

# Offene Aufgaben mit Realitätsbezug

## Eine Übersicht mit Beispielen und erste Ergebnisse aus Fallstudien

von

Gilbert Greefrath, Münster

**Kurzfassung:** Schülerinnen und Schüler aus den Klassen 8 bis 10 wurden bei der Bearbeitung von realitätsnahen offenen Aufgaben beobachtet. Diese Arbeit stellt die für die Untersuchung entwickelten Aufgaben dar und diskutiert erste Ergebnisse bezogen auf die Planungsphasen der Schülerinnen und Schüler.

**Abstract:** Pupils of the forms 8–10 were watched working on open, realistic problems. The article presents the problems developed for this investigation and discusses first results related to the planning phases of the pupils.

### 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine Untersuchung zum Problemlöse- und Modellbildungsverhalten von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I, die seit Februar 2004 durchgeführt wird. Dabei soll detailliert untersucht werden, wie Schülerinnen und Schüler mit realitätsnahen offenen Aufgaben umgehen. Insbesondere interessiert, welche Problemlöse- und Modellbildungsstrategien zum Einsatz kommen und wie *Planung*, *Datenbeschaffung*, *Datenverarbeitung* und *Kontrollvorgänge* innerhalb der Aufgabenbearbeitung verteilt sind.

Zunächst werden offene Aufgaben mit Realitätsbezug verschiedenen Typs vorgestellt, von denen einige für die Untersuchung verwendet werden. Anschließend werden das Design der Untersuchung und erste Ergebnisse dargestellt. Die durchgeführten Auswertungen konzentrieren sich auf die Planungsphasen der Schülerinnen und Schüler während der gesamten Aufgabenbearbeitung.

### 2 Einordnung offener Aufgaben mit Realitätsbezug

#### 2.1 Offene Aufgaben und offene Probleme

Offene Aufgaben und offene Probleme haben beim Erwerb von prozessbezogenen Kompetenzen eine besondere Bedeutung. So können durch offene Aufgabenstellungen Kompetenzen in den Bereichen Argumentieren, Modellieren und Problem-

lösen entwickelt werden (Blum/Wiegand 2000, Franke 2003). Sie bieten Gelegenheit zu Schüleraktivität, selbstständiger und kreativer Arbeit und die Möglichkeit zur Ausweitung des heuristischen Erfahrungsschatzes sowie für horizontale und vertikale Vernetzungen (Wiegand 1999, Zimmermann 1991, Pehkonen 2001, Leuders 2001, S. 120). Offene Aufgaben können darüber hinaus Verständnis wecken (Ambrus/Schulz 2001, Pehkonen 2001) und die Motivation steigern (Pehkonen 2001).

Mit offenen Aufgaben oder offenen Problemen ist allerdings ein weites Feld verschiedener Aufgaben- und Problemtypen gemeint, denn die Bezeichnung *offene Aufgaben* oder *offene Probleme* wird nicht einheitlich verwendet (Pehkonen 2001, Silver 1995, Graf 2001). Einige Autoren unterscheiden auch die Begriffe *offene Aufgabe* und *offenes Problem*. Die Bezeichnung *offenes Problem* wird von diesen Autoren verwendet, wenn

- Informationen auf für die Schülerinnen und Schüler neue Weise verknüpft werden sollen (Pehkonen 2001),
- die Transformation (d. h. der Weg vom Anfangszustand zum Zielzustand der Aufgabe) unklar ist (Wiegand/Blum 1999),
- die Transformation keine geläufige Routine ist (Schulz 2000) oder
- der Zielzustand nicht eindeutig ist (Schulz 2000).

In den anderen Fällen, wenn also z. B. lediglich der Anfangszustand nicht genau beschrieben ist, verwenden diese Autoren die Bezeichnung *offene Aufgabe*. In der vorliegenden Arbeit wird ein weiter Aufgabenbegriff verwendet, der die offenen Probleme einschließt.

Es gibt verschiedene Klassifizierungen von offenen Aufgaben, von denen hier nur auf die von Bruder (2000, 2003), Büchter/Leuders (2005), Dockhorn (2000), Pehkonen (1995), Wiegand/Blum (1999) und Blum/Wiegand (2000) hingewiesen werden soll. Alle Klassifizierungen nutzen die aus der Problemlösepsychologie bekannte Beschreibung eines Problems durch *Anfangszustand* und *Zielzustand* sowie eine *Transformation*<sup>1</sup>, die den Anfangs- in den Zielzustand überführt.

*Offene Aufgaben* werden dabei nach Klarheit von Anfangs- und Zielzustand sowie nach Klarheit und Mehrdeutigkeit der Transformation eingeteilt. Die oben genannten Autoren kommen dabei zu unterschiedlichen Klassifikationen, die hier nicht im Einzelnen diskutiert werden sollen. Die hier vorgestellte Studie bezieht sich speziell auf die von Wiegand und Blum vorgestellte Typisierung (Wiegand/Blum 1999), die zwischen sechs Typen unterscheiden (s. Tabelle 1).

---

<sup>1</sup> Pehkonen (1995) verzichtet auf die Betrachtung der Transformation.

	Anfangszustand	Transformation	Zielzustand
Typ 1	unklar	unklar	unklar
Typ 2	unklar	unklar	klar
Typ 3	klar	unklar	unklar
Typ 4	klar	unklar	klar
Typ 5	klar	klar	unklar
Typ 6	klar	klar	klar

Tabelle 1: Typen offener Aufgaben nach Wiegand/Blum (1999)

Für die eigene Untersuchung steht die Frage im Vordergrund, ob und wie die Problemlöse- und Modellbildungsprozesse vom jeweiligen Typ der Aufgabe abhängen. Deshalb wurde in einem ersten Schritt nach einem Aufgabenkontext gesucht, der die systematische Variation von Beispielen im Sinne der vorgestellten Klassifikation möglichst zwanglos zulässt. Um den Einsatz von realitätsbezogenen Aufgaben in der schulischen Praxis zu fördern, sollte als Nebenbedingung ein klarer *Realitätsbezug*<sup>2</sup> vorhanden sein. In dieser Arbeit wird speziell der Kontext *Hausbau* vorgestellt. Entsprechend den vorgestellten Begriffsbildungen sind die gewählten Beispiele *offene Aufgaben mit Realitätsbezug*.

