Die Bedeutung des Rechners für eine problemorientierte Lehre – am Beispiel Oberstufengeometrie und Stochastik

von

Andreas Eichler und Uwe-Peter Tietze, Braunschweig

Kurzfassung: Ein zentrales Anliegen von MaDiN (Mathematik-Didaktik im Netz) ist das Bereitstellen von interaktiven Medien, um das Problemlösen zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer bzw. deren Reflexion eigener Problemlöseprozesse zu fördern. In dieser Arbeit werden zwei Varianten des Problemlösens, das weitgehend freie Entdecken-Lassen und die Vorgabe einer Problemsituation sowie ihrer Lösung, anhand der in Braunschweig entwickelten Module zur Didaktik der Oberstufengeometrie und Didaktik der Stochastik sowie der zugehörigen Ergebnisse der Evaluation von MaDiN diskutiert.

Abstract: The central aim of our MadiN-modules is the development of contexts, helps, and interactive medias, which promote problem solving and mathematical modeling in order to give the possibilities to the future teacher to reflect his own problem solving, and to provide him with means to influence problem solving processes of his students. All modules were evaluated and optimized according to the results of this evaluation (formative evaluation). In this article we discuss two forms of problem oriented, internet based teaching materials: the free discovery of problems and the guided problem solving of a given mathematical problem. Our discussion is based on two modules, which were developed in Braunschweig, and their evaluation: (1) mathematics education concerning analytic geometry and applied linear algebra, (2) statistics education.

1 Einleitung

> „Mathematik darf nicht als statisch empfunden werden, sondern sie muss immer wieder als Arbeit an der Lösung von (inner- wie außermathematischen) Problemen erfahren werden. [Daher müssen Lehramtsstudenten] über die Aneignung von Faktenwissen hinaus befähigt werden, auch ein exploratives und heuristisches Vorgehen als grundlegende Arbeitsformen der Mathematik zu begreifen.“ (DMV/GDM 2001)

Nicht erst seit TIMSS und PISA ist das Problemlösen, das Erlernen heuristischen Vorgehens, eine in der didaktischen Diskussion verbreitete Kernforderung an den Mathematikunterricht. Schon Polya (1966/1967a), der mit seinen zwei beispielhaften Werken die Grundlage für nahezu alle nachfolgenden didaktischen Arbeiten zum Problemlösen schuf, konstatiert, dass das problemlösende Lehren bzw. das Prinzip des aktiven Lernens für den Mathematikunterricht zentral sei, „wenn wir es als unser wichtigstes Ziel ansehen, unsere Schüler Denken zu lehren“ (Polya

1967b). Im Sinne eines „allgemeinbildenden Unterrichts" und einer allgemeinen Wissenschaftspropädeutik soll und kann problemorientiertes Lernen wichtige allgemeine Kenntnisse und Strategien der Hypothesengenerierung und -überprüfung entwickeln helfen und damit Qualifikationen vermitteln, die auch über die Mathematik hinausreichen.[1]

Eine offensichtliche Voraussetzung, um den problemlösenden Ansatz überhaupt in den Mathematikunterricht integrieren zu können, ist eine seltener formulierte Forderung, wie sie in der gemeinsamen Denkschrift der DMV und der GDM anklingt: Auch die Lehrerinnen und Lehrer müssen in ihrer Ausbildung oder durch Fortbildung die Fähigkeit vermittelt bekommen, das Problemlösen initiieren und begleiten zu können.

Eine zweites aktuelleres Postulat der Mathematikdidaktik, das dem Trend der Computerisierung untergeordnet ist (vgl. Borovcnik 1996), ist die Forderung, die modernen Formen der Informations- und Kommunikationstechnologien in der Schule und damit auch in die Lehrerausbildung zu integrieren. Ein groß angelegtes Forschungsprogramm des BMBF mit dem Namen „Neue Medien in der Bildung" enthält im Kern diese Forderung, die neben einer allgemeinen Verbesserung der Rechnerkompetenz die Konzipierung individueller, zeit- und ortsunabhängiger Lernangebote zum Ziel hat.[2] MaDiN (Mathematik-Didaktik im Netz) ist eines der vielen Projekte dieses Programms, dessen Ziel die multimediale Aufbereitung aller schulrelevanten mathematischen Themen für die Unterstützung des Lehramtsstudiums Mathematik ist.[3]

In den Teilprojekten bzw. Modulen von MaDiN zur Didaktik der Oberstufengeometrie und Didaktik der Stochastik besteht das Anliegen, beide genannten Kernforderungen der Didaktik zu verknüpfen, d. h. das aktive oder problemlösende Lernen in eine multimediale Lehr- und Lernumgebung zu integrieren, die individuelle zeit- und ortsunabhängige Lernwege für Lehrerinnen und Lehrer in beiden Ausbildungsphasen, aber auch in der Profession ermöglicht.

Im Folgenden soll die Verbindung des problemlösenden Ansatzes mit der Verwendung des Rechners und ihre Bedeutung für das Lehren von Mathematik diskutiert werden. Wir entwickeln unsere Überlegungen an zwei von der MaDiN-Arbeitsgruppe Braunschweig erstellten Modulen. Das Modul *Didaktik der Stochastik* besteht aus den drei Bereichen beschreibende Statistik bzw. Datenanalyse, Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik. Die Inhalte orientieren sich an den Empfehlungen des AK Stochastik für den Stochastik-Unterricht (vgl. Engel 2002).

---

1 Vgl. Klafki (1994), Tietze (2000a, 12ff.).

2 Vgl. das Internetportal des Programms, http://www.gmd.de/PT-NMB/

3 Vgl. www.madin.net sowie zur Beschreibung der Konzeption Stein u. a. (2004).

Sie sollen durch die Integration von realitätsorientierten Beispielen, grafischen und interaktiven Medien sowie vielfältigen Handlungsaufforderungen – zum Problemlösen, Modellieren, Experimentieren oder Simulieren – eine aktive Auseinandersetzung mit fachlichen und didaktischen Aspekten der Stochastik fördern.[4]

Das Modul *Oberstufengeometrie und angewandte Lineare Algebra* umfasst zum einem die üblichen Themen der linearen analytischen Geometrie und Elemente der linearen Modellierung.[5] Darüber hinaus werden auch nicht-lineare Gebilde untersucht. Ausgehend von den Kegelschnitten werden Kurven und ausgewählte Flächen unter geometrischer Perspektive gesehen. Eine solche Oberstufengeometrie umfasst auch Elemente der synthetischen Geometrie und führt vorsichtig an Grundfragen der Differentialgeometrie heran, klammert dabei aber eine infinitesimale Behandlung aus. Eine zentrale Idee ist das algebraische Beschreiben von „Objekten“, wobei der Objektbegriff sehr weit gefasst wird.[6] Wesentlich ist die Nähe zur Realität und die Forderung, dass man mit einem solchen „Objekt“ experimentieren kann. Uns geht es in dem Modul zur Oberstufengeometrie auch darum, exemplarisch Möglichkeiten des Experimentierens mit dem Rechner aufzuzeigen.

In der hier vorliegenden Arbeit werden zwei Varianten rechnergestützter, problemorientierter Lehre diskutiert,

- das weitgehend freie Entdecken-Lassen (Abschnitt 2),
- die Vorgabe einer Problemsituation sowie deren Lösung im Sinne der Brunerschen[7] Vorstellung von „guided discovery“ (Abschnitt 3).

Diese pointierte Trennung ist nicht unproblematisch, vereinfacht aber die Darstellung. Die Unterscheidung verliert insbesondere dann an Trennschärfe, wenn man wesentliche Teile des Problemlöseprozesses als eine fortlaufende Umformulierung des Ausgangsproblems sieht.

> „For the educational technology field, evaluation was now being viewed as an integral and ongoing part of the instructional development process.“ (Ross/Morrison, nach Fricke 1995, 11)

Die Konzeption von MaDiN beruht neben theoretischen Überlegungen zentral auf entwicklungsbegleitenden (formativen) Evaluationen (vgl. dazu Tergan 2000). Einige Ergebnisse dieser Evaluationen, die in die diskutierten theoretischen Überlegungen und ihren Umsetzungen eingeflossen sind, sollen daher die Darstellungen der beiden Varianten aktiven Lernens bzw. Lehrens ergänzen.

---

4 Vgl. zur speziellen Konzeption dieses Moduls Eichler (2004).

5 Für die Konzeption dieses Moduls bildet Tietze (2000b) und die dort angegebene Literatur die fachmathematische und didaktische Grundlage.

