Wege zur Gruppentheorie

Ein Überblick über Ansätze und Konzepte für das Lehren und Lernen von Gruppentheorie

von

Bert Xylander, Gera

Zusammenfassung: Der Artikel diskutiert exemplarisch didaktische Ansätze und Konzepte, die das Erlernen abstrakter gruppentheoretischer Inhalte erleichtern können. Dem hauptsächlich angewendeten strukturtheoretischen Konzept werden gegenübergestellt das permutationstheoretische Konzept der klassischen Algebra, das Konzept der geometrischen Veranschaulichungen von FELIX KLEIN, ein gruppentheoretisches Konzept für die Schule, zwei symmetrieorientierte Konzepte und ein Definitionsansatz mit Gruppentafeln. Ein besonderer Augenmerk richtet sich zudem auf computerbasierte Zugänge zur Gruppentheorie.

Summary: The article discusses several examples of didactical concepts for an easier learning of abstract group theory. The main concept of the structural group theory will be sided by the concept of permutations in the classical algebra, by the concept of geometric visualisation by FELIX KLEIN, by a concept of group theory in public school, by two concepts of symmetry theory and by the concept of group theory based on group tables. Last but not least the article pays specific attention to several computer concepts for learning group theory.

1 Einführung

Die Inhalte der Gruppentheorie sind grundlegender Bestandteil der Ausbildung von Mathematikstudierenden und von Studierenden naturwissenschaftlicher Richtungen wie Physik und Chemie. Dabei stellen sich die gruppentheoretischen Begriffe und Zusammenhänge als sehr abstrakt dar, wodurch für die Studierenden das Erlernen der gruppentheoretischen Inhalte im Allgemeinen erschwert wird. Von besonderer Bedeutung für den gruppentheoretischen Lehr- und Lernprozess sind daher didaktische Ansätze und Konzepte, die einen einfachen Zugang zur Gruppentheorie auf der Basis des Vorstellungsvermögens der Studierenden gewähren.

Eine Analyse existierender Lehrmaterialien zur Gruppentheorie in Bezug auf ihre inhaltliche und didaktische Strukturierung offenbart, dass es eine große Vielfalt didaktischer Ansätze gibt, in denen sich dennoch der gleiche inhaltliche und auch didaktische Kern manifestiert. Gemeinsames Kennzeichen der jeweilig verwendeten Inhaltskonzepte ist nämlich, dass die gebräuchliche Vorgehensweise bei der Vermittlung gruppentheoretischer Inhalte hauptsächlich der Linie folgt, die VAN DER WAERDEN in seiner *„Modernen Algebra“* [VAN DER WAERDEN 1930] vorgezeichnet hat, und dass die Methoden und die Formen der Vermittlung stark an der inhaltlichen Folge der axiomatisch deduzierten gruppentheoretischen Inhalte ausgerichtet sind: In fast allen Lehrwerken zur Gruppentheorie findet sich eine inhaltliche Gliederung in Mengentheoretische Grundlagen – Gruppenbegriff mit Axiomen – Folgerungen aus den Axiomen – Untergruppen – Isomorphismen und Homomorphismen – Normalteiler und Faktorgruppen – Homomorphiesatz usw. in dieser oder ähnlicher Reihenfolge wieder. Hinzu kommt, dass Beispiele oftmals ähnlich sind (häufig genutzte Beispiele sind u. a. Zahlengruppen, Gruppen von Permutationen, Gruppen geometrischer Abbildungen) und entsprechendes auch für etwaige Aufgabenstellungen gilt. Unterschiede finden sich in der inhaltlichen Tiefe (z. B. darin, wie weit Beweise ausgeführt werden oder wie umfangreich die gruppentheoretischen Inhalte behandelt werden), in der Zahl der Beispiele, in der Zahl der Aufgabenangebote mit ausgeführten Lösungshinweisen sowie in der Zahl der verwendeten Veranschaulichungen.

Das Anliegen des Artikels ist nun, Ansätze und Konzepte beispielhaft zu skizzieren, mit denen auf unterschiedlichen Wegen ein Zugang zur Gruppentheorie gewonnen werden kann. Dem abstrakt-mathematischen Strukturkonzept VAN DER WAERDENs werden dabei Konzepte zur Seite gestellt, die mit ihrem oftmals anschaulichen Vorgehen durchaus als Alternative zu den üblichen Lehr- und Lernpfaden verstanden werden können.