## 2.2 Typen offener Aufgaben mit Realitätsbezug

Im Folgenden werden verschiedene Aufgaben aus dem Kontext *Hausbau* in der Reihenfolge der Klassifikation von Wiegand/Blum vorgestellt. Die Einteilung mit Hilfe der Begriffe *klar* und *unklar* beschreibt die Situation nur sehr grob. Diese Begriffe beinhalten eine subjektive und eine objektive Komponente. Die subjektive Komponente meint die Abhängigkeit von den Fähigkeiten der jeweiligen Schülerin bzw. des Schülers. Die objektive Komponente bezieht sich darauf, ob in der Aufgabe einzelne Angaben fehlen und eventuell nur mit eingeschränkter Genauigkeit erschlossen werden können. Für beide Komponenten können Abstufungen festgelegt werden. Auf die bei Wiegand/Blum vorzufindenden Hinweise auf *innermathematische* Aufgaben (z. B. Beweisprobleme) wird aufgrund der Fragestellung dieser Arbeit verzichtet. Die Bezeichnung der Aufgabentypen wird hier den offenen Aufgaben mit Realitätsbezug angepasst.

<sup>2</sup> Realitätsbezug (s. etwa Böer 2000) fällt nicht notwendig mit Offenheit zusammen. Realitätsbezogene Aufgaben müssen nicht offen sein, und viele interessante offene Aufgaben und Probleme sind rein innermathematisch (z. B. Ambrus/Schulz 2001, Bruder 2003, Pehkonen 2001, Schupp 2000).

**Typ 1: Problemsituation**

(Anfangszustand unklar, Transformation unklar, Zielzustand unklar)

Viele Aufgaben aus dem Alltagsleben<sup>3</sup> können als Probleme ohne Fragen präsentiert werden, z. B. *Ein Rohbau soll verputzt werden*. Es ist nur die unklare Ausgangssituation gegeben, da genaue Informationen zu dem Problem nicht vorliegen. Schülerinnen und Schüler sollen dann selbst eine Frage formulieren, die mit Hilfe von mathematischen Methoden beantwortet werden kann, und diese bearbeiten. Im Beispiel 1 ist die Ausgangssituation durch Fotos beschrieben, aus denen die benötigten Informationen nur ungenau abgelesen bzw. geschätzt werden können. Mögliche Fragen, die von Schülerinnen und Schülern gestellt und beantwortet werden können, sind: *Wie viele Quadratmeter müssen verputzt werden? Wie teuer ist das Verputzen des Hauses? Wie lange dauert das Verputzen des Hauses?*



Beispiel 1: Problemsituation

**Typ 2: Unscharfes Problem**

(Anfangszustand unklar, Transformation unklar, Zielzustand klar)

Dieser Typ umfasst Aufgaben mit unklarer Ausgangssituation, aber eindeutiger Fragestellung, die hier *unscharfe Probleme* genannt werden. Im Beispiel 2 wurde die gleiche Ausgangssituation wie beim Typ 1 gewählt, allerdings mit einer Fragestellung, die den Zielzustand klar beschreibt. Mit der Bearbeitung dieses Typs können Schülerinnen und Schüler an die Bearbeitung des noch offeneren Typs 1 herangeführt werden.

Auch mit einer zusätzlichen Information, wie z. B. dem Preis für das Verputzen pro Quadratmeter, kann diese Aufgabe noch zu Typ 2 gezählt werden, da die Informationen über die zu verputzende Fläche weiterhin unklar sind.

<sup>3</sup> Dies unterstützt den geforderten Realitätsbezug.

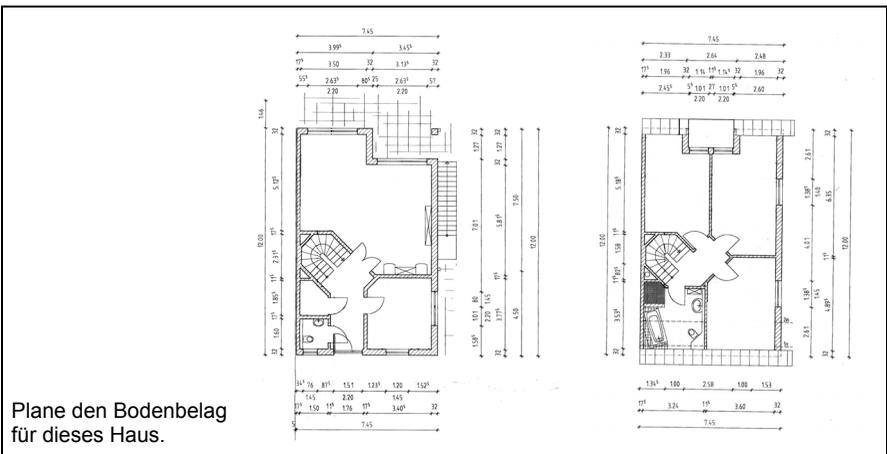


Beispiel 2: Unscharfes Problem

**Typ 3: Interpretationsproblem**

(Anfangszustand klar, Transformation unklar, Zielzustand unklar)

Zu diesem Typ zählen auch manche vorstrukturierte Sachaufgaben, Projektaufgaben (s. Wiegand/Blum 1999) oder Problemaufgaben (s. Bruder 2000). Darüber hinaus ist es möglich, durch Umkehrung von Standardaufgaben (z. B. Interpretation grafischer Darstellungen als Umkehrung der Erstellung von Graphen) Aufgaben dieses Typs herzustellen (etwa Ambrus/ Schulz 2001). Im Beispiel 3 ist ein Plan mit genauen Maßen vorgegeben und es ist der Bodenbelag zu planen. Die Fragestellung beschreibt den Zielzustand nicht klar, er muss aus den Berechnungen heraus interpretiert werden. Eine mögliche Lösung ist hier eine Liste von *möglichen* Bodenbelägen mit den zugehörigen Flächen.



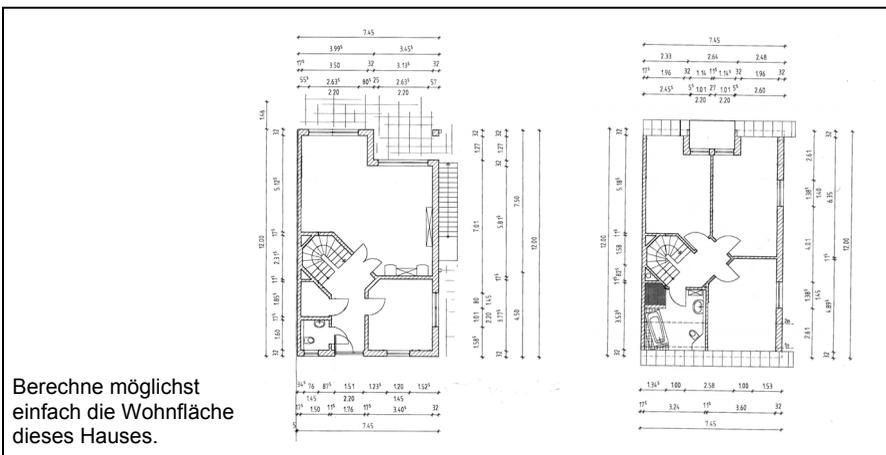
Beispiel 3: Interpretationsproblem

**Typ 4: Strategiefindungsproblem**

(Anfangszustand klar, Transformation unklar, Zielzustand klar)

Bei diesem Typ ist nur die Transformation unklar. Im folgenden Beispiel 4 ist eine Aufgabe aus dem Hauskontext gewählt, bei der der Lösungsweg unklar ist. Lösungen sind z. B. möglich durch Ablesen der Längen, Berechnen und Addieren von Teilfiguren oder Subtrahieren der Wandflächen usw. von der Gesamtfläche. Ebenso denkbar ist die Längenbestimmung durch Messen. Die Aufforderung, *möglichst einfach* vorzugehen, kann den Vergleich verschiedener Lösungswege anregen und zielt somit auf das Auffinden von Strategien.