6 Mit der Betonung von Objektstudien knüpfen wir an Ideen von Lietzmann (1916) an.

7 Bruner (1976)

2 Entdecken von Mathematik mit dem Rechner

Warum überhaupt mit dem Rechner Mathematik entdecken? Die Motivation, in MaDiN Elemente zu integrieren, die das aktive und weitgehend freie Entdecken fördern können, ist einerseits die Überzeugung, dass durch das aktive Entdecken das mathematische Denken über Faktenwissen hinaus entwickelt wird (vgl. Polya 1967b). Andererseits kann erst das eigene intensive Entdecken von Mathematik in der Ausbildungszeit zukünftige Lehrerinnen und Lehrer in die Lage versetzen, ihre späteren Schüler entdecken zu lassen – auch über solche Phänomene hinaus, die das Schulbuch vorsieht.

2.1 Der Rechner als Entdecker

Was kann man entdecken?

Die Mathematik, auch die Schulmathematik, ist voller interessanter Phänomene und Muster, die es zu entdecken oder wieder zu entdecken gilt. Die Grenzen liegen hier kaum in der Sache selbst, sondern sind eher durch institutionell oder eine Lehrperson vorgegebene Zielbeschränkungen gegeben. So ist in der Lehre – sowohl in der Schule als auch der Universität – ein gewisser (Ziel-)Rahmen vorgegeben, innerhalb dessen man Freiheiten geben kann, zu entdecken.

Dennoch ist das Entdecken selten und mit dem Rechner prinzipiell nicht voraussetzungslos. So müssen bereits mathematische Strukturen im Rechner implementiert sein, die ein Entdecken erst ermöglichen können. Beispielsweise kann die Binomialverteilung als eine mögliche mathematische Struktur vorgegeben sein, die detaillierteren Eigenschaften dieser speziellen und wichtigen Wahrscheinlichkeitsverteilung können dagegen entdeckt werden, wenn man die eingehenden Parameter systematisch verändert. Ähnliches gilt für Kurven und Flächen.[8]

Der Rechner kann solch einen Entdeckungsprozess wesentlich vereinfachen, fördern oder sogar erst möglich machen.

Welche Hilfe gibt es im Entdeckungsprozess?

Die zentrale Hilfestellung, die der Rechner im Entdeckungsprozess leisten kann, ist seine Fähigkeit, einen immensen Rechenaufwand übernehmen zu können. Dadurch können komplexe Rechnungen oder auch sehr häufig wiederholte Rechnungen an den Rechner delegiert, d. h. rein algorithmische Kompetenzen ausgelagert werden. Damit einher geht die Möglichkeit des Rechners, mathematische Phänomene sichtbar zu machen, indem er ein Werkzeug darstellt, „das es erlaubt, Darstellungen auf Knopfdruck zu erzeugen“ (Weigand/Weth 2002, 37).[9] Der Rechner wird damit zu

---

8 Geraden und Ebenen sind wesentlicher Ausgangspunkt.

9 Weigand/Weth bezeichnen dies mit dem Schlagwort „Prinzip der adäquaten Visualisierung“, das den Rechnereinsatz in der Lehre auszeichnet.

einer Heuristik im Problemlöseprozess, der ohne notwendiges konkretes Ziel das Entdecken mathematischer Phänomene ermöglicht.

Eine weitere Hilfestellung folgt aus den eingangs des Kapitels formulierten Überlegungen. Wenn für das Entdecken bereits eine mathematische Struktur bereit gestellt werden und insbesondere beim Entdecken mit dem Rechner in diesen implementiert sein muss, dann ist es eine geeignete Hilfestellung, das Entdecken visuell und rechnerisch an ausgewählten sowie mathematisch und didaktisch sinnvollen Themen anzusetzen. Eine Möglichkeit, solche sinnvollen Themen zu definieren, ist der Ansatz, fundamentale oder zentrale Ideen eines Themas zu identifizieren und solche Ideen bevorzugt als Ausgangspunkt des Entdeckens vorzusehen.

Eine letzte Hilfestellung ist durch das Medium Rechner bzw. rechnergestützte Lehr- und Lernumgebung bedingt. Da kontextfreie Entdeckungen kaum möglich scheinen, bedürfen Entdeckungen einer wie auch immer gestalteten mathematischen Grundlage, die überhaupt erst das Entdecken von Strukturen ermöglicht. Ein Rechnerprogramm benötigt daher die interne oder externe fachliche Begleitung, um das Entdecken und das Verarbeiten von mathematischen Phänomenen fruchtbar zu machen.

Grenzen des Entdeckens mit dem Rechner

Eine bei aller Euphorie auf Grund der Leistungsfähigkeit des Rechners leicht zu unterschätzende Grenze ist die Tatsache, dass der Rechner allein als Hilfsmittel des Entdeckungsprozesses zu verstehen ist. Visualisierungen mathematischer Strukturen können – selbst wenn sie von algebraischen oder numerischen Auswertungen begleitet werden – weder komplexere Probleme quasi von selbst lösen noch das Entdecken von Phänomenen vorausbestimmen. Sie erzeugen schließlich nicht von selbst mathematisches Verständnis. Sie können dennoch all die genannten Denkprozesse entscheidend fördern.

Eine weitere Grenze besteht darin, dass der Rechner in Teilgebieten – insbesondere bezogen auf seine grafischen Darstellungsmöglichkeiten – als Hilfsmittel auch versagen kann. So sind etwa infinitesimale Prozesse nur sehr vage mit einer grafischen Darstellung zu verbinden. Beispielsweise ist zwar das empirische Gesetz der großen Zahlen sehr anschaulich mit dem Rechner darstellbar, der Unterschied zwischen dem stochastischen und dem analytischen Grenzwert wird in der Darstellung aber verborgen bleiben. Ein anderes Beispiel sind Darstellungen von Phänomenen, die den dreidimensionalen Raum verlassen und damit durch ein prinzipiell auf drei Dimensionen beschränktes Bild nicht mehr darstellbar sind.[10] Dennoch kann auch

[10] Im Grunde genommen gilt dies natürlich bereits für Phänomene im dreidimensionalen Raum, von dem der Rechner höchstens eine Projektion auf den zweidimensionalen Raum darstellen kann.

hier die Visualisierungsmöglichkeit des Rechners ein Verständnis anbahnen, das es später ohne Visualisierung zu verallgemeinern gilt oder das (Stichwort: Grenzwert von Folgen und Reihen) die prinzipielle Unmöglichkeit einer visuellen Vorstellung mathematischer Phänomene aufdeckt.

Eine letzte Grenze der Visualisierungsmöglichkeiten des Rechners ist das prinzipielle Fehlen einer Antwort nach dem Sinn und Zweck der dargestellten mathematischen Strukturen. Während mathematisch gesehen das zunächst ziellose Entdecken zwar reizvoll sein kann, ist es die Aufgabe der Didaktik, die Auswahl von Inhalten und damit auch die Auswahl von Entdeckungsmöglichkeiten mit einem didaktischen Ziel, sei es innermathematisch, anwendungsbezogen oder prozessorientiert, zu verbinden.[11] Ohne solch eine Einbettung bleibt eine Rechnerumgebung, die das Entdecken mathematischer Phänomene fördert, unvollständig.

Die Einbindung und Umsetzung der hier entwickelten theoretischen Ideen in die Lehr-Lernumgebung MaDiN soll im folgenden Abschnitt diskutiert werden.

2.2 Der Rechner als Entdecker in MaDiN

Fasst man die im vorangegangenen Abschnitt entwickelten Überlegungen zusammen, so könnte man folgende Forderungen an eine rechnerbasierte mathematikdidaktische Lehr-Lernumgebung stellen:

- Nutzen der Visualisierungsmöglichkeiten des Rechners, verbunden mit algebraischen oder numerischen Auswertungen.
- Verbindung der Visualisierungen mit dem mathematischen Kontext.
- Verbindung der Visualisierungen mit einem didaktischen Kontext.
- Visualisieren der zentralen Ideen eines Themengebietes.

Diese Forderungen sind Kernprinzipien in der Entwicklung von MaDiN. So wird grundsätzlich in Visualisierungen die ikonische mit der symbolischen Repräsentation mathematischer Sachverhalte verbunden. Ebenso sind die Visualisierungen stets in einen fachlich-mathematischen und auch in einen didaktischen Kontext eingebettet. Dieser Anspruch von MaDiN geht einher mit der Vermeidung einer isolierten Bearbeitung mathematischer oder didaktischer „Perlen“ zugunsten einer umfassenderen Bearbeitung der schulrelevanten mathematischen Teilgebiete.

