das Alltagsdenken stärker verfügbar zu machen (bzw. die Individuen in die Lage zu versetzen, sich wohlbegründet gegen mathematische Betrachtungsweisen von Situationen zu entscheiden, denn das muss für mündige Bürger ja auch erlaubt sein). Wo genau liegen eigentlich die Hindernisse?

Zwar finden sich in der mathematikdidaktischen Literatur zahlreiche Untersuchungen über stochastische (Fehl-)Vorstellungen zu vielen verschiedenen Phänomenen

(z. B. Tversky/Kahnemann 1983, Fischbein et al. 1991, Shaugnessy 1992, Bea 1995), insbesondere auch unter der Perspektive der Paradoxien (z. B. Winter 1992), doch setzen die allermeisten Untersuchungen voraus, dass überhaupt Überlegungen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitskonzepten angestellt werden (wenn auch mit divergierenden Einschätzungen dazu).

Die hier verfolgte Frage ist insofern deutlich elementarer als die meist gestellten, als es hier um die grundsätzliche Bereitschaft zur Aktivierung stochastischer Überlegungen als Voraussetzung für komplizierteres stochastisches Denken geht, während sonst meist technisch anspruchsvollere Themen im Blick sind. Aufgrund der diesbezüglichen Lücken im Forschungsstand wurden dazu weitere empirische Untersuchungen zur Erfassung der Lernendenperspektiven angestellt (vgl. Abschnitt 3.2) und iterativ zur fachlichen Klärung genutzt (vgl. Abschnitt 3.3 und 3.4).

3.2 Erfassung der Lernendenperspektiven

Um die Lernendenperspektiven unanhängig vom Mathematikunterricht detaillierter zu erfassen, wurde eine empirische Studie mittels klinischer Spielinterviews mit Kindern durchgeführt, bevor diese im Unterricht mit Wahrscheinlichkeiten in Berührung kamen (für eine Begründung von Spielinterviews als Methode zur Erhebung stochastischer Vorstellungen vgl. Wollring 1994).

Grundlage der Spielinterviews war ein einfaches Augensummen-Setzspiel: Zu setzen war auf Ziffernkarten mit Zahlen von 1 bis 12. Gewinnen konnte, wessen Zahl als Augensumme zweier Würfel gewürfelt wurde. Es wurde gesetzt, gespielt, Buch geführt und nachgedacht über die zentrale Frage „Auf welche Zahl setzen wir am besten?“.

Insgesamt wurden zehn Spielinterviews von ca. 45 min Länge mit je zwei Kindern durchgeführt, videographiert, transkribiert, zunächst nah am Text offen codiert und schließlich Kategorien entwickelnd interpretiert. Dabei war die Fragestellung leitend, wie die Kinder die Würfelergebnisse und ihre Setzentscheidungen in Spielsituationen außerhalb des Mathematikunterrichts erklärten. Das Erkenntnisinteresse lag also primär nicht auf den Vorstellungen der Lernenden zu fertigen mathematischen Konzepten (wie z. B. die oft untersuchten Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit), sondern auf ihren individuellen Sichten auf die zu mathematisierenden Spielsituationen selbst.

Es konnten sehr unterschiedliche Erklärungsansätze spezifiziert werden, Abbildung 4 zeigt typische Beispiele, denen jeweils die zugeordneten Kategorien vorangestellt sind.

Möglichkeiten zählen:
„Ich hab' mich für die 7 entschieden, weil da sind sechs Möglichkeiten, und bei den anderen sind es immer nur fünf oder drei Möglichkeiten. Und die 7, die kann man gut würfeln."

Empirische „Erfahrungen":
„Wenn wir ein Spiel oder so was spielen, hab ich mit der 5 immer schon sehr viel Glück gehabt."

Erreichbarkeitsansatz:
„Für 6 kann man 'ne Fünf und 'ne Eins kriegen. […], wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen."

Bedeutsamkeitsansatz:
„Dann hab' ich ja hier mehrmals im zweiten Spiel die 8 geworfen. Und ich weiß auch schon warum. […] Weil ich bin am 16.8. geboren."

Beeinflussbarkeitsansatz:
„Manchmal, hab ich ganz doll gedacht, oh Mann, jetzt brauch' ich unbedingt 'ne 6, und war 'ne 6."