Der Übergang vom Typ 2 zu Typ 4 kann fließend gestaltet werden, wenn die Anzahl der unklaren Parameter variiert wird. Im Beispiel zu Typ 2 ist die Unklarheit des Anfangszustands auf die fehlenden Informationen zurückzuführen. Sind zum Beispiel genauere Pläne für das Haus und weitere Informationen (z. B. Preise pro Quadratmeter) vorhanden, so ist diese Aufgabe bei Typ 4 einzuordnen.



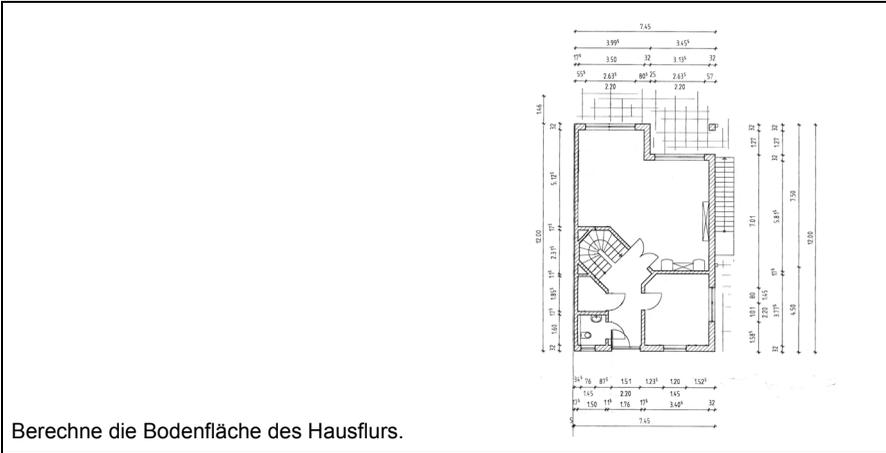
Beispiel 4: Strategiefindungsproblem

**Typ 5: Interpretationsaufgabe, Zielumkehraufgabe**

(Anfangszustand klar, Transformation klar, Zielzustand unklar)

Dieser Typ umfasst Aufgaben, bei denen die Lösung angegeben ist und die passende Aufgabenstellung eines bestimmten Typs dazu gesucht wird (s. Wiegand/Blum 1999). Die angegebene *Lösung* ist in diesem Fall der klar beschriebene *Anfangszustand*, während der gesuchte passende *Aufgabentext* nicht eindeutig festgelegt ist und damit den unklaren *Zielzustand* darstellt. Deshalb heißen solche Aufgaben auch *Zielumkehraufgaben*. Alternativ kann zur Herstellung von Aufgaben





Beispiel 6: Einfache offene Aufgabe

**Typ 7: Aufgabe erfinden**

(Anfangszustand unklar, Transformation klar, Zielzustand unklar)

Dieser Typ wird bei Wiegand/Blum (1999) nicht explizit erwähnt, ergibt sich aber sachlogisch aus der Klassifikationssystematik (vgl. z. B. Bruder 2000, 2003, Büchter/Leuders 2005). Hier sind Übungsaufgaben zu bestimmten Themenbereichen denkbar. Die Schülerinnen und Schüler könnten im folgenden Beispiel 7 eine Aufgabe finden, bei der die Anzahl der Arbeiter und die Zeit für das Verputzen dieses Hauses bestimmt werden. Die von den Schülerinnen und Schülern gefundene Aufgabe verwendet dann die klar vorgegebene Transformation. Der Anfangszustand ist aber nicht eindeutig festgelegt, da beispielsweise die Informationen für die Arbeitszeit eines Arbeiters an einer bestimmten Fläche nicht vorliegen. Ebenso ist der Zielzustand nicht klar, da viele andere Aufgaben auch möglich sind. Solche Aufgaben können die Fantasie der Schülerinnen und Schüler anregen.

Allerdings kann diese Aufgabe auch auf einer anderen Ebene betrachtet werden. Der Arbeitsauftrag für die Schülerinnen und Schüler besteht darin, eine Aufgabe mit bestimmten Eigenschaften zu finden. Damit ist ein neuer Anfangszustand beschrieben, nämlich eine Aufgabe zum Dreisatz zu finden. Aus Sicht dieser Meta-Ebene ist es ebenfalls möglich, diesen Arbeitsauftrag in das vorhandene Schema einzuordnen. Da weder klar ist, wie eine solche Aufgabe gefunden wird noch wie das Ergebnis sein wird, könnte diese Meta-Aufgabe dann z. B. eine Aufgabe vom Typ 3 sein.

Erfinde zu diesem Foto eine Aufgabe, die mit Dreisatz berechnet wird.



Beispiel 7: Aufgabe erfinden

### Typ 8: Anfangssituation erfinden

(Anfangszustand unklar, Transformation klar, Zielzustand klar)

Dieser Typ ist analog zu Typ 7, aber weniger offen, da zusätzlich der Zielzustand bestimmt ist. Das schränkt die Freiheit der Schülerinnen und Schüler beim Finden der Aufgabe ein. Auch hier ist der Anfangszustand durch das Foto nur unklar beschrieben. Die Überlegungen zur Meta-Aufgabe gelten hier analog zum Typ 7.

Erfinde zu diesem Foto eine Dreisatz-Aufgabe, wobei die Anzahl der Arbeiter sowie deren Arbeitszeit angegeben wird.



Beispiel 8: Anfangssituation erfinden

## 3 Untersuchung zu offenen Aufgaben mit Realitätsbezug

### 3.1 Untersuchungsdesign

Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I wurden paarweise interviewt und sollten eine der oben dargestellten Aufgaben ohne weitere Hilfe lösen. Die Arbeit der Schülerinnen und Schüler wurde mit einer Videokamera aufgezeichnet. Die jeweilige Schule war Durchführungsort der Interviews. Die Schülergruppen wurden aus dem laufenden Unterricht geholt und konnten sich freiwillig für die Teilnahme an der Untersuchung melden. Eine besondere Auswahl der Schülerinnen

und Schüler fand nicht statt, allerdings wurden die Lehrerinnen und Lehrer nach ihrer Einschätzung des Leistungsstandes der Schülerinnen und Schüler gefragt. In der Untersuchung wurden zunächst die Aufgaben vom Typ 2 und vom Typ 5 verwendet. Bei der Aufgabe vom Typ 2 wurde zusätzlich der Quadratmeterpreis für Außenputz angegeben.