Eine bisher noch nicht beachtete Frage ist es, wie solche zentralen Ideen überhaupt visualisiert werden können oder sollen. Prinzipiell scheinen hier drei Varianten denkbar, das Standbild, die animierte Bildfolge oder die Interaktivität, d. h. eine Visualisierung, die den selbstbestimmten Eingriff des Nutzers ermöglicht:

[11] Vgl. dazu die drei mathematischen Grunderfahrungen nach Winter (1995).

- Ein Standbild gilt in MaDiN allein als Visualisierungsmöglichkeit, wenn ein fest umrissener Sachverhalt, der keine Änderung eines Parameters notwendig macht, anschaulich dargestellt werden soll. Ein Standbild, die eigentlich buchbezogene Visualisierung, verneint allerdings die vom Rechner bereit gestellte Fähigkeit, viele Rechnungen sehr schnell auszuführen und damit etwa Parameteränderungen in Echtzeit anbieten zu können.
- Die Animation ist ein Visualisierungsmittel, auf das weit gehend verzichtet worden ist. So scheint eine Animation als chronologische Abfolge von Einzelbildern nur dann geeignet zu sein, wenn chronologische Abläufe dargestellt werden sollen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Animation allein schmückendes Beiwerk ohne eine tiefere Funktion.
- Der Kerngedanke in MaDiN ist die Visualisierung zentraler Ideen in Form von interaktiven Elementen, die von Strebkowski/Kleeberg (2002, 231) als wichtige, „wenn nicht fundamentalste Eigenschaft didaktischer Multimediaanwendungen“ bezeichnet werden.

Die Darstellung einiger Interaktivitäten soll im folgenden Abschnitt die hier entwickelten Anforderungen an eine multimediale Lehr-Lernumgebung illustrieren.

2.3 Interaktive Elemente in MaDiN

Beispiele zur Stochastik

Die Möglichkeiten der interaktiven Medien werden im Folgenden anhand dreier Elemente exemplarisch vorgestellt. Dabei geht es um die Visualisierung zentraler Ideen (diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen), die Veranschaulichung konkurrierender statistischer Methoden (Regression) und schließlich die Interaktion als Hilfsmittel für eine adäquate Vorstellung eines Begriffs bzw. eines Satzes (bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes).

Beispiel 1: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Für das Thema bzw. den Schreibtisch *Diskrete Verteilungen* sind die Erkenntnis der Parameter-Abhängigkeit ausgezeichneter theoretischer Verteilungen sowie das Verständnis der Modellhaftigkeit dieser Verteilungen zentrale Ideen. Das zu diesen Ideen erstellte interaktive Element enthält einerseits die Möglichkeit, die Parameter einer Verteilung zu ändern, andererseits unter Vorgabe von Parametern ein Zufallsexperiment zu simulieren, um die Variabilität zwischen zwei Simulations-Ergebnissen entdecken zu können (vgl. Abb. 1).[12] Die Visualisierung enthält damit die Möglichkeit, einerseits Eigenschaften der Binomialverteilung, andererseits das statistische Phänomen der Variabilität zu entdecken.

[12] Vgl. zur Variabilität als Kernelement statistischen Denkens Pfannkuch/Wild (1999).

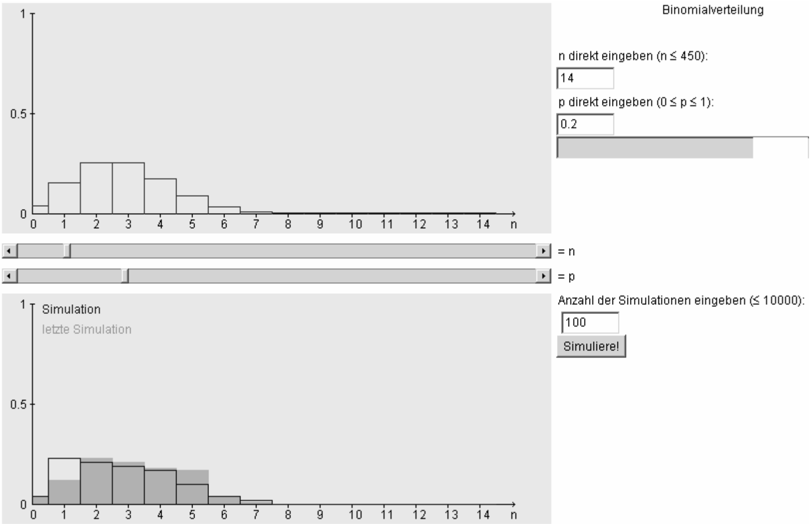

Abbildung 1: Interaktives Element zur Binomial-Verteilung

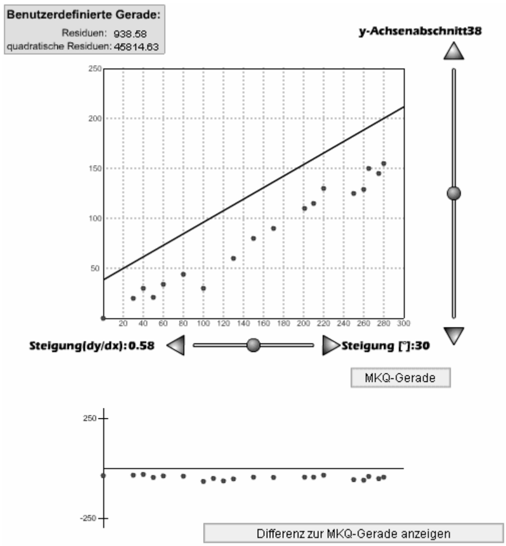

Abbildung 2: Interaktives Element zur Regression

Beispiel 2: Regression

Stochastik ist bestimmt durch das Modellhafte der Methoden. Insbesondere in der Statistik sind die Methoden im Grunde genommen Heuristiken. Die Anwendung einer Methode ergibt lediglich eine Basis, auf der durch Interpretation im Sachkontext eine statistischen Aussage entwickelt werden kann. Interaktive Elemente können unter diesem Gesichtspunkt einerseits einen Vergleich von Methoden bzw. Modellen auf anschaulicher Ebene fördern und andererseits Grenzen von Methoden und Modellen sichtbar machen. Ein Beispiel zu diesem Aspekt wäre etwa die Einbindung von zwei Modellen einer Regressionsgeraden in eine veränderbare Punktwolke und der Vergleich der Residuen in einem interaktiven Element (vgl. Abb. 2).

Beispiel 3: Das Einheitsquadrat

„Es kann immer wieder beobachtet werden, dass viele Studierende große Probleme im Verständnis grundlegender Begriffe und Denkweisen der Stochastik haben“ (Engel 2002, 81). Interaktive Elemente können die in der Didaktik und bei der Anwendung mathematischer Modelle in der Praxis identifizierten Verständnisprobleme und Möglichkeiten zu deren Behebung aufgreifen und in einfacher, anschaulicher Form umsetzen. Ein Beispiel dazu ist etwa ein interaktiv veränderbares Einheitsquadrat mit relativen und absoluten Größenangaben zur Visualisierung von bedingten Wahrscheinlichkeiten.[13]

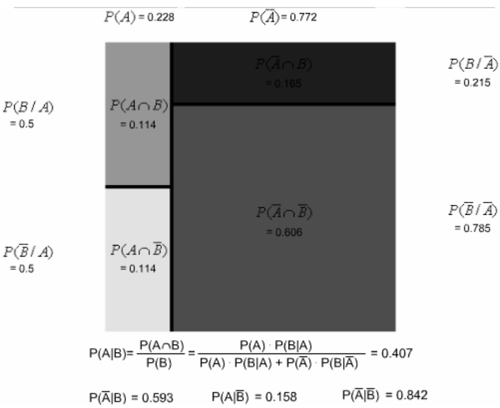

Abbildung 3: Interaktives Element zum Einheitsquadrat

[13] Vgl. zum Einheitsquadrat Bea (1995) und zur Problemstellung der Diagnose seltener Ereignisse (Mammographie, AIDS etc.) in der Medizin Gigerenzer (2002).

Beispiele zur Oberstufengeometrie und angewandten Linearen Algebra

Wir stellen unterschiedliche Möglichkeiten interaktiver Medien exemplarisch vor an Hand von drei Mediengruppen zu den Themenbereichen

- Geraden, Kegelschnitte, weitere Kurven
- lineare Modellbildung.