2 Gruppentheorie als abstrakte Strukturtheorie

Mit seiner *„Modernen Algebra"* prägte VAN DER WAERDEN ein noch heute aktuelles Bild von einer strukturtheoretisch orientierten Mathematik. Der logische Zusammenhang und das inhaltliche Konzept wirken bis heute bestimmend für die überwiegende Zahl der Lehrwerke zur Algebra.

Der von VAN DER WAERDEN dargestellte Aufbau der Gruppentheorie basiert auf grundlegenden Begriffen der Mengenlehre, auf dem Begriff der Abbildung, auf dem Begriff der Zahlen und Zahlenreihen, auf den Begriffen der endlichen, unendlichen und abzählbaren Mengen sowie auf dem Begriff der Klasseneinteilungen durch Äquivalenzrelationen. Die gruppentheoretischen Inhalte gliedert VAN DER WAERDEN in zwei Teile: Der erste Teil zur Gruppentheorie definiert und diskutiert den Gruppenbegriff anhand eines Axiomensystems, definiert Untergruppen, Isomorphismen und Automorphismen und setzt sich mit der Homomorphie von Gruppen sowie dem Begriff des Normalteilers und der Faktorgruppe auseinander. Der zweite Teil setzt die Gruppentheorie fort – nach Einführung von Ringen, Körpern und ganzen rationalen Funktionen –mit der Betrachtung von Operatorgruppen, mit den beiden Isomorphiesätzen, mit Normal- und Kompositionsreihen sowie mit den direkten Produkten. In Vorbereitung der GALOISschen Theorie diskutiert VAN DER WAERDEN zudem die Einfachheit der alternierenden Gruppe und die Transitivität und Primitivität der Permutationsgruppen.

Natürlich ist VAN DER WAERDEN nicht als der eigentliche Schöpfer einer abstrakten Algebra anzusehen: VAN DER WAERDEN selbst verweist u. a. auf EMIL ARTIN, EMMY NOETHER und ERNST STEINITZ als Quellen seiner Darstellungen [VAN DER WAERDEN 1930, S. 2 f.]; die Ansätze für ein Axiomensystem endlicher Gruppen finden sich bereits bei LEOPOLD KRONECKER[1]. Die großartige Leistung von VAN DER WAERDEN liegt in der erstmaligen Zusammenfassung der abstrakten Algebra und einer stringenten Darstellung.

Die Lernenden erfahren das gruppentheoretische Inhaltskonzept VAN DER WAERDENs als ein komplexes Beziehungsgefüge, für dessen Durchdringen ein großes Abstraktionsvermögen notwendig ist. Dies stellt nicht wenige Lernende vor Probleme, wie bereits FELIX KLEIN mit Bezug auf die abstrakte Definition der Gruppe über die Festlegung der Gruppenaxiome bemerkt:

„Andererseits wird die Sache für den Lernenden dadurch innerlich sehr erschwert, dass er vor etwas Abgeschlossenes gestellt wird und nicht weiß, wieso man überhaupt zu diesen Definitionen kommt, und dass er dabei sich absolut nichts vorstellen kann." [KLEIN 1926, S. 335]

Während VAN DER WAERDEN die Untersuchung der mathematischen Strukturen und ihrer Zusammenhänge in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen stellt, wird im nachfolgend diskutierten Konzept die Gruppentheorie eher als ein Mittel (als ein „Werkzeug") verstanden, das zum Lösen algebraischer Gleichungen beiträgt.

3 Gruppentheorie als Theorie der Permutationen

Ein Lehrkonzept, das die Gruppentheorie als eine Theorie der Permutationen auffasst, vollzieht den ursprünglichen Anwendungszweck der Gruppentheorie nach. Gruppentheoretische Denk- und Betrachtungsweisen entsprangen historisch hauptsächlich der Suche nach der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen. Mit diesem Ansatz kann Gruppentheorie als Werkzeug der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen verstanden und gelehrt werden; Gruppentheorie wird dabei aus der Sicht der heutigen Mathematik eingebettet in die *Galoistheorie*, historisch gesehen handelt es sich um die Sichtweise der *klassischen Algebra*.