Abbildung 4: Erfassung der Lernendenperspektive – Erklärungsansätze

Insbesondere Bedeutsamkeitsansatz und Beeinflussungsansatz sind immer wieder auftauchende alltägliche Erklärungsansätze für stochastische Situationen, die vielfach empirisch nachgewiesen wurden (z. B. Fischbein et al. 1991, ähnlich auch Wollring 1994). Den meisten Forschenden gelten sie als Beleg dafür, dass angemessene stochastische Vorstellungen besonders schwer zu erwerben sind. Ein Begründungsstrang geht auf die Bedeutung der vorunterrichtlichen Vorstellungen zurück, denn es werden zwar vielfältige vorunterrichtliche Erfahrungen mit Zufallsphänomenen, z. B. beim Spielen, gemacht, diese werden jedoch selten reflektiert, so dass sich die „urwüchsig entwickelten" Erklärungsansätze später als lernhinderlich auswirken können (ausgeführt in Büchter et al. 2005).

Als Konsequenz für die Didaktische Strukturierung schlug schon Winter (1976) deswegen vor, mit Stochastikunterricht früh zu beginnen, um diese primären Intuitionen durch sekundäre Intuitionen ablösen zu können (Fischbein 1975). In zahlreichen Studien wurden Lehrstrategien entwickelt, um lernhinderliche Erklärungsansätze (interpretiert als Fehlvorstellungen) durch mathematisch tragfähigere Ansätze erfahrungsbasiert zu ersetzen, insbesondere durch intensives Experimentieren (z. B. Herget 1997, Büchter et al. 2005).

Vor dem Hintergrund der Erfahrung nur beschränkter Erfolge von Zugängen zum Ausmerzen von Fehlvorstellungen in anderen Bereichen lohnt es sich aber dennoch, das Phänomen noch einmal neu in eher horizontaler Sichtweise zu analysieren. In horizontaler Sichtweise werden diese Intuitionen nicht als zu überwindende Fehlvorstellungen betrachtet, sondern als konkurrierende Perspektiven, die bei vielen Menschen neben den mathematischen Vorstellungen auch auf Dauer bestehen bleiben (vgl. Abschnitt 2.1, für eine theoretische Begründung der horizontalen Sichtweise vgl. Prediger 2004).

In dieser – nach Ansicht der Autorin realistischeren – Sichtweise stellt sich die Frage, ob die vermeintlichen Fehlvorstellungen nicht vielleicht doch auch in gewisser Weise berechtigte Perspektiven darstellen. Dazu müssen, wie Kattmann betont, die Diskrepanzen in ihren *Ursachen* noch besser verstanden werden.

> „Die hinter der Bildung und der Stabilität der Alltagsvorstellungen stehenden *Ursachen* bestimmen das Lernen als implizit wirksame Faktoren stets mit. Sie können daher im fachlichen Lernen nicht ausgeschlossen oder überwunden werden. Ihre Kenntnis eröffnet aber die Möglichkeit, Schülervorstellungen adäquat und effektiv für die Prozesse des fachlichen Lernens zu nutzen." (Kattmann 2003, S. 7)

Nach dem Forschungsansatz der Didaktischen Rekonstruktion wird diese Frage durch die explizite Gegenüberstellung der fachlichen und individuellen Perspektiven verfolgt.

3.3 Gegenüberstellung von fachlichen und individuellen Perspektiven

Angesichts der Forschungsergebnisse von Wollring (1994, S. 242), der auf die „große Bandbreite von persönlichen und situativen Bedingtheiten der stochastischen Vorstellungen" aufmerksam gemacht hat, ist es dazu methodisch wichtig, die rekonstruierten Erklärungsansätze zu rekontextualisieren, um diese situativen Bedingtheiten aufzuspüren.

