# Heuristik und Geschichte der elementaren Volumenberechnung

von

**Lutz Führer, Frankfurt am Main**

**Kurzfassung:** Der Beitrag stellt den Versuch einer fachmethodischen Zusammenschau der „höheren elementaren“ Volumenberechnungen dar. Mit einer gewissen Vollständigkeit, aber mit wenigen Grundideen und sehr einfachen „Beweisen“ sollen dabei möglichst viele elementar zugängliche Grundkörper behandelt werden. Sinn der Untersuchungen ist eine stoffdidaktische Synthese dessen, was im Rahmen allgemein bildender Sekundarstufen I mit heuristischen Zugängen sowohl ganz ohne Analysiskenntnisse abschließbar ist, als auch im Rahmen späterer Analysisstudien anschluss- und ausbaufähig.

**Abstract:** This text focuses on volume measurement in the realm of „higher elementary“ stereometry. It collects most of the material treatable with similarity arguments and Cavalieri‘s principle, but requiring no explicit knowledge of convergence, integral calculus and/or fundamentals of analysis. The main objective is an educational one: a synopsis and synthesis of the foremost ideas and strategies, which preceded modern analysis historically and psychologically. The main result is a space-oriented approach to several cubatures along historical lines and governed by Simpson’s rule, but all this in the informal and constructive spirit of Archimedes, Kepler, Cavalieri, or Jakob Steiner.

## 0 Vorbemerkungen und didaktische Einordnung

Das Folgende zielt auf eine Synthese der „höheren elementaren“ Volumenberechnungen ab. Mit „höheren“ Volumenberechnungen sind dabei solche gemeint, die sich wesentlich auf Ähnlichkeitsargumente und/oder auf das sog. Prinzip von Cavalieri stützen. „Elementar“ deutet an, dass der Volumenbegriff und die genannten Prinzipe – wie bis zum Ende der Sekundarstufe I üblich – nicht problematisiert werden sollen und dass weder ein expliziter Integralbegriff noch Integrationstechniken gebraucht werden. In diesem „informellen“ Rahmen wird eine abgeschlossene Volumenlehre entwickelt, die jedoch mit Blick auf etwaige Fortsetzungen in der Analysis begrifflich, rechentechnisch und in der Motivauswahl bewusst „anschlussfähig“ pointiert wird. „Elementar“ meint zudem auch „einfach“ insofern, als das gesamte Regelwerk mit kurzen und organisch nahe liegenden „Beweisen“ oder Plausibilitätsbetrachtungen möglichst informell und – auch außermathematisch – intuitiv nutzbar erschlossen wird.

Höhere elementare Stereometrie hat in den Mittelstufen der allgemein bildenden Schulen derzeit keine Konjunktur. Stereometrie gehört vielmehr seit Jahren zu den kanonischen Opfern des verschärften Verdrängungswettbewerbs, der erst durch Dynamische Geometrie-Software, dann durch Bestrebungen, die Gymnasialzeit zu verkürzen, und schließlich durch die extrinsisch motivierte Output-Orientierung der gegenwärtigen Bildungsbürokratie ausgelöst wurde, die für nichts so viel Aufmerksamkeit, Zeit und Geld hat wie für nachträgliche Tests. Dabei ist meines Wissens nie ernsthaft gegen einen nennenswerten Stereometrieanteil in der bürgerlichen Allgemeinbildung argumentiert worden. Die alten Volksschul-Argumente Lebensnähe, Hand-Werks-Bezug, Formenkunde, Ästhetik und Förderung der Raumanschauung sollten immer noch überzeugen, aber sie sind vielfach schlicht verdrängt bzw. der mitunter recht eklektisch argumentierenden Grundschuldidaktik überlassen worden.[1]

In der Hoffnung, die seit TIMSS abgebrochene Curriculumsdiskussion werde schon aus ökonomischen Gründen mittelfristig wieder aufgenommen werden müssen und dann auch den Stereometrieunterricht wieder angemessen beleben, wird unten eine Bestandsaufnahme in Form einer fachmethodisch aktualisierten Synthese dessen versucht, was im Rahmen der Sekundarstufen I – gleich welchen allgemein bildenden Schultyps – mit einfachen, nahe liegenden Zugängen ohne Analysiskenntnisse abschließbar ist. Im Hintergrund werden dabei einige wenige sehr leistungsfähige Heurismen trainiert, die dem alltäglichen und handwerklichen Umgang mit Raumkörpern und -konstellationen im Sinne von „mathematical literacy" nützen und zugleich stereometrische Dar- und Vorstellungen flexibel einüben sollen.[2] Die Konzentration auf Berechnungen von Rauminhalten ersetzt natürlich nicht alle anderen Aspekte der Stereometrie, insbesondere nicht das begriffliche und qualitative Studium räumlicher Beziehungen, das Berechnen nur indirekt zugänglicher Maßverhältnisse und Grundfertigkeiten der Darstellenden Geometrie. Der Berechnungsaspekt ist aber für Schüler und Schulsystem der attraktivste: Er

---

1 Vgl. etwa [Alkemper 2004], [Backe-Neuwald 2000], [Franke 2000], [Kroll 1994/95] oder [Radatz/Rickmeyer 1991] mit [Büttner 1913], [Fettweis 1951], [Fröbel 1840], [Heinze 1886], [Harnisch 1821], [Kempinsky 1931], [Kepler 1616], [Lietzmann 1912], [Mayer o. J.], [Odenbach 1972], [von Raumer 1820, 1843], [Rude 1911], [Treutlein 1911], [Wagemann 1959], [Witting 1914] und [Wolff 1755]. – Eine bezeichnende Kuriosität stellt die schöne Fassaufgabe aus den KMK-Hauptschul-Standards dar. Sie steht sowohl stereometrisch als auch numerisch recht beziehungslos neben dem üblichen Unterricht der Mittelstufe, sie wird inzwischen in zahlreichen Variationen eifrig trainiert, und sie täuscht Problemlösung und „Numeracy" vor, wo nur noch Rezeptanwendung möglich ist und erwartet wird. (Vgl. [Führer 2005].)

2 Erfahrungsgemäß werden die anfallenden Dar- und Vorstellungsübungen Anfängern sehr erleichtert, wenn kleine Videoanimationen wesentliche Umbauten von Körpern oder variable Querschnittvergleiche aus (interaktiv) wechselnden Perspektiven zeigen. Das kann im vorliegenden Aufsatz leider nur ab und zu angedeutet werden. (Wer sich für solche Animationen interessiert, schreibe eine Mail an den Autor.)

geht von „handfesten“ Objekten aus, fragt nach numerischen Werten und ist auf nahe liegende Weise anwendbar, nicht nur beim Testen. Zudem kommen die anderen Aspekte geradezu automatisch ins Spiel, sobald Teile des Regelwerks oder konkrete Anwendungen von Schülern selbstständig erarbeitet werden. Mit zielbewussten Motivationen und Gewichtsetzungen kommen dann auch sehr zeitökonomisch die scheinbar vernachlässigten Aspekte zum Zuge – wenigstens ein bescheidenes Stück weit.

Es soll nicht verkannt werden, dass Volumenberechnung irgendwann auf Grenzwertbetrachtungen und Integralrechnung führen muss.[3] Es ist aber fraglich, ob Pyramiden, Kegel und Kugel dafür psychologisch die rechten Ausgangspunkte sind.[4] Erfahrungsgemäß wirken die in Klasse 10 (teilweise noch) üblichen Grenzwertbetrachtungen an Pyramiden und Kegeln und der berühmte Ersatz-Napf für das Halbkugelvolumen (s. u. Abschnitt 5) leider auf viele Schüler artifiziell und singulär. Dieser Eindruck ist auch objektiv berechtigt, wenn nach dem Besuch einer Haupt- oder Realschule oder einiger Analysis-Grundkurse nie mehr zu angewandten Infinitesimal-Betrachtungen zurückgekehrt wird. Auch Kennern der modernen Maßtheorie dürfte – trotz Max Dehns Negativ-Lösung des dritten Hilbertschen Problems – nicht recht wohl sein, wenn ausgerechnet mit Pyramiden und Kugeln, die schon in der Antike völlig beherrscht wurden, auf moderne Integralrechnung oder gar Integrationstheorie vorbereitet werden soll. (Vgl. dazu die Abschnitte 2 und 4.)

Glücklicherweise lässt sich das elementare Material der Stereometrie etwa entlang dem Schema in Abbildung 0 so gruppieren, dass feinere Analysen mit höherer Ma-

---

3 Auf dem internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris hatte David Hilbert eine Reihe ungelöster Probleme formuliert, die für die weitere Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert sehr folgenreich waren. Im „3. Hilbertschen Problem“ ging es im Anschluss an eine Bemerkung von Gauß um die Frage, ob volumengleiche Polyeder stets zerlegungs- oder ergänzungsgleich seien. Sein Göttinger Mitarbeiter Max Dehn löste das Problem noch im selben Jahr negativ. Er konnte u. a. beweisen, dass ein regelmäßiger Tetraeder weder zerlegungs- noch ergänzungsgleich zum raumgleichen Würfel ist, dass es also grundsätzlich unmöglich ist, den genauen Rauminhalt des regulären Tetraeders ohne (heimlichen) Einsatz von Grenzwerten zu berechnen. (Vgl. etwa [Alexandroff u. a. 1971], [Dehn 1902] und [Seebach 1983]. Eine kurze, didaktisch akzentuierte Geschichte der Integralrechnung findet sich in [Führer 1981a], Näheres zur Begriffsproblematik in [Führer 2001].)

4 In der großgriechischen Tradition war die Sache wohl nach Archimedes’ Methodenschrift so: informelle Berechnung von Pyramide und Kegel bei Demokrit, dann begriffliche „Grenzwert“analyse bei Eudoxos und Euklid, dann quasi-mechanische Berechnung von Parabelsegmenten und Kugelteilen bei Archimedes mit nachfolgenden formalen Beweisen. Vorher gab es sehr wahrscheinlich in Babylonien und ganz sicher in Ägypten zumindest weit reichende und exakte Berechnungsverfahren für Pyramiden- und Kegelteile (vgl. unten Abschnitte 2, 4 und 5).

thematik nicht nur unmittelbar anschließen, sondern auch algebraisch, geometrisch und motivational profitieren können.

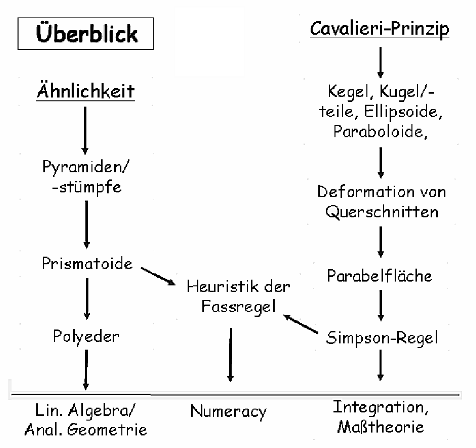


Abb. 0: Überblick

Es soll mit dieser Gliederung gezeigt werden, wie eine recht große Klasse von Grundkörpern mit einigen wenigen Grundideen, die später auch zur angewandten Integralrechnung gehören, ausgemessen werden kann, ohne die wesentlich zielführenden Überlegungen und Berechnungen schon auf dem Niveau von Klasse 10 mit expliziten Infinitesimal- und Kalkülproblemen belasten zu müssen. Historische Anmerkungen und Quellenangaben sollen in aller gebotenen Kürze zugleich Respekt vor den Entdeckern bezeugen, Gewichte und ursprüngliche Erkenntnisinteressen dieser Ideen andeuten, den gerade hier nahe liegenden Übergang zur Algebra beleuchten und Abweichungen vom historischen Gang aus didaktischen Motiven zeigen.

Die Untersuchung versteht sich als Beitrag zu einer nicht-empirischen, bildungstheoretisch normativen, methodisch konstruktiven und „funktional gebundenen" Stoffdidaktik, deren Inhalte und Methoden wohl auch und vielleicht überwiegend nach außermathematischen Kriterien zu legitimieren, zu gewichten und zu bewerten sind, insbesondere nach sozialen Wertsetzungen, die aber nicht gegen allgemein akzeptierte fachmathematische Qualitätsstandards verstoßen dürfen.