Am Beispiel eines der letzten Lehrbücher aus der klassischen Epoche der Algebra (2 Bände: [PERRON 1927], [PERRON 1933]) wird die Vorgehensweise dieses Konzeptes deutlich. Schon im Vorwort des ersten Bandes beschreibt PERRON seine Absicht, Algebra als *„traditionelle Algebra"* zu behandeln, als *„diejenige mathemati-*

---

[1] KRONECKER formulierte 1870 in seinem Vortrag *„Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen"* [KRONECKER 1870] *„die Gesetze einer abstrakten Verknüpfung nicht näher definierter ‚Elemente', die ein vollständiges Axiomensystem für eine endliche abelsche Gruppe darstellen"* [WUSSING 1969, S. 46], [KRONECKER 1870, S. 275].

sche Disziplin, die man seit jeher mit diesem Namen belegt hat und deren Endziel die Theorie der algebraischen Gleichungen ist.“ [PERRON 1927, S. V] Entsprechend werden im ersten Band Grundbegriffe, der polynomische und TAYLORsche Satz, Determinanten, symmetrische Funktionen sowie die Teilbarkeit und die Existenz von Wurzeln betrachtet. Erst im zweiten Band gelangt PERRON nach der Untersuchung der numerischen Auflösung von Gleichungen und von Gleichungen bis zum vierten Grad sowie reziproken Gleichungen zur Gruppentheorie.

Das Kapitel über Gruppentheorie beginnt mit der Untersuchung von Substitutionen (Permutationen) sowie Zyklen und Transpositionen.

Anschließend definiert PERRON eine Gruppe allgemein durch die Angabe der Gruppenaxiome *„für eine Menge von Elementen (mindestens eines), für welche eine Verknüpfungsoperation, die wir einfach durch Nebeneinanderstellen der verknüpften Elemente bezeichnen, ... definiert ist“* [PERRON 1933, S. 104]. Die Definition wird unterlegt mit einigen Beispielen (z. B. kommutative Multiplikationsgruppe eines Körpers, kommutative Additionsgruppe eines Ringes, Gruppe der $n!$ Substitutionen n-ten Grades, Einheitsgruppe) sowie dem prinzipiellen Hinweis auf die dominierende Untersuchung von Substitutionsgruppen:

„Wir werden uns späterhin hauptsächlich mit Gruppen befassen, deren Elemente Substitutionen eines festen Grades n sind und deren Verknüpfungsoperation die für Substitutionen definierte Multiplikation ist, ..., sie heißen Substitutionsgruppen oder auch Permutationsgruppen, und n heißt ihr Grad.“ [ebd., S. 104 f.]

In den weiteren Ausführungen zur Gruppentheorie wächst mehr und mehr der Bezug zu den Substitutionsgruppen. Über den Begriff der Isomorphie (den PERRON mit drei verschiedenen, zueinander isomorphen Ausprägungen der Gruppe der 6. Einheitswurzeln illustriert) und den Satz von CAYLEY (ohne CAYLEY zu benennen), über Untergruppen und Nebengruppen (Nebenklassen) gelangt PERRON hin zu Kompositionsreihen und zyklischen Gruppen. Er beendet das Kapitel über Gruppentheorie mit der Betrachtung der Polyedergruppen unter ausdrücklichem Bezug auf die geometrische Interpretation dieser Substitutionsgruppen durch FELIX KLEIN [ebd., S. 154].

Das inhaltliche (und das dementsprechend angepasste didaktische) Konzept der klassischen Algebra folgt der Zielsetzung: Einer allgemeinen Darstellung des Gruppenbegriffes und wesentlicher Schlussfolgerungen daraus folgen rasch die Hinwendung und Spezialisierung auf die Permutationsgruppen und die Formulierung der für die Auflösungstheorie unabdingbaren gruppentheoretischen Zusammenhänge. Diese vertikale Spezialisierung wirkt auch deshalb so bemerkenswert, da im Kontrast dazu das im vorangehenden Abschnitt skizzierte inhaltliche Konzept von VAN DER WAERDEN gerade eine horizontale Verbreiterung der Gruppentheorie als allgemeine Grundlage der abstrakten Algebra vorsieht.