Beispiel 4: Die Erstellung einer Ellipsenschablone

Das Medium (Abb. 4) soll den Problemlöser dabei unterstützen, ein konkretes realitätsbezogenes Problem in eine mathematische Fragestellung umzuwandeln. „Es soll aus einem rechteckigen Stück Pappe eine möglichst große Ellipsenschablone erstellt werden.“[14] Die Gärtnerkonstruktion der Ellipse sei bekannt. Das Arbeiten mit dem Euklid-Medium führte die von uns beobachteten Problemlöser dazu, das Problem in die Frage nach dem mathematischen Zusammenhang zwischen Breite und Länge der Pappe einerseits und Fadenlänge und Abstand der Befestigungspunkte andererseits umzuwandeln. Die Mehrzahl der Problemlöser kam durch weiteres Experimentieren darüber hinaus zu dem „Schluss“, dass ein direkter Zusammenhang zwischen Fadenlänge und Länge der Pappe bestehen muss. Den weiteren Verlauf des Problemlöseprozesses verfolgen wir in Abschnitt 3.3 Beispiel 9.

Beispiel 5: Problemorientierte Behandlung von Kurven

Die rechnerunterstützte Behandlung von Geraden, Spiralen, Rollkurven und Rosetten ist in dem Modul nach ähnlichen Gesichtspunkten aufgebaut. Wir erläutern Details am Beispiel von Rollkurven.

- Auf der Basis der geometrisch-operativen Kennzeichnung der Kurven als Rollkurven werden Euklid-Medien (Abb. 5) bereit gestellt. Diese Medien erlauben zahlreiche Experimente und sind zugleich Ausgangspunkt für eine Algebraisierung.
- Ausgehend von der Algebraisierung wird ein Excel-Medium (Abb. 6) bereit gestellt, das Entdeckungen in einem problemorientierten Unterricht ermöglicht. Es stellt sich zum Beispiel die Frage, ob die Kurve geschlossen ist, wann sie sich ggf. schließt und ob es Überdeckungen gibt.

---

[14] Die Einschränkungen zur Lage wurden von allen Problemlösern unhinterfragt gemacht. Die Frage nach dem Begriff Größe stellte sich ebenfalls nicht. Zahlreiche Versuche in Seminaren haben gezeigt, dass die Problemstellung auch für Studenten des höheren Lehramts ein echtes Problem darstellt. Ferner konnten wir beobachten, dass die Studenten bei Benutzung des Mediums kaum zusätzliche direkte (ergebnisorientierte) Hilfen benötigten. Ohne das Medium bzw. alternativ ohne prozessorientierte Hilfen fanden die Studierenden dagegen keinen Zugang zu dem Problem.

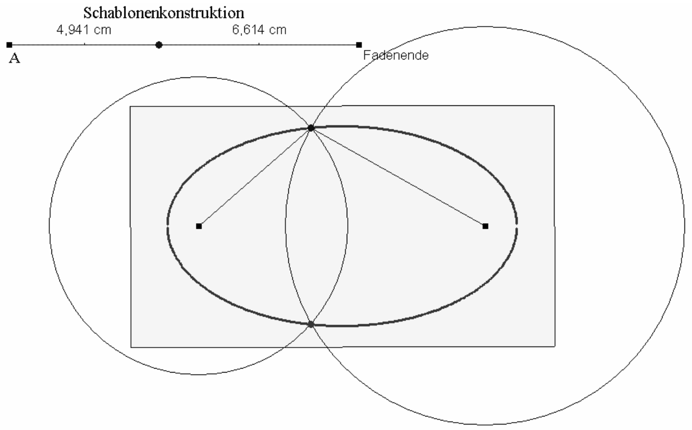

Abbildung 4: Euklid-Medium

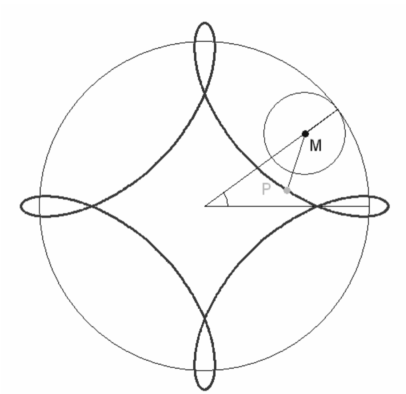

Abbildung 5: Euklid-Medium

Die Excel-Medien gestatten vielfältige Experimente mit den Parametern und dienen dem operativen Durcharbeiten. Sie werden in der Regel durch Maplets[15] (Abb. 7) ergänzt. Die zusätzlichen Derive-Medien basieren ebenfalls auf der Parameterdarstellung. Sie sollen den schulrelevanten Umgang mit Derive unterstützen.

Eine wichtige Ergänzung kann das Experimentieren mit Materialien wie dem Spirographen sein, dessen Funktionsweise mittels eines Films dargestellt wird.

15 Die Benutzung der Maplets setzt zurzeit das Vorhandensein von Maple voraus.

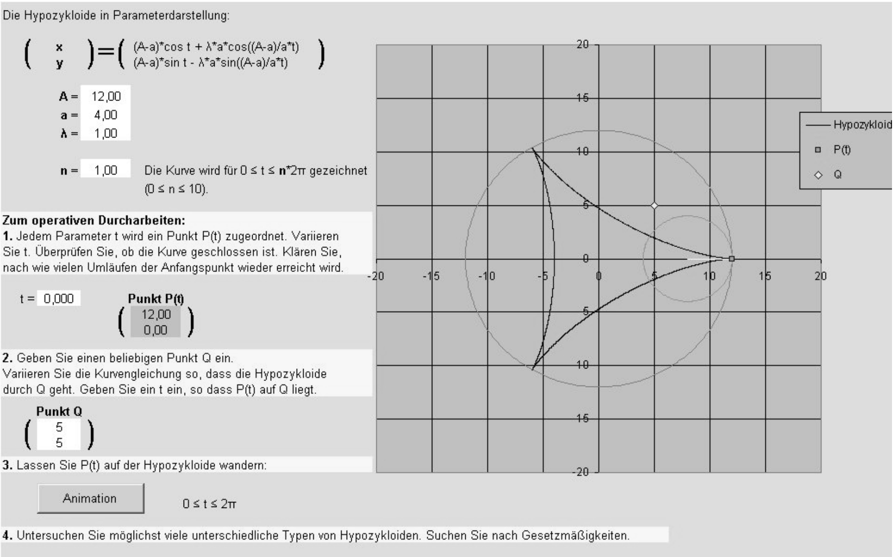

Abbildung 6: Excel-Medium

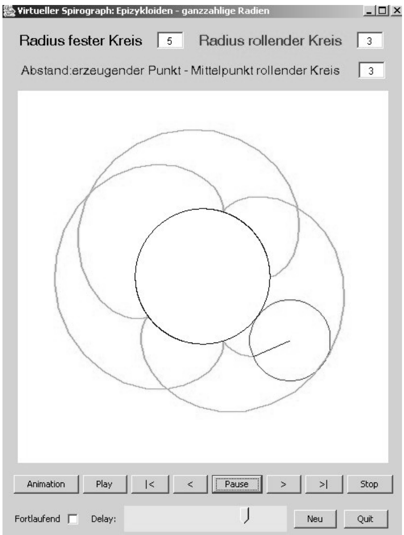

Abbildung 7: Maplet-Medium

Die entwickelten Problemkontexte und Medien leiten in der Regel auf allgemeine Fragestellungen hin. So führen etwa die Medien zur Spirale Analysis-frei zu Fragen der Bogenlänge und der Krümmung hin, die Medien zur Rosette erlauben eine Auseinandersetzung mit Polarkoordinaten.

Beispiel 6: Kaffeemarkt

Das folgende Problembeispiel soll zeigen, wie man durch Einsatz eines interaktiven Mediums (Abb. 8) eine Problemlöseblockade beseitigen und darüber hinaus zahlreiche Hypothesen entwickeln kann.

> „Zwei Fabrikanten stellen zwei miteinander konkurrierende Kaffeemischungen M_1 und M_2 her. Der herrschende Trend für den Wechsel von Kunden von einer Sorte zu einer anderen in einem Monat wurde durch Befragungen erfasst: 10% wechseln von M_1 zu M_2, 20% von M_2 zu M_1. Nehmen Sie dazu an, dass anfangs 60% der Käufer M_1 und 40% M_2 kauften. Kann der Produzent von M_2 langfristig seinen Marktanteil vergrößern? Wie entwickelt sich der Kaffee-Markt?“

Nicht selten ist bei Studenten die folgende Argumentation: „Letztlich verliert der Hersteller der Marke M_2 pro Zeiteinheit 10%; er wird also nach einer gewissen Zeit aus dem Markt geworfen.“

Das Excel-Medium zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Man stellt zudem fest, dass sich die Marktverteilung relativ schnell auf feste Werte einpendelt, und zwar unabhängig von der Ausgangssituation. Das Problem hat viele Variations- und Erweiterungsmöglichkeiten und erlaubt Zugänge zu anderen Anwendungen und Gebieten.