Um die Lösung der Aufgaben nicht zu beeinflussen, beobachtet der Interviewer die Schülerinnen und Schüler bei der Lösung der Aufgaben ohne einzugreifen. Die Entscheidung, zwei Schülerinnen oder Schüler gemeinsam zu interviewen, wurde getroffen, um durch die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander mehr Informationen zum Lösungsprozess zu erhalten.

### 3.2 Erste Erfahrungen mit der Aufgabe vom Typ 2

Einige Interviewausschnitte verdeutlichen, wie Schülerinnen und Schüler mit der oben beschriebenen Aufgabe vom Typ 2 umgehen. Die kursiv gesetzten Begriffe in den Kommentaren heben typische Komponenten von Problemlöse- und Modellbildungsprozessen (s. Blum 1985) hervor.

#### Interview A

Die folgenden Interviewausschnitte stammen von einer Schülerin und einem Schüler des achten Jahrgangs einer Gesamtschule<sup>4</sup>:

- 00:24 Paul: Hier muss man kaum verputzen (Paul zeigt auf das rechte Bild, Fensterseite)
- 00:27 Sabrina: Ja hier Dreieck (Sabrina zeigt auf den Giebel)
- 00:28 Paul: Dreieck, Viereck, und dann hier die Tür, die Tür, das Fenster (Paul zeigt auf die Hauswand im Bild rechts, dann auf das Bild mit der Haustür.)

Paul und Sabrina *identifizieren* schon direkt zu Beginn des Interviews *mathematische Formen*. Dies deutet auf einen schnellen *Modellbildungsprozess* hin.

- 01:51 Sabrina Wir können das Gerüst nehmen das Gerüst ist immer ein (.) dass ein Mann drunter stehen kann . oder? (Sabrina zeigt auf das linke Bild mit dem Gerüst)
- ...
- 02:18 Sabrina Aber jetzt gucken wir die (.) Steine sind höchstens so hoch (Sabrina zeigt mit den Händen einen Abstand von ca. 20–25 cm)
- 02:22 Paul So hoch könnte passen irgendwie fünfundzwanzig Zentimeter oder? (Paul zeigt mit den Händen einen Abstand von ca. 25 cm)

---

<sup>4</sup> Die Leistung der Schülerin und des Schülers im Mathematikunterricht wurde vom Lehrer als sehr hoch eingeschätzt.

Sabrina schlägt das Gerüst und die Steine als *Referenzgrößen* vor. Auf Grund der Genauigkeit entscheiden sich Sabrina und Paul dann für die Steine.

- 04:32 Paul Ne Tür ist ungefähr wie breit sagen wir die Tür ist (Paul schaut auf die Tür im Raum)
- 04:35 Sabrina Ein Meter
- 04:36 Paul Ja irgendwie so was sagen wir neunzig Zentimeter dann wie oft geht die Tür da hin einmal zweimal dreimal viermal fünfmal würde ich sagen aber es ist hier ein (.) Schrägbild (Paul zählt im Bild oben rechts ab)

Auch die Tür wird als *Referenzgröße* verwendet. Ebenso wird die *Schwierigkeit durch das Schrägbild erkannt*.

- 09:15 Sabrina Na an der Seite wenn die drei fünfzig hoch sind (Sabrina misst mit dem Lineal auf dem Bild links unten)
- 09:24 Sabrina Fünf Zentimeter Zentimeter (.) hier etwa das Doppelte da sagen wir mal drei fünfzig sieben Meter (.) das ist mal wieder ziemlich weit nach hinten wenn das so sieben acht Meter sind
- 09:42 Paul Das hier sind keine wenn das hier acht Meter sind dann
- 09:45 Sabrina Ja dann sind da nämlich keine und das hier noch und das hier sind zwei Zentimeter etwa Meter etwa

Im späteren Verlauf der Berechnungen verwenden Paul und Sabrina Messungen auf dem Bild, um auf ihre bereits berechneten Daten zurückzugreifen.

## Interview B

Die folgenden Interviewausschnitte stammen von zwei Schülern des achten Jahrgangs einer Hauptschule<sup>5</sup>:

- 01:41 Michael Da ist ja auch noch die (Michael zeigt auf die Giebelseite des Hauses)
- 01:43 Florian Ja das sind warte das sind zwei Meter fuffzig immer plus dreißig Zentimeter Decke ja ich arbeite ab und zu auf dem Bau ich kenn das dann wieder die zwei fuffzig
- 01:57 Michael Ja aber du weißt das ist hier schmaler
- 01:58 Florian Ja das ist ja klar (.) das kann man nicht schätzen ... Ja lass doch erst mal das Berechnen dann müssen wir hinterher nur noch

Florian bringt hier sein *Alltagswissen* von seiner Arbeit auf dem Bau mit ein. Michael und Florian versuchen, die Maße zu *schätzen*, und erkennen die *Notwendigkeit für Berechnungen*.

---

<sup>5</sup> Die Leistung der Schüler im Mathematikunterricht wurde von der Lehrerin als durchschnittlich eingeschätzt.

- 08:34 Florian ... was mir grad mal einfällt wie teuer ist hier der Putz? So teuer ist ein ganzer Sack
- 09:11 Michael Ja die Stunden musst du ja auch
- 09:22 Florian Das kost vielleicht zehn Euro
- 09:24 Michael Ja Anfahrtkosten
- 09:30 Florian Die werden aber nicht pro Stunde gerechnet ach pro Quadratmeter

Florian stellt auf Grund seines Alltagswissens *Fragen* nach der *Plausibilität der Informationen* aus der Aufgabe und beginnt eine Diskussion *über den Realitätsgehalt* der Aufgabenstellung.

- 09:51 Florian Das war jetzt alles ne das ist das Ergebnis das sind praktisch ohne Fenster jetzt ne rechne das einfach jetzt zusammen dann müssen wir da gleich eben die Fenster noch alle
- 10:34 Florian Jetzt müssen wir die Fenster alle noch abrechnen Tür sind zwei Quadratmeter hier sind die Fenster noch

Florian hat die *Übersicht über die Aufgabenlösung* bekommen und legt die weitere *Strategie* fest.

### 3.3 Festlegung von Kategorien

Die Interviewausschnitte aus 3.2 zeigen insbesondere planerische Momente und verschiedene Arten der Datenbeschaffung bei der Lösung dieser offenen Aufgaben. Zur weiteren Auswertung wurden die Interviews komplett transkribiert. Aus den im vorigen Abschnitt auszugswise vorgestellten Auswertungen wurden die folgenden Kategorien für die weitere vollständige Kodierung von Interviews ausgewählt:

- *Planung*: Notwendigkeit für Berechnungen erkennen, Übersicht über die Aufgabenlösung bekommen, Strategie festlegen, Schwierigkeit durch das Schrägbild erkennen, mathematische Formen identifizieren, Modellbildungsprozess durchführen
- *Datenbeschaffung*: Referenzgrößen verwenden, Schätzen, Alltagswissen einbringen
- *Datenverarbeitung*: Formeln anwenden, Rechnungen ausführen<sup>6</sup>
- *Kontrolle*: nach der Plausibilität der Informationen fragen, über den Realitätsgehalt diskutieren

In die Kategorie Planung fallen beispielsweise auch Abschnitte der Interviews, in denen die Schülerinnen und Schüler sich im Bild orientieren oder einen Arbeitsschritt vorschlagen beziehungsweise festlegen. Ein Beispiel für eine solche Pla-

---

<sup>6</sup> Zu dieser Kategorie wurde hier kein Beispielausschnitt ausgewählt.

nungsphase ist in dem folgenden Ausschnitt (Interview E) abgebildet. Die Schülerinnen haben die Beispielaufgabe vom Typ 5 bearbeitet:

- 08:15 Carina Müssen wir da eigentlich auch machen oder? (zeigt auf die Türecke im rechten oberen Zimmer, 8 Sek. Pause, zeigt auf das rechte obere Zimmer)
- 08:25 Victoria Dieses Zimmer hier ne? Da kann man ja direkt dann weg
- 08:28 Carina Ja weil das ja 'n Dreieck ist; Da müssten wir das dann eigentlich auch machen, weil das ist ja auch die Kante .. Woll'n wa das doch noch eben machen? (verbindet frei Hand die Türlücke im rechten oberen Zimmer)

Die Kodierung in die vier genannten Kategorien erfolgte durch drei unabhängige Rater, wobei die Übereinstimmung mit Hilfe einer Konkordanzanalyse (vgl. Bortz/Lienert/Boehnke 1990, S. 460 f.) überprüft wurde. Es zeigte sich eine Übereinstimmung auf einem Signifikanzniveau von 0,05. Im Folgenden werden speziell die Planungsphasen der Interviews untersucht. Innerhalb dieser Planungskategorie werden Phasen, in denen die eigene Planung kontrolliert wird, besonders gekennzeichnet.

### 3.4 Ablaufpläne von Interviews

Die Verteilung der Planungsphasen über den gesamten Interviewverlauf kann auch grafisch dargestellt werden. Planungsphasen sind markiert und spezielle Kontrollphasen sind zusätzlich etwas stärker eingefärbt. Am Beginn der Zeile steht jeweils die Zeit in Minuten. Ein Zentimeter in der Darstellung entspricht ungefähr fünf Sekunden Interviewdauer. Die Nummern in den Tabellen kennzeichnen besondere Interviewausschnitte für den folgenden Abschnitt 3.5. Zwei solcher Ablaufpläne werden im Folgenden vorgestellt.

- *Interview A:* In den ersten Minuten diskutieren Sabrina und Paul über mögliche Referenzgrößen (s. Abbildung 1). Nach 6 Minuten beginnen sie mit der Flächenberechnung. In Minute 10 planen sie den Umgang mit der Schrägsicht auf dem Foto. Nach 16 Minuten beginnen sie die einzelnen Flächen zu addieren und verstärken ihre Kontrollen. In Minute 20 erhalten sie die durchaus realistische Fläche von  $130 \text{ m}^2$ . Anschließend werden damit die Kosten berechnet.
- *Interview B:* In der ersten Minute sprechen Michael und Florian über die (zu groß eingeschätzte) Grundfläche des Hauses (s. Abbildung 2). Bis zum Ende der Minute 4 haben sie alle rechteckigen Wandflächen berechnet. Ab Minute 5 berechnen sie die Giebelseite. In den Minuten 10 bis 13 bestimmen sie durch Abzählen die Fläche der Fenster. Sie erhalten auf Grund falsch geschätzter Werte und einer falsch angewendeten Formel für das Dreieck eine Fläche von  $260 \text{ m}^2$ .

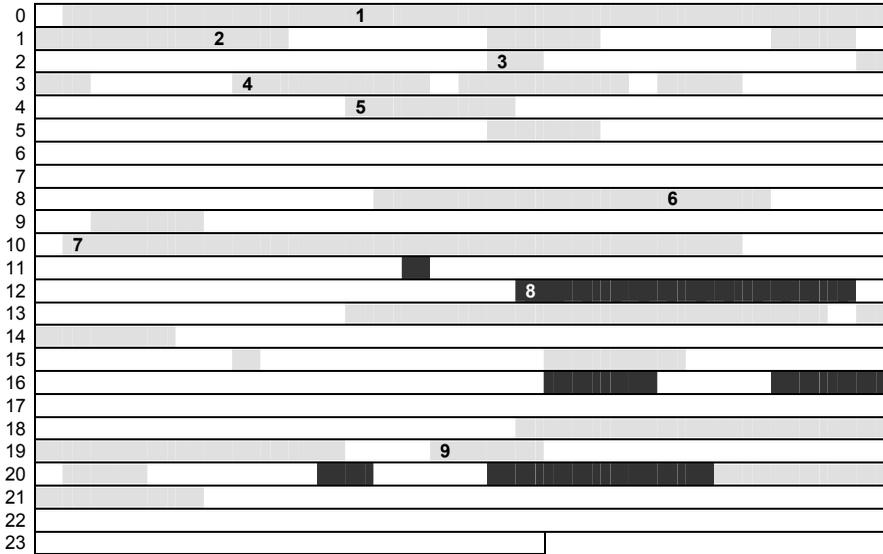


Abbildung 1: Ablaufplan Interview A (Gesamtschule, Aufgabe Typ 2)

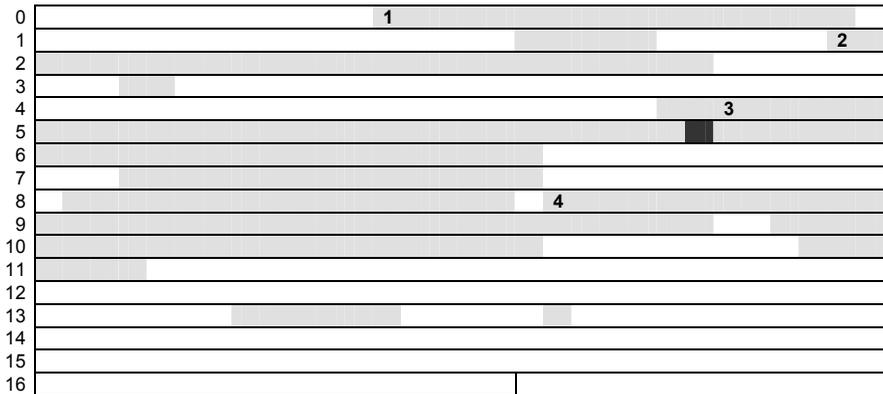


Abbildung 2: Ablaufplan Interview A (Hauptschule, Aufgabe Typ 2)

### 3.5 Verschiedene Funktionen der Planungsphasen

Die Ablaufpläne der beiden Interviews zeigen sehr unterschiedliche Muster. Während im ersten Interview kürzere Planungsphasen über die gesamte Dauer verteilt sind, gibt es im zweiten Interview lange Planungsphasen, allerdings nur in den ersten beiden Dritteln des Interviews. Der Anteil der Planungsphasen während des Interviews ist bei den Hauptschülern sogar höher als im ersten Interview.

Da sich mit dem Anteil der Planungsphasen das Ergebnis der Schülerinnen und Schüler nicht erklären lässt<sup>7</sup>, wird nun die *Funktion* der einzelnen Planungsphasen in den beiden Interviews genauer untersucht. Es zeigt sich, dass die Planungsphasen auf unterschiedlichem Niveau stattfinden können.

Im Folgenden werden die verschiedenen in den Interviews beobachtbaren Funktionen der Planungsphasen beschrieben und mit Ausschnitten aus den Interviews erläutert. Die Nummerierung der Planungsphasen entspricht den Nummern in den Ablaufplänen (s. Abschnitt 3.4).

### Interview A

Im Bild orientieren (1):

00:24 Paul Hier muss man kaum verputzen (Paul zeigt auf das rechte Bild, Fensterseite)

Einen Arbeitsschritt vorschlagen (2):

01:13 Paul Längen kann man schätzen

01:14 Sabrina Ja

Einen Beschluss fassen (3):

02:33 Paul (tun wir) erst (mal) verputzen.

Die Datenverarbeitung planen (4):

03:14 Sabrina Ja ok ich würde sagen wir rechnen erst mal die ganze gerade Fläche aus

03:24 Paul Welche Grundfläche?

03:26 Sabrina Ja ich mein dann hier alles

03:27 Paul Ich würd sagen

03:27 Sabrina ohne Fenster ohne alles

03:28 Paul (.)

03:29 Sabrina Ja meine ich auch

Die Datenbeschaffung planen (5):

05:35 Paul Das wissen wir auch nicht wie

05:37 Sabrina Ja können wir abschätzen

05:38 Paul Ja

---

<sup>7</sup> Eine lange Gesamtplanungszeit bedeutet noch nicht zwangsläufig auch bessere Planungsergebnisse.

Ein Realmodell planen (6):

08:46 Paul Also ich würd sagen wir sagen einfach das muss auch noch verputzt werden weil das Haus sieht nicht so aus als würde man schon angefangen haben zu verputzen oder

Ein mathematisches Modell diskutieren (7):

10:05 Paul Ja da haben wir im Prinzip diese Schrägsicht nicht die übliche Draufsicht

10:10 Sabrina Die Schrägsicht das haben wir (.) gemacht wenn das so ist wie weit das nach hinten geht

10:14 Paul Die Hälfte an sich aber

10:17 Sabrina Hier nicht hier nicht

10:18 Paul Das wird hier nicht passen

Die Planung kontrollieren (8):

12:34 Sabrina Ist das überhaupt realistisch, hundertfünf?

Die Strategie wechseln (9):

19:27 Paul Zweieinhalb? OK ich würde sagen hier machen wir aber nicht die vierundzwanzig Komma fünf minus sondern (.) gucken (.)

19:34 Sabrina Ja ja

Im Folgenden berechnen Sabrina und Paul die wenigen Wandflächen der Rückseite einzeln und nicht mit Hilfe der Gesamtfläche abzüglich der Fensterfläche.

## Interview B

Im Bild orientieren (1):

00:23 Florian Eh, das ist ja voll Kacke (..) nur schätzen ne. Ist en normales Haus ungefähr ne. Oder nicht?

Überlegungen zur Datenverarbeitung anstellen (2):

01:58 Florian ... Ja lass doch erst mal das Berechnen dann müssen wir hinterher nur noch

02:12 Michael Das kann man gar nicht ausrechnen

02:15 Florian Ne nicht wirklich

02:39 Florian Keine Ahnung

Überlegungen zur Datenbeschaffung anstellen (3):

04:48 Florian Ach ja die muss man ja rausrechnen dann sind das die beiden Seite jetzt erst bis auf .. die hinten das kannst du voll nicht schätzen das geht gar nicht

05:35 Florian Da sind zwei Etagen noch ne oder nicht ?

Eine Strategie festlegen (4):

08:34 Florian Mal zwei dann haben wir das komplette Haus ohne Fenster und Türen .. und das auch jetzt fehlt nur noch Fenster ...

...

10:34 Florian Jetzt müssen wir die Fenster alle noch abrechnen Tür sind zwei Quadratmeter hier sind die Fenster noch

Die Bezeichnung der Funktionen drückt den Schwerpunkt der jeweiligen Phase aus. Beispielsweise ist die Funktion *Überlegungen zur Datenverarbeitung anstellen* (s. Interview B, 2) auch in der Funktion *Datenverarbeitung planen* (s. Interview A, 4) enthalten.

Um einen besseren Überblick über die Funktionen der Planung in den beiden Interviews zu bekommen, werden sie im Folgenden noch einmal zusammenfassend dargestellt. Dabei wird versucht, sie aufsteigend nach Niveau zu ordnen. Da die *Planung der Datenverarbeitung* gedanklich deutlich weiter ist als die *Überlegungen*, die zunächst nicht in eine Planung münden, wird der Planung der Datenverarbeitung auch ein höheres Niveau zugeordnet als den Überlegungen zur Datenverarbeitung.

- Im Bild orientieren.
- Überlegungen zur Datenbeschaffung anstellen.
- Überlegungen zur Datenverarbeitung anstellen.
- Einen Arbeitsschritt vorschlagen.
- Einen Beschluss fassen.
- Die Datenverarbeitung planen.
- Die Datenbeschaffung planen.
- Eine Strategie festlegen.
- Ein Realmodell planen.
- Ein mathematisches Modell diskutieren.
- Die Strategie wechseln.
- Die Planung kontrollieren.

Die Position in dieser Liste ist ein Hinweis auf das Niveau der entsprechenden Planungsphase. Im Interview A ist eine deutliche Niveausteigerung der Planungsphasen während des Interviewverlaufs zu beobachten. Im zweiten Teil des Interviews gibt es Planungen zum Realmodell und zum mathematischen Modell, die auf hohem Niveau stattfinden. Ebenso gibt es längere Kontrollphasen und einen Strategiewechsel (9) bei der Berechnung der Rückseite des Hauses.