## 1 Eine Bemerkung zum Ähnlichkeitsprinzip

Am Ende seines XI. Buches begründet Euklid einige Ähnlichkeitssätze der elementaren Stereometrie, z. B. *„Ähnliche Parallelflache stehen zueinander dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten“*[5]. Euklids Mühen mit derartigen Sätzen und grundsätzliche Schwierigkeiten schon bei Quadern mit irrationalen Kantenlängen oder -verhältnissen dürfen für unsere Untersuchung ausgeblendet werden, weil ihre Wertschätzung einen weiteren Problemhorizont als den der Sekundarstufe I erfordert. Viel wesentlicher für unsere Untersuchung sind die heute üblichen Begründungen des Ähnlichkeitsprinzips mit approximierenden Würfelgebäuden und die nahe liegende Verallgemeinerung für möglicherweise unterschiedliche Streckungen in (den) drei orthogonalen Raumrichtungen („Eulersche Affinitäten“): *Der Rauminhalt eines Körpers streckt sich mit allen drei Richtungen.* Diese Verallgemeinerung soll als „Ähnlichkeitsprinzip“ im Weiteren benutzt werden. Obwohl es sich in Wahrheit um eine massive und keineswegs unproblematische Behauptung handelt, reichen bis zum Ende der Mittelstufe endlich-approximative Erklärungen.[6]

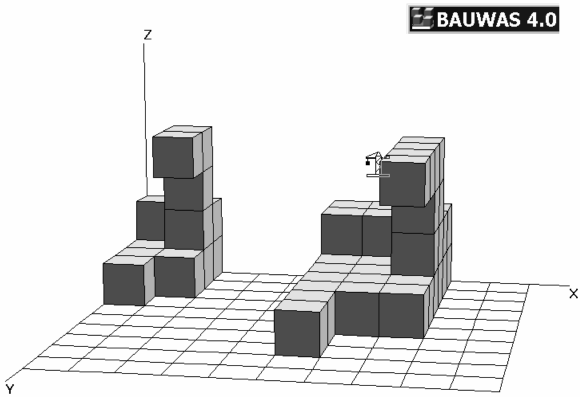


Abb. 1: In den drei Dimensionen unterschiedlich „ähnliche“ Gebäude bei Bauwas. In $x$-Richtung fehlen noch halbe Klötzchen, um die Gebäudemitte nachzubilden.

Weil das Ähnlichkeitsprinzip außerordentlich leistungsfähig, dynamisch anregend und trotzdem anschaulich ist, empfiehlt sich die Erarbeitung und Pointierung schon im Rahmen der heute üblichen Behandlung von Würfelgebäuden in der Primarstu-

---

5 [Euklid 1980, XI.33]

6 Für den definitorischen Aufwand und die nötigen Grenzprozesse im Rahmen einer strengen Theorie, etwa für Borel- oder Lebesgue-Mengen, sei auf [Alexandroff u. a. 1971] oder [Führer 2001] verwiesen.

fe.[7] PC-Programme wie Anker CAD, Bauwas, Block CAD, Lego Digital Designer oder auch kleine Architektur- und Einrichtungs-Programme wie Ikea Office Planner können und sollen natürlich reiche haptische Erfahrungen keinesfalls ersetzen, aber sie können helfen, die Konzentration bei etwas kreativeren, systematischeren und aufwändigeren Studien zu bewahren.

## 2 Pyramidenstümpfe und Pyramiden

Dass im Folgenden zunächst Pyramidenstümpfe behandelt werden und danach erst Pyramiden, hat weniger historische als systematische Gründe, die in den nächsten Abschnitten deutlich werden. Die historischen Anmerkungen sollen lediglich unterstreichen, dass es sich bei der wiederholt angewandten Mittelschnitt-Strategie um eine ebenso alte wie geistreiche und im Kern äußerst ausbaufähige Grundidee handelt, die im Unterricht durchaus auf historisch-genetischem Weg nachentdeckt werden könnte.

„Die alten Ägypter konnten Pyramidenstümpfe exakt ausrechnen“, heißt es oft. Mag sein, dass es so war. Immerhin zeugen die großen Pyramidenbauten und allerlei Schreiber-Texte zum Materialaufwand für Gräben, Wälle und Bestürmungsrampen von großem Bedarf für derartige Kenntnisse.[8] Aber der übliche Hinweis auf den Papyrus Moskau aus dem Mittleren Reich zieht leider nicht (Abb. 2a–c).

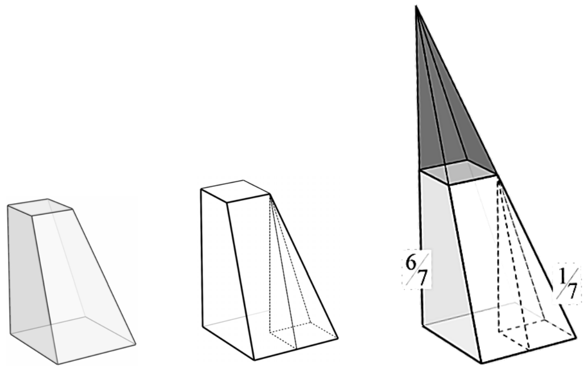


Abb. 2a–c: Der Pyramidenstumpf des Papyrus Moskau

7 Vgl. etwa [Franke 2000], [Kroll 1994/1995] und [Radatz/Rickmeyer 1991]. Für Kinder eindrucksvolle Anwendungsbeispiele finden sich z. B. in der Architektur, bei Gullivers Ernährung durch die Liliputaner oder in Haldanes Evolutionsprinzip (vgl. [Haldane 1930]).

8 Der Ursprung der Bezeichnung „Pyramide“ ist alles andere als klar (s. [Tropfke 1924, S. 20f.]).

Dort wird für einen ganz speziellen Pyramidenstumpf ( $4 \times 4$ -Grundquadrat, $2 \times 2$ -Deckquadrat, Höhe 6 und eine vertikale Kante) eine korrekte Zahlenrechnung

$$16 + 4 \cdot 2 + 4 = 28\ ;\ \tfrac{1}{3} \text{ von } 6 = 2\ ;\ 2 \cdot 28 = 56$$

angeben, die zur heute üblichen Stumpf-Formel passt. Das findet sich genauer und mit einer denkbaren Körperzerlegung zur Herleitung dieser „Formel" bei [van der Waerden, S. 54–57]. Am Ende heißt dann dort: „Wie dem auch sei, jedenfalls müssen die[se] Ägypter den Inhalt d[ies]er Pyramide gekannt haben."

Schneidet man aus dem Stumpf (Abb. 2a) die angedeutete Pyramide seitenparallel heraus (Abb. 2b), dann passt der Ausschnitt genau auf den Stumpf, d. h. er vervollkommnet den Stumpf zu einer großen Pyramide (Abb. 2c). Diese große Pyramide ist ähnlich zur ausgeschnittenen und hat – nach dem Ähnlichkeitsprinzip – das achtfache Volumen des Ausschnitts. Lässt man die beiden kleinen Pyramiden fort, dann bleiben eine quadratische $2 \times 2 \times 6$ -Säule und zwei Hälften davon in Form von Prismen übrig. Beide Säulen zusammen machen 48 Raumeinheiten (RE) aus und das sind $\frac{6}{7}$ des gesuchten Stumpfvolumens. Für das gesuchte Volumen erhält man damit 56 RE und für die kleine Pyramide 8 RE. „Die Ägypter müssen" den Pyramideninhalt also zuvor *nicht* gekannt haben.[9] – Zumindest irritiert das arg spezielle Zahlenbeispiel, wenn tatsächlich eine allgemeine Regel gemeint war.

Die soeben vorgeschlagene Herleitung dieses Stumpfvolumens ist ohne Anleihen bei Algebra und Cavalieri-Prinzip leider nicht sehr leicht zu verallgemeinern.[10] Immerhin lassen entsprechende (Fehl-)Versuche eine *besondere Rolle von Schnitten auf mittlerer Höhe* vermuten. Wendet man diesen Gedanken auf den schon erwähnten speziellen Stumpf an, dann bietet sich dessen Verwandlung in eine „mittlere Säule" an (Abb. 3a–d).

Der Pyramidenstumpf wird wieder als quadratisch mit einer orthogonalen Kante angenommen (es braucht aber – wie sich am Ende zeigt – nicht mehr vorausgesetzt zu werden, dass die Höhe „passt").[11] Für die quadratische Vergleichssäule in Abbildung 3a wird nahe liegender Weise das arithmetische Mittel der Grundflächenkanten gewählt, d. h. das Querschnittsquadrat auf mittlerer Höhe. In Abbildung 3b wurde links ein passendes Teilprisma des Stumpfes „hochgeklappt", um Überstand

---

9 Es muss der Darstellung van der Waerdens zugute gehalten werden, dass sie die Rechenanweisung des Papyrus auch im Ablauf deutet, nicht nur im Ergebnis. Leider wirkt die Herleitung recht gekünstelt, solange man die gewünschte „Formel" noch nicht kennt. Die Rekonstruktion des Heronschen Berechnungsverfahrens in Fußnote 12 würde im heutigen Unterricht vermutlich organischer und zwangloser wirken.

10 Man vgl. hierzu etwa die Heronsche Stumpfberechnung in [Day Bradley 1979] oder [Tropfke 1924].

11 Die orthogonale Kante ist keine wesentliche Einschränkung, weil man allgemeinere Pyramidenstümpfe in vielen Fällen mithilfe geeigneter Höhen zerschneiden kann.

und Mangel gegenüber der Vergleichssäule auszugleichen. Erzwingt man Entsprechendes für ein kongruentes Teilprisma rechts (Abb. 3c), so überschneiden sich die hochgeklappten Teilprismen in Form einer kleinen Pyramide, die kongruent zur unten vorstehenden ist (Abb. 3d). Das reicht schon zur Berechnung: Der Pyramidenstumpf ist um zwei solcher kleinen Pyramiden größer als die Mittelsäule. In einer Formel ausgedrückt, liest sich das so:

$$V_{\text{Stumpf}} = \left[ \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 \right] \cdot h$$

Nach [Tropfke 1924, S. 23] ist das genau die Berechnungsvorschrift, nach der Heron von Alexandria in seinen „Metrica" Beispiele durchrechnete.[12]

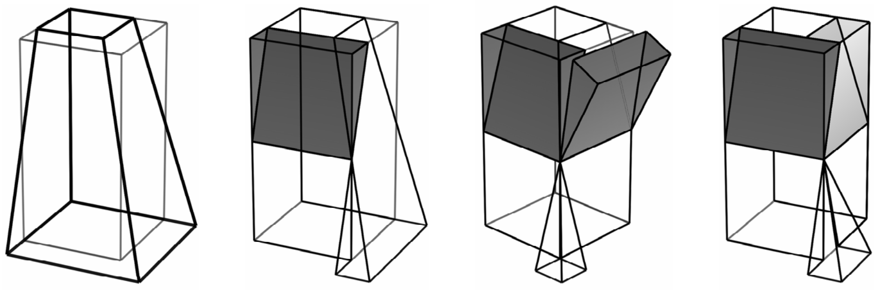

Abb. 3a–d: Herleitung der Heronschen Stumpfberechnung

Dass die Mittelschnitt-Strategie in der Antike unter Fachleuten geläufig war, zeigen Euklids stereometrische Bücher deutlich. So heißt es in [Euklid 1980, XII.3]:

---

12 Löst man – wie heute nahe liegend – die inneren Klammern auf, dann entsteht über den Term

$$\left(4a^2 + 4ab + 4b^2\right) \cdot \frac{h}{12}$$

die übliche Formel für den Pyramidenstumpf. Das geometrische Mittel zwischen den beiden Grundflächenquadraten ist leider etwas unanschaulich. Daher bietet es sich an, die Teilsumme

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 =: 4m^2$$

zweimal herauszuziehen, was die Formel

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{a^2 + 4m^2 + b^2}{6} \cdot h$$

liefert, die oft sog. „Simpson-Regel" (s. u. Abschnitt 4).

„Jede Pyramide mit dreieckiger Grundfläche lässt sich zerlegen in zwei gleiche, einander und der ganzen ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen sowie zwei gleiche Prismen; und die beiden Prismen sind zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.“ (Abb. 4a)

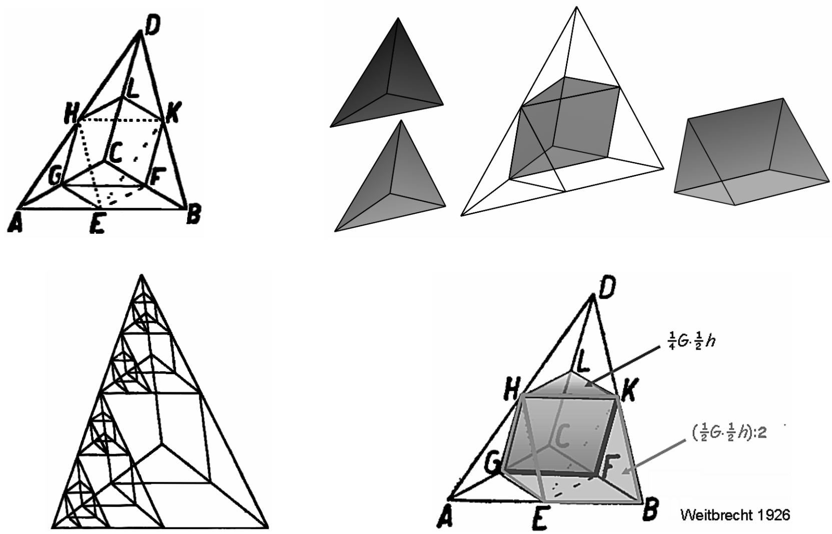


Abb. 4a–d: Die Tetraederzerlegung von [Euklid 1980, XXII.3], Explosionsbild dazu und rechnerische Deutungen von [Wieleitner 1925] und [Weitbrecht 1926].