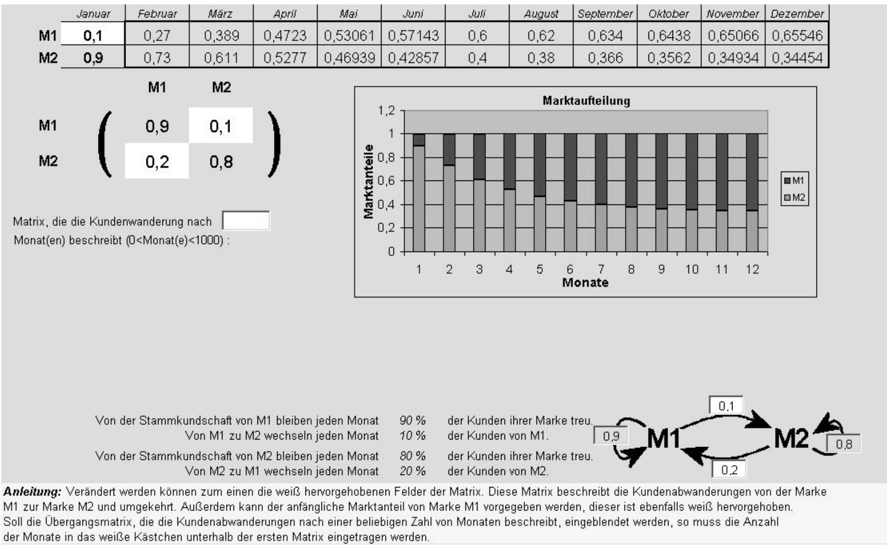

Abbildung 8: Excel-Medium

Man kann z. B. nach stabilen Marktverteilungen und dem Einfluss weiterer Anbieter fragen.[16] Die Marktanteile lassen sich als Wahrscheinlichkeiten deuten; man erhält damit Übergänge zur Stochastik.

2.4 Evaluationsergebnisse

Anmerkungen zum Design und zur Fragestellung der Evaluation

Ein zentrales Ergebnis der formativen Evaluation, die nach verschiedenen Aspekten der Entwicklung von MaDiN gestaffelt wurde (vgl. Eichler 2004, 102), ist die Beurteilung der heuristischen Funktion interaktiver Elemente von MaDiN. Den Studierenden war die Aufgabe gestellt worden, einen Seminarunterricht vorzubereiten, wobei ihnen MaDiN zur Verfügung gestellt wurde.[17] Die Daten wurden in dieser Evaluationsphase folgendermaßen erhoben:

- durch ein halb-strukturiertes Interview vor dem geplanten Seminarunterricht zu den bei der Planung verwendeten Materialien (vgl. Friedrich 1997, 282, und zu den Interviewformen Lamnek 1993).
- durch ein halb-strukturiertes Interview nach der Durchführung aller Seminarstunden. In der Zeitspanne des Semesters wurde MaDiN wesentlich weiterentwickelt. Die zentrale Fragestellung zielte hier auf eine Änderung der Akzeptanz von MaDiN gegenüber dem ersten Interview.

Die Auswertung der Daten wurde zunächst nach einzelnen Interviews getrennt vorgenommen, aus der eine Einzelcharakterisierung folgte. Anschließend wurden über fortwährenden Vergleich der Einzelinterviews aber auch der beiden Interviews mit einer Person die zentralen Ergebnisse dieser Evaluationsphase herausgefiltert. Diese Art der Evaluation wurde ergänzt durch zahlreiche informelle Befragungen von einzelnen Studenten und Studentengruppen und durch Diskussionen in Seminaren und Arbeitsgruppen, in denen mit den Modulen gearbeitet wurde.

Einige Ergebnisse der Evaluation

Der für die Beurteilung des Rechners als Heuristik entscheidende Aspekt liegt in dem typischen Antwortmuster der Studierenden, in dem die traditionelle Unterrichtsvorbereitung anhand von Büchern mit der Vorbereitung anhand von MaDiN verglichen wird.

---

[16] Entsprechende Medien sind vorhanden.

[17] Diese Phase der Evaluation wurde im Rahmen eines Projektscheins von Christine Kaatz, einer Studentin des Lehramts für Gymnasien, vorgenommen. Die folgende Diskussion zu den Ergebnissen der Evaluation orientiert sich weitgehend an der aus dem Projektschein resultierenden Arbeit.

Die wesentlichen drei Ergebnisse dieser Evaluation lassen sich unter den Kategorien Interaktivität, Inhalt und Struktur zusammenfassen, von denen die ersten beiden hier in Bezug auf den Einsatz des Rechners als Heuristik diskutiert werden:[18]

- *Interaktivität*: Die Bereitstellung von interaktiven Elementen kann als zentrale Forderung der Studierenden angesehen werden. So wurde durchweg die Möglichkeit, den Sinngehalt von Begriffen, Methoden, Modellen etc. aktiv erschließen zu können, eingefordert. Seiten bzw. Themenaufbereitungen ohne interaktive Elemente schienen den Studierenden quasi blutleer zu sein und eine Beschäftigung mit einem Rechnerprogramm anstatt eines traditionellen Lehrbuchs zu verhindern. Schließlich hat sich aber auch gezeigt, dass – individuell sehr unterschiedlich – fachliches Wissen zu den einzelnen interaktiven Elementen benötigt wurde.
- *Inhalt*: Die Wissensbasis ist insbesondere dann auf Akzeptanz gestoßen, wenn sie in knapper Form den fachlichen und didaktischen Kontext zu einem interaktiven Element enthält. Vertiefte didaktische Erörterungen, etwa von empirischen Untersuchungen, Schulbuchanalysen u. ä. wurden als zu textlastig für eine rechnergestützte Lernumgebung kritisiert. Es hat sich weiterhin gezeigt, dass Inhalte von den Studierenden dann negativ beurteilt wurden, wenn keine Parallelität zwischen didaktischen und fachlich-mathematischen Inhalten gegeben war.[19]

3 Der Rechner als Helfer beim Problemlösen

Die Motivation für den Versuch, in den MaDiN-Modulen Didaktik der Oberstufengeometrie und Didaktik der Stochastik Problemlöseprozesse anzustoßen, liegt prinzipiell in der Bedeutung des Problemlösens für den Schulunterricht. Die Erfahrung in didaktischen Seminaren für das Lehramt an Gymnasien hat allerdings gezeigt, dass zumindest systematisches Problemlösen in der fachlichen Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer keine Rolle spielt. Mit MaDiN besteht daher der Versuch, auch nach einer punktuellen und zeitlich begrenzten Auseinandersetzung mit Problemlöseprozessen in didaktischen Seminaren eine Lehr-Lernumgebung zu schaffen, die die Beschäftigung mit Problemstellungen einerseits vertieft und sie andererseits auch über die Universität hinaus anbieten kann.

---

18 Die Kategorie Struktur ist nicht direkt auf den Einsatz des Rechners als Heuristik bezogen. Vgl. zu dieser Kategorie Eichler (2004).

19 Dabei gab es wegen der individuellen Voraussetzungen der Studierenden z. T. unterschiedliche Beurteilungen und zwar hinsichtlich der angemessenen Tiefe der Wissensbasis. Eine Konsequenz dieser individuellen Anforderungen ist die Tiefenstaffelung der Wissensbasis, um unterschiedliche Lernwege zu ermöglichen (vgl. dazu Eichler 2004).

3.1 Problemlösen mit dem Rechner

Was ist ein Problem?

Wie eine mathematische Problemstellung definiert werden kann, die in eine internetbasierte Lehr-Lernumgebung eingebunden werden soll, unterscheidet sich zunächst nicht von ihrer Definition in der traditionellen Lehre. Dort ist der Begriff etwa folgendermaßen umschrieben:

> „Ein Problem ist erstens durch einen Anfangszustand (…), zweitens durch einen Zielzustand (…) und drittens durch erlaubte Transformationen (…) gekennzeichnet. (…) Das Problem besteht darin, mindestens einen dieser Teile zu finden, wenn die beiden anderen ganz oder teilweise gegeben sind.“ (Tietze 2000a, 93f.)