Dann zeigt sich nämlich, dass die Divergenzen in der Aufmerksamkeitsfokussierung die eigentliche Ursache für die unterschiedlichen Perspektiven bilden (vgl. Abb. 5). Betrachtet man die Aussagen derjenigen Kinder genauer, für die die individuelle Bedeutsamkeit des Würfelergebnisses im Vordergrund steht, so fällt auf, dass diese Kinder ihre Aufmerksamkeit auf die Prognose des Einzelergebnisses richten. Zwar gibt der von der Laplace-Wahrscheinlichkeit geleitete Ansatz des Möglichkeiten-Zählens das rein mathematisch besser begründbare Maß der Erwartung an, doch erhält dieser Ansatz seine eigentliche prognostische Kraft mit größerer Sicherheit erst auf längere Sicht. Der Bedeutsamkeitsansatz dagegen liefert für das Einzelergebnis einen geeigneteren subjektiven Erwartungswert, wenn man die unterschiedliche lebensweltliche Bedeutung der einzelnen Ausfälle mit einbezieht. In dieser breiteren Perspektive ist der Bedeutsamkeitsansatz *nicht weniger angemessen* als der Ansatz des Möglichkeiten-Zählens.

Eine stochastische Betrachtung der Situation gewinnt also vor allem auf lange Sicht ihre Kraft, und nur wer den Unterschied zwischen kurzfristiger und langfristiger Perspektive explizit begreift und die Grenzen der rein mathematischen Sicht im Blick hat, wird verständig mit Wahrscheinlichkeitskonzepten, z. B. in Spielsituationen, umgehen können.

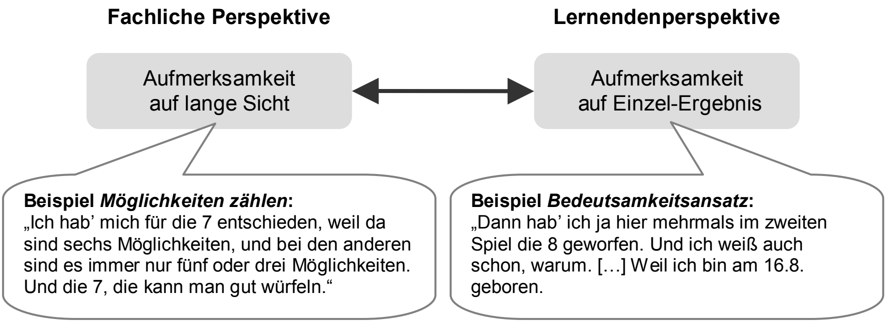


Abbildung 5: Divergierende Aufmerksamkeitsfokussierung als Ursache für Diskrepanzen zwischen fachlicher und individueller Perspektive

3.4 Fachliche Klärung

So rückt durch das Gegenüberstellen von fachlicher Perspektive und Lernendenperspektiven für die fachliche Klärung ein wesentliches Charakteristikum der Stochastik in den Vordergrund, das Hefendehl-Hebeker so formuliert hat:

> „Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode. Diese Einschätzung zu präzisieren gehört zu den Aufgaben einer Einführung in die Stochastik." (Hefendehl-Hebeker 2003, S. 13)

Der Hintergrund dieses Gedankens, das empirische Gesetz der großen Zahlen, ist eigentlich wohl bekannt. Für den singulären Erkenntnisprozess der Autorin erhielt es durch diese fachliche Klärung erst seine eigentliche Bedeutung: Das empirische Gesetz der großen Zahlen erklärt, wieso wir überhaupt sinnvoll stochastische Betrachtungen anstellen können in Situationen, die im Einzelfall nicht kalkulierbar sind. Es erläutert den *Sinn* und die Voraussetzung, aber auch die Grenzen stochastischer Betrachtungsweisen. Somit konnte, ganz gemäß Freudenthals Motto, die Erfassung der Lernendenperspektiven eine Methode liefern für einen ersten wichtigen Schritt zur Restrukturierung der elementaren Stochastik.

Genau am Gesetz der großen Zahlen zeigt sich auch die Bedeutung dieses Zugangs in Abgrenzung zu Forschungsansätzen, die sich auf Fehlvorstellungen konzentrieren: Tversky/Kahneman (1983) haben den Begriff „Gesetz der kleinen Zahlen" geprägt für die Vorstellung, dass sich a priori bestimmte Wahrscheinlichkeiten auch als relative Häufigkeiten in kleinen Ausfall-Zahlen wiederspiegeln müssten. In vielen Untersuchungen wurde sie als typischer „Fehler" der Individuen im stochastischen Denken bestätigt (z. B. Borovcnik 1992).