Euklids Idee ist, die Schnittflächen *FGHK*, *HKL* und *GEH* gemäß Abbildung 4a von Kantenmitten bestimmen zu lassen. Die Aussage des Satzes „… zusammen größer als die Hälfte …“ benutzt er im Nachfolgenden, um – in heutiger Ausdrucksweise – eine gute Konvergenz bei fortgesetzter Ausschöpfung der Restpyramiden durch ähnlich konstruierte Hilfsprismen zu bekommen und schließlich den eher grundlagentheoretischen Satz *„Tetraeder mit gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen“* zu sichern.[13] Wieleitner hat 1925 in den Unterrichtsblättern darauf hingewiesen, dass Euklids Exhaustionsargumente nach heutigem Verständnis Teilsummen einer geometrischen Reihe benutzen, die gegen die Pyramidenformel konvergiert. (Abb. 4c)[14] Weitbrecht hat dann an gleicher Stelle 1926 bemerkt, dass die ursprüngliche Tetraederzerlegung im linken Bild sofort auf das

13 Vgl. [Euklid 1980, XII.5].

14 Vgl. [Wieleitner 1925] oder den Kommentar von Thaer in [Euklid 1980, S. 469].

Ergebnis führt, wenn man nur beachtet, dass die kongruenten Teilpyramiden links und oben je ein Achtel des Ganzen ausmachen, das hintere Teilprisma

$$\tfrac{1}{4}\,\text{Grundfläche} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{Höhe}$$

und das andere Teilprisma (Abb. 4d)

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Grundfläche} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{Höhe} \cdot \tfrac{1}{2}\,.$$

Die beiden Prismen zusammen machen also einerseits sechs Achtel des Ganzen aus, andererseits

$$\tfrac{1}{4}\,\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}\,,$$

woraus sofort die Volumenformel für beliebig schiefe Pyramiden folgt, erst mit dreieckigen, dann auch mit beliebigen polygonalen Grundflächen. Wieder hat das Ähnlichkeitsprinzip die Infinitesimalbetrachtung für Anfänger erfolgreich kaschiert – nach Dehns Lösung des dritten Hilbertschen Problems ist sie ja leider prinzipiell unvermeidlich.[3]

Allgemeine Pyramidenstümpfe werden wir gleich als spezielle Prismatoide abhandeln, nicht – wie heute üblich – mithilfe von Ergänzungspyramiden. Das reduziert ein wenig den algebraischen Aufwand und erspart eines der bei Schülern unbeliebten Strahlensatzargumente. Denkt man an die mühevolle Praxis des altägyptischen Pyramidenbaus, dann sind Pyramidenstümpfe vielleicht die eigentlichen Primärformen und Pyramiden Sonderfälle.[15] Euklids zauberhafte Dreiteilung des Prismas in drei raumgleiche Tetraeder[16] leistet auf anderem Wege natürlich auch eine elementare, aber nicht für alle Menschen sehr anschauliche Rauminhaltsbestimmung. Auf diese etwas raffiniertere Lösung des Kubaturproblems für Tetraeder soll unten im Zusammenhang mit dem Cavalieri-Prinzip nur kurz eingegangen werden.

## 3 Prismatoide

Als „Prismatoide" werden gewöhnlich Körper bezeichnet, die durch zwei Grund- und Deckpolygonflächen in parallelen Ebenen und ansonsten durch Dreiecke begrenzt werden. Im wesentlichen sind es Polyeder, deren Ecken auf zwei parallelen Ebenen liegen, so dass sie gewissermaßen eine Polyederschicht oder -scheibe bilden. Pyramiden, Pyramidenstümpfe und (Teile von) Dächer(n) gehören dazu. Beliebige Polyeder können mittels Parallelschnitten in Prismatoide zerlegt werden. Es ist nicht einmal Konvexität verlangt, auch wenn sie im Folgenden der Übersichtlichkeit halber stillschweigend vorausgesetzt sei. Der Sache nach hat Jakob Steiner

---

15 Diesen Gedanken verdanke ich dem Kollegen A. Lambert.

16 Vgl. [Euklid 1980, XII.7].

1842 die Aufmerksamkeit auf diese Klasse von Polyedern gelenkt[17], deren Rauminhalt er besonders einfach herleiten konnte, sozusagen mit der „Methode des scharfen Hinsehens“ (Abb. 5a–c).

Man lege durch den Körper von Abbildung 5a den grundseitenparallelen Schnitt auf mittlerer Höhe und wähle dort einen inneren Punkt $P$. Grund- und Deckfläche bilden mit $P$ jeweils Pyramiden von halber Gesamthöhe mit Rauminhalt (Abb. 5b)

$$\frac{1}{3}\cdot G\cdot\frac{h}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{3}\cdot D\cdot\frac{h}{2}.$$

Jede Seitenfläche bildet mit $P$ eine Pyramide, die durch die Mittellinien der Seitenfläche in vier raumgleiche Teilpyramiden zerfällt. Eine von diesen vieren kann auch als Dreieckspyramide mit halber Gesamthöhe über oder unter dem Mittelschnitt $M$ berechnet werden. Das ergibt für jede Seitenwand das zugehörige Pyramidenvolumen

$$4\cdot\frac{1}{3}\cdot M_i\cdot\frac{h}{2},$$

wobei die Teildreiecke $M_i$ zusammen $M$ ergeben, So erhält man insgesamt die Prismatoidformel (später „Fass“- oder „Simpsonregel“ genannt, s. nächster Abschnitt):

---

17 [Steiner 1842] lässt auch windschiefe Seitenvierecke und andere Verallgemeinerungen zu (s. u. Abschnitt 5), so dass die Dreiecksbedingung für die Prismatoidseiten mitunter abgeschwächt wird, bis hin zu „Zylindroiden“. Darunter verstand man Körper mit zwei von Kurven in parallelen Ebenen umschlossenen Grund- und Deckseiten, deren Ränder durch eine „Regelfläche“ verbunden sind, d. h. durch eine aus gleitenden Verbindungsstrecken erzeugte Fläche. Inhaltlich geht die Auszeichnung der Polyederklasse und ihrer Grenzwert-Verallgemeinerungen auf Steiners Arbeit zurück. [Tropfke 1924, S. 45] schreibt über Körper, die der Simpson-Regel gehorchen: „Zu ihnen gehören die sogenannten Körperstumpfe (Obelisken, Prismatoide, Pyramidoidenstumpfe); das moderne Schulpensum hat diese aufgenommen und schließt dabei in den Beweisen an Steiner an.“ In einer zugehörigen Fußnote nennt Tropfke [Koppe 1846] als Vorreiter bei den Schulbüchern. Nach Meyer’s Enzyklopädie 1888 geht die Bezeichnung „Prismatoid“ auf [Wittstein 1860] zurück, vorher sei schon die Bezeichnung „Trapezoidalkörper“ gebräuchlich gewesen. In [Zehme 1859] ist von „Prismoiden“ im Sinne von Prismatoiden die Rede, [Day Bradley 1979] zitiert jedoch ein Wörterbuch von Charles Hutton aus 1796, in dem „prismoids“ das bezeichneten, was in der deutschsprachigen Literatur „mathematische Obelisken“ hieß (Prismatoide mit Trapezseiten zwischen den Parallelflächen; nicht zu verwechseln mit den „alltäglichen Obelisken“, schmalen Pyramidenstümpfen mit aufgesetzter Deckpyramide, die als Denkmäler beliebt waren). Spezielle „mathematische Obelisken, bei denen die Bodenflächen kleiner als die Deckflächen waren, nannte man übrigens „mathematische Pontons“. Prismatoide mit einer Strecke als Deck„polygon“ hießen „Sphenisken“ (gr. Sphen = Keil), während Prismatoide mit kongruenten, aber verdrehten Deckflächen „Antiprismen“ genannt wurden. (Zu all diesen Bezeichnungen s. z. B. [Schurig-Riedel 1898, S. 79 f. und S. 140].)

$$V_{\text{Prismatoid}} = \frac{\text{Grundfläche} + 4 \cdot \text{Mittelschnitt} + \text{Deckfläche}}{6} \cdot \text{Höhe}$$

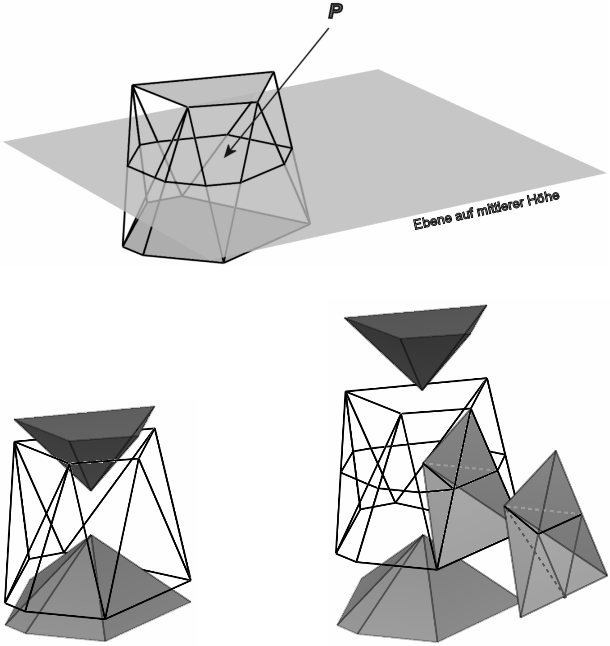


Abb. 5a–c: Prismatoidzerlegung nach Steiner

Verschwunden sind die Prismatoide vermutlich aus unseren Schulbüchern, weil die Berechnung oder Bestimmung der Mittelschnitte mit räumlichen Anwendungen des Pythagorassatzes durchaus mühsam sein kann – man denke nur an die Berechnung der platonischen Körper. Es ist freilich schwer nachzuvollziehen, warum die Schultradition die Pyramidenstumpfformel mit geometrischem Mittel der viel allgemeineren Simpson-Regel vorzog. Auch das heute beliebte Alibi für eine geradezu verstümmelte Stereometrie in Klasse 10, es reiche völlig, die Rauminhaltsbestimmung der „viel allgemeineren“ Integralrechnung zu überlassen, ist in Bezug auf Polyeder, wirkliche Querschnittsberechnungen und auf die damit zu verbindende Sekundärintuition gewiss nicht zu halten. Im Alltag wohnen, leben und messen wir in Polyedern! Hier hätte zudem ein wenig Koordinatenrechnung im Raum einen durchaus sinnvollen, nämlich Raumanschauung fördernden, Platz.

## 4 Fassformen

Die für Prismatoide hergeleitete Formel wird gewöhnlich Fass- oder Simpson-Regel genannt und Kepler (um 1615) oder Simpson (1743) zugeschrieben.[18] Nach Max Caspar stammt die erste deutsche Publikation darüber von Lambert 1765 und erfasst erstmals auch Fässer, die nur unvollständig gefüllt sind (in [Kepler 1996, S. 329]):

> *„…Setzet, das Faß habe in der Mitte bei dem Spundloch noch einen Boden, der mit den beyden anderen parallel sey. Messet den Raum aus, den der Wein auf diesen dreyen Böden benetzt oder bedeckt. Den Raum des mittleren Bodens nehmet vierfach und addiert dazu den Raum der äußern Böden. Die Summe wird durch 6 geteilt, und was herauskömmt, mit Länge des Fasses multipliziert, so wird das Produkt der Inhalt des Fasses seyn, soweit es angefüllt ist …"*

Prismatoide sehen mitnichten so aus wie Fässer. Woher dann der Name „Fassregel" für den Kern einer bis heute gebräuchlichen numerischen Integrationsmethode? Es gibt zahlreiche Versuche in der Unterrichtsliteratur, die Regel genetisch zu rekonstruieren. Eine zwanglose Nacherfindung, die auch unbegabte Mittelstufenschüler wirklich überzeugt, ist mir jedoch nicht bekannt.[19] Vielleicht genügt vorerst

---

18 Die Zuschreibungen sind alles andere als überzeugend, weil Kepler sich zwar 1615/16 ausgiebig mit Volumenberechnungen für Fässer beschäftigt hat, aber die Regel weder angegeben noch benutzt hat. Simpson gab die Regel 1743 an und bewies sie auch, aber er schrieb sie ausdrücklich Newton zu. Der hatte sie möglicherweise (wie vieles Andere) in den 1668er-Gregory-Papieren der Royal Society gesehen („Exercitationes geometricae"; vgl. [Heinrich 1900], [Boyer 1989], [Tropfke 1924]), 1676 brieflich Leibniz mitgeteilt und in die Principia von 1686 aufgenommen. In der Tat gibt Newton im V. Abschnitt des Dritten Buches der Principia in einem Zusatz gleich nach der „Newton-Interpolation" (für Kometenbahnen) die Grundidee an:

> *„Man kann auf diese Weise sehr nahe die Flächenräume aller Kurven finden. Hat man nämlich einige Punkte einer beliebigen Kurve, welche man quadrieren will, so denke man sich durch dieselben eine Parabel* [entsprechenden Grades; L. F.] *gezogen. Die Fläche der letzteren wird sehr nahe der Fläche der zu quadrierenden Kurve gleich sein, und die Methoden, nach denen man die Parabel stets geometrisch quadrieren kann, sind vollkommen bekannt."* [Newton 1963, S. 469]

In Italien heißt die Regel heute „Regola Cavalieri-Simpson", und gelegentlich wird die „Simpsonsche Regel" auch Torricelli (gest. 1647) als Erstbenutzer zugeschrieben. Man liegt sicher nicht allzu falsch, wenn man annimmt, die Regel habe in der Zeit zwischen Keplers Fassrechnung (1615/16), Galileis „Discorsi" (1638), Cavalieri, Torricelli und der offiziellen Publikation durch Simpson zur „mathematischen Folklore" der jüngeren, algebraisch aufgeschlossenen Spitzengelehrten gehört.