Wenn man überhaupt einen Unterschied zwischen einer Aufgabe und einem Problem festlegen möchte, ist es der Aspekt, dass im Problemlöseprozess Barrieren auftauchen, deren Überwindung dem Problemlöser nicht intuitiv oder auf Grund des Kontextes, in dem ein Problem gestellt wird, unmittelbar und routiniert möglich ist.

Welche Hilfestellungen kann man bieten?

Um solche Barrieren zu überwinden benötigt der Problemlöser Hilfen – prozessorientierte Hilfen oder Heuristiken.[20] Ziel ist es dabei, den Lernenden über die geeignete Auswahl von Problemstellungen Schritt für Schritt einen Pool von Heuristiken zu vermitteln. Um einen Transfer von Heuristiken von einer auf die andere Problemstellung zu ermöglichen, muss es ein zweites Ziel des Lehrenden sein, die Heuristiken allgemein zu charakterisieren. Ein einfaches Beispiel wäre etwa die Transformation eines sprachlich vermittelten Problems auf eine geometrisch interpretierbare Skizze, eine nahezu universale Heuristik, die unabhängig von der mathematischen Teildisziplin anwendbar ist. Neben solchen allgemeinen Heuristiken spielen bereichsspezifische heuristischen Strategien eine wichtige Rolle. Beispiele hierfür sind etwa in der Oberstufengeometrie Strategien zur „Auswahl eines geeigneten Koordinatensystems“ mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen oder in der Stochastik die Simulation. Eigenständiges Problemlösen in einem Gebiet setzt voraus, dass zentrale Begriffe flexibel gehandhabt werden können. Das *operative Durcharbeiten* eines Begriffs ist ein sinnvolles Lehrprinzip, um beim Schüler ein angemessenes flexibles Begriffsverständnis zu fördern. Dabei können interaktive Medien hilfreich sein (vgl. Beispiel 8).

Ist der Lehrende ein Rechner bzw. eine rechnergestützte Lehr-Lernumgebung, so muss diese bei dem Initiieren von Problemlöseprozessen ebenfalls die drei genannten Anforderungen erfüllen:

1. die geeignete Auswahl von Problemstellungen,

---

[20] Vgl. dazu auch Tietze (2000a), 98ff.

2. die Bereitstellung von prozessorientierten Hilfen,
3. die Verallgemeinerung der prozessorientierten Hilfen.

Grundlage des Problemlösens ist das verfügbare Wissen, das der Problemlöser aktivieren, mit der Aufgabe verbinden und neu kombinieren muss (vgl. Polya 1967, 146). In diesem Aspekt ist eine weitere Anforderung an den Rechner bzw. eine Lehr-Lernumgebung, die Problemlöseprozesse initiieren soll, enthalten. Selbst wenn man gewisse Vorkenntnisse bei den Nutzern der Lehr-Lernumgebung voraussetzt, kann man nicht wie in der traditionellen Lehre von gemeinsamen, zumindest annähernd homogenen Voraussetzungen ausgehen. Das bedeutet, dass im Umfeld der Problemaufgabe eine Basis bereit gestellt werden muss, die ein Auffrischen bzw. Herstellen des zum Problemlösen notwendigen Wissens ermöglicht.

Grenzen des Problemlösens mit dem Rechner

Die zentrale Grenze besteht in der Tatsache, dass notwendige prozessorientierte Hilfen nicht individuell bereit gestellt werden können. Während in der traditionellen Lehre die Lehrenden aus einem Pool von Heuristiken die geeignete Hilfe gezielt und individuell geben können, ist es bei der Entwicklung einer rechnergestützten Lehr-Lernumgebung lediglich realisierbar, mögliche Barrieren des Problemlöseprozesses zu antizipieren und für solche Barrieren einen Pool von Heuristiken bereitzustellen.

Für diese Bereitstellung sind prinzipiell zwei konkurrierende Modelle möglich:

1. Die Entwicklung eines vorgegebenen Problemlöseprozesses, in dem Hilfen nacheinander gegeben werden und deren Aufruf gegebenenfalls erst nach der Bewältigung bestimmter Schritte des Problemlöseprozesses erfolgen kann.
2. Die lose Bereitstellung eines Pools von Heuristiken bzw. Hilfen, die ohne Voraussetzung im Bedarfsfall abgerufen werden können.

Auf der Basis dieser theoretischen Überlegungen soll im Folgenden deren Umsetzung bei der Entwicklung von MaDiN diskutiert werden.

3.2 Problemlösen mit MaDiN

Die Anforderungen an eine rechnergestützte Lehr-Lernumgebung, die Problemlöseprozesse initiieren will, sind in MaDiN folgendermaßen umgesetzt worden:

- Themenspezifische Probleme sind grundsätzlich mit einer auch unabhängig von den Problemstellungen zu erreichenden fachlich-mathematischen und didaktischen Wissensbasis verbunden. So werden einerseits die fachlichen Voraussetzungen theoretisch geklärt und andererseits der Sinn der Beschäftigung mit einem Themengebiet und damit mit Problemstellungen innerhalb dieses Themengebietes in einer didaktischen Aufbereitung diskutiert.

- Die Auswahl geeigneter Probleme orientiert sich einerseits an der in MaDiN umgesetzten Struktur von Themen (Schreibtischen), andererseits an den zentralen Ideen eines Themengebietes. Schließlich besteht der Versuch, sowohl innermathematische als auch anwendungsorientierte Probleme bereitzustellen.
- Alle Problemstellungen sind mit einem System von zumeist prozessorientierten Hilfen verbunden, die bei Bedarf einzeln abgerufen werden können. Diese Entscheidung basiert auf dem Anspruch, individuelle Lernwege zu ermöglichen. Im Modul zur Didaktik der Stochastik besteht zudem der Versuch, die bereit gestellten Hilfen auf einer höheren Abstraktionsebene in ein System allgemeiner Heuristiken einzubetten.
- Da die Zielgruppe von MaDiN aus Lehrerinnen und Lehrern in der Ausbildung und der Profession besteht, ist auf den möglichen schrittweisen Aufbau von eng umrissenen Problemstellungen verzichtet worden. So weisen die Problemstellungen in MaDiN häufig einen höheren Grad an Komplexität als in der Schule einsetzbar auf.

Die prinzipielle Grenze, prozessorientierte Hilfen mittels des Rechners nicht individuell und zielgerichtet anbieten zu können, bleibt auch in MaDiN bestehen. Eine weitere Grenze des problemorientierten Ansatzes basiert auf der Strukturierung der Themengebiete in MaDiN. So gibt es Themengebiete, in denen fruchtbare Problemstellungen nicht existieren oder zu komplex sind. Beispielsweise ist es im Bereich der beschreibenden Statistik bzw. Datenanalyse, die an der Explorativen Datenanalyse orientiert ist, zwar jederzeit möglich, Problemstellungen anhand realer Daten zu stellen. Im Sinne der offenen Problemstellungen der Explorativen Datenanalyse und der dort zu vermeidenden konkreten Zielbestimmung ist es allerdings kaum möglich, prozessorientierte Hilfestellungen zu geben, die über sehr allgemeine Heuristiken hinausgehen.

Im Folgenden sollen Beispiele vorgestellt werden, die die wesentlichen der genannten Anforderungen an eine Einbindung des problemorientierten Ansatzes in MaDiN verdeutlichen können.

3.3 Beispiele aus MaDiN

Beispiel zur Stochastik

Beispiel 7: Spielproblem

Die Problemstellungen sind in der Schublade *Aktivitäten* des MaDiN-Schreibtischs enthalten, werden auf einer Startseite kurz charakterisiert und mit einem Link versehen. Dahinter steht die Seite, in der das Problem, hier ein Spielproblem, vollständig charakterisiert wird. Es gibt weiter einen Hinweis auf die Verwendung der Hilfen sowie die gestaffelten Hilfen selbst, die den Problemlöseprozess unterstützen sollen (Abb. 9).

Abbildung 9: Problemstellung mit Hilfesystem

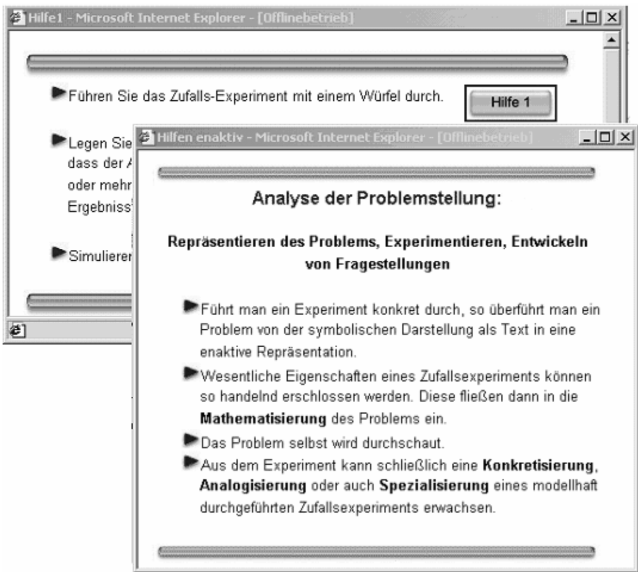

Abbildung 10: Hilfe mit Einordnung in das System heuristischer Hilfen

Die Hilfen müssen nicht notwendig vollständig geöffnet werden, sondern sind bei Bedarf einzeln abrufbar und öffnen sich als Zusatzfenster über dem Problemkontext. Innerhalb der Hilfen gibt es weitere Hinweise, die eine Einordnung der heuristischen Hilfen umfassen (Abb. 10).

Die Hilfen können schließlich Hinweise auf bestimmte Begriffe, Formeln, Zusammenhänge etc. enthalten, die auf theoretisch-fachliche Erläuterungen des allgemeinen Problemkontextes weisen. Die fachlich-mathematische Wissensbasis ist schließlich mit einer didaktischen Aufbereitung des Themas verbunden.

Beispiele zur Oberstufengeometrie und angewandten Linearen Algebra

Beispiel 8: Operatives Durcharbeiten des Parameterbegriffs

Flexible und leistungsstarke Begriffsbildung ist nur auf der Basis der Integration in inhaltliche Beziehungsnetze möglich. Dazu muss das Lernen in Zusammenhängen erfolgen; verwandte geistige Operationen müssen vernetzt werden. Das gilt insbesondere für Operation (im psychologischen Sinne) und Umkehroperation, wie z. B. das Erstellen und das Lesen/Interpretieren von Funktions- und anderen Graphen. Man spricht auch von *operativem Durcharbeiten* als einer speziellen Form des Übens. Man geht davon aus, dass ein angemessenes Verständnis erst dann gegeben ist, wenn Operation und Umkehroperation miteinander vernetzt sind.

Ein zentraler, aber für Schüler schwieriger Begriff der Oberstufengeometrie ist der Parameterbegriff, etwa beim Darstellen von Geraden und Ebenen. So haben Untersuchungen ergeben (vgl. Wittmann 2003), dass viele Schüler eine dominante konkret-objekthafte Vorstellung von der Geraden haben, etwa als eine ins Unendliche erweiterbare Strecke. Solche Schüler können häufig die Variablen X und r in der Gleichung $X = A + r\vec{b}$ nicht interpretieren. Um ein besseres Verständnis der Parameterdarstellung einer Kurve (einschließlich der Geraden) zu bewirken, haben wir interaktive Excel-Medien entwickelt, die ein operatives Durcharbeiten der Parameterdarstellung gestatten und helfen, Kurven auch als Punktmengen zu sehen. So können einzelnen Parameterwerten jeweils Punkte der Kurve zugeordnet werden und umgekehrt (vgl. Beispiel 5; Abb. 5). Darüber hinaus werden konkrete Vorstellungen eingeführt, etwa durch die Interpretation der Kurve als Bahnkurve mit der Zuordnung Zeitpunkt-Position.

Beispiel 9: Erstellung einer Ellipsenschablone (Fortsetzung von Beispiel 4)

Das Modul stellt für das weitere Problemlösen prozessorientierte Hilfen zur Verfügung:

1. Verfertige eine *Lösungsskizze* bzw. erzeuge sie mit dem Euklid-Medium.
2. *Führe Buchstaben ein*.
3. Betrachte (extreme) *Spezialfälle*.

Diese Untersuchungen führen unmittelbar auf die Zusammenhänge

$$l = 2a \text{ und } e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

und damit zur Lösung[21]. Diese ersten Algebraisierungsansätze können in einem *Rückblick* die Frage nach einer allgemeinen algebraischen Darstellung der Ellipse aufwerfen, wie man sie etwa von der Parabel her kennt. Bei der Lösung dieses neuen Problems können *bereichspezifische Strategien*

1. zur Wahl eines geeigneten Koordinatensystems,
2. zur Längenberechung in einem kartesischen Koordinatensystem (Satz des Pythagoras)

hilfreich sein. Eine direkte Algebraisierung der Kennzeichnung der Ellipse über die Abstandssumme führt auf eine erste, noch unübersichtliche Gleichung, deren Angemessenheit mit dem Grafikprogramm von Derive kontrolliert werden kann. Ebenfalls mit Derive kann diese Gleichung in die übliche formale Darstellung der Ellipse überführt werden.

3.4 Evaluation zum problemorientierten Ansatz in MaDiN

Anmerkungen zum Design und zur Fragestellung der Evaluation

Die Beurteilung des problemorientierten Ansatzes ist ein Schwerpunkt der ersten Phase der nach verschiedenen Aspekten der Entwicklung von MaDiN gestaffelten formativen Evaluationen (vgl. Eichler 2004, 102). So wurde dieser Ansatz insbesondere beim Einsatz von MaDiN im Wintersemester 2001/02 im Rahmen eines Hauptseminars zur Didaktik der Stochastik eingesetzt und evaluiert, in dem u. a. zielgerichtet die Bearbeitung von Problemstellungen gefordert wurde (vgl. Eichler 2001, 107ff.). Hinsichtlich des problemorientierten Ansatzes wurden die Daten folgendermaßen erhoben:

- durch eine offene schriftliche Befragung nach dem Einsatz von MaDiN, in dem auf die fiktive Frage eines Interessenten, welche Möglichkeiten das Modul bietet, geantwortet werden sollte;
- durch ein halb-strukturiertes Interview nach dem Einsatz von MaDiN. Die für die hier behandelte Fragestellung entscheidende Kategorie ist die Funktionalität des problemorientierten Ansatzes sowie die Verwendung dieses Ansatzes durch die Studierenden.

Die Auswertung des umfangreichen Materials fand extensiv, d. h. ohne Ausnutzung der vollen Tiefe elaborierter Analyseverfahren der qualitativen Sozialfor-

[21] l Fadenlänge, $2a$ Pappen- bzw. Hauptachsenlänge, $2b$ Pappenbreite bzw. Nebenachsenlänge, $2e$ Abstand der Befestigungspunkte bzw. Brennpunkte.

schung (vgl. dazu Lamnek 1993 und Friedrich 1997, 117) und mit den direkt auf MaDiN bezogenen Teilen zusammenfassend statt.

Passagen der Texte und Interviews wurden dabei in Anlehnung an die Texthermeneutik (vgl. Danner 1998) durch Bezug auf den Einzelfall und durch Vergleich mit den anderen Fällen aufgeschlüsselt. Die wiederkehrenden, *typischen* Aussagen wurden als charakteristische Bewertungen betrachtet.

Einige Ergebnisse der Evaluation

Der problemorientierte Zugang stellte die Teilnehmer vor eine Fülle von Schwierigkeiten. Übergreifend zeigte sich im Verlauf des gesamten Seminars, dass ein offener Themenzugang über ein Problem und die Verwendung von Heuristiken analog zu den bisherigen Erfahrungen in didaktischen Seminaren mit Studierenden des Lehramtes für Gymnasien wenig bekannt und reflektiert war. Allgemein wurden die Probleme als Möglichkeit gesehen, vorhandenes Wissen im Sinne einer Übung zu überprüfen, nicht aber als Zugang zu einem Themenbereich:

> „Man [kann] an ausgewählten Problemen Erlerntes/Techniken anwenden."

Die Teilnehmer riefen – unabhängig von der Aufgabenstellung – stets die Schubladen in der Abfolge Theorie → Beispiel → Aktivität auf. Ein Aufruf von Informationen zu Theorieinhalten aus der Problemstellung bzw. den Hilfen heraus wurde nicht verwendet:

> „Ich habe immer die Theorie angeklickt, um zu gucken, ob da irgendetwas war, was ich noch nicht kannte."

Die Probleme selbst wurden insbesondere zu Beginn des MaDiN-Einsatzes als zu offen bezeichnet. Die Studierenden hatten in der Regel bei der Formulierung eines konkreten Problems sowie der Aufstellung eines Lösungsplans große Schwierigkeiten. Zudem ergaben sich technische Schwierigkeiten bei der Verwendung von Tabellenkalkulation, die im Bereich der Datenanalyse das vorherrschende Recheninstrument ist:

> „Probleme ergeben sich dann, wenn die Problemstellung Schwierigkeiten allein aus der *Bearbeitung* (d. h. wie sie bearbeitet werden soll → Excel) ergeben."

Die Hilfen wurden ebenfalls überwiegend als zu offen und zu wenig ergebnisorientiert bezeichnet. In der Verwendung der Hilfen zeigten sich folgende drei Bearbeitungstypen:

- Aufruf aller Hilfen vor einem eigenen Lösungsversuch, um einen Überblick über einen möglichen Gesamtplan zu erhalten.
- Aufruf der Hilfen nacheinander mit dem Versuch, die Hilfen einzeln bezüglich einer Problemlösung umzusetzen.
- Kein Aufruf einer Hilfe.

Schließlich wurde bei der Verwendung der Hilfen die fehlende Individualität als Manko empfunden, die wesentlich besser durch eine reale Lehrperson geleistet werden könnte:

> „Eine Computerhilfe ist immer steril und gibt einem nicht immer die Hilfe, die man gerade nötig hat.“

Äußerungen im weiteren Verlauf des Seminars – d. h. nach Abschluss des MaDiN-Einsatzes –, in dem das Problemlösen ebenfalls ein zentrales Thema war, zeigten allerdings eine wachsende Bereitschaft, solch einen Ansatz zu verwenden.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Das Lösen mathematischer Probleme oder realer Probleme mit den Mitteln der Mathematik muss ein zentraler Baustein eines Mathematikunterichts sein, der Schülerinnen und Schüler zu eigener aktiver geistiger Tätigkeit führen will. Daher muss auch für Lehrerinnen und Lehrer der problemlösende Ansatz ein wichtiger Aspekt der Ausbildung sein, um diesen Ansatz im Berufsleben adäquat lehren zu können.

Der problemlösende Ansatz ist in MaDiN in zwei Varianten integriert worden:

- in interaktiven Elementen, die ein freies Entdecken im Rahmen einer vorgegebenen mathematischen Struktur ermöglichen können und
- in dem Formulieren von Problemstellungen, deren Lösung durch ein System von zumeist heuristischen, prozessorientierten Hilfen unterstützt wird, die wiederum punktuell in ein System von allgemeinen Heuristiken eingeordnet werden.

Die Einbindung interaktiver Elemente bedingt erst den Nutzen einer multimedialen Lehr-Lernumgebung und eine für den Lerner deutlich werdende Abgrenzung zu anderen Medienformen wie etwa dem Buch. Ebenso sind die interaktiven Elemente auch für die Lehrenden von entscheidender Bedeutung, da sie sich auf Grund ihrer Anschaulichkeit für die Präsentation zentraler Ideen eines Themengebietes innerhalb einer ansonsten traditionellen Lehrveranstaltung anbieten.

Die zweite Variante des problemlösenden Ansatzes in MaDiN scheint dagegen für Lernende einen geringeren Nutzen zu haben und erst nach der Auseinandersetzung mit dem Problemlösen innerhalb der traditionellen Lehre eine selbstständige Beschäftigung mit den eigenen Problemlöseprozessen anzuregen. Für eine endgültige Aussage zu diesem Bereich ist allerdings eine umfangreichere, summative Evaluation (vgl. Tergan 2000) notwendig.

Eine wesentliche Anforderung an ein Rechnerprogramm und speziell eine multimediale Lehr-Lernumgebung wie MaDiN hinsichtlich der Förderung problemlösenden Denkens ist die Einbindung beider Varianten des problemlösenden Ansatzes in eine fachliche und didaktische Wissensbasis. Prinzipiell kann man natürlich auch mit Computeralgebrasystemen oder dynamischer Geometriesoftware, die in MaDiN intern oder extern an verschiedenen Stellen in die Aufbereitungen integriert sind, interaktive Elemente oder Umgebungen erzeugen, die das Entdecken von Mathematik fördern können. Solchen Elementen fehlt allerdings der fachliche und didaktische Kontext. Es fehlt damit auch der Anstoß, etwas zu entdecken oder ein Problem zu lösen bzw. es fehlt eine fruchtbare Einbindung des Entdeckten oder des Problems in einen größeren Rahmen. So ergibt erst die Verbindung einer Wissensbasis mit dem problemlösenden Ansatz in MaDiN eine Möglichkeit, zwei der momentan zentralen Forderungen der Didaktik, das problemlösende und individuelle Lernen mit den modernen Technologien, sinnvoll zu verbinden.

Literatur

Bea, W. (1995): Stochastisches Denken. Frankfurt a. M. (Lang)

Borovcnik, M. (1996): Trends und Perspektiven in der Stochastik-Didaktik. In: Kadunz, G. u. a. (1996) (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, Bd. 23. Wien (Hölder-Pichler-Tempsky), 39–60

Bruner, J. S. (1979): Der Prozeß der Erziehung. Berlin (Berlin-Verlag)

Danner, H. (1998): Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik. München (Reinhardt)

DMV, GDM (2001): Denkschrift zur Lehrerbildung http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/archiv/memoranda/lehrer.html

Eichler, A. (2001): Neue Wege in die Beschreibende Statistik? In: mathematica didactica 24/1, 94–116

Eichler, A. (2004): Problemorientiertes und interaktives Lernen und Lehren von Stochastik im Netz. In: Biehler, R., Engel, J., Meyer, J. (2004) (Hrsg.): Neue Medien und innermathematische Vernetzungen in der Stochastik. Anregungen zum Stochastikunterricht, Bd. 2. Hildesheim (Franzbecker), 91–106

Engel, J. (2002): Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 75, 75–83

Friedrich, H. F. u. a. (1997) (Hrsg): Multimediale Lernumgebungen in der betrieblichen Weiterbildung. Neuwied, Kriftel, Berlin (Luchterhand)

Fricke, R. (1995): Evaluation von Multimedia. Arbeiten aus dem Institut für Empirische Pädagogik und Instruktionspsychologie. Bericht Nr. 15

Gigerenzer, G. (2002): Das Einmaleins der Skepsis. Berlin (Berlin-Verlag)

Klafki, W. (1994): Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik – Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik. Weinheim (Beltz)

Lamnek, S. (1993): Qualitative Sozialforschung, Bd. 1 (Methodologie) u. Bd. 2 (Methoden und Techniken). Weinheim (Beltz)

Lietzmann, W. (1916): Methodik des mathematischen Unterrichts, Bd. 1. Leipzig (Quelle & Meyer)

Pfannkuch, M., Wild, C. (1999): Statistical Thinking in Empirical Empirical Enquiry. In: International Statistical Review 67/3, 223–248

Polya, G. (1966/1967a): Vom Lösen mathematischer Aufgaben, 2 Bd. Basel (Birkhäuser)

Polya, G. (1967b): Schule des Denkens. Bern (Francke)

Stein, M., Tietze, U., Weigand, H.-G., Weth, T. (2004): Das Projekt MaDiN. In: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 12/2, 112–115

Strzebkowski, R., Kleeberg, N. (2002): Interaktivität und Präsentation als Komponenten multimedialer Lernanwendungen. In: Issing, L.J., Klimsa, P. (2002) (Hrsg.): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Weinheim (Beltz), 229–246

Tergan, S.-O. (2000): Grundlagen der Evaluation: ein Überblick. In: Schenkel, P., Tergan, S.-O., Lottmann, A. (2000) (Hrsg.): Qualitätsbeurteilung multimedialer Lern- und Informationssyteme. Nürnberg (BW-Verlag), 22–51

Tietze, U.-P. (2000a) (unter Mitarbeit von Förster, F.): Fachdidaktische Grundfragen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd. 1. Wiesbaden (Vieweg) (2. Auflage)

Tietze, U.-P. (2000b) (unter Mitarbeit von Schroth, P., Wittmann, G.): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd. 2. Wiesbaden (Vieweg)

Weigand, H.-G., Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg, Berlin (Spektrum)

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, 37–46.

Wittmann, G. (2003): Schülerkonzepte zur Analytische Geometrie. Hildesheim (Franzbecker)

Anschrift der Verfasser

Dr. Andreas Eichler und Prof. Dr. Uwe-Peter Tietze
TU Braunschweig
Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik
Bienroder Weg 97
38106 Braunschweig
andreas.eichler@tu-bs.de und u.tietze@tu-bs.de