In der hier eingenommenen horizontalen Sicht, die die Lernendenperspektive zunächst als berechtigte Perspektive neben der fachbezogenen stehen lässt, wird hinter diesem „Fehler“ im individuellen Denken eine Grenze der stochastischen Erklärungen von Phänomenen und damit ein Defizit der Mathematik, nicht der Individuen, erkennbar: Aus Sicht der Individuen ist es ein berechtigtes und sinnvolles Anliegen, auch für einzelne Ausfälle eine Vorhersagemöglichkeit zu haben. Daher könnte gerade das oft intuitiv formulierte „Gesetz der kleinen Zahlen“ ein interessanter Ausgangspunkt für eine äußerst bildungsrelevante Reflexion darüber sein, dass dies die Stochastik eben nicht leisten kann, weil „nur“ das viel schwächere empirische Gesetz der großen Zahlen gilt, und dass genau aus diesem Grund ein Perspektivwechsel notwendig ist. Dies ist eine andere Sicht auf die Beziehung von individueller und fachlicher Perspektive, als die Stochastikdidaktik sie bisher meist vorschlägt.

Eine Kernbedingung für die Aktivierung stochastischer Überlegungen in außerschulischen Kontexten scheint also zu sein, den Perspektivwechsel von der Aufmerksamkeit auf das Einzel-Ergebnis hin zur langen Sicht zu vollziehen. Genau dieser Wechsel muss zu einem expliziten Lerngegenstand werden, wenn Schülerinnen und Schüler stabile mathematische Vorstellungen aufbauen sollen.

Der neu zu formulierende Lerninhalt ist durch Hefendehl-Hebekers Satz „Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode.“ (s. vorige Seite) somit benannt. Dies erscheint einerseits in gewisser Weise selbstverständlich, andererseits zeigen erste Schulbuchanalysen, dass solche Gedanken bisher keine hinreichend explizite Rolle gespielt hat.

3.5 Konsequenzen für die Didaktische Strukturierung: Perspektivwechsel bewusst machen

Einen konkreten Vorschlag für die praktische Umsetzung bietet die Aufgabe in Abbildung 6, mit der dieser Lerninhalt thematisiert werden könnte. Hier werden die gegensätzlichen Perspektiven als Positionen unterschiedlicher Kinder greifbar gemacht und somit kommunizierbar, ohne auf einer abstrakten Ebene darüber sprechen zu müssen.

Die Aufgabe wurde am Ende einer dreiwöchigen Einheit über Glück und Zufall in einer siebten Gesamtschulklasse gestellt. Die Ergebnisse zeigen, wie wenig selbstverständlich diese Überlegungen für Lernende sind. Nur fünf von siebzehn schriftlich befragten Kindern gaben Hanna Recht und nahmen damit eine langfristige Perspektive ein, so wie die Antwort in Abbildung 7. Genau so viele Kinder bestätigten dagegen Thomas’ Sicht, dass Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen für das Spiel eigentlich nicht hilfreich sind, weil der Zufall doch nicht zu bändigen ist:

> „Ich meine, dass man wirklich nicht richtig ausrechnen kann, welche Zahl kommt oder wo der Zufall bei dem Spiel ist.“

Ähnlich wie die folgende Antwort zeugten insgesamt vier weitere Antworten von sehr eigenwilligen Vorstellungen, drei antworteten mit „weiß nicht“:

> „Ich glaube, dass man maximal jedes zweite Mal auf die wahrscheinlichste Zahl setzen sollte. Weil die Wahrscheinlichkeit ja nicht alles aussagt."

Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass der Perspektivwechsel auch nach drei Wochen Stochastikunterricht nicht allen Lernenden explizit bewusst, bei einigen nicht mal vollzogen ist.

Aufgabe: Wieso machen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit überhaupt Sinn?

Jetzt habe ich das ganze Spiel auf die wahrscheinlichste Zahl gesetzt und doch verloren! Irgendwas muss ich falsch gemacht haben.

Katharina

Was nutzt mir die ganze Rechnerei mit der Wahrscheinlichkeit. Davon kann ich auch nicht sagen, auf was ich in der nächsten Runde setzen soll. Denn dann entscheidet ja doch der Zufall.

Thomas

Aber langfristig hilft das ja schon, wenn man sich mit Wahrscheinlichkeiten auskennt, denn auf lange Sicht hat der Zufall eben doch Methode.

Hanna

Was meinst du zu dem, was Katharina und Thomas sagen?
Was meint Hanna wohl mit ihrem Satz? Nimm Stellung!

Abbildung 6: Aufgabe zur Thematisierung des notwendigen Perspektivwechsels

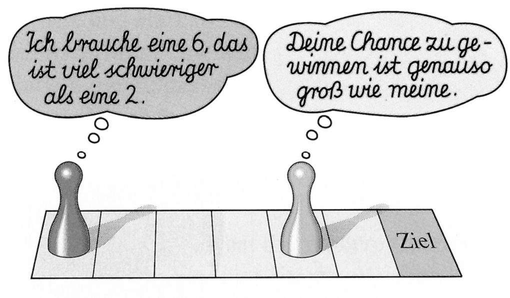
~~[illegible]~~
~~„alle Zahlen gleich wahrscheinlich~~
Hanna meint das man den Zufall nicht
völlig berechnen. auf längere Dauer
~~Sibt es wahrscheinlichere Möglichkeite~~
Katharina +
Thomas haben auch
nicht ganz unrecht!!!

Abbildung 7: Antwort einer Siebtklässlerin zur Aufgabe aus Abbildung 6

Dass gerade solche Aufgaben einen guten Anlass liefern können, über diese Aspekte nachzudenken, zeigt die in Abbildung 7 abgedruckte Antwort, die die Schülerin in drei Etappen geschrieben hat. Zunächst hat sie, ähnlich wie viele ihrer Klassenkameraden, der kurzfristigen Perspektive Recht gegeben, doch dann im Bearbeitungsprozess selbst ihre Gedanken weiterentwickeln können, die erste Antwort durchgestrichen und weitergeschrieben. Im dritten Zugriff ist der letzte Satz entstanden, der eine gewisse Bewusstheit für die Widersprüchlichkeit der Problematik dokumentiert. Somit hat die Schülerin im Zuge der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe situationsbezogen einen umfassenden Perspektivwechsel samt der Reflexion seiner Ambivalenz einmal durchlaufen.

Dies bestätigt die Erfahrung aus anderen Bereichen (z. B. Kaune 2001), dass kognitionsorientierte Aufforderungen zur Reflexion über Diskrepanzen in solcherart Aufgaben eine gute Methode darstellen können, um diese zum Lerninhalt werden zu lassen und metakognitive Auseinandersetzungen anzuregen.

In Bezug auf eine in der didaktischen Literatur noch präsentere lernhinderliche Alltagsvorstellung („Die Sechs ist schwerer zu würfeln als die Zwei.“, vgl. Green 1983) zeigt Abbildung 8 eine ähnliche Aufgabe (aus dem Schulbuch Mathe live 6, Emde et al. 1999, S. 71). Winters (1992) Vorschläge zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien bilden weitere mögliche Pfade auf dem Weg, auch mathematische Sichtweisen auf komplexere Phänomene stabiler im außerschulischen Denken zu verankern.



7 Wer von den beiden hat Recht? Begründet eure Meinung. Stellt euch ähnliche Aufgaben und spielt sie nach.

Abbildung 8: Schulbuchaufgabe zum Aufgreifen vorunterrichtlicher Vorstellungen (Emde et al. 1999, S. 71)

Während die Schulbuchaufgabe in Abbildung 8 jedoch klar auf das Ausräumen einer Fehlvorstellung ausgerichtet ist (ohne die dahinterliegende Kontingenz der Gleichwahrscheinlichkeitsannahme der fachlich erwünschten Sicht für alle Würfelbilder zu explizieren, vgl. dazu Prediger 2005), lässt die Aufgabe in Abbildung 6 auch die Aufmerksamkeitsfokussierung auf das Einzelergebnis als *legitime Perspektive* zu und zielt lediglich darauf, die unterschiedlichen Perspektiven bewusst zu machen: Katharina und Thomas haben auch nicht ganz Unrecht, denn wer nur auf das einzelne Ereignis guckt, der kann es auch so sehen wie Thomas.