Die Schüler in Interview B stellen ebenfalls Überlegungen zur Datenbeschaffung und Datenverarbeitung an, kommen allerdings nur mühsam weiter. Die Festlegung der Strategie (4) ist dann richtig und sinnvoll. Sie findet erst zu einem späten Zeitpunkt innerhalb des Interviewverlaufs statt. Weiter gehende Planungen auf höherem Niveau finden nicht statt. Sie sind jedoch für die Lösung der Aufgabe auch nicht zwangsläufig nötig.

Inhaltlich entsprechen sich die Stellen mit der Nummer (4) in beiden Interviews. Im Interview A liegt diese Stelle aber an einem deutlich früheren Zeitpunkt als im Interview B.

Auffällig im Interview B ist der geringe Anteil der Kontrollphasen. Daher erkennen die Schüler in Interview B ihre völlig unrealistischen Werte nicht. Die Notizen der beiden Schüler (s. Abbildung 3) zeigen, dass sie zwar einen realistischen Wert für die Höhe eines Geschosses (2,80 m) verwenden, allerdings die Länge und Breite des Hauses mit 15 m bzw. 17 m deutlich zu groß annehmen. Eine Plausibilitätsbetrachtung in Bezug auf die (richtig gewählte) Höhe der Mauer hätte diesen Fehler vermieden.

$$\begin{array}{r}
 2,80 \cdot 15 = 42 \\
 2,80 \cdot 17 = 47,6 \\
 17 \cdot 6 \cdot 2 = 57 \\
 17 \cdot 1,80 \cdot 2 = 0,9 \\
 20,4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 47 \cdot 2 = 84 \\
 47,6 \cdot 2 = 95,2 \\
 51 \cdot 2 = 102 \\
 \begin{array}{r}
 84 \\
 + 95,2 \\
 + 102 \\
 \hline
 281,2
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 281,2 \\
 - 20,4 \\
 \hline
 260,8
 \end{array} \\
 260,8 \cdot 50 = \underline{\underline{13040}}
 \end{array}$$

Abbildung 3: Schülernotizen zu Interview B

An weiteren Interviews wurde untersucht, in welchem Umfang Planungs- und Kontrollschritte stattfinden und wie sie sich auf das jeweilige Interview verteilen.

### 3.6 Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der beiden oben dargestellten und dreier weiterer Interviews sind in Tabelle 2 zusammengefasst:

Interview	A	B	C	D	E
<b>Aufgabe</b>	Typ 2	Typ 2	Typ 2	Typ 5	Typ 5
<b>Schulform</b>	Gesamt- schule	Haupt- schule	Real- schule	Real- schule	Real- schule
<b>Klasse</b>	8	8	9	10	10
<b>Interviewdauer</b>	23:36	16:34	4:08	34:18	17:36
<b>Planung</b>	31 %	42 %	33 %	38 %	33 %
davon im 1. Drittel	32 %	35 %	59 %	30 %	39 %
im 2. Drittel	40 %	62 %	5 %	41 %	42 %
im 3. Drittel	28 %	3 %	36 %	29 %	20 %
<b>Planungskontrolle</b>	3 %	1 %	2 %	4 %	6 %
davon im 1. Drittel	0 %	0 %	0 %	1 %	1 %
im 2. Drittel	42 %	100 %	0 %	11 %	50 %
im 3. Drittel	58 %	0 %	100 %	88 %	49 %
<b>Ergebnis<sup>8</sup></b>	sehr genau	Fehler ca. 100 %	sehr genau	genau	genau

Tabelle 2: Interviewdaten

Die inhaltliche Zusammenfassung der Interviews A und B wurde bereits im Zusammenhang mit den Ablaufplänen angegeben. Hier folgt nun eine kurze Zusammenfassung der übrigen Interviews:

- *Interview C:* Frank und Marius bestimmen zunächst die rechteckigen Teile der Außenwände, zum Teil durch Verdoppeln der berechneten Flächen. Dann berechnen sie die Fläche und den Preis des Putzes der Giebelseiten. Sie schätzen die Fläche für Fenster und Türen und berechnen den Preis des Putzes für die anderen Seiten. Dann wird das Gesamtergebnis bestimmt. Sie erhalten

<sup>8</sup> Diese Zeile dient als grobe Orientierung, ob sinnvolle Werte ermittelt wurden, da es bei offenen Aufgaben keine eindeutigen Lösungen gibt. In diesem Fall wurden die ermittelten Werte mit den Werten des Architekten verglichen. Den Schülerinnen und Schülern lagen aber natürlich nicht alle Informationen vor, die der Architekt zur Verfügung hatte.

anderen Seiten. Dann wird das Gesamtergebnis bestimmt. Sie erhalten  $120 \text{ m}^2$  zu verputzende Fläche.

- *Interview D:* Moritz und Jan-Philipp berechnen einzeln die Flächen der drei in Frage kommenden Zimmer. Dazu zerlegen sie die Flächen in Dreiecke und Rechtecke. Sie verwenden auch den Satz des Pythagoras. Zur Bestimmung einer Teilfläche subtrahieren sie von der Grundfläche des Hauses alle zur Verfügung stehenden Teilflächen und auch die Fläche des Bades. Sie entscheiden sich für die Zimmer oben links und unten rechts wegen annähernd gleicher Fläche und Form.
- *Interview E:* Carina und Viktoria bestimmen einzeln die Flächen der drei Zimmer. Dazu berechnen sie Rechteckflächen und subtrahieren die Aussparungen an Balkon und Türecke. Sie entscheiden sich nur auf Grund der Zimmergrößen für die Zimmer oben links und unten rechts.

Die Tabelle zeigt einen durchschnittlichen Anteil der Planungsphasen von gut einem Drittel an der Gesamtzeit der Aufgabenbearbeitung. Die Planungsphasen sind bei fast allen Interviews relativ gleichmäßig auf die Gesamtzeit verteilt. Eine Ausnahme bildet dabei das oben schon beschriebene Interview B. Die beobachteten erfolgreichen Problemlöser haben also Planungsphasen über den gesamten Interviewverlauf verteilt durchgeführt. Dabei stieg (wie in 3.5 beschrieben) idealerweise das Niveau der Planungsphasen an.

Die denkbare Vorgehensweise eines Schülers oder einer Schülerin, der oder die zu Beginn der Aufgabenbearbeitung einen Plan erstellt und ihn dann nur noch abarbeitet, wird bei den durchgeführten Interviews nicht beobachtet. Der Plan wird erst während des Interviews entwickelt und später häufiger konkretisiert und modifiziert. Dieses Vorgehen ist möglicherweise effektiver als das Planen zu Beginn der Aufgabenbearbeitung, da zu diesem Zeitpunkt noch nicht alle Informationen zur Verfügung stehen.