Zusammenfassend ist aber ebenso wie im vorangehenden Abschnitt festzustellen, dass die Vermittlung von gruppentheoretischen Inhalten über das Lehrkonzept der klassischen Algebra (bzw. der *Galoistheorie*) durch eine hohe Abstraktheit geprägt ist. Darüber hinaus bieten sich mit der Orientierung auf die (abstrakt-mathematische) Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen leider nur wenige Möglichkeiten, gruppentheoretische Inhalte und Zusammenhänge anschaulich darzustellen.

4 FELIX KLEIN und das Konzept geometrischer Veranschaulichungen

In seinen *„Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der algebraischen Gleichungen vom fünften Grade"* aus dem Jahr 1884 entwickelt FELIX KLEIN ein Konzept, das inhaltlich eine Beziehung zwischen der gruppentheoretischen Analyse der Symmetrie geometrischer Figuren und der Auflösungstheorie der algebraischen Gleichungen herstellt. Aus didaktischer Sicht setzte KLEIN damit Maßstäbe: Schon zu Beginn der Geschichte der Gruppentheorie versucht er, das abstrakt-mathematische Wesen der Gruppentheorie durch geometrische Interpretationen grundlegender Zusammenhänge zu veranschaulichen.

KLEIN eröffnet seine Ausführungen zur Gruppentheorie mit einer kurzen Sequenz allgemeiner begrifflicher Festlegungen. Noch nicht im Besitz einer Terminologie der Mengentheorie[2], definiert er eine Gruppe als *„charakterisirt durch die Anzahl, N, der Operationen, welche sie umfasst"* und bezeichnet diese Anzahl als *„Grad der Gruppe"* [KLEIN 1884, S. 6]. In diesem Zusammenhang betont er besonders die *„identische Operation"* [ebd., S. 6]. Nicht nur aus mathematikhistorischer Sicht erscheint die Beschreibung grundlegender gruppentheoretischer Inhalte und Zusammenhänge (der Begriff der Untergruppe, die Erzeugung von Untergruppen, der Inhalt des Satzes von LAGRANGE) eindrucksvoll und prägnant:

„Des Weiteren werden wir die Periodicität der einzelnen Operationen angeben, d. h. die Anzahl der Wiederholungen, deren die einzelne Operation bedarf, um zur Identität zurückzuführen, hierüber hinaus aber die Gesammtheit der Untergruppen unserer Gruppe, d. h. alle solche Zusammenstellungen eines Theiles unserer Operationen, welche für sich genommen Gruppencharakter besitzen. Der Grad einer Untergruppe ist immer ein Theiler des Grades N der Hauptgruppe. Die einfachsten Untergruppen (und überhaupt Gruppen) sind allemal jene, welche aus den Wiederholungen einer einzelnen Operation entstehen, deren Grad also gleich der Periode der betreffenden Operation ist, sie mögen cyclische Untergruppen, bez. Gruppen, genannt werden." [KLEIN 1884, S. 6]

Daran anknüpfend, betrachtet KLEIN die *„Transformation von Operationen"* in der Form konjugierter Elemente, kennzeichnet den Begriff des Normalteilers als *„ausgezeichnete Untergruppe"*, diskutiert die Zerlegbarkeit von Gruppen und benennt

---

[2] In dem Zeitraum 1879 bis 1884 erschienen die Hauptarbeiten GEORG CANTORS zur Begründung der Mengenlehre, darunter insbesondere die Artikelfolge *„Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten"*.

verschiedene Formen der Isomorphie. Dabei umfasst der Begriff der Isomorphie bei KLEIN sowohl den Homomorphismus („*meriedrische Isomorphie*") als auch die Isomorphie („*holoedrische Isomorphie*") im eigentlichen Sinne.

Vor der weiteren Betrachtung und Anwendung der Gruppentheorie fordert KLEIN den Leser auf,

„... sich hier und bei den parallellaufenden Entwicklungen der folgenden Paragraphen zugehörige Zeichnungen anfertigen zu wollen oder sich geradezu an einem leicht zu verschaffenden Modelle die in Betracht kommenden Verhältnisse zu überlegen. Denn es handelt sich durchaus um concrete Dinge, welche vermittelst der genannten Hülfsmittel jedesmal leicht erfasst werden, aber ohne dieselben der Vorstellung gelegentlich Schwierigkeiten bereiten können." [ebd., S. 9]

Mit dieser Aufforderung betont KLEIN nicht allein das geometrische Konzept. Darin enthalten ist auch eine Tätigkeitskomponente, die das Konzept der geometrischen Veranschaulichung zusätzlich zu einem Handlungskonzept ausbaut: Die Lernenden sollen sich die gruppentheoretischen Sachverhalte aktiv an einem Veranschaulichungsmittel erarbeiten bzw. selbsttätig eine Veranschaulichung erstellen. KLEIN formuliert mit seiner Aufforderung in beeindruckender Klarheit eine fundamentale didaktische Grundregel, die einer moderneren Ausdrucksweise (wie etwa bei CUNNINGHAM: *„students must actively do visual mathematical activites, not just observe mathematical visuals"* [CUNNINGHAM 1994, S. 85]) in nichts nachsteht.

In Ausgestaltung der abstrakten gruppentheoretischen Begriffe untersucht KLEIN konkret die zyklischen Rotationsgruppen, die Gruppe der Diederdrehungen und die Drehgruppen der regulären Körper. Die Erarbeitung der Gruppen und der Anzahlen der Gruppenelemente, die Analyse der Untergruppen, der Erzeugenden und Erzeugendensysteme gewinnt durch den Bezug auf die geometrischen Modelle der regulären Körper einen tiefen, anschaulichen Charakter. Beispielhaft deutlich wird dies in seinem Bestreben, einen Zusammenhang zwischen den Drehgruppen der regulären Körper und ausgezeichneten Permutationsgruppen herzustellen.

KLEIN führt dazu die Deckabbildungen am Tetraeder auf die Vertauschungen der vier Diagonalen des von den Eckpunkten des Tetraeders und Gegentetraeders gebildeten Würfels zurück und gelangt derart zu einer permutationstheoretischen Beschreibung der zur alternierenden Permutationsgruppe A_4 isomorphen Tetraederdrehgruppe [KLEIN 1884, S. 15]. Entsprechend erarbeitet er die Isomorphie der Drehgruppe des Oktaeders zur symmetrischen Gruppe S_4, indem er die 24 möglichen Vertauschungen der Würfeldiagonalen des dem Oktaeder einbeschriebenen (dualen) Würfels beobachtet [ebd., S. 16]. Zur Isomorphie der Ikosaederdrehgruppe zur alternierenden Permutationsgruppe A_5 gelangt KLEIN durch das Betrachten der 15 Verbindungslinien der Ikosaederkantenmitten. Jeweils drei dieser Verbindungslinien stehen senkrecht aufeinander – bilden also *„rechtwinklige Tripel"* [ebd., S. 18]. Die Vertauschung dieser fünf ausgezeichneten *„rechtwinkligen Tri-*

pel" durch die Drehoperationen lässt sich gerade durch die alternierende Permutationsgruppe A_5 beschreiben.

Das eingehende Studium der Strukturen der Drehgruppen und ihrer Untergruppen – unter besonderer Berücksichtigung der später nach ihm benannten KLEINschen Vierergruppe – ergänzt KLEIN durch eine Vielzahl inhaltsspezifischer Veranschaulichungen in Form seiner geometrischen Interpretationen. Die Erweiterung seiner Betrachtungen auf die Symmetrieebenen der regulären Körper führen ihn letztendlich zu den *„erweiterten Gruppen"*, die neben den Drehungen auch die Spiegelungen als Gruppenelemente umfassen [ebd., S. 23].

Es bleibt der unbestrittene Verdienst von KLEIN, bereits frühzeitig nach Wegen gesucht zu haben, um der sich abzeichnenden Abstraktheit der gruppentheoretischen Begriffsbildung mit anschaulichen Darstellungen zu begegnen. Er selbst kennzeichnet seine Absicht,

„… an relativ elementaren geometrischen Gebilden die Begriffe der Gruppentheorie in solcher Form einzuführen, dass die gruppentheoretische Überlegung und die geometrische Anschauung fortwährend ineinander greifen." [ebd., S. 28]

5 Gruppentheorie in der Schule: Das Konzept der *Neuen Mathematik*

Die Entwicklung der modernen Strukturmathematik wirkte sich auch auf die Schulmathematik aus. Unter dem Begriff einer *Neuen Mathematik* wurde versucht, die Schulmathematik zu reformieren und das moderne Strukturbild der Mathematik auch im Unterricht zu verankern:

„Man sah neue Aufgaben und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht, indem man ‚die tragenden Begriffe, die für die moderne mathematische Denkweise selbst kennzeichnend sind, zu Leitbegriffen des Unterrichts' erklärte, es waren dies vor allem die Begriffe Menge, Struktur und Abbildung." [VOLLRATH 1974, S. 117]

Schon zur damaligen Zeit (in den 60er und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts) wurde dieses Bestreben, die abstrakt-mathematischen Strukturbegriffe in den Mathematikunterricht zu integrieren, kontrovers diskutiert.[3] Im Rückblick hinterließ die Debatte um die modernen mathematischen Methoden und Denkweisen deutliche Spuren: Zwar wird Gruppentheorie aktuell nicht als Schulstoff behandelt, dennoch wirken solche grundlegenden Strukturbegriffe wie z. B. der Mengenbegriff oder der Abbildungsbegriff als *Fundamentale Ideen* tief greifend im heutigen Mathematikunterricht.

Auch wenn sich die Befürworter einer schulmathematischen Gruppentheorie nicht durchsetzen konnten, so ist ihnen doch ein didaktisches Konzept zu verdanken, dem auch heute noch wertvolle Anregungen für das Lehren von Gruppentheorie

---

[3] VOLLRATH beleuchtet die Diskussion des Für und Wider exemplarisch an der Kontroverse zwischen STEINER und WITTENBERG [VOLLRATH 1974, S. 117].

entnommen werden kann. So finden sich etwa bei VOLLRATH und STEINER umfangreiche Entwürfe für das Lehren grundlegender gruppentheoretischer Inhalte und etwa bei BAUERSFELD und KIRSCH sehr gelungene Veranschaulichungen, die wichtige gruppentheoretische Zusammenhänge versinnbildlichen.

VOLLRATH siedelt – in Anlehnung an DIENES und andere – in einer ersten, *propädeutischen Stufe* eine handlungsorientierte Erfassung und Erarbeitung wichtiger gruppentheoretischer Vorkenntnisse an. Diese Erfassung erfolgt für die Schülerinnen und Schüler schon in der Grundschule in Form der Beschäftigung mit endlichen Gruppen, *„die ihnen an bestimmten Modellen, verbunden mit Spielen, vorgestellt werden“* [VOLLRATH 1974, S. 120]. Es werden schrittweise Gruppen mit zwei Elementen, Gruppen mit drei Elementen, die KLEINsche Vierergruppe, die zyklische Gruppe mit vier Elementen, die zyklische Gruppe mit sechs Elementen sowie die symmetrische Gruppe mit sechs Elementen behandelt. Wesentlich ist der Handlungsaspekt bei dem Aufbau der Gruppenmodelle: *„Da Handlungen Abbildungen entsprechen, werden die Modelle als Abbildungsgruppen gewonnen.“* [ebd., S. 120]

Aus mathematischer Sicht führt die Erarbeitung der einzelnen Modelle über den Verknüpfungsbegriff auf endlichen Mengen, über einfache Verknüpfungsgesetze wie das Kommutativgesetz und Assoziativgesetz, über Kürzungsregeln, über die Existenz eines neutralen Elements und inverser Elemente bis hin zum Umgang mit Verknüpfungstafeln [ebd., S. 121]. VOLLRATH hebt dabei hervor, dass die Kinder noch nicht den eigentlichen Gruppenbegriff erfassen, sondern immer nur mit speziellen Modellen für Gruppen arbeiten und sich somit einen *„Modellvorrat“* anlegen, *„aus dem dann bei Betrachtung gemeinsamer Eigenschaften der Gruppenbegriff abstrahiert werden kann.“* [ebd., S. 121]

In der zweiten Stufe erfolgt in der Sekundarstufe eine Erweiterung des Modellvorrats durch die Betrachtung von Zahlengruppen, von Symmetriegruppen und von Gruppen geometrischer Abbildungen. Aus diesem Modellvorrat kann der Gruppenbegriff dann in Form der Gruppenaxiome abstrahiert werden. VOLLRATH empfiehlt das ordnende Prinzip der Gruppentheorie in der Geometrie als Möglichkeit, die Aneignung des Gruppenbegriffs zu sichern. Denkbar sind dazu die Gruppe der Kongruenzabbildungen der Ebene mit ihrer Verkettung als Verknüpfung oder die Betrachtung der Symmetriegruppen von Figuren. Abschließend formuliert VOLLRATH die Leistungen, die Schülerinnen und Schüler in dieser zweiten Stufe der Behandlung der Gruppentheorie erbringen können sollten:

„1. Definition des Gruppenbegriffs aufsagen.
2. Beispiele für Gruppen angeben.
3. In einer Gruppe das neutrale und zu jedem Element das inverse Element angeben.
4. Unter vorgelegten Verknüpfungsgebilden die Gruppen erkennen.
5. Beispiel für eine nichtkommutative Gruppe angeben.

6. *Verknüpfungsgebilde nennen, die keine Gruppen sind.*
7. *Forderungen des Gruppenbegriffs an Verknüpfungstafeln erläutern.*
8. *Einfluß der Reihenfolge der Quantoren in (2) und (3) der Definition durch Beispiele belegen.*
9. *Entscheiden, ob eine vorgegebene Teilmenge einer Gruppe Untergruppe ist.*
10. *Zu einer endlichen Gruppe (alle) Untergruppen und das zugehörige Untergruppendiagramm angeben."* [VOLLRATH 1974, S. 125 f.]

In der dritten Stufe sieht VOLLRATH die Ableitung formaler gruppentheoretischer Inhalte realisiert. Dazu sind – vorsichtig – gruppentheoretische Aussagen aus den Axiomen zu deduzieren, deren inhaltliche Tiefe jedoch zu beschränken ist:

„Der Lehrer sollte sich immer bewußt sein, daß es sich bei den angeführten Aussagen nicht um tiefsinnige Ergebnisse der Gruppentheorie handelt. Man sollte sich deshalb auf diejenigen Formeln beschränken, die für Termumformungen in (Q\{0}, •) bzw. (Q, +) wichtig sind." [ebd., S. 127]

Die vierte Stufe umfasst die *„inhaltliche Verankerung gruppentheoretischer Begriffe und Denkweisen"* durch eine Hervorhebung des Begriffs der Untergruppen und des Begriffs der Morphismen. Dazu empfiehlt VOLLRATH die geometrische Interpretation von Untergruppen und Nebenklassen (z. B. durch das Aufsuchen von Fixfiguren bei Symmetrieabbildungen) als *„Ausgangsbasis für Betrachtungen, die zum Satz von Lagrange führen können"* [ebd., S. 127]. Zur Behandlung von Isomorphismen und Homomorphismen verweist VOLLRATH intensiv auf die Arbeiten von KIRSCH, in denen dieser sich ausgiebig mit der anschaulichen Erarbeitung derartiger Abbildungen im Mathematikunterricht auseinandersetzt. Nach eigener Aussage stellen der Satz von LAGRANGE und die Homomorphismen für VOLLRATH *„die Grenze des für den Mathematikunterricht Vertretbaren"* dar [ebd., S. 127].

Für die fünfte und letzte Stufe des Lernens von mathematischen Strukturzusammenhängen sieht VOLLRATH in der Sekundarstufe 2 die Strukturbegriffe der Ringe und Körper vor, spezialisiert auf die Betrachtung der Zahlbereiche.

Dieses von VOLLRATH dargelegte didaktische Konzept einer Behandlung von Gruppen und elementarer Gruppentheorie lässt sich umrahmen und ergänzen durch die Schilderung konkreter unterrichtlicher Erfahrungen im Mathematikunterricht wie etwa bei [STEINER 1965].

Mit der Erarbeitung didaktikorientierter Konzepte für eine schulmathematische Gruppentheorie verbunden ist die Entwicklung schulunterrichtlicher Darstellungen und Modelle zur Veranschaulichung der gruppentheoretischen Sachverhalte und Zusammenhänge. So entwirft BAUERSFELD eine Veranschaulichung, bei der – in Tradition des Erlanger Programms – Vierecke danach klassifiziert werden, gegenüber welchen Kongruenzabbildungen sie invariant sind [BAUERSFELD 1961, S. 275].

KIRSCH entwickelt für Homomorphismen der zyklischen Gruppen eine besondere Form der Veranschaulichung: Aus der geometrischen Interpretation von Homomorphismen zyklischer Gruppen aufeinander (z. B. Z_6 auf Z_3 oder Z_∞ auf Z_4) entwickelt KIRSCH mit Zahnrädern und Zahnstangen eine modellhafte Darstellungsform, die von Schülerinnen und Schülern selbst hergestellt werden kann [KIRSCH 1965, S. 55 f.]. Durch eingehende Betrachtungen gelingt es KIRSCH, solche nichttrivialen Begriffe wie den Begriff des Kerns eines Homomorphismus zu veranschaulichen. Zudem stellt er dar, wie an den Modellen der Begriff der Faktorgruppe interpretiert werden kann, und er gelangt sogar bis zu einer Interpretation des Homomorphiesatzes für zyklische Gruppen [ebd., S. 66].

Auch aus jüngerer Vergangenheit datieren Beispiele für schulunterrichtlich einsetzbare Veranschaulichungen gruppentheoretischer Inhalte. Beispielhaft seien die Untersuchungen von KLIKA zur (darstellungsorientierten) Veranschaulichung grundlegender gruppentheoretischer Zusammenhänge mit dem Modell des *Magischen Würfels* benannt. Aus den operativen Möglichkeiten des Modells entwickelt KLIKA eine mathematische Nomenklatur, die in Verbindung mit den enaktiven Würfeloperationen zu einer Veranschaulichung solcher gruppentheoretischer Begriffe führt wie Operation, Hintereinanderausführung zweier Operationen, zyklische Gruppe, Erzeugendensystem einer Gruppe, Konjugation, Kommutator, direktes Produkt usw. [KLIKA 1981a], [KLIKA 1981b].

Die Ausführungen zur Gruppentheorie von STEINER, VOLLRATH und KIRSCH sind hauptsächlich für den schulischen Mathematikunterricht angelegt. Insbesondere die propädeutische Stufe ist mit ihrer spielerischen Erarbeitung der gruppentheoretischen Inhalte für ein mathematisches Studium sicherlich nur bedingt geeignet. Dennoch stellen sowohl das didaktische Konzept mit den darin beschriebenen Lernsequenzen als auch die diskutierten Veranschaulichungen eine wertvolle Ergänzung auch für den universitären Lehr- und Lernprozess von Gruppentheorie dar. Der Grund dafür liegt in der – abgesehen von dem didaktisch orientierten, geometrischen Veranschaulichungskonzept bei KLEIN – erstmaligen Situation, dass das *WIE* der Vermittlung im Mittelpunkt der Betrachtungen steht und nicht das *WAS*. Diese Überlegungen können daher sehr nutzbringend in ein Lehrkonzept für gruppentheoretische Inhalte eingearbeitet werden.

Die in den beiden letzten Abschnitten diskutierten didaktischen Konzepte sind wesentlich durch das Bestreben gekennzeichnet, gruppentheoretische Inhalte verständlich aufzubereiten. Dabei folgen die Bemühungen und Ansätze allerdings immer noch einer inhaltlich geprägten Leitlinie: Nach der Vermittlung von Voraussetzungen werden aus den Gruppenaxiomen gruppentheoretische Zusammenhänge abgeleitet und erarbeitet. Dennoch sind beide Konzepte nicht mit dem inhaltsorientierten Konzept nach VAN DER WAERDEN zu vergleichen, da in ihnen ein tiefes Ineinandergreifen von Anschaulichkeit, Fasslichkeit und gruppentheoretischem Lernprozess realisiert wird.

6 Gruppentheorie als eine Symmetrietheorie geometrischer Strukturen

Das im Folgenden diskutierte, