

Diskrete Dynamik am Beispiel der Atwoodschen Fallmaschine

von

Thomas Sonar, Braunschweig

Kurzfassung: Einfache mechanische Maschinen wie die Atwoodsche Fallmaschine oder echte Flaschenzüge lassen sich im Rahmen der diskreten Mechanik ohne die Verwendung des Ableitungsbegriffs modellieren. Man gelangt so auf Differenzgleichungen, deren Lösungen man einfach ermitteln kann und die die Dynamik der Maschinen im Diskreten beschreiben. Des Weiteren erlaubt die diskrete Betrachtungsweise tiefe Einsichten in das Verhalten von Lösungen von Differenzgleichungen bezüglich des Energieerhaltungssatzes. Beim Vergleich mit der Physik lässt sich dieser Zugang als Diskretisierung kontinuierlicher Gleichungen deuten. Damit ist es möglich, sehr detaillierte Aussagen über die Genauigkeit der diskreten Beschreibung zu machen.

Abstract: Simple mechanical machines like Atwood's fall machine or genuin pulleys can be modelled in the framework of discrete mechanics without the notion of the derivative. One then arrives at difference equations the solutions of which can be calculated easily and which describe the discrete dynamics of the machines completely. Furthermore this point of view allows for deep insights into the behaviour of solutions of difference equations with respect to the conservation law for energy. If compared to physics one can view the discrete approach as discretisation procedure of equations from continuum mechanics. Then it is possible to draw out detailed information about the order of approximation of the discrete formulation.

1 Einführung

Die analytische Mechanik hat sich historisch aus der Mathematik heraus entwickelt und stellt nach wie vor ein facettenreiches Beispielreservoir für die Mathematik dar. Allerdings benötigen schon die ersten Schritte innerhalb der Dynamik den Begriff der Ableitung, so dass an den schulischen Einsatz dynamisch-mechanischer Beispiele nicht vor der Oberstufe zu denken ist. Es ist jedoch möglich, eine *diskrete Dynamik* zu entwickeln, die ohne den Ableitungsbegriff zugänglich ist und tiefe Einsichten in die *Mathematik* der diskreten Mechanik erlaubt.

Nach einem kurzen Vergleich zwischen analytischer und diskreter Dynamik werden wir die wichtige mechanische Technik des *Freischneidens* erläutern, die wir als wichtigstes Werkzeug im Folgenden benötigen. Als einfache mechanische Maschine diskutieren wir die *Atwoodsche Fallmaschine*, an der wir die gesamte diskrete Dynamik entwickeln werden. Durch Freiheiten in der Wahl gewisser Diffe-

renzen ist es möglich, *mehrere verschiedene* diskrete Mechaniken zu schaffen. Dem diskreten Satz von der Erhaltung der Energie wird die Rolle zufallen, die *richtige* diskrete Mechanik auszuwählen. Durch eine Analyse der diskreten Ausdrücke für Beschleunigung und Geschwindigkeit werden wir über die *Genauigkeit* unserer Mechanik Auskunft bekommen. Natürlich kann man die diskrete Dynamik auch als direkte Diskretisierung der analytischen Dynamik betrachten. Wir skizzieren auch diesen Weg und zeigen, dass man auch so zu unserer diskreten Dynamik kommt. Mit einigen Bemerkungen zur Entwicklung von Mathematik und Physik im schulischen Unterricht schließen wir diese Arbeit ab.

2 Analytische und diskrete Mechanik

Die Newtonsche Mechanik basiert auf ganz wenigen Grundlagen, wobei sich aus der Liste

- Kraft = Masse \times Beschleunigung
- actio = reactio

eigentlich schon alles machen lässt, wenn man die auftretenden Begriffe erläutert! Wir wollen wie gewohnt im Länge-Masse-Zeit-System (LMZ) arbeiten und führen folgende Bezeichnungen ein:

Bezeichnung	Formelzeichen	Physikalische Dimension
Weg	x	$[x] = \text{m}$
Zeit	t	$[t] = \text{s}$
Masse	m	$[m] = \text{kg}$
Geschwindigkeit	v	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Beschleunigung	a	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Kraft	F	$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$

Der lapidare Zusammenhang *Kraft = Masse \times Beschleunigung* kann dann geschrieben werden als

$$F = m \cdot a, \quad (1)$$

was natürlich zur physikalischen Dimension passt.

Jedermann weiß, was man unter *Gewicht* versteht, denn das ist eine Größe, die man jederzeit auf der Badezimmerwaage messen kann. Es handelt sich um eine *Kraft*, die uns auf dem Erdboden festhält. Schon nicht mehr jeder weiß, dass *Gewicht* und *Masse* zwei unterschiedliche Dinge sind und dass zwischen der Gewichtskraft F_G und der Masse m die *Erdbeschleunigung* g (an der Schule auch unter dem Namen *Ortsfaktor* bekannt) steckt:

$$F_G = m \cdot g$$

was nichts anderes als (1) ist. Wir wollen den Zahlenwert

$$g := 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2)$$

verwenden.