19 Es geht hier um die „handfestere" räumliche Variante. Für die ebene Fassung werden unten noch einfache, exakte Herleitungen angegeben, und sie liefert natürlich über das

die folgende „Hinführung“ mit anschließenden Anwendbarkeitstests für die einschlägigen Formeln aus einer Formelsammlung.

*Vorübung:* Bei [Lietzmann 1912, S. 66] findet sich der schöne Hinweis, in Volksschulen und in der handwerklichen Praxis würden oft für quadratische Pyramidenstümpfe (und analog mit Faktor π für Kegelstümpfe) die Näherungsformeln

$$V \approx \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot h \quad \text{oder} \quad V \approx \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \cdot h$$

statt

$$V = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot h$$

benutzt.[20] Es sei, so Lietzmann, auch für Gymnasiasten lehrreich, sich Klarheit über die entstehenden Fehler zu verschaffen. In der Tat, das bequeme altbabylonische Flächenmittel in der linken Formel, die uns hier nur interessieren soll, überschätzt den wahren Rauminhalt, und zwar als Folge der Überschätzung des geometrischen Mittels $a \cdot b$ in der exakten dritten Formel durch das arithmetische Mittel von $a^2$ und $b^2$:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{a^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} + b^2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

Bei dieser Näherung werden, anschaulich ausgedrückt, Pyramiden- und Kegelstümpfe durch je ein Paar halb so hoher Säulen ersetzt.

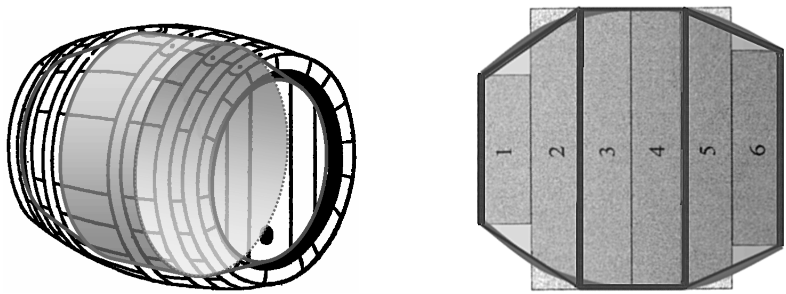


Abb. 6a–b: „Fass“form und Näherungszylinder

Cavalieri-Prinzip die räumliche Fassregel. Eine weitere elegante Herleitung für die ebene Regel, angeblich von Poncelet, findet man in [Führich/Nimtz 1997].

20 Vgl. z. B. [Barfuß 1907, S. 96].

*Plausible Herleitung der Fassregel:* Stellen wir uns vor, eine typische Vasen- oder Weinfassform würde von drei gleich hohen Rotationskörpern angenähert, einem mittleren Zylinder und zwei ihm passend aufgesetzten Kegelstümpfen (Abb. 6). Die besonders einfache babylonische Näherung für die beiden Kegelstümpfe überschätzt gemäß Vorüberlegung die wahren Kegelstümpfe, aber das hilft sicher auch ein wenig, um die vernachlässigten Fassüberstände auszugleichen. Man bekommt jedenfalls unmittelbar die Fassregel wie im Bild rechts als plausible und gute Näherung.

Dass diese Näherungsregel nicht nur gut zu merken, sondern auch sehr leistungsfähig ist, sieht man schon an den Prismatoiden, bei denen sie exakt ist. Tatsächlich zeigt ein lohnender Vergleich mit den Volumenformeln einer normalen Formelsammlung, dass die Fassregel beinahe für alle dort aufgeführten Formeln die genauen Werte liefert – vielleicht mit drei Ausnahmen für den Kugelausschnitt, den (allgemeinen) Zylinderhuf und den Torus (Ring). In diesen Ausnahmefällen entstehen auch sofort Vermutungen über den Grund des „Versagens“: Da die Fassregel nur Deckel, Boden und Mittelschnitt rechnerisch berücksichtigt, kann man jede „natürliche“ Fass- oder Prismatoidform zwischendurch mit Wülsten oder Einbuchtungen deformieren und damit den Rauminhalt gewaltig ändern, ohne dass die Fassregel davon etwas merkt. Aber als „Grundkörper“ wird man solche Objekte kaum ansehen wollen.

Es liegt nun nahe, die Klasse der „Simpsonschen Körper“ als solche zu definieren, die (in geeigneter Lage) mittels der Fassregel exakt berechenbar sind. Das ist auch in der Nachfolge der Steinerschen Untersuchungen wiederholt geschehen[21], wobei oft fließende Übergänge zur Integralrechnung entstanden, die vor 1925 noch nicht zum Pflichtstoff der höheren Schulen gehörte.[22] Bei solchen Untersuchungen müssen natürlich die Mittelschnitte mit allen anderen möglichen Parallelschnitten „irgendwie ins Gleichgewicht“ gebracht werden, und das deutet schon auf das Cavalieri-Prinzip als den natürlichen Kontext solcher Untersuchungen hin.

## 5 Bemerkungen zum Cavalieri-Prinzip

Zu den Merkwürdigkeiten des tradierten Mathematikcurriculums gehört, den Mittelstufenunterricht möglichst nicht ohne Herleitung des Kugelvolumens abzu-

21 Vgl. etwa [Bohnert1902, Abschnitte VI und VII], [Heinze 1886], [Holzmüller 1900/ 1902], [Müller 1909], [Sauerbeck 1900], [Schurig/Riedel 1898], [Steiner 1842], [Zehme 1859]. Bei [Day Bradley 1979, p. 487] und [Eves 1964, p. 347] ist von „generalized prismoids“ die Rede, wenn zwei Begrenzungsflächen in Parallelebenen liegen und die Inhalte der dazwischen liegenden „Höhenschnitte“ einer ganzrationalen Funktion höchstens dritten Grades folgen. (Vgl. dazu unten Abschnitt 7.)

22 Vgl. [Führer 1981] und z. B. [Hacke 1909].

schließen. In aller Regel wählt man dafür das Cavalieri-Prinzip. Es ist das entscheidende Werkzeug, um ohne umständliche Approximationen Formumwandlungen vornehmen und kontrollieren zu können, und es hat historisch in der aufkeimenden Analysis zum Vormarsch des funktionalen Denkens und der Algebra maßgeblich beigetragen. Durch Beschränkung auf Kegel und Kugel bleibt diese gestaltgeometrische Vorform des Integrierens jedoch für den Mittelstufenunterricht völlig untypisch, und sie kommt auch im Oberstufenunterricht – wenn überhaupt noch – erst beim Stichwort Rotationskörper wieder vor. Dabei wird leider übersehen, wie leistungsfähig und intuitionsfördernd das Cavalieri-Prinzip tatsächlich ist, und der anwendungsfreundliche geometrische Gedanke der inhaltstreuen Gestaltverwandlung kommt im späteren stark algebraisierten Integralkalkül nicht mehr zum Ausdruck.[23]

Die bekannteste Herleitung des Kugelvolumens ist wohl die von Luca Valerio 1604 gegebene[24], bei der die Querschnitte einer Halbkugel mit denen des konisch ausgebohrten Umzylinders „verglichen" wurden, d. h. nach Archimedischem Vorbild: „ins Gleichgewicht gebracht". Alle nötigen Werkzeuge standen schon in dessen Methodenschrift, die freilich erst Anfang des 20. Jahrhunderts wieder aufgefunden wurde (s. Kommentare in [Archimedes 1972]). Auch bei Heron (1. Jh. n. Chr.?) wurden Rauminhalte mittels Querschnittsflächen verglichen, so dass Cavalieris Prinzip von 1635 wohl auch damals schon in die Rubrik „mathematische Folklore unter Fachgelehrten" gehörte. Über Archimedes' Methodenschrift geht das Cavalieri-Prinzip nur insofern hinaus als es keine mechanischen Vorstellungen bemüht und keine bestimmte Begründung andeutet.[25]

---

23 Allgemeinere Integrale von Querschnittsfunktionen verschwinden aus dem Oberstufenunterricht heute anscheinend ganz; sie machen jedenfalls unseren Lehramtsstudierenden erhebliche Probleme. Dies ist insofern bedauerlich, als eine *Einführung in die Integralrechnung vom Raume her* dieselben offensichtlichen Vorzüge hätte wie die seit Fröbel, Harnisch, von Raumer und Treutlein geforderte und von den Preußischen Richtlinien 1922 angeordnete raumgeometrische Propädeutik für die Elementargeometrie. (Vgl. z.°B. [Hacke 1909] und das durchgehende Grundprinzip der „Meraner Reform", die Raumanschauung fördern zu wollen; s. etwa [Lietzmann 1916] und zusammenfassend [Krüger 2000].)

24 Nach [Hofmann 1963, S. 179]. Die heute bekannte Version ohne Gleichgewichtsbetrachtungen steht z. B. samt Betrachtungen über Indivisiblen im Abschnitt „Napf und Kegel" der „Discorsi" von 1638 [Galilei 1995, S. 26–30]. Cavalieri wird hier nicht erwähnt.

25 Ob Cavalieri bei seinen „Indivisiblen" an Vergleiche mit feingliedrigen Scheibenkörpern oder an unendlich oder endlich dünne Vergleichsschichten dachte, ist auch unter Fachhistorikern umstritten. Es heißt, Cavalieri hätten schon Zeitgenossen für sein Buch gern den „Preis der Dunkelheit" zugesprochen, und Guldin warf ihm – zumindest teilweise unberechtigt – Plagiate vor (vgl. [Cantor 1913, S. 832–850]). Bei Archimedes ist

Hier eine besonders gelungene Formulierung (aus [Sauerbeck 1900, S. 229]):

> *„Zwei Körper sind raumgleich, wenn sie zu einer Ebene in eine solche Lage gebracht werden können, dass sie von jeder beliebigen Parallelebene nach gleichen Durchschnittsflächen geschnitten wird.“*[26]

Die übliche Einführung des Cavalieri-Prinzips im Unterricht suggeriert das räumliche Scherungsprinzip mit Papier- oder Bierdeckelstapeln (Abb. 7)[27].

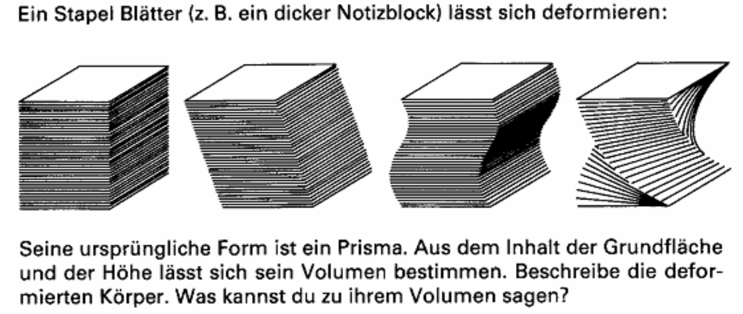


Abb. 7: Der beliebte Bierdeckelstapel … (aus [Jundt 1964])

Das wird der Sache leider nur teilweise gerecht. Zum einen wird sonst in der Stereometrie nicht auf der materiell-enaktiven Ebene argumentiert, zum zweiten zielt die Veranschaulichung in die (später) heikle Richtung unendlich dünner, indivisibler Schichten, und zum dritten wird die flächentreue Deformierbarkeit der Quer-

---

die Sache klar: Die Vergleichsschichten sind niederdimensional und taugen zur Heuristik, während „echte Beweise“ (später sog. Exhaustionsbeweise) nach den umständlichen Standards von Eudoxos-Euklid mit endlichen Näherungskörpern bzw. -flächen geführt werden müssen. Kepler fand das sehr lästig und setzte sich frei darüber hinweg. Cavalieri war das vermutlich schon zu Beginn seiner einschlägigen Arbeiten 1626 bekannt, wahrscheinlich über seinen Lehrer Galilei.

26 Im Geiste Cavalieris sollte hier vielleicht etwas allgemeiner und flexibler statt von Raumgleichheit von entsprechenden Raumverhältnissen gesprochen werden. Aber das ist ja leicht zu ergänzen. Natürlich gilt das Cavilieri-Prinzip analog auch für ebene Figuren. (Vgl. Abschnitt 6.) – Die Gleichheit aller *Parallel*schnitte ist übrigens wesentlich: Cavalieris älterer Zeitgenosse Paul Guldin hatte schon darauf aufmerksam gemacht, dass eine beliebige bijektive Zuordnung der Zwischenschnitte nicht ausreicht, sonst hätten alle Dreiecke gleicher Höhe gleiche Flächen. (Näheres und Literaturhinweise dazu s. [Führer 1981a]; eine exakte Begründung des Cavalieri-Prinzip findet man z. B. in [Ewald 1982, S. 107–112].)

27 Cavalieri schlug 1647 vor, ebene Figuren als Schar paralleler Fäden und Körper als Bücher mit parallelen Seiten aufzufassen, nur eben unendlich statt endlich vieler. [Cantor 1913, S. 841]

schnitte nicht deutlich. Statische räumliche Darstellungen, die letzteres zu reparieren versuchen (s. Abb. 8), wirken auf viele Schüler eher überredend als überzeugend, offenbar weil man für Flächeninhalte „keinen Blick“ hat. (Man beobachtet dieselbe Irritation schon bei Dreiecksscherungen.)

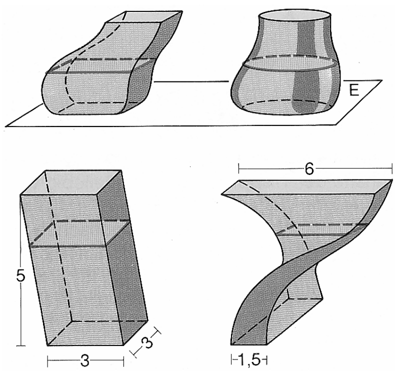


Abb. 8a–d: Hier sind flächentreue Deformationen wenigstens angedeutet (aus [Schmid/Schweizer 1985]).

Bevor das Cavalieri-Prinzip für gewölbte Objekte herangezogen wird, empfiehlt es sich zweifellos, das Prinzip mit etwas Geduld auf solche Objekte anzuwenden, deren Rauminhalt schon anderweitig berechnet werden kann. Hier bieten sich schiefe Prismen und Zylinder, schiefe Pyramiden (s. Euklids Zerschneidungsbeweis), schiefe Pyramidenstümpfe, Prismatoide und (als Grenzkörper „mit sehr vielen Ecken“) schiefe Kegel und Kegelstümpfe an (Abb. 9).

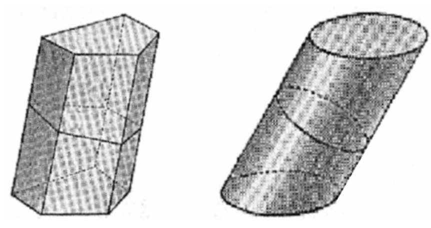

Abb. 9 a–b: Schiefes Prisma und schiefer Zylinder (aus [Strader/Rhoads 1929])

Nicht zuletzt sind Übungen im Geiste der Abbildung 8 zu empfehlen, bei denen „neue“ Körper aus Umdeutungen der Querschnittsfunktionen gewonnen werden. Abbildung 10a zeigt z. B. eine moderne Darstellung der berühmten Prismenzerlegung in drei raumgleiche Pyramiden von Euklid XII.7, und Abbildung 10b ein „Konoid“, der als konvexe Menge aus einem Zylinder entsteht, wenn man die

Deckfläche durch einen Durchmesser ersetzt und als Grenzkörper aus „Sphenisken“ gedacht werden kann (vgl. Fußnote 17).

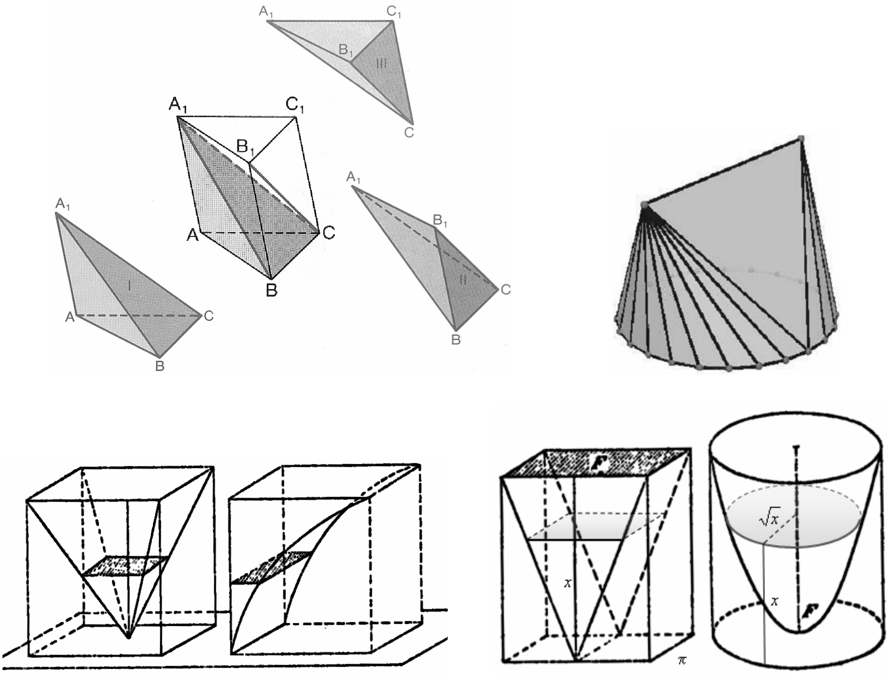


Abb. 10a–d: Euklids Prismenzerlegung (aus [Schmid/Schweizer 1985]), Konoid (aus [Schumann 2005]), parabolischer Zylinder und Paraboloid (aus [Holzmüller 1900/1902])

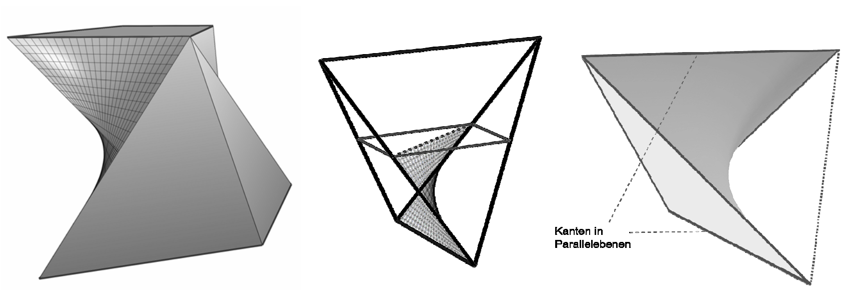


Abb. 10e–g: Windschiefe Prismatoide (frei nach [Steiner 1842])

Abbildung 10e zeigt einen Prismatoiden mit „windschiefer“ Seitenwand. Entsteht diese Wand über Parallelebenen wie in Abbildung 10f angedeutet, nämlich durch gleichmäßige „Metamorphose“ der unteren Kante in die dazu windschiefe obere entlang dem umgebenden Tetraedergerüst, dann wird das Kantenparallelogramm auf jeder Zwischenhöhe genau halbiert. Nach dem Cavalieri-Prinzip wird das umgebende Tetraeder von der erzeugten Membran in zwei raumgleiche Halbtretaeder zerlegt, und die Prismatoidformel gilt folglich auch für Prismatoide mit windschiefen Seitenflächen.

Frans van Schooten, Professor an der Ingenieurschule Leyden, Herausgeber und Kommentator von Descartes’ Geometrie und Lehrer von Huygens[28], hat auf ähnlichem Wege um 1650 die Fläche eines Parabelsegments bestimmt, indem er eine nichttriviale Proportion zwischen Objekten verschiedener Dimensionen aufstellte.[29] Hier ist van Schootens Grundidee in stark modernisierter Fassung (Abb. 11).

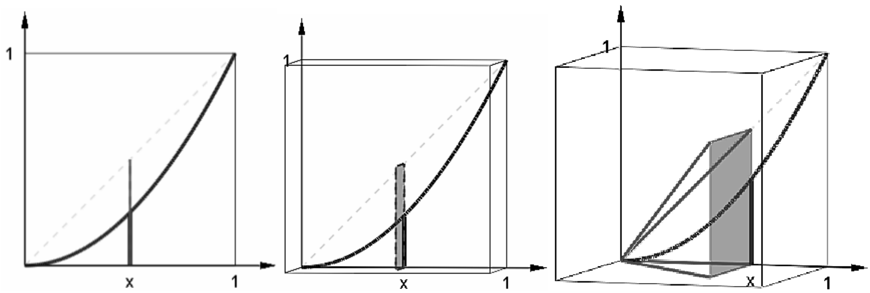


Abb. 11: Parabelquadratur nach Cavalieri/van Schooten

---

28 Angaben nach [Smith 1958, p. 425].

29 Eine Beschreibung der van Schootenschen Parabelquadratur findet sich in einem Kommentar zu den beiden damals bekannten Archimedischen Parabelquadraturen in J. C. Sturm’s Archimedes-Ausgabe von 1670. Die van Schootensche Quadratur vergleicht nicht mit dem Pyramiden-Würfel-Verhältnis, sondern – vielleicht zu Ehren entsprechender Argumentationsweisen bei Archimedes – via Rotation mit dem Kegel-Zylinder-Verhältnis. Im Grunde dreht van Schooten „nur“ Cavalieris Satz II.24 um, der vom Quadratverhältnis $3:1$ der Streckenquadrate über einem diagonal halbierten Parallelogramm handelt. Nach [Sturm 1670] argumentiert van Schooten fast schon algebraisch und damit deutlich elganter als Cavalieri, aber den mitunter waghalsigen Übergang zu Potenzen von Strecken rechnet Cantor gerade zu den besonderen Fortschritten Cavalieris gegenüber Kepler. (Vgl. [Cantor 1913, S. 837 und 849].) Van Schooten gab (nach Sturm) auch noch zwei Varianten des ersten Archimedischen Beweises über Näherungsteilungen mit Gleichgewicht. Einige Bestimmungsmöglichkeiten mit heutigen Mitteln werden in [Führer 1989] skizziert. Die dritte Parabelquadratur von Archimedes mittels der Hebelvariante des Cavalieri-Prinzips fand sich erst später in der Methodenschrift. (Vgl. die unterrichtsnahe Beschreibung in [Winter 1978/1991].)

An der Stelle $x$ liefert die Normalparabel den Wert $x^2$. Letzteres war nach klassischer Auffassung selbstverständlich als Fläche anzusehen, nämlich als das $x$-Quadrat. Gleitet $x$ durch das Einheitsintervall, so werden von der Normalparabel überall Quadratquerschnitte erzeugt, die die Höhe und Tiefe $x$ haben. Zusammen ergeben diese Querschnitte eine Pyramide, die sich – nach Cavalieri – zum umgebenden Einheitswürfel wie $1:3$ verhält. Die Parabelquerschnitte ergeben ihrerseits in der Ebene zusammen die Fläche unter der Parabel, die sich folglich zum Einheitsquadrat auch wie $1:3$ verhält.[30, 31]

Rechtwinklige Koordinaten, wie wir sie gewohnheitsmäßig dazu denken, spielten damals keine Rolle, daher war auch ohne Abbildungsgeometrie klar: Wenn man *eine* Parabelfläche kennt, dann kennt man wegen der affin-flächentreuen Verwandtschaft alle. D. h., mit jeder Quadratur der Fläche zwischen *einem* Parabelstück und der $x$-Achse oder mit der Quadratur *nur eines* Parabelsegments beherrscht man *alle* Parabelflächen.

## 6 Die wichtigsten Querschnitte: Parabelsegmente

Sobald Querschnittsfunktionen mit quadratischen Termen auftreten, müssen die entsprechenden Querschnittsflächen berechnet werden können. Gewöhnlich wird das zu Beginn der Oberstufe für Parabelflächen mithilfe äquidistanter Treppenfunktionen erledigt. Dieser Zugang ebnet den Weg zur anschließenden Theorie, aber er ist unter numerischen und geometrischen Gesichtspunkten nicht sonderlich „parabelgemäß“, wie die Herleitungen von Archimedes und Cavalieri/van Schooten zeigen.[32] Da Flächen unter Parabeln oder auch Parabelsegmente eine paradigmatische Rolle für die Analysis spielen und exakte Herleitungen der Fassregel erlauben, soll hier noch eine weitere Herleitung „durch scharfes Hinsehen“ gegeben werden[33], wobei man nur Ähnlichkeits- und Cavalieri-Prinzip für die Ebene im Hinterkopf haben muss (Abb. 12).

---

30 Dass sich die Parabelbetrachtung auf ebene Verhältnisse bezieht, ist nicht wesentlich: Man stelle sich die Parabel als Kontur einer homogenen Platte wie in Abbildung 11b vor. Mit van Schootens Idee bekommt man übrigens einen direkteren Zugang zum Kugel(schicht)volumen als bei Valerio-Galilei, weil sich die Parabelfläche unter $1-x^2$ zum umbeschriebenen Rechteck so verhält wie der Rotationskörper von $\sqrt{1-x^2}$ zum umbeschriebenen Zylinder.

31 Im Grunde die gleiche Idee, Verhältnisse in zwei und drei Dimensionen zu vergleichen, steht hinter den Guldinschen Regeln. Wir können darauf hier nicht näher eingehen.

32 [Archimedes 1972] gibt mehrere Herleitungen für die Parabelfläche. Sein Weg über die geometrische Reihe wird in [Führer 1989] unterrichtsnah modernisiert dargestellt.

33 Dieser elegante Beweis findet sich z. B. in [Kirsch 1988] und [Kirsch/Rehrmann 1989]. (Auf diese Quellen machte mich freundlicherweise H. Riede aufmerksam.)

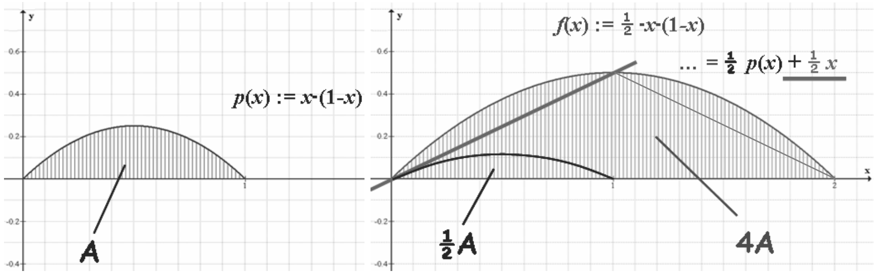


Abb. 12a–b: „Siehe“-Beweis für die Parabelfläche

In Abbildung 12a sieht man das Segment $A$, das die Parabel $p(x) = x \cdot (1 - x)$ mit der $x$-Achse einschließt. Streckt man diese Figur vom Ursprung um den Faktor 2, dann vervierfacht sich ihr Flächeninhalt, und aus der Parabel $p(x)$ wird

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot (2 - x) = \tfrac{1}{2} \cdot p(x) + \tfrac{1}{2} \cdot x\,.$$

Letzteres besagt nach dem Cavalieri-Prinzip, dass der linearen Funktion

$$g(x) := \tfrac{1}{2} \cdot x$$

über dem Intervall $[0;1]$ ein halbes $A$-Segment aufgesetzt ist. Der Flächeninhalt $4 \cdot A$ zwischen $f$ und der $x$-Achse besteht demnach aus zwei halben $A$ und dem Inhalt des eingezeichneten Dreiecks. $A$ macht also ein Drittel dieses Dreiecks oder – anders ausgedrückt – zwei Drittel der $A$ umbeschreibbaren Parallelogramme aus.

## 7 Genaueres zur „Fassregel“

Das letzte Ergebnis erlaubt eine sehr einfache und kurze Herleitung der ebenen „Fassregel“ für Parabelflächen (Abb. 13).

Die Intervallmitte sei $m$. Die Tangente über $m$ ist parallel zur Sehne (konjugierte Durchmesser), also bilden Trapez $T$ und Segment $S$ zusammen den Flächeninhalt

$$T + S = (b - a) \cdot \left( M + \frac{2}{3}\left(p(m) - M\right) \right),$$

wobei

$$M = \frac{p(a) + p(b)}{2}$$

ist. Das liefert sofort die ebene „Fassregel“ oder „Simpson-Regel“:

$$T + S = (b - a) \cdot \frac{p(a) + 4 \cdot p(m) + p(b)}{6}$$

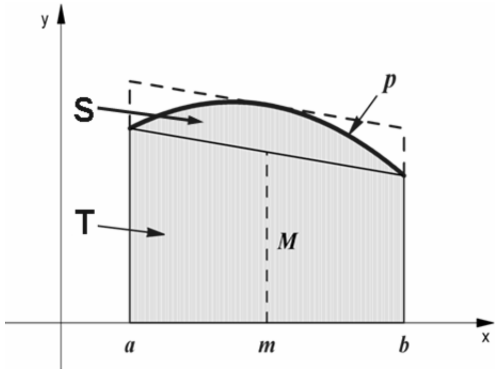


Abb. 13: Zur Herleitung der ebenen „Fassregel“

(Der konkave Fall geht mit $M' = p(m)$ analog.) Übungen zu flächentreuen Gestaltdeformationen von Querschnittsfunktionen zahlen sich hier aus und erklären, warum die meisten Volumenformeln der Formelsammlung genau dieselben Ergebnisse liefern wie die Fassregel.

Die ebene „Fassregel“ ist aber bekanntlich viel leistungsfähiger. Sie ist auch exakt für ganzrationale Funktionen bis zum dritten Grad. Man sieht aus Abbildung 14 sofort, warum das so ist.

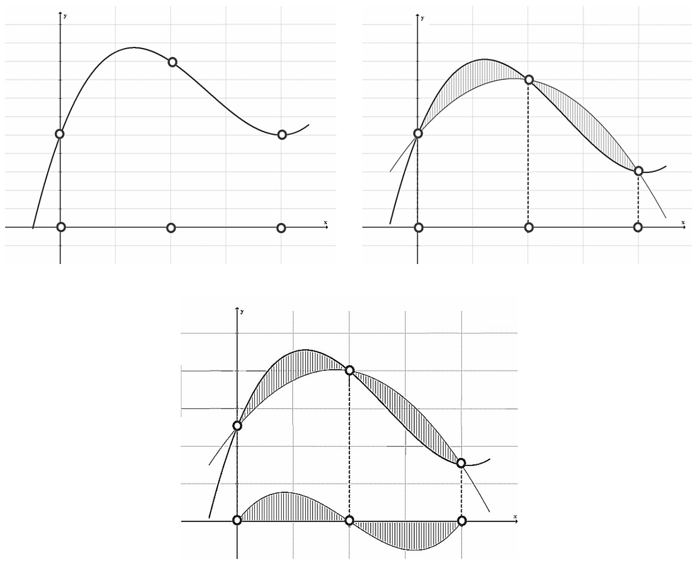

Abb. 14a–c: Exaktheit der ebenen „Fassregel“ für Wendeparabeln

Die eindeutig bestimmte Hilfsparabel $p$ mit

$$p(a) = f(a),\ p(m) = f(m) \text{ und } p(b) = f(b)$$

unterscheidet sich von $f$ nur um eine Wendeparabel $w$, von der drei äquidistante Nullstellen $a$, $m$ und $b$ bekannt sind. Stellt man sich $w$ in Linearfaktoren zerlegt vor, dann sieht man sofort, warum $w$ zu $(m;0)$ symmetrisch sein muss (Abb. 14c). Die Wendeparabel liefert deshalb keinen zusätzlichen Flächeninhalt.

Die Additivität der Fassregel und eine vorzeichenbehaftete Fläche unter der $x$-Achse werden dabei auf ganz natürliche Weise gebraucht, um die „Residuen" gegenüber der vermittelnden Interpolationsparabel – sozusagen modulo Cavalieri – zu beschreiben. (Propädeutik der Integralrechnung!)

Abbildung 15 zeigt mit derselben Idee, warum der Überstand einer „höheren" Funktion gegenüber der Interpolation durch eine Hilfs-Wendeparabel mit Stützstellen über $a$, $m$ und $b$ durch die vierte Ableitung der gegebenen (genügend oft differenzierbaren) Funktion abgeschätzt werden kann. Man denke sich die Funktion $f$ in eine Taylorreihe mit Restglied vierter Ordnung entwickelt, dann werden die Glieder niederer Ordnung von der Fassregel korrekt integriert, und der Fehler steckt im (Integral des) Restglied(es).[34] Es ist dieses Ergebnis, das die Simpson-Regel bis heute numerisch attraktiv gemacht hat. (Vgl. etwa [Mathews 2003].)

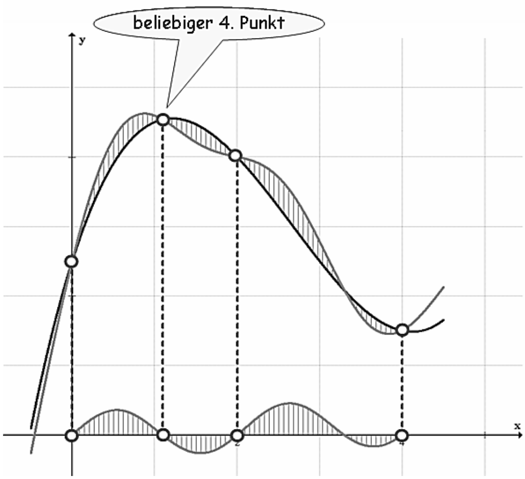


Abb. 15: Der Fehler hängt erst von Termen ab Ordnung 4 ab.

[34] Für den Oberstufenunterricht aufbereitete Details finden sich in [Ahbe 1980/2006].

## Fazit

Weit über das dürftige Arsenal von Standardkörpern hinaus, das heutigen Mittelstufenschülern gerade noch angediehen wird, hat die obige Tour d'horizon gezeigt, wie mit wenigen Heurismen auf der (naiven) Grundlage von Ähnlichkeits- und Cavalieri-Prinzip sehr viele Rauminhalte bestimmt werden können. Damit soll keineswegs behauptet werden, man müsse all das wie manchenorts vor hundert Jahren in den Mittelstufenunterricht bringen, gar noch mit zahllosen Aufgabenvariationen. Ziel der Untersuchung war vielmehr, sowohl für den abschließenden als auch für den Analysis-propädeutischen Unterricht in den Mittelstufen das zu pointieren, was jeder rechnenden Stereometrie wichtig sein sollte, weil es besonderes Ausbaupotenzial hat und weil es für die Anwendungsbezüge der viel stärker algebraisierenden Analysis konstitutiv ist. Wenigstens die Lehrerausbildung für die Mittelstufe sollte diese Perspektive vermitteln.

Die obige Konzentration auf Fragen der Rauminhaltsbestimmung ist dabei nur scheinbar eine Beschränkung. Jede Anwendung der allgemeineren Berechnungsregeln auf spezielle Fälle, seien es Dächer (vgl. etwa [Müller 2000]) oder Cavalierische Deformationsobjekte (s. Abschnitt 5), erfordert zielorientiert und -motiviert den möglichst geschickten Einsatz von Darstellungsmitteln und in aller Regel auch den flexiblen Umgang mit Pythagoras-, Strahlensatz- und trigonometrischen Beziehungen, der wiederum räumliches Beziehungsdenken schult und am Ende auch nach Begrifflichkeit verlangen lehrt. Die scheinbar pragmatische und zudem modisch outputorientierte Frage nach Rauminhalts*zahlen* entfaltet also geradezu vollautomatisch, problemorientiert und fast beliebig dosierbar ein repräsentatives Lernprogramm der elementaren Stereometrie.

Nicht nur das. Die historischen Bemerkungen und die Untersuchungen zur Simpson-Regel, insbesondere zur Quadratur der Parabelsegmente, belegen, dass Kubaturen und Quadraturen über den heutigen Schulstoff hinaus der Entwicklung der eigentlichen Integralrechnung nicht nur historisch, sondern auch gedanklich vorangingen. Man denke etwa an geometrische Motivationen, an gestaltliches Argumentieren sowie an gegenstandsbezogen-inhaltliche Vorstellungen als Motoren der Algebra und des (absichtlich blinden) „Kalküls". Auch ohne Affinität zu historisch-genetischen Sichtweisen mag man das als didaktische Herausforderung nehmen.

Die beliebte Einführung in die Integralrechnung mittels Treppenfunktionsnäherungen ist eben nicht nur ahistorisch, sondern auch intellektuell unredlich: Für Flächen bei der Parabel braucht man keine approximative Integraldefinition, und die übliche Approximation der Parabelfläche mit Treppenfunktionen, äquidistanten Intervallteilungen und Summen von Quadratzahlen ist unter jedem numerischen Aspekt sachlich unangemessen.[35]

Die Untersuchung sollte jedenfalls belegt haben,

- dass die Volumenberechnung als kleine „heuristisch-informelle Theorie“ auf Mittelstufenniveau abschließbar ist,
- dass dabei wesentliche Quellen, Grundideen und Ergebnisse einer strengen Integralrechnung und -theorie anschlussfähig vorbereitet werden können und
- dass geometrische Erkenntnisinteressen historisch und didaktisch zum intuitiven Umgang mit Integralrechnung gehörten und gehören.

Die heute übliche rasche Algebraisierung, die im Unterrichtsalltag oft noch von Disziplinierungsproblemen und von einem merkwürdig prüfungszentrierten Bildungswesen forciert wird, kann die heuristischen und gestaltgeometrischen Zugriffe auf Analysis nicht vermitteln und verbaut damit Chancen für ein propädeutisch gefestigtes, intuitiv gestütztes und flexibel anwendungsfähiges Grundverständnis.

Man *muss* es gewiss *nicht so* machen. Ich kann aber aus langjähriger Erfahrung bestätigen, dass eine Einführung in die Integralrechnung anhand einer kritischen Untersuchung der – zuvor mit hinreichend eindrucksvollen Anwendungserfolgen gut beleumdeten – Fass- und Simpsonregel[36] auf Sekundarschüler zugleich motivierend wirkt, Zielorientierung gewährleistet, ein gewisses technisches Niveau zwanglos einhält und zudem flexiblen Umgang mit dem Wechselspiel von Formen, numerischen Aspekten und Theorienutzung einübt. Zumindest die Lehrerausbildung sollte die heutige Differential- und Integralrechnung mit den gewachsenen Wirklichkeitsbezügen, „naiven“ Fragestellungen, Heurismen und Formeln des Mittelstufenstoffs organisch verbinden. Wie sonst könnte mit den aktuellen Schlagwörtern „mathematical literacy“ oder „numeracy“ Gutes gemeint und bezweckt werden?

---

[35] Archimedes schöpfte bei seiner zweiten Parabelquadratur mittels fortgesetzter Halbierung von innen mit Dreiecken aus, Fermat nahm geometrische Intervallteilungen und konnte damit alle ganzrationalen Funktionen integrieren. – Dass numerische Aspekte auf der heutigen Sek. II in der Regel nur vorgeschoben werden, zeigt sich im raschen Übergang zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dessen beweistechnisch harmlosere Hälfte (Stammfunktionen) dann gern zu Regelherleitungen mit Stammfunktionen und zu kontextfreien, aber höchst prüfungsschnittigen Stammfunktionsberechnungsübungen genutzt wird. Kein Gedanke mehr an numerische Approximationen, integrative Begriffsschöpfungen oder gar an die typische Gewinnung von Differentialgleichungen für echte Anwenderfragen …

[36] Mit „Simpsonregel“ ist hier – wie im deutschen Sprachraum üblich – die mehrfache Anwendung der Fassregel über verketteten Teilintervallen gemeint.

Die beiden nachfolgenden sehr umfangreichen Verzeichnisse allgemeiner Literatur zur elementaren Stereometrie und spezieller Literatur zum Unterricht über die „Fassregel“ soll jüngeren Wissenschaftlern, die sich im Themenfeld Stereometrie-Unterricht versuchen möchten, einiges von der Mühe abnehmen, die ich mit der Quellensuche hatte. Dabei wird vielleicht auch ein wenig deutlich, dass wissenschaftliche Arbeit im Bereich der gegenwärtig verpönten Stoffdidaktik nicht nur nützlich, spannend und schön ist, sondern auch mühsam.[37]

**Literatur**

Alexandroff, P. S./Markuschewitsch, A. I./Chintschin, A. J. (Hrsg.): Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band V. Berlin: VEB DVW 1971.

Alkemper, E.: Raumvorstellung fördern? – Raumvorstellung fordern? Frankfurt am Main: Staatsexamensarbeit 2004 (unveröff.).

Archimedes: Werke – übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. Czwalina. Darmstadt: Wiss. Buchges. (3. Nachdruck) 1972.

Backe-Neuwald, D.: Bedeutsame Geometrie in der Grundschule. Diss. Paderborn: GHS 2000 (unveröff.).

Baltzer, R.: Die Elemente der Mathematik, 2. Band. Leipzig: Hirzel (7. Aufl.) 1885.

Beckstette, F. u. a.: Unser Raumlehrebuch für Nordrhein-Westfalen. Stuttgart: Klett 1967.

Bender, P./Schreiber, A.: Operative Genese der Geometrie. Wien/Stuttgart: hpt/Teubner 1985.

Benz, W.: Leitfaden der Stereometrie – Leitfaden. (Hrsg.: Verein Schweizerischer Mathematiklehrer) Zürich/Leipzig: Orell/Füssli 1938.

Bibliotheca Augustana (Harsch, U.): Johannes Kepler. Online verfügbar unter www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/17Jh/Kepler/kep_intr.html.

Bohnert, F.: Elementare Stereometrie. Leipzig: Göschen 1902.

Boyer, C. B.: A History of Mathematics. New York: Wiley 1989.

Breidenbach, W.: Raumlehre in der Volksschule. Hannover: Wiss. Verlagsanstalt 1949.

Brückner, M.: Vielecke und Vielflache – Theorie und Geschichte. Teubner: Leipzig 1900. Online verfügbar unter www.hti.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABN8316.

Büttner, A.: Anleitung für den Rechen- und Raumlehre-Unterricht. Leipzig: Hirt (21. Aufl.) 1906, (23. Aufl.) 1913.

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band II. Leipzig: Teubner (2. Aufl.) 1913.

Degner, R./Kühl, J.: Würfelkabinett. Bad Oldesloe 1988 (Heft zu einer Ausstellung auf der 79. MNU-Hauptversammlung in Kiel).

Dehn, M.: Über den Rauminhalt von Polyedern. Math. Annalen 55 (1902), S. 465–478.

Euklid: Die Elemente. (Übers., hrsg. und komm. von C. Thaer). Darmstadt: Wiss. Buchges. (7. Aufl.) 1980.

Eves, H.: An Introduction to the History of Mathematics. New York: Holt, Rinehart & Winston 1964.

[37] Den Kollegen Anselm Lambert (Saarbrücken/Frankfurt), Harald Riede (Koblenz) und Gerald Wittmann (Schwäbisch Gmünd) danke ich herzlich für eine Reihe von Hinweisen und Korrekturvorschlägen.

Ewald, G.: Probleme der geometrischen Analysis. Mannheim/Wien/Zürich: BI 1982.
Fettweis, E.: Anleitung zum Unterricht in der Raumlehre. Paderborn: Schöningh (2. Aufl.) 1951.
Fischer, R.: Die Rolle der Exaktifizierung im Analysisunterricht. In: DdM 6 (1978), 212–226.
Fladt, K.: Elementargeometrie, Band I.2 – Der Stoff bis zur Untersekunda. Leipzig/Berlin: Teubner 1928.
Fladt, K.: Elementargeometrie vom höheren Standpunkt aus, Teil II, Elementargeometrie I. Stuttgart: Klett 1957.
Franke, M.: Didaktik der Geometrie. Heidelberg: Spektrum 2000.
Freund, H.: Die Gewinnung von Steigungswerten durch analytisch-geometrische Betrachtungen. In: MU 6.2, 1960, 22–51.
Fricke, A.: Didaktik der Inhaltslehre. Stuttgart: Klett 1983.
Fröbel, F. W. A.: Bewegungsspiele als ein Ganzes aus dem Leben und Spielen des Kindes entwickelt. (1840) Wiederabdruck in: Heiland, H. (Hrsg.): Friedrich Fröbel – Ausgewählte Schriften, Bd. 3. Stuttgart: Klett-Cotta 1982, 93ff.
Führer, L.: Objektstudien in der Vektorgeometrie. In: DdM 7.1, 32–61.
Führer, L.: Zum Gehalt der elementaren Integralrechnung in ideengeschichtlicher Sicht. In: MU 27.5 (1981a), 7–60.
Führer, L.: Zur Entstehung und Begründung des Analysisunterrichts an allgemeinbildenden Schulen. In: MU 27.5 (1981b), 81–122.
Führer, L.: Fünf Wege zur Parabelfläche. In: mathematik lehren 37 (1989), 35–39.
Führer, L.: Probleme der Stereometrie. Vortrag auf der GDM-Tagung 2001. Online verfügbar unter
http://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/forschung/Stereometrie.pdf.
Führer, L.: Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik In: math. did. 25.1 (2002), 1–24.
Führer, L.: Kleine Revue sozialer Aspekte der Schulgeometrie. In: MU 51.2/3 (2005), 70–85.
Galilei, G.: Unterredungen und mathematische Demonstrationen … (Übers. des Originals von 1638 durch A. von Oettingen). Frankfurt a. M.: Harri Deutsch 1995.
Gardner, M.: Mathematische Rätsel und Probleme. Braunschweig: Vieweg 1971.
Hacke, F.: Die Körperberechnung als Einleitung in die Integralrechnung. In: ZfMNU 40 (1909), 307ff.
Haldane, J. B. S.: On being the right size. Online verfügbar unter
http://entomology.unl.edu/lgh/ent108/on_being_the_rigth_size.htm
(Original 1928, abgedruckt in: In: Newman, J. R. (Ed.): The World of Mathematics, Vol. 2. New York: Simon & Schuster 1956). Deutsche Übers.: Über die richtige Größe der Lebewesen. In: Mathematiklehrer, Heft 2 (1981), 8–10.
Harnisch, W.: Die Raumlehre oder die Messkunst – gewöhnlich Geometrie genannt; mit gleichzeitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben. Breslau: J. Max & Komp. 1821 (hier zit. n. d. 2. Aufl. von 1837).
von Hanxleden, E.; Hentze, R.: Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten – Mittelstufe: Geometrie – Parallelausgabe. Braunschweig u. a.: Vieweg 1955.
Heiland, H./Hoffmann, E. (Hrsg.): Friedrich Fröbel – Ausgewählte Schriften, 4 Bde. Stuttgart: Klett-Cotta (z. T. 3. –4. Aufl.) 1982.
Heinrich, G.: Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. In: Bibl. Math. 1.3 (1900), 90–92.

Heinze, K.: Genetische Stereometrie. Leipzig: Teubner 1886.
Heye, K./Lietzmann, W.: Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen, Band II für Klasse 3 bis 5. Leipzig/Berlin: Teubner 1939.
Höfler, A.: Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig/Berlin: Teubner 1910.
Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik, Band I. Berlin: de Gruyter (2. Aufl.) 1963.
Hofmann, H./Eisele, R.: Geometrie – Mittelstufe (Neue Fassung von Reinhardt-Zeisberg's Math. Unterrichtswerk für höhere Schulen). Frankfurt/M. u. a.: Diesterweg 1953.
Holzmüller, G.: Elemente der Stereometrie, 4 Bände. Leipzig: Göschen 1900/1902.
Hönig, G.: Zerlegungsbeweis zur Formel für den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes. In: ZfMNU 60 (1929), 404ff.
Jundt, W.: Geometrie 3 – 9. Schuljahr. Bern: Staatlicher Lehrmittelverlag 1984.
Jung, J.: Zur Begründung des Cavalierischen Lehrsatzes. In: ZfMNU 33 (1902), 240ff.
Junge, G.: Nochmals der Rauminhalt der Pyramide. UBl. 32 (1926), 240–244.
Kempinsky, H.: Lebensvolle Raumlehre. Leipzig: Dürr (6. Aufl.) 1931.
Kepler, J.: Neue Stereometrie der Fässer. (Übers. und Hrsg. R. Klug.) Leipzig: Engelmann 1908 (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 165; lat. Original Linz 1615).
Kepler, J.: Messekunst Archimedis. In: Werke, Band 9 (Hrsg.: F. Hammer). München: C. H. Beck 1996 (Original Linz 1616).
Kerst, B./Pohl, F./Wolff, G.: Geometrie für die Mittelstufe, Kurzausgabe, Unterstufe, Band II. Berlin: Grote 1932.
Kirchenlexikon über Kepler. Online verfügbar unter www.bautz.de/bbkl/k/Kepler_jo.shtml
Kirsch, A.: Anschauliche Begründung einiger Verfahren der numerischen Mathematik aus der Geometrie der Parabel. In: Math. SemBer. XXXV.2 (1988), 197–226.
Kirsch, A./Rehrmann, F.: Anschauliche Beweise einiger Eigenschaften der Parabel mit Anwendungen in der Numerik. In: Kautschitsch, H./Metzler, W. (Hrsg.): Anschauliches Beweisen (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18). Wien/Stuttgart: hpt/ Teubner 1989. (Auszug aus Kirsch 1988 mit Zusätzen von F. Rehrmann.)
Koppe, C.: Anfangsgründe der Geometrie, Band II. (2. Aufl.) 1846. (Nach Tropfke wurden dort in § 148, S. 270, erstmals Körper in den Schulstoff aufgenommen, für die nach Steiner die Simpsonsche Regel zutrifft.)
Koppe-Diekmanns Geometrie, Teil II der Ausgabe für Realanstalten – Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Essen: Baedeker (23. Aufl. = 7. Aufl. der Neubearbeitung von K. Knops) 1920.
Kroll, W.: Raumgeometrie in der Grundschule. 5 Teile in: Praxis der Grundschule 18.4 (1994), S. 22–32; 18.5 (1994), S. 26–28; 18.6 (1994), S. 19–21; 19.1 (1995), S. 46–48.
Krüger, K.: Erziehung zum funktionalen Denken. Berlin: Logos 2000.
Legendre, A. M.: Die Elemente der Geometrie. Berlin: Rücker (3. Aufl. der Übers. von A. L. Crelle n. d. 12. Aufl. des Originals) 1837.
Lietzmann, W.: Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland, 1912. (Nachdruck mit einer Einführung von G. Becker). Paderborn: Schöningh 1985.
Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, 2. Teil. Leipzig: Quelle & Meyer (1. Aufl.) 1916.
Lietzmann, W.: Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie – Mittelstufe, Ausgabe A. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht (2. neubearb. Nachkriegsaufl. von H. Freund und W. Lietzmann) o. J.

Lörcher, G. A.: Schülerleistungen in Geometrie am Ende der Hauptschulzeit. In: mathematik lehren 36 (1989), S. 6–14.
Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen. Frankfurt am Main: Lang 1994.
Mayer, M.: Volkstümliche Raumkunde für die Volksschule. München: Ehrenwirth o. J.
Müller, H.: Die Mathematik auf den Gymnasien und Realanstalten, 2. Teil: Die Oberstufe, Ausg. A für Gymnasien. Leipzig/Berlin: Teubner (3. Aufl.) 1909.
Müller, K.-P.: Raumgeometrie. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner 2000.
Odenbach, K.: Der Unterricht in der Raumlehre. Braunschweig: Westermann (2. Aufl.:) 1972.
Piaget, J./Inhelder, B./Szeminska, A.: Die natürliche Geometrie des Kindes. Stuttgart: Klett 1974 (frz. Original: La Géométrie spontanée de l'Enfant, 1948).
Piaget, J./Inhelder, B.: The Child's Conception of Space. London: Routledge & Kegan 1967 (frz. Original: La Représentation de l'Espace chez l'Enfant, 1948; dt. Ausgabe: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart: Klett-Cotta 1971).
Pietzker, K.: Lebensvoller Raumlehreunterricht, II. Teil. Langensalza/Berlin/Leipzig: Beltz (5. Aufl.) 1929.
Pochendorfer, F.: Geometrie. Wels (Oberösterr.): Leitner & Co. 1961.
Poincaré, H.: Wissenschaft und Hypothese. Leipzig: Teubner (2. Aufl.) 1906.
Preußische Richtlinien zur Aufstellung von Lehrplänen für die oberen Jahrgänge der Volksschule (Min.-Erlaß vom 15.10.1922; zit. n. Odenbach, S. 24)
Radatz, H./Rickmeyer, K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel 1991.
von Raumer, K. G.: Versuch eines ABC-Buchs der Kristallkunde. Berlin 1820 (Bd. 1; Nachtrag 1821).
von Raumer, K. G.: Geschichte der Pädagogik. 3 Bde. Stuttgart: 1843–1851 (5. Aufl.: Gütersloh 1878–80, 4 Bde.).
Rohn, K.: Stereometrie. Borna-Leipzig: Universitätsverlag 1922.
Rude, A.: Methodik des gesamten Volksschulunterrichts, II. Band: Methodik des naturkundlich-mathematischen und des technischen Unterrichts. Osterwieck/Leipzig: Zickfeld (11. Aufl.) 1911.
Sauerbeck, P.: Lehrbuch der Stereometrie. Stuttgart: Bergsträßer 1900.
Schmidt, A./Schweizer, W. (Hrsg.): Lambacher-Schweizer Mathematik – Geometrie II. Stuttgart: Klett 1985.
Schumann, H.: Körperschnitte – Gegenstand des allgemeinbildenden Unterrichts. In: mathematik lehren 67 (1994), S. 5–10.
Schumann, H.: Polyedrische Approximation von Körpern mit Cabri 3D. In: Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, 2005, Heft 2. Online verfügbar unter www.ph-weingarten.de/homepage/lehrende/schumann/veroeffentlichungen/
Schurig, R./Riedel, E.: Katechismus der Stereometrie. Leipzig: Weber 1898.
Schwab, K.: Geometrie für Realanstalten, I. Teil Unterstufe. Leipzig: G. Freytag (4. Aufl.) 1914.
Schwartze, H./Schütze, I./Rohde, C.: Konstruktive Raumgeometrie mit Computerhilfe. Heidelberg: Spektrum 1996.
Seebach: Didaktische Überlegungen zum Satz von Dehn. In: DdM 11.1 (1983), 1–13.
Simon, M.: Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. München: C. H. Beck (2. Aufl.) 1908.
Smith, D. E.: History of Mathematics, Vol. I. New York: Dover 1958.
Spieker, T.: Lehrbuch der Stereometrie. Potsdam: A. Stein (7. Aufl.) 1913.

Strader, W. W./Rhoads, L. D.: Solid Geometry. Philadelphia u. a.: John C. Winston 1929.
Steiner, J.: Über einige stereometrische Sätze. In: Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik 23 (1842), 275–284.
Struve, H.: Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim u. a.: BI 1990.
Sturm, J. C.: Des unvergleichlichen Archimedes Kunstbücher … Nürnberg: C. Gerhard 1670.
Thaer A.: Mathematisches Unterrichtswerk von Kambly-Thaer, Band IV: Stereometrie. Breslau: Hirt (35. Aufl.) 1919.
Thiele, R./Haase, K.: Der verzauberte Raum – Spiele in drei Dimensionen. Leipzig: Urania 1991.
Thompson, W. D'Arcy: On Growth and Form, 2 Bände. 1917. Deutsch: Über Wachstum und Form. Frankfurt: Suhrkamp 1982.
Timerding, H. E.: Die Erziehung der Anschauung. Leipzig/Berlin: Teubner 1912.
Treutlein, P.: Der geometrische Anfangsunterricht, 1911. (Nachdruck mit einer Einführung von J. Schönbeck) Paderborn: Schöningh 1985.
Tropfke, J.: Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. 7. Berlin/Leipzig: de Gruyter (2. Aufl.) 1924
van der Waerden, B. L.: Erwachende Wissenschaft. Basel/Stuttgart: Birkhäuser1966.
von Vega, G.: Vorlesungen über die Mathematik, Bd. II. Wien: von Trattnern 1803.
De Vries: Geometrie II. Braunschweig: Westermann 1949.
Wagemann, E. B.: Quadrat – Dreieck – Kugel – Die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Fröbel. Weinheim: Beltz 1959.
Weber, H./Wellstein, J.: Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Band II. Leipzig: Teubner (2. Aufl.) 1907.
Weitbrecht, T.: Zur Berechnung des Pyramideninhalts. UBl. 32 (1926), 244–246.
Wieleitner, H.: Über den Rauminhalt der Pyramide. UBl. 31 (1925), 91.
Winter, H.: Geometrie vom Hebelgesetz aus. In: MU 24.5 (1978), 88–125.
Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Wiesbaden/Braunschweig: Vieweg 1991.
Witting, A.: Zur Belebung des Unterrichts in der Stereometrie. In: ZfMNU 45 (1914), 359 ff.
Wittmann, E. C.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1987.
Wittstein, T.: Das Prismatoid. Hannover 1860 (Quellenangabe für die Herkunft der Bezeichnung aus Meyer's Enzyklopädie 1888; dort: von „August vorher Trapezoidalkörper genannt").
Wolf, G. (Hrsg.): Handbuch der Schulmathematik, Bd. 3 und Bd. 6. Schroedel: Hannover (2. Aufl.) 1967.
Wolff, C.: Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften … Frankfurt/Leipzig: Renger 1755.
Zehme, W.: Die Geometrie der Körper. Iserlohn: Bädeker 1859.
Zeissig, E.: Die Raumphantasie im Geometrieunterrichte – Ein Beitrag zur methodischen Ausgestaltung des Geometrieunterrichtes aller Schulgattungen. Berlin: Reuther & Reichard 1902.

**Literatur zur sog. „Fassregel“**


Ahbe, H.: Die Simpson-Regel in didaktischer Sicht. In: PM 22.1 (1980), 9–17. (Unter gleichem Titel in: Ahbe, H.: Das Verhältnis zwischen Grund- und Leistungskurs im Mathematikunterricht. Frankfurt: Haag und Herchen 2006, 14–20.)

Barfuß, F. W. (Bearbeitung R. Hentze): Der Böttcher. Leipzig: Verlag Bernh. Friedr. Voigt (10. erweiterte Aufl.) 1907. (Rolle der Korbbögen für ovale Fässer)

Brennan, M.: Cubics, error bounds and Simpson's rule. In: The Intern. J. of Computer Algebra in Math. Educ. 5.1 (1998), 71–75.

Burk, F.: Archimedes' quadrature and Simpson's rule. In: Coll. Math. J. 18.3 (1987), 222–223.

Danckwerts, R./Vogel, D.: Anregungen zur numerischen Integration. In: MU 32.2 (1986), 73–76.

Day Bradley, A.: Prismatoid, prismoid, generalized prismoid. In: Am. Math. Mon. 86.6 (1979), 486–490. (Interessantes zur Herkunft der Bezeichnungen)

Dobbs, D. E.: Why Simpson's Rule is exact for cubics. In: Mathematics and Computer Educ. 29.1 (1995), 19–24.

Flechsenhaar, A.: Die Kreismessung mit Hilfe der Simpsonschen Regel. In: ZfMNU 46 (1915), 529ff., Kritik und Erwiderung 562–564.

Führer, L.: „BASICs“. In: mathematik lehren 13 (1985), 24–38.

Führich, A./Nimz, H.: Die Keplersche Faßregel, eine für den Mathematikunterricht fundamentale Beziehung. In: MNU 50.5 (1997), 271–277. (Enthält Poncelets elegante Herleitung der ebenen Faßregel.)

Führich, A./Nimz, H.: Die Keplersche Fassregel in der gymnasialen Oberstufe. In: MU 44.3 (1998), S. 51–64. (Traditionelle Herleitungen, Verifikationen für die elementaren Körperberechnungen und einfache Fehlerbetrachtungen.)

Glaister, P.: Error analysis of quadrature rules. In: Intern. J. of Math. Educ. in Science and Technology, 35.3 (2004), 424–432.

Hahnenstein, U.: Handbuch neue Fasstechnik. Essen: Vulkan 1977. (Moderne Werkstoffe, Fertigung und Industriefässer)

Heinz, G./Vogt, J.: Ein historisch orientierter Zugang zum Ableitungsbegriff – Johannes Kepler und Pierre de Fermat. In: ml 19 (1986), 36–41. (Keplers Ausmessung der österreichischen Fässer nachempfunden; keine „Keplersche Fassregel“)

Henn, H.-W.: Volumenbestimmung bei einem Rundfaß. In: DdM 21.1 (1993), 17–32.

Henrich, G.: Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. In: Bibl. Math. 1.3 (1900), 90–92.

Herbst, K.: Zur praktischen Berechnung von Kreisabschnitten und Fässern. In: ZfMNU 47 (1916), 484ff. (Dazu eine Bemerkung von E. Jahnke in ZfMNU 48, S. 167).

Kendig, K.: Pictures suggest how to improve elementary numerical integration. In: College Math. J., 30.1 (1999), 45–50.

Kepler, J.: Neue Stereometrie der Fässer, … Leipzig: Engelmann 1908 (Übers. des lat. Originals 1615 von R. Klug).

Kindler, H.: Der Handwerksberuf des Böttchers und Küfers. Bremen: Industrie- und Handelsverlag Walter Dorn 1949 (zit. nach dem Reprint: Der Böttcher und Küfer – Ein berufskundliches Lehr- und Anschauungsbuch, Hannover: Th. Schäfer 2003). (Sehr schöne Anmerkungen über die alten Handwerkstraditionen.)

Kroll, W./Vaupel, J.: Grund- und Leistungskurs Analysis, Band II. Bonn: Dümmler 1989.

Mathews, J. H.: Bibliography for Simpson's Rule for Numerical Integration. Online verfügbar unter

http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/SimpsonsRuleBib.html. (Aktuelle Literatur zur Simpson-Regel im Rahmen der Numerischen Mathematik)
Mills, J.: Numerical integration. A teaching approach. In: Math. Gaz., 65.431 (1971), 1–5.
Pohl, G./Spundflasche, P.: Werkkunde des Böttchers, Band I. Hamburg: Verlag Handwerk und Technik 1950.
Röding, E.: Ein Zugang zur Behandlung der Keplerschen Faßregel. In: MNU 47.1 (1994), 13–20. (Gute historische Anmerkungen)
Scheu, G.: Die Keplersche Regel. In: PM 43.4 (2001), 196–197. (Übertragung auf den TI-92)
Stihl, T.: Die Mittelwertbildung als numerische Integrationsmethode. In: Prax. Math. 29.5 (1987), 261–274.
Vaupel, J.: Bemerkungen zur Integralrechnung in Grund- und Leistungskursen. In: DdM 9.1 (1981), 57–79.
Venit, S. M.: Approximative integration. Comparative examples. In: Math. Teacher, 71.9, 774–775.
Warneke, K.-G.: Keplersche Faßrechnung als Unterrichtsthema. In: Prax. Math. 28.6 (1986), 321–324. (Keplers Ausmessung der österreichischen Fässer nachempfunden; keine „Keplersche Fassregel")
White, J. G.: A pre-calculus method for deriving Simpson's rule. In: Pi Mu Epsilon, 9.4 (1991), 214–216.

**Anschrift des Verfassers**

Prof. Dr. Lutz Führer
Institut für Didaktik der Mathematik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
60054 Frankfurt am Main
www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer

Eingang Manuskript: 26.03.2006 (überarbeitetes Manuskript: 27.08.2006)