4 Fazit und Ausblick

Gemessen an dem umfassenden Anspruch des Restrukturierungsprogramms ist das hier erläuterte lokale Beispiel von seiner inhaltlichen Tragweite naturgemäß noch sehr eingeschränkt. Gleichwohl kann es doch bereits die Richtung aufzeigen, wie Restrukturierungsbemühungen in ihrem vorwiegend philosophischen Zugriff durch den psychologisch orientierten und empirisch abgesicherten Zugriff gewinnbringend ergänzt werden können.

Um zusammenfassend zu verdeutlichen, was diese didaktisch-rekonstruktiven Annäherungen an die elementare Stochastik zur Restrukturierung des Gebietes tatsächlich beitragen können, soll auf einige in Abschnitt 2.3 benannten Restrukturierungsaufgaben einzeln eingegangen werden: Didaktische Rekonstruktion kann in ihrer Vermittlungsabsicht einen Beitrag zur Restrukturierung leisten, indem sie hilft, für mathematische Gebiete, bezogen auf deren Begriffe, Aussagen, Methoden und Verfahren (vgl. Wille 1995, S. 45),

- *Anlässe und Auswirkungen zu beschreiben*: z. B. bildeten hier Spielsituationen als Anlass für Wahrscheinlichkeitsüberlegungen den Ausgangspunkt, dies deckt sich mit dem historischen Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Auswirkungen dagegen sind hier nicht im Blick gewesen);
- *Zwecke und Ziele darzustellen*: z. B. war die Darstellung des Ziels der Beschreibung von Gesetzmäßigkeiten der Würfel für langfristige Prognosen ein wichtiger Aspekt in der Explizierung der Gründe für den angesprochenen Perspektivwechsel auf lange Sicht;
- *Bedeutungen und Interpretationen aufzudecken*: z. B. hat die Gegenüberstellung von Lernendenperspektiven und fachlichen Perspektiven erst die zentrale Bedeutung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen als Voraussetzung für die stochastische Modellierung aufgedeckt;
- *Grenzen und Gefahren zu benennen*: z. B. zeigt die Auseinandersetzung mit dem alltagsweltlichen Wunsch, eine Erklärung und Prognose für den Einzelfall geben zu können, eine deutliche Grenze stochastischer Betrachtungen: Hier muss die Mathematik versagen;

- *unangemessene Behinderungen offen zu legen*: z. B. zeigt eine hier nicht ausgeführte Analyse einer Gesprächssituation im Rahmen der Interviews, wie stark die Nicht-Explizierung der Laplace-Annahme (Gleichwahrscheinlichkeit für alle Würfelergebnisse) Lernprozesse behindern kann, wenn sie von den Lernenden nicht geteilt wird (vgl. Prediger 2005). Auch in anderen Beispielen dient gerade die Analyse von gestörten Gesprächssituationen der für die Restrukturierung wichtigen Aufdeckung impliziter Vorannahmen (vgl. Prediger 2004);
- *reichhaltige Ausdrucksmittel einzusetzen, insbesondere die Gemeinsprache*: z. B. dient die empirische Analyse von lernförderlichen Korrespondenzen zwischen Lernendenperspektive und fachlicher Perspektive auch gerade dem Finden möglicher gemeinsprachlicher Anknüpfungspunkte.

Aus diesen lokalen ersten Erfahrungen in der Mathematikdidaktik und den zahlreichen bereits abgeschlossenen Projekten in anderen Fachdidaktiken (z. B. Gropengießer 2001 u. v. m.) schöpft die Autorin die Überzeugung, dass sich das Forschungsprogramm auch in größerem Maßstab fruchtbar machen lässt. Daher sind Beispiele zur Didaktischen Rekonstruktion etwas breiterer Bereiche momentan Gegenstand laufender Forschungsprojekte (z. B. zur Kurvendiskussion Hahn/Prediger 2004, und zur Bruchrechnung Prediger i. V.).

In allen diesen Projekten stellt sich die Forschungsfrage des Conceptual-Change-Ansatzes, wie der Übergang von voruntrerrichtlichen individuellen Vorstellungen zu fachlich erwünschten Vorstellungen nachhaltig gelingen kann. Die Arbeitsgruppe der Autorin folgt der Einschätzung von Kattmann (2003), dass dieser Übergang nur gelingen kann, wenn man die voruntrerrichtlichen Vorstellungen *und ihre Hintergründe* ernst nimmt und sich mit den Diskrepanzen zu den fachlichen Vorstellungen aktiv auseinandersetzt.