2.1 Analytische Formulierung

Während wir die Erdbeschleunigung als konstant annehmen dürfen, sind Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in der Regel zeitabhängige Funktionen, da wir ansonsten keine Dynamik untersuchen können. Zur Vereinfachung wollen wir die Masse stets als konstant und nicht zeitabhängig ansehen. Unter *Beschleunigung* versteht man die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t), \quad (3)$$

und unter *Geschwindigkeit* die zeitliche Änderung des Weges, also

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad (4)$$

Damit ist $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ und Newtons Grundgesetz (1) kann schließlich geschrieben werden als

$$F(t) = m \cdot \ddot{x}(t). \quad (5)$$

2.2 Diskrete Mechanik

In der diskreten Mechanik vergeht die Zeit in diskreten Schritten der Größe $\Delta t = 1$, wobei die physikalische Dimension entsprechend der Aufgabenstellung gewählt werden muss. Der Zeitablauf $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ wird dann repräsentiert durch eine natürliche Zahl n und wir schreiben für die *Beschleunigung* zur Zeit $(n+1)\Delta t$

$$a(n+1) = v(n+1) - v(n) = \Delta v(n), \quad (6)$$

wobei wir damit zugleich den *Differenzenoperator* Δ definiert haben. Entsprechend schreibt sich die *Geschwindigkeit* als

$$v(n+1) = x(n+1) - x(n) = \Delta x(n). \quad (7)$$

Damit ist $a(n) = \Delta v(n) = \Delta \Delta x(n) =: \Delta^2 x(n)$ und Newtons Grundgesetz (1) schreibt sich in der Form

$$F(n) = m \cdot \Delta^2 x(n). \quad (8)$$

Mehr Mechanik braucht man nicht!

Nun müssen wir uns noch überlegen, wie Kräfte überhaupt wirken, wenn wir Seile ins Spiel bringen. Ein (abstraktes) Seil überträgt keine Druckkräfte, sondern nur Zugkräfte. Es ist selbst völlig masselos. Hängt eine Masse m an einem solchen Seil, das an der Decke befestigt ist, fest, dann können wir uns über die Kräfte im Seil durch den Vorgang des *Freischneidens* informieren.

An der Masse m in Abbildung 1 wirkt die Gewichtskraft $F = m \cdot g$, die durch die Befestigung des Seiles an der Decke aufgenommen werden muss. Würde man das Seil an irgendeiner Stelle durchschneiden, dann fällt die Masse natürlich zu Boden. Wollen wir die Masse nach dem Durchschneiden an gleicher Stelle halten, dann müssen wir an der Schnittstelle des Seiles eine Kraft F_1 anbringen, die die Masse hält, und am oberen Seil eine Kraft F_2 , die das Seil so straff hält wie zuvor. Nun kommen zwei wichtige Überlegungen:

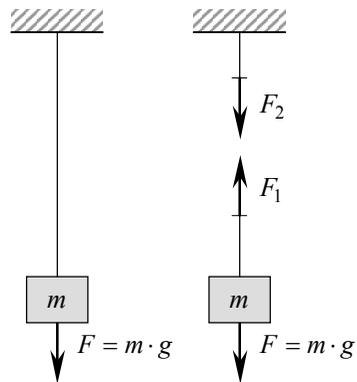


Abbildung 1: Freischneiden eines Seiles

1. Da F_1 die Masse hält, muss $F_1 = F$ gelten!
2. Würden wir das Seil an der Schnittstelle wieder zusammennähen, dann darf an der Schnitt(Näh-)stelle keine zusätzliche Kraft übrig bleiben, denn sonst wäre die Kraft im Seil oberhalb der Schnittstelle eine andere als unterhalb. Also muss $F_2 = F_1$ gelten!

3 Die Atwoodsche Fallmaschine

3.1 Die Berechnung der Beschleunigungen und Kräfte

Als Einstieg in die Geheimnisse der Flaschenzüge betrachten wir die so genannte Atwoodsche Fallmaschine (vgl. Goldstein 1987). Es handelt sich dabei um ein Seil, das über eine Rolle an der Decke geführt wird und an dessen Seiten zwei Massen m_1 und m_2 hängen (Abb. 2). Wie der Name *Fallmaschine* suggeriert und wie sofort klar ist, wird für $m_1 \neq m_2$ eine Masse zu Boden fallen und dabei die andere nach oben ziehen. Wir wollen annehmen, dass die Geometrie so beschaffen ist,

dass die eine Masse auf dem Boden aufschlagen kann und die andere Masse dann noch ein Stück von der Rolle entfernt ist. Die Rolle bewege sich völlig reibungsfrei und der Abstand der Masse m_2 vom Boden sei h , während die Entfernung von m_2 zum Rollenmittelpunkt x_1 und die von m_2 gerade x_2 ist.

Natürlich ist nur der Fall $m_1 \neq m_2$ von Interesse. Wenn die Massen sich bewegen, dann werden sich auch x_1 und x_2 verändern, d. h. diese Abstände sind *zeitabhängig*. Wir schreiben daher $x_1(n)$ und $x_2(n)$.

Das Geheimnis aller Flaschenzüge lässt sich *immer* mit Hilfe einer 4-Schritt-Vorgehensweise enthüllen (vgl. Fulford u. a. 1997):

1. Fertige eine abstrahierende Zeichnung mit Kräften und Koordinaten für die Massen an. Schneide dazu die jeweiligen Massen frei!
2. Stelle eine Relation zwischen den Koordinaten der Massen her und berechne daraus Formeln für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durch Differenzenbildung.
3. Wende Newtons Axiom *Kraft = Masse × Beschleunigung* auf jede Masse einzeln an.
4. Löse das Gleichungssystem für die Beschleunigungen und die Kräfte im Seil.

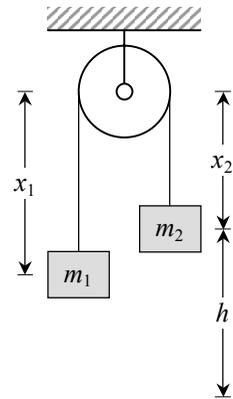


Abbildung 2: Fallmaschine

Schritt 1 ist für die Atwoodsche Fallmaschine bereits zur Hälfte fertig. Wir benötigen nur noch das Freischneiden der Massen. Dazu schneiden wir im Geiste die Seile über den Massen durch und tragen dann die wirkenden Kräfte an.

Wir wollen verabreden, nach unten (also in Richtung des Erdbodens) wirkende Kräfte positiv zu notieren. In diese Richtung ziehen offenbar die Gewichtskräfte $m_1 \cdot g$ und $m_2 \cdot g$. Die Kraft im Seil wollen wir mit T bezeichnen. Diese Kraft ist im ganzen Seil gleich groß, also greift an *beiden* Gewichten die Kraft $-T$ an.

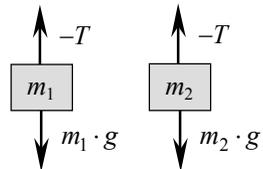


Abbildung 3: Kräfte bei der Fallmaschine

Nun zu Schritt 2. Eine Relation zwischen den Koordinaten ist schnell gefunden, denn

$$x_1(n) + x_2(n) + \frac{1}{2} \cdot \text{Umfang der Rolle} = \text{Länge des Seils} .$$

Sowohl die Länge des Seiles als auch der Umfang der Rolle sind Konstanten, d. h. sie werden sich im Lauf der Bewegung der Massen sicher nicht ändern. Betrachten

wir die zeitliche Differenz einer Konstanten c , dann gilt sicher $\Delta c = 0$. Die Anwendung der Differenz auf unsere Relation der Koordinaten liefert daher

$$\Delta(x_1(n) + x_2(n)) = 0$$

und nach (7) haben wir damit

$$v_1(n) + v_2(n) = 0 \quad (9)$$

gewonnen. Wenden wir darauf noch einmal die Differenz an, dann folgt mit (6)

$$a_1(n) + a_2(n) = 0 \quad (10)$$

In Schritt 3 sollen wir *Kraft = Masse \times Beschleunigung* auf jede der beiden Massen anwenden. Auf m_1 wirkt als resultierende Kraft offenbar $m_1 \cdot g - T$ und auf m_2 entsprechend $m_2 \cdot g - T$. Also haben wir

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a_1(n) \quad (11)$$

und

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a_2(n) \quad (12)$$

gewonnen. Damit sind wir schon bereit für Schritt 4. Es gibt drei Unbekannte, und zwar $a_1(n)$, $a_2(n)$ und T , und drei Gleichungen (10), (11) und (12). Man erhält also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1(n) + a_2(n) &= 0 \\ m_1 \cdot g - T &= m_1 \cdot a_1(n) \\ m_2 \cdot g - T &= m_2 \cdot a_2(n). \end{aligned}$$

Als eindeutige Lösung ergibt sich

$$a_1(n) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (13)$$

$$a_2(n) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (14)$$

$$T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g .$$

Diese Lösung können wir nun interpretieren: Die Beschleunigungen der Massen sind nicht zeitabhängig, sondern konstant. Gilt $m_1 = m_2$, dann sind die Beschleunigungen Null und die Massen würden sich nicht bewegen, das ist klar! In diesem Fall ergibt sich für die Kraft im Seil $T = m_1 \cdot g = m_2 \cdot g$. Für $m_1 \neq m_2$ gilt stets $a_1 = -a_2$, d. h., die eine Masse bewegt sich mit der gleichen Beschleunigung wie die zweite, aber in die entgegengesetzte Richtung.

3.2 Zur Dynamik der Fallmaschine

Mit Hilfe der Beschleunigungen (13), (14) sind wir in der Lage, die gesamte Dynamik der Fallmaschine zu berechnen! Dazu ermitteln wir zuerst die Geschwindigkeiten der Massen aus der Beziehung (6)

$$a_i(n) = v_i(n) - v_i(n-1), i = 1, 2,$$

indem wir verschiedene Zeitlevel untereinander schreiben und dann summieren. Da sich die Massen zur Zeit $n=0$ in Ruhe befunden haben sollen, ist $v_1(0) = v_2(0) = 0$ zu beachten.

$$\begin{aligned} v_1(n) - v_1(n-1) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \\ v_1(n-1) - v_1(n-2) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \\ &\vdots \\ v_1(1) - v_1(0) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \end{aligned}$$

Die Summation der linken Seite ergibt eine Teleskopsumme und es bleibt nur $v_1(n) - v_1(0)$ übrig. Zudem ist $v_1(0) = 0$. Die Summation der rechten Seite ergibt wegen der Konstanz der Beschleunigung a_1 gerade n -mal diese Beschleunigung, also erhalten wir die *exakte Lösung* für die Geschwindigkeit:

$$v_1(n) = n \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (15)$$

Ganz analog folgt

$$v_2(n) = n \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (16)$$

Nun zu den zurückgelegten Wegen, die sich aus (7) ergeben. Wieder verwenden wir den Trick, die Wegdifferenzen für verschiedene Zeiten untereinander zu schreiben und dann zu summieren.

$$\begin{aligned}
 x_1(n) - x_1(n-1) &= n \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \\
 x_1(n-1) - x_1(n-2) &= (n-1) \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \\
 &\vdots \\
 x_1(1) - x_1(0) &= 1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g
 \end{aligned}$$

Gemessen vom Mittelpunkt der Rolle ist $x_1(0) = x_1$. Summation der linken Seite liefert daher $x_1(n) - x_1$. Die rechte Seite ergibt sich von unten nach oben zu

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot \frac{1}{2} (n^2 + n)$$

Insgesamt hat die Summation also

$$x_1(n) = x_1 + \frac{1}{2} (n^2 + n) \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (17)$$

ergeben. Für den Weg $x_2(n)$ ergibt sich ganz analog

$$x_2(n) = x_2 + \frac{1}{2} (n^2 + n) \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (18)$$

3.3 Eine Aufgabe

Zur Illustration des bisher Erreichten wollen wir eine Aufgabe lösen. Dazu sei $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ und $h = 2 \text{ m}$. Nach welcher Zeit n^* schlägt m_2 auf dem Boden auf und mit welcher Geschwindigkeit kommt die Masse dort an?

Dazu betrachten wir (18). Der Boden ist offenbar genau dann erreicht, wenn $x_2(n^*) = x_2 + h$ ist. Wir müssen daher lediglich

$$x_2(n^*) = x_2 + h = x_2 + \frac{1}{2} (n^{*2} + n^*) \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

nach n^* auflösen. Mit den gegebenen Daten ist

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{20 \text{ kg} - 10 \text{ kg}}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und damit ist

$$2 \text{ m} = \frac{1}{2} (n^{*2} + n^*) \cdot 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (19)$$

d. h.

$$n^{*2} + n^* = 1,22 \text{ s}^2$$

Quadratische Ergänzung liefert $n^*_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 1,22 \text{ s}^2$. Negative Zeiten scheiden aus, so dass die Masse m_2 nach der Zeit

$$n^* =: \underbrace{\tilde{n}^* \cdot \Delta t}_{= 1 \text{ s}} = 0,714 \text{ s}$$

auf dem Boden aufschlägt. Diese Rechnung wurde so ausführlich durchgeführt, weil sie zwei wichtige Beobachtungen erlaubt:

- Obwohl unsere Zeit Δt in der diskreten Mechanik in Schritten von 1 s abläuft, sind wir doch sehr wohl in der Lage, mit Dezimalbrüchen zu rechnen.
- Scheinbar besitzt die Größe n als Einheit tatsächlich die Einheit der Zeit!

Abschließend können wir die Aufschlaggeschwindigkeit aus (16) zu

$$v_2(n) = n \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g = 0,714 \text{ s} \cdot 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,33 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

berechnen.

3.4 Ist $n \in \mathbb{N}$ eine Dezimalzahl?

Es mag verwunderlich erscheinen, dass bei der Berechnung der Aufschlagzeit für eine natürliche Zahl n sich eine Dezimalzahl ergibt, und in der Tat stolpern Schüler und Studenten regelmäßig über diesen Punkt – zu Recht!

Üblicherweise erlaubt man der Zeitschrittweite Δt , beliebige reelle Werte anzunehmen, woraufhin die diskreten Zeitschritte dann durch $n \cdot \Delta t$, $n \in \mathbb{N}$ beschrieben werden. Insbesondere kann man dann über *Konvergenz* reden, denn damit ist der Fall $\Delta t \rightarrow 0$ gemeint. Legt man sich, wie wir es getan haben, auf $\Delta t = 1$ fest und zählt dann auch n als natürliche Zahl, dann existieren natürlich „Zwischenwerte“ wie etwa $n = 0,714$ gar nicht!

Nun ist aber die Erdbeschleunigung eine Dezimalzahl, wir ziehen auch Wurzeln, quadrieren, und es sind natürlich auch rationale Faktoren wie $\frac{1}{2}$ im Spiel. Wir haben daher bei der Berechnung einer Zeit n folgende Alternativen:

1. Die „vorschriftsmäßige“ Methode: Alle Einheiten sind so zu wählen, dass für n nur ganzzahlige Werte auftreten, wobei unter Umständen zu runden bzw. abzuschneiden ist. Wählen wir im vorhergehenden Beispiel an Stelle der Einheit s die Einheit der Millisekunde ms, also $\Delta t = 1 \text{ ms}$, dann erhalten wir an Stelle der Gleichung (19) die Gleichung

$$2 m = \frac{1}{2} (n^{*2} + n^*) \cdot 0,00000327 \frac{\text{m}}{\text{ms}^2}$$

und damit

$$n^{*2} + n^* = 1223240 \text{ ms}^2$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir nun in den natürlichen Zahlen, d. h. *in praxi* mit quadratischer Ergänzung und Rundung. Wir erhalten so

$$n^* = 1105 \text{ ms}^2$$

und unsere Welt der natürlichen Zahlen ist wieder in Ordnung. Aber Moment mal: Warum ergeben sich denn jetzt 1,105 s für die Fallzeit, und nicht mehr 0,714 s? Nun, wir sind mit einem Skalenwechsel in der Zeit natürlich viel genauer geworden! Immerhin haben wir die Zeit nun in Tausendstel Sekunden unterteilt, während wir vorher mit einer Sekundeneinteilung gearbeitet haben! Die *Auflösung* ist tausendfach besser geworden. *Die Wahl der Einheiten nimmt entscheidenden Einfluss auf die berechneten Zahlenwerte. Durch die Wahl der Einheiten erreichen wir denselben Effekt, als hätten wir für Δt beliebige reelle Zahlen zugelassen.*

- Die „unordentliche“ Methode: Wenn wir schon wissen, dass alles nur eine Frage der Skalierung durch die Einheiten ist, dann können wir gleich $n \in \mathbb{N}$ über Bord werfen und so rechnen, wie wir es getan haben! Der Preis dafür ist unter Umständen die mangelnde Genauigkeit des Ergebnisses.