Kontrollhandlungen treten in sehr unterschiedlichem Maße bei den Aufgabenlösungen auf. Kontrollvorgänge der Planung nehmen in den vorliegenden Interviews einen Anteil von bis zu 6 % der Gesamtzeit in Anspruch. Erfolgreiche Lösungen zeichnen sich durch längere Kontrollphasen aus. Die Kontrollphasen haben dann einen Schwerpunkt im letzten Drittel der Aufgabenbearbeitung.

Ein Einfluss des Grades der Offenheit von Aufgaben auf die Planungsphasen wird bei diesen Interviews nicht deutlich. Im ersten Teil der Arbeit wurde dargestellt, dass die verwendete Aufgabe vom Typ 2 als weiter offen angesehen werden kann als die Aufgabe vom Typ 5. Auf Grund der bisher gemachten Erfahrungen ist der hier variierte Grad der Offenheit nicht wesentlich für die Länge und die Anzahl der Planungsphasen. Möglicherweise ist ein Einfluss dieses Faktors auf die anderen Kategorien nachweisbar.

Beachtenswert ist, dass sich die beiden Hauptschüler fast 17 Minuten, die anderen Schülerinnen und Schüler teilweise noch deutlich länger, selbstständig und ohne Eingreifen des Interviewers mit einem für sie neuen und schwierigen Problem auseinandergesetzt haben.

Sicherlich lassen sich mit Hilfe der geringen Zahl von zugrunde liegenden Interviews keine für andere Fälle relevanten Aussagen machen. Es ist aber möglicherweise ein Trend feststellbar, dem bei weiteren Untersuchungen nachgegangen wird.

### 3.7 Schlussfolgerungen für den Unterricht

Aus diesen ersten Ergebnissen lassen sich auch unterrichtspraktische Konsequenzen ableiten:

- Für die Planungsphasen bei umfangreichen Aufgaben sollten Schülerinnen und Schüler mindestens ein Drittel der Zeit einplanen.
- Ein Plan muss während der gesamten Aufgabenlösung immer wieder durchdacht werden.
- Es ist sinnvoll, mit den Schülerinnen und Schülern über ihre Planungsideen und deren Niveau zu diskutieren, da dort erhebliche Unterschiede festgestellt werden konnten.
- Das teilweise Fehlen von Kontrollphasen während (und nicht nur nach) der Aufgabenbearbeitung sollte zum Anlass genommen werden, Kontrollvorgänge im Unterricht häufiger zu thematisieren.
- Auch weniger offene Aufgaben (wie z. B. die Aufgabe vom Typ 5) sind geeignet, die gewünschten Planungs- und Kontrollphasen hervorzurufen.
- Schülerinnen und Schüler aller Schularten sind in der Lage, selbstständig und längere Zeit offene Aufgaben zu bearbeiten.
- Planungsphasen können verschiedene Funktionen haben. Die Kenntnis dieser verschiedenen Funktionen kann eine Hilfe beim Lösen von offenen Aufgaben sein.
- Die Bearbeitung von offenen Aufgaben ist ein sehr individueller Vorgang. Planungsschritte erfolgen während der gesamten Bearbeitungszeit. Die gemeinsame Festlegung eines Lösungsplans für eine offene Aufgabe mit der gesamten Lerngruppe entspricht nicht dem natürlichen Aufgabenlöseprozess der Schülerinnen und Schüler.

Für die sorgfältige Erstellung der Interview-Transkripte bedanke ich mich bei Stephanie Albers (Interview E), Verena Meyer (Interview C) und Annette Neukirch (Interview D). Bei Frau Prof. Dr. R. Bruder, Herrn Prof. Dr. W. Herget und Herrn Prof. Dr. M. Stein bedanke ich mich für zahlreiche wertvolle Anmerkungen und Hinweise.

## Literatur

- Ambrus, A./Schulz, W. (2001): Offene Aufgaben beim Arbeiten mit Funktionen in der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, 69–72
- Blum, W. (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32(2), 195–232
- Blum, W./Wiegand, B. (2000): Offene Aufgaben – wie und wozu? In: mathematik lehren 100, 52–55
- Böer, H. (2000): Offene und lebensrelevante Aufgaben – nach und trotz TIMSS. In: mathematik lehren 100, 60–62
- Bortz, J./Lienert, G. A./Boehnke, K. (1990): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. Springer: Berlin/Heidelberg
- Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In: Flade, L./Hergert, W. (2000) (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen. Volk und Wissen: Berlin, 69–78
- Bruder, R. (2003): Konstruieren – Auswählen – Begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich Jahresheft 2003. Friedrich: Seelze, 12–15
- Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Cornelsen Scriptor: Berlin
- Dockhorn, C. (2000): Schulbuchaufgaben öffnen. In: mathematik lehren 100, 58–59
- Franke, M. (2003): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Spektrum: Heidelberg/Berlin
- Graf, D. (2001): Welche Aufgabentypen gibt es? In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht 54(7), 422–425
- Hergert, W. (2000a): Rechnen können reicht ... eben nicht! In: mathematik lehren 100, 4–10
- Hergert, W. (2000b): Gut geschätzt und kaum gerechnet – eine Aufgabe, viele Wege, viele Antworten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, 294–297
- Hergert, W. (2001): Aufgaben – nicht nur nach „Schema F“! In: Amelung, U. (2001) (Hrsg.): Neues Lernen – Neue Medien – Neuer Blick auf Standardthemen. Zentrale Koordination Lehrerbildung, ZKL-Texte Nr. 15, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 13–24
- Hergert, W. (o. J.): Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte. Online veröffentlicht unter [blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/22/herget.pdf](http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/22/herget.pdf)
- Hergert, W./Klika, M. (2003): Fotos und Fragen. Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Ideen, viele Antworten. In: mathematik lehren 119, 14–19
- Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht. Cornelsen Scriptor: Berlin
- Pehkonen, E. (1995): Use of open-ended problems. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27(2), 55–57
- Pehkonen, E. (2001): Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. In: Der Mathematikunterricht 47(6), 60–72
- Schulz, W. (2000): Innermathematisches Problemlösen mit Hilfe offener Aufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, 567–570
- Schupp, H. (2000): Thema mit Variationen. In: mathematik lehren 100, 11–14
- Silver, E. A. (1995): The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27(2), 67–72

- Wiegand, B./Blum, W. (1999): Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, 590–593
- Zimmermann, B. (1991): Offene Probleme für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23(2), 38–46

**Anschrift des Verfassers**

Dr. Gilbert Greefrath  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Zentrum für Lehrerbildung  
Robert-Koch-Str. 40  
48149 Münster  
greefrath@uni-muenster.de