Für die in diesem Artikel diskutierte ausbleibende Aktivierung stochastischer Denkweisen lagen die Ursachen in dem nicht vollzogenen Perspektivwechsel vom Einzel-Ergebnis zur langen Sicht. Für das in Prediger (i. V.) diskutierte Beispiel konnte dagegen ein nicht vollzogener Umbruch in den inhaltlichen Vorstellungen als Ursache ausgemacht werden; in anderen Beispielen liegen die Hintergründe noch tiefer in der Fachkultur begründet (vgl. Prediger 2004).

In jedem der Fälle wurde als wichtige Leitidee für die Didaktische Strukturierung vorgeschlagen, die Diskrepanzen und ihre Hintergründe selbst im Lernprozess zu thematisieren. Dies ist als eine zentrale didaktische Orientierung in Prediger (2004), in etwas anderen Theoriezusammenhängen bereits von Bell (1983) und Lengnink/Peschek (2001), ausführlich begründet. Gleichwohl gibt es für ihre Kleinarbeitung in unterschiedlichen mathematischen Themengebieten noch einen großen weiteren didaktisch-rekonstruktiven Forschungs- und Entwicklungsbedarf.

Literatur

Bea, W. (1995): Stochastisches Denken – Analysen aus kognitionspsychologischer und didaktischer Perspektive. Lang: Frankfurt a. M.

Bell, A. (1983): Diagnostic teaching. The design of teaching using research on understanding. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15(2), 83–89.

Borovcnik, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. BI Wissenschaftsverlag: Mannheim.

Büchter, A./Hußmann, S./Leuders, T./Prediger, S. (2005): Den Zufall im Griff? – Stochastische Vorstellungen fördern. In: Praxis der Mathematik in der Schule 47(4), 1–7.

Burscheid, H.-J. et al. (1992): A survey of research. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 24(7), 296–311.

Duit, R./von Rhöneck, C. (1996) (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften. Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Emde, C. et al. (1999): Mathe live 6. Klett: Stuttgart.

Fischbein, E. (1975): The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Reidel: Dordrecht.

Fischbein, E. et al. (1991): Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. In: Educational Studies in Mathematics 22(6), 523–549

Fischer, R. (1984): Unterricht als Prozess der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. In: Journal für Mathematikdidaktik 5(1/2), 51–85.

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. In: Fischer-Buck, A. et al. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung, Franz-Fischer-Jahrbuch für Philosophie und Pädagogik 6, Universitätsverlag: Leipzig, 151–161.

Freudenthal, H. (1974): Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8(6), 122–124.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer: Dordrecht.

Ganter, B./Wille, R. (1996): Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen, Springer: Berlin-Heidelberg.

Gerstenmaier, J./Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. In: Zeitschrift für Pädagogik 33, 867–888.

Green, D. R. (1983): School pupils probability concepts. In: Teaching Statistics 5(2), 34–42, deutsche Fassung in Stochastik in der Schule 3(3), 25–38.

Gropengießer, H. (2001): Didaktische Rekonstruktion des Sehens. Wissenschaftliche Theorien und die Sicht der Schüler in der Perspektive der Vermittlung. Didaktisches Zentrum der Universität Oldenburg.

Hahn, S./Prediger, S.(2004): Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, 217–220.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. In: mathematik lehren 35, 6–12.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003): Didaktik der Stochastik I: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vorlesungsausarbeitung, Universität Duisburg.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004): Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.): Konsequenzen aus PISA. Perspektiven der Fachdidaktiken. Studienverlag: Innsbruck, 141–189.

Hentig, H. von (1974): Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß. Suhrkamp: Frankfurt.

Herget, W. (1997): Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall ... In: mathematik lehren 85, 4–8.

Hartmann, D./Janich, P. (1997) (Hrsg.): Methodischer Kulturalismus. Zwischen Naturalismus und Postmoderne. Suhrkamp: Frankfurt.

Kattmann, U. (2003): Vorwort. In: Gropengießer, H. (Hrsg.): Lebenswelten – Denkwelten – Sprechwelten. Wie man Vorstellungen der Lerner verstehen kann. Didaktisches Zentrum, Universität Oldenburg, 7–8.