3.5 Der Energieerhalt und die Differenzen

Die Höhe der Masse m_1 über dem Boden ist $x_2 + h - x_1$. Wenn die Gewichte m_1 und m_2 zur Zeit $n = 0$ am Seil hängen, dann besitzen sie die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}}(0) = m_1 \cdot g \cdot (x_2 + h - x_1) + m_2 \cdot g \cdot h.$$

Im Fallen gilt

$$E_{\text{pot}}(n) = m_1 \cdot g \cdot (x_2 + h - x_1(n)) + m_2 \cdot g \cdot (x_2 + h - x_2(n)),$$

so dass bei der Aufschlagzeit n^* gerade $x_2(n^*) = x_2 + h$ folgt. Im Laufe des Fallens ist diese Energie nach dem Energieerhaltungssatz natürlich nicht verloren gegangen, sondern hat sich in kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2(n) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2(n)$$

verwandelt. Zu allen Zeiten n muss jedenfalls der Energieerhaltungssatz

$$E_{\text{kin}}(n) + E_{\text{pot}}(n) = E_{\text{kin}}(0) + E_{\text{pot}}(0),$$

d. h.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2(n) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2(n) + m_1 \cdot g \cdot (x_2 + h - x_1(n)) + m_2 \cdot g \cdot (x_2 + h - x_2(n)) = \\ = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2(0)}_{=0} + m_1 \cdot g \cdot (x_2 - x_1 + h) + m_2 \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2(n) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2(n) + m_1 \cdot g \cdot (x_1 - x_1(n)) + m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_2(n)) = 0 \quad (20)$$

gelten. Wenn unsere diskrete Dynamik der Atwoodschen Fallmaschine sinnvoll sein soll, dann müssen sich unsere Differenzenformeln an diesem Energieerhaltungssatz beweisen. Da in unseren Formeln (15), (16), (17) und (18) immer derselbe Faktor vorkommt, wollen wir

$$c := \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

definieren, so dass wir (17) und (18) schreiben können als

$$x_1(n) = x_1 - \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot c, \quad (21)$$

$$x_2(n) = x_2 + \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot c, \quad (22)$$

und (15) bzw. (16) in der Form

$$v_1(n) = -n \cdot c \quad (23)$$

$$v_2(n) = n \cdot c \quad (24)$$

schreiben. Setzen wir (21), (22), (23) und (24) in (20) ein, so folgt

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot n^2 \cdot c^2 - \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot c \cdot g \cdot (m_2 - m_1) = 0$$

und dies liefert schließlich

$$\frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot c^2 - \frac{1}{2}(n^2 + n) \cdot c \cdot g \cdot \underbrace{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}_{=c} = -\frac{1}{2} \cdot n \cdot c^2 = 0,$$

und das ist ein Widerspruch, denn: Der Satz von der Erhaltung der Energie würde nur dann gelten, wenn $c = 0$ ist, also im Fall $m_1 = m_2$. Damit können wir festhalten: *Unsere diskrete Mechanik erfüllt den Energieerhaltungssatz nicht!* Das ist ein Hieb an die Grundfesten unserer Modellierung! Was können wir tun? Es ist offenbar der lineare Term $\frac{1}{2}n$ in (17) und (18), der Probleme bereitet. Erkennen wir also erst mal unsere Geschwindigkeiten $v_1(n)$ und $v_2(n)$ als richtig an, dann sollte uns der Energieerhaltungssatz sagen, wie wir $x_1(n)$ und $x_2(n)$ zu modellieren haben. Dazu betrachten wir unseren Energieerhaltungssatz (20), den wir in der Form

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot n^2 \cdot c^2 + m_1 \cdot g \cdot (x_1 - x_1(n)) + m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_2(n)) = 0$$

schreiben können. Nun gilt für alle n :

$$x_1(n) + x_2(n) = \text{const.},$$

also $x_1 = \text{const.} - x_2$ und $x_1(n) = \text{const.} - x_2(n)$, so dass man für $x_1 - x_1(n)$ im Energieerhaltungssatz auch $x_2(n) - x_2$ bzw. $-(x_2 - x_2(n))$ schreiben kann:

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot n^2 \cdot c^2 + m_1 \cdot g \cdot (x_2 - x_2(n)) + m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_2(n)) = 0,$$

also schließlich

$$\frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot n^2 \cdot c^2 + g \cdot (x_2 - x_2(n)) \cdot (m_2 - m_1) = 0.$$

Dividieren wir noch durch die Massensumme, also

$$\frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot c^2 + (x_2 - x_2(n)) \cdot \underbrace{g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}_{= c} = 0,$$

dann können wir bequem nach $x_2(n)$ auflösen:

$$x_2(n) = x_2 + \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot c.$$

Eine Indexverschiebung ergibt

$$x_2(n-1) = x_2 + \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 \cdot c$$

und Differenzenbildung zeigt:

$$\begin{aligned} x_2(n) - x_2(n-1) &= \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot c - \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 \cdot c = \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot c - \frac{1}{2} \cdot (n^2 - 2n + 1) \cdot c = n \cdot c - \frac{c}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot n \cdot c - c}{2} = \frac{n \cdot c + (n-1) \cdot c}{2} = \frac{v_2(n) + v_2(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Der Energieerhaltungssatz zwingt uns also dazu, unsere anfängliche Definition der Ortsdifferenz (= Geschwindigkeit) (7) zu ändern! An Stelle von (7) definieren wir daher

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) = \frac{v(n+1) + v(n)}{2} \quad (25)$$

An Stelle der Geschwindigkeit $v(n+1)$ auf der rechten Seite von (7) müssen wir also *nur* das arithmetische Mittel verwenden.

3.6 Noch einmal die Aufgabe

Unter dem Eindruck unserer neuen Erkenntnisse kehren wir zu unserem Beispiel in Abschnitt 3.3 zurück und berechnen den zurückgelegten Weg der Masse m_2 aus Abschnitt 3.2 jetzt mit der Energie erhaltenden Differenz (25). Dazu schreiben wir

$$x_2(n) - x_2(n-1) = \frac{v_2(n) + v_2(n-1)}{2}$$

wieder für verschiedene Zeiten auf:

$$\begin{aligned} x_2(n) - x_2(n-1) &= \frac{n + (n-1)}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \\ x_2(n-1) - x_2(n-2) &= \frac{(n-1) + (n-2)}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \\ &\vdots \\ x_2(1) - x_2(0) &= \frac{1+0}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \end{aligned}$$

und summieren auf beiden Seiten. Wieder ergibt sich auf der linken Seite eine Teleskopsumme $x_2(n) - x_2$. Auf der rechten Seite entsteht die Summe

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k + (k-1))}_{=: G}$$

Die Summe ergibt sich zu

$$G = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n(n+1) - n = n^2$$

und damit ergibt sich als exakte Lösung für $x_2(n)$:

$$x_2(n) = x_2 + \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g. \quad (26)$$

Suchen wir mit den Daten aus Abschnitt 3.3 wieder die Zeit n^* , zu der $x_2(n^*) = x_2 + h$ ist, dann ergibt sich jetzt

$$n^{*2} = 1,22 \text{ s}^2,$$

also $n^* = 1,104 \text{ s}$ bis zum Aufschlag. Man vergleiche das mit den $0,714 \text{ s}$, die wir mit der den Energieerhaltungssatz verletzenden Differenz berechnet haben! Ein vergleichbares Ergebnis haben wir nur mit einer tausendmal feineren Zeitskala in Abschnitt 3.4 erreichen können.

3.7 Bemerkungen zur Differenzenbildung

In den Definitionen (6) und (7) haben wir die *Vorwärtsdifferenz*

$$\Delta f(n) := f(n+1) - f(n)$$

verwendet und damit die Gleichungen

$$a(n+1) = \Delta v(n)$$

in (6) bzw.

$$v(n+1) = \Delta x(n)$$

in (7) aufgestellt. Diese Gleichungen sind natürlich vollständig äquivalent zu

$$a(n) = v(n) - v(n-1)$$

bzw.

$$v(n) = x(n) - x(n-1),$$

da lediglich eine Indexverschiebung vorzunehmen ist. Auch hätte man mit den Differenzen

$$a(n+1) = v(n+2) - v(n+1)$$

bzw.

$$v(n+1) = x(n+2) - x(n+1)$$

arbeiten können. Man hätte mit gleichem Recht aber z. B. auch die *zentrale Differenz*

$$\delta f(n) := \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2}$$

verwenden können, so dass man die Gleichungen

$$a(n) = \frac{v(n+1) - v(n-1)}{2}$$

bzw.

$$v(n) = \frac{x(n+1) - x(n-1)}{2}$$

erhalten hätte. Worin unterscheiden sich diese Differenzen, die wir in der Form

$$d_1(n) := f(n) - f(n-1)$$

$$d_2(n) := f(n+1) - f(n)$$

$$d_3(n) := \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2}$$

darstellen können? Offenbar ordnen wir mit den obigen Differenzen der Funktion f am Punkt n gewisse Steigungen zu, die wir uns wie in Abbildung 4 in Form von

verschiedenen Sekanten veranschaulichen können. In allen drei Fällen liegt also eine Schätzung der Steigung der Funktion f an der Stelle n vor.

Da wir f nur an den verschiedenen Punkten $\dots, n-1, n, n+1, \dots$ kennen, ist *a priori* keine der drei Differenzen ausgezeichnet. Erst in der Taylor-Entwicklung für den kontinuierlichen Fall mit

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + O(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x) + O(h^3)$$

sieht man an

$$d_1(n) := f(n) - f(n-1) = f'(x) + O(h)$$

$$d_2(n) := f(n+1) - f(n) = f'(x) + O(h)$$

$$d_3(n) := \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2} = f'(x) + O(h^2),$$

dass die einseitigen Differenzen d_1 und d_2 also *Differenzen 1. Ordnung* sind, während die zentrale Differenz d_3 als *Differenz 2. Ordnung* eine Ordnung genauer ist.

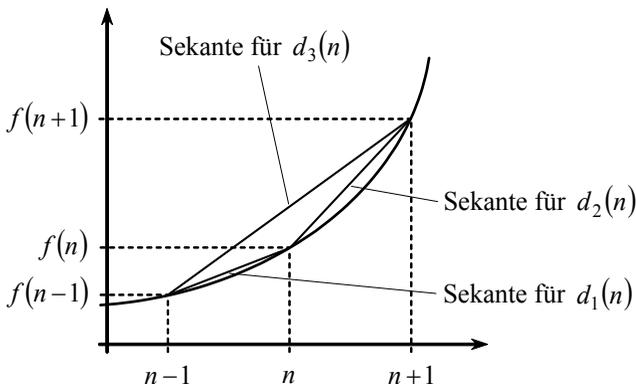


Abbildung 4: Geometrische Bedeutung der Differenzen

Der eigentliche Grund, warum wir uns gerade für die Vorwärtsdifferenz entschieden haben, liegt einzig und allein in der einfachen Handhabbarkeit!

Nun hat uns der Satz von der Erhaltung der Energie gelehrt, dass wir an Stelle von

$$x(n+1) - x(n) = v(n+1)$$

die Formel

$$x(n+1) - x(n) = \frac{v(n+1) + v(n)}{2}$$

verwenden müssen, wenn die Energie tatsächlich erhalten werden soll. Damit verbindet sich die Frage, ob man es einer Differenzenformel *ansetzen* kann, ob sie gewisse *Erhaltungsgrößen* des Modells tatsächlich erhält? Die Antwort ist leider: *Nein!* Und schlimmer noch: Diejenigen Methoden, die man zur Analyse solcher Eigenschaften von Differenzenformeln anwenden muss, sind von der Schulmathematik sehr weit entfernt. Man muss nämlich das Newtonsche Gesetz $F = m \cdot \ddot{x}$ verwandeln in ein Hamiltonsches System und dann die verschiedenen Diskretisierungen (= Differenzenverfahren) an diesem Hamiltonschen System analysieren. Eine der ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema stammt von LaBudde und Greenspan aus dem Jahr 1976. Mit der enorm gewachsenen Bedeutung der Computer und damit der Numerischen Mathematik ist das Interesse an solchen Analysen ebenfalls sehr gewachsen, so dass es heute sogar ein Lehrbuch zu diesem Thema gibt (Hairer/Lubich/Wanner 2002).

In unserem Fall ist es daher eher ein Zufall, dass wir die Bedingung für den Energieerhalt elementar berechnen können. Diese Berechnung in der hier vorgestellten Art ist meiner Kenntnis nach neu und hier zum ersten Mal publiziert. Im folgenden Abschnitt wollen wir den Grund für den Erfolg unserer Energie erhaltenden Diskretisierung aus einem anderen Blickwinkel interpretieren.

4 Die Fallmaschine in der kontinuierlichen Welt

Steht der Begriff der Ableitung und des Integrals zur Verfügung, dann lässt sich die Fallmaschine natürlich auch mit Hilfe der Differenzialrechnung bearbeiten. Aus der Relation

$$x_1(t) + x_2(t) = \text{const.}$$

der Koordinaten folgt nach Differentiation

$$\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = v_1(t) + v_2(t) = 0$$

und weiter

$$\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t) = \dot{v}_1(t) + \dot{v}_2(t) = a_1(t) + a_2(t) = 0.$$

Das Kräftegleichgewicht mit Newtons Grundgesetz $F = m \cdot a$ liefert dann

$$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a_2(t)$$

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a_1(t)$$

und wir erhalten (nicht überraschend)

$$a_1(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$a_2(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

Nun geht es aber anders weiter als im diskreten Fall. Aus $a_1(t) = \dot{v}_1(t)$ berechnet man die Geschwindigkeiten zu

$$v_1(t) = \int_0^t a_1(\xi) d\xi = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot t$$

und analog

$$v_2(t) = \int_0^t a_2(\xi) d\xi = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot t$$

wobei $v_1(0) = v_2(0) = 0$ eingearbeitet wurde. Wegen $v(t) = \dot{x}(t)$ folgt für die zurückgelegten Wege

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g + x_1$$

und

$$x_2(t) = \int_0^t v_2(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g + x_2$$

Hier können wir nun eine Schleife zu den Ergebnissen der diskreten Mechanik einfügen. Die Geschwindigkeiten sind offenbar lineare Funktionen von t . Man erhält die Fallwege durch Integration dieser linearen Funktion wie in Abbildung 5.

Ersetzt man in

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} v(\xi) d\xi$$

das Integral durch die Fläche des Rechtecks $(t | 0)$, $(t + \Delta t | 0)$, $(t + \Delta t | v(t))$, $(t | v(t))$, dann erhält man die numerische Integration

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx v(t) \cdot \Delta t$$

und macht offenbar einen Fehler der Größe

$$\frac{1}{2} \cdot (v(t + \Delta t) - v(t)) \cdot \Delta t.$$

Für $t = n \cdot \Delta t$ und $\Delta t = 1$ erhält man so genau die Differenz (7) und durch den Fehler verpasst man den Energieerhalt! Dass bei kleinerem Fehler auch bessere Resultate zu erwarten sind, haben wir bereits in Abschnitt 3.4 durch Einführung einer feineren Zeitskala zeigen können.

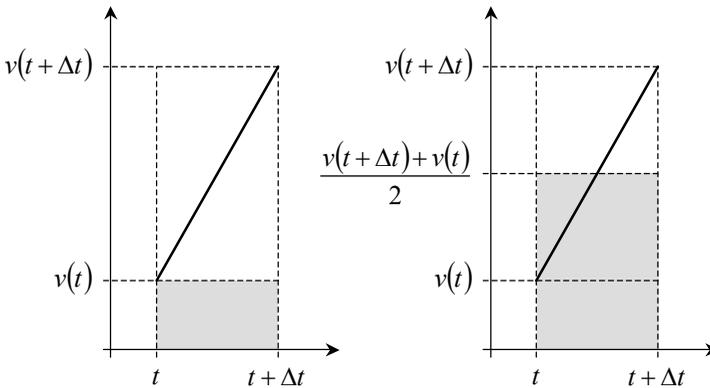


Abbildung 5: Integration der linearen Geschwindigkeit

Verwendet man statt dessen wie im rechten Teil der Abbildung 5 die so genannte Trapezregel, bei der man das Integral durch das Rechteck $(t | 0)$, $(t + \Delta t | 0)$, $(t + \Delta t | v(t + \Delta t) + \frac{1}{2} v(t))$, $(t | v(t + \Delta t) + \frac{1}{2} v(t))$ ersetzt, dann erhält man

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \frac{v(t + \Delta t) + v(t)}{2} \cdot \Delta t,$$

wobei der Fehler tatsächlich Null ist (die Integration ist also exakt). Diese Trapezregel ist aber für $t = n \cdot \Delta t$ und $\Delta t = 1$ genau die Formel (25), die wir vorher aus dem Satz von der Erhaltung der Energie erhalten hatten!

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben eine naive diskrete Mechanik eingeführt und konnten mit ganz geringer Begriffsbildung (Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung) einen mechanischen Apparat wie die Atwoodsche Fallmaschine vollständig ohne den Bezug auf höhere Mathematik analysieren. Bei der Modellierung der Fallmaschine und der Berechnung ihrer Dynamik wurden Differenzgleichungen gelöst, wobei wichtige mathematische Teilaufgaben (Auflösung von Rekursionen, arithmetische Summe nach Gauß) auftraten. Eine Betrachtung des Energieerhalts führte uns auf eine nichttriviale Korrektur einer unserer Ausgangsbeziehungen für den zurückgelegten

Weg und wir konnten erkennen, welche Diskrepanzen sich durch die Korrektur ergeben. Bei der Betrachtung der Fallmaschine im Licht der Differenzial- und Integralrechnung ergab sich eine zweite Charakterisierung der Differenzenformeln als exakte Integrierten.

Obwohl das Beispiel der Fallmaschine trivial aussehen mag, haben wir bereits sämtliche Ideen an ihr entwickelt, die man für *allgemeine Flaschenzüge* benötigt! Tatsächlich ist man mit der an der Fallmaschine entwickelten diskreten Mechanik sogar in der Lage, die Dynamik von sehr komplizierten Flaschenzügen und vielen weiteren mechanischen Apparaten zu berechnen (vgl. Sonar/Feyerabend 2004).

Modellierungen wie die hier vorgestellte habe ich mehrmals im Rahmen der universitären Ausbildung von gymnasialen Lehramtskandidaten verwendet. Auch in Schülergruppen der Begabtenförderung ist dieser Zugang erprobt.

6 Abschließende Bemerkungen

Die jahrhundertealte Einheit von Physik und Mathematik ist zerbrochen. Ich möchte diesen Abschnitt benutzen, um diese vielleicht provokant erscheinende These zu erläutern. Die Schlüsse, die ich selbst aus ihr gezogen habe, haben zu einem Programm geführt, das ich an der Technischen Universität Braunschweig entwickelt habe, um Studierende des höheren Lehramts im Bereich Numerik/Mathematische Modellierung auszubilden. Die diskrete Dynamik wie oben geschildert gehört als wichtiges Standbein in dieses Programm. Die Leserin und der Leser möge diese Ausführungen als meine persönliche – und damit durchaus frag- und kontrovers diskussionswürdige – Analyse verstehen, die mich zu den mathematischen Inhalten geführt hat, über die ich hier berichtet habe.

Noch vor wenigen Jahrzehnten war die Studienkombination Mathematik/Physik der Normalfall, und zwar sowohl für unsere Diplommathematiker als auch für die Lehramtskandidaten. Zu dieser Zeit findet sich an den Gymnasien ein *quantitativer* Physikunterricht, der direkten Bezug auf die Mathematik nimmt und bei dem die Anwendung mathematischer Methoden zur Beschreibung (Modellierung) physikalischer Phänomene sowie zur Lösung der Modellgleichungen zum Tragen kommt. Den ersten Bruch der Einheit Mathematik/Physik in universitärer Lehre verzeichnen wir seit Beginn der Einführung der Informatik zu Beginn der 80er Jahre des 20. Jahrhunderts bei den Diplommathematikern und durch die Freigabe der möglichen Fächerkombinationen für Lehramtskandidaten. Im Lauf der 80er und 90er Jahre können wir dann noch einen weiteren Wandel bei den Diplommathematikern durch eine vermehrte Hinwendung zu wirtschaftswissenschaftlichen Nebenfächern verzeichnen. Neue Studiengänge der 90er Jahre heißen denn auch in überwältigender Mehrheit *Wirtschaftsingenieurwesen*, *Wirtschaftsinformatik* und *Finanz- und Wirtschaftsmathematik*.

Im universitären Mathematikunterricht hat diese Entwicklung dazu geführt, dass das Verständnis und das Interesse der Mathematikstudierenden bei Themen wie *Vektorfelder*, *Integralsätze* und *Potentialtheorie* in elementaren Einführungsvorlesungen stark nachgelassen hat. Viele Studierende haben einfach keine Ahnung, was das Hebelgesetz bedeutet, was ein elektrisches Feld ist und warum (und wie!) ein Apfel zu Boden fällt. Parallel dazu hat sich an vielen Gymnasien ebenso eine schleichende Entfremdung der Mathematik von der Physik abgespielt. Häufig muss man von *qualitativem Unterricht* hören, bei dem physikalische Phänomene nur noch deskriptiv, d. h. ohne Zuhilfenahme von Mathematik, behandelt werden. Dieser Zustand wird durch die Studienkombinationen vieler Lehrkräfte (Mathematik/Geschichte, Physik/Deutsch etc.) zumindest in Niedersachsen perpetuiert.

Ich halte diese Entwicklungen für äußerst fatal! Wir sind (oder waren?) ein Hochtechnologieland. Es gilt nicht nur das so oft zitierte *Know-how* zu bewahren, sondern es muss weiteren technischen *Fortschritt* geben. Ein Mobiltelefon, eine moderne Waschmaschine oder ein modernes Automobil *benutzen* zu können ist angenehm, aber wir sollten uns damit rühmen können, in unserem Land Menschen auszubilden, die diese Dinge auch wissenschaftlich zu durchschauen in der Lage sind.

Literatur

- Fulford, G./Forrester, P./Jones, A. (1997): *Modelling with Differential and Difference Equations*. Cambridge University Press, Cambridge
- Goldstein, H. (1987): *Klassische Mechanik*. Aula: Wiesbaden (9. Auflage)
- Hairer, E./Lubich, C./Wanner, G. (2002): *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer: Berlin/Heidelberg/New York
- LaBudde, R. A./Greenspan, D. (1976): *Energy and Momentum Conserving Methods of Arbitrary Order for the Numerical Integration of Equations of Motion*. Teil I: Motion of a Single Particle. In: *Numerische Mathematik* 25, 323–346
- Sonar, T./Feyerabend, U. (2004): *Mathematische Modellierung an der Schnittstelle von Schule und Universität*. Unveröffentlichtes Buchmanuskript. TU Braunschweig

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Thomas Sonar
Computational Mathematics
TU Braunschweig
Pockelsstraße 14
D-38106 Braunschweig
t.sonar@tu-bs.de

Eingang Manuskript: 29.04.2005 (überarbeitetes Manuskript: 29.08.2005)