Kattmann, U./Duit, R./Gropengießer, H./Komorek, M. (1997): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 3(3), 3–18.

Kattmann, U./Gropengießer, H. (1996): Modellierung der didaktischen Rekonstruktion. In: Duit/von Rhöneck 1996, 180–204.

Kaune, C. (2001): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“. In: Der Mathematikunterricht 35, 35–46.

Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004.

Lengnink, K. (2004): Beiträge Allgemeiner Mathematik zur Reflexion mathematischer Bildung. In: Lengnink, K./Siebel, F. (Hrsg.): Für eine Allgemeine Wissenschaft. Verlag Allgemeine Wissenschaft: Mühltal.

Lengnink, K./Peschek, W. (2001): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In: Lengnink/Prediger/Siebel (2001), 65–81.

Lengnink, K./Prediger, S./Siebel, F. (2001) (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik. Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft 2. Verlag Allgemeine Wissenschaft: Mühltal.

Lenné, H. (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Klett: Stuttgart.

Maier, H. (1991): Verstehen als Prozess individueller Sinnkonstruktion. In: mathematik lehren 49, 55–60.

Niss, M. (1996): Goals of Mathematics Teaching. In: Bishop, A. J. et al. (Hrsg.): International Handbook of Mathematics Education. Kluwer: Dordrecht, 11–47.

Posner, G. et al. (1982): Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. In: Science Education 66(2), 211–227.

Prediger, S. (2000): Mathematische Logik in der Wissensverarbeitung: Historisch-philosophische Gründe für eine Kontextuelle Logik. In: Mathematische Semesterberichte 47(2), 165–191.

Prediger, S. (2003): Brüche bei den Brüchen – Bildungschancen nutzen durch Auseinandersetzung mit epistemologischen Denkhürden. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, 509–513.

Prediger, S. (2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 6. Profil Verlag: München/Wien.

Prediger, S. (2005): Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen. Fallbeispiel zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005.

Prediger, S. (i. V.): Obstacles in conceptual change can lie deeper – Revisiting the case of multiplication of fractions. Zur Publikation eingereichtes Manuskript.

Schreiber, K. (2003): Der Beitrag der Fremdsprache zu einem verständnisfördernden Mathematiklernen – am Beispiel eines bilingualen deutsch-französischen Unterrichtsmoduls zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unveröffentlichte wissenschaftliche Hausarbeit. Universität Bremen.

Sesink, W. (1997): Was heißt „Didaktik als Reflektionsinstanz der Wissenschaft?". In: Wörner, J. (Hrsg.): Für eine neue Lernkultur – Martin Wagenschein zum 100. Geburtstag. TU Darmstadt: Schriftenreihe Wissenschaft und Technik 74, 87–92.

Shaugnessy, J. M. (1992): Research in probability and statistics: reflections and directions. In: Grouws, D. A. (Hrsg.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan: New York, 465–494.

Skovsmose, O. (1994): Towards a philosophy of critical mathematics education. Kluwer: Dordrecht.

Tversky, A./Kahneman, D. (1983): Extensional Versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgement. In: Psychological Review 90(4), 293–315

Vosniadou, Stella/Verschaffel, Lieven (2004) (Hrsg.): The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. In: Learning and instruction 14(5), 445–548.

Wille, R. (1981): Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung „Lineare Algebra". In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1981, 102–112.

Wille, R. (1995): Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule. In: Biehler, R. et al. (Hrsg.): Mathematik allgemeinbildend unterrichten. Aulis: Köln, 41–55.

Wille, R. (2001): Allgemeine Mathematik – Mathematik für die Allgemeinheit. In: Lengnink/Prediger/Siebel 2001, 3–20.

Winter, H. (1976): Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1–6). In: Didaktik der Mathematik 1, 22–37.

Winter, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: Journal für Mathematikdidaktik 13(1), 23–53.

Wollring, B. (1994) Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern. Habilitationsschrift, Universität Münster.

Anschrift der Verfasserin

Prof. Dr. Susanne Prediger
AG Didaktik der Mathematik
Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Bremen
Postfach 330440
28334 Bremen
prediger@math.uni-bremen.de

Eingang Manuskript: 28.03.2005 (überarbeitetes Manuskript: 11.09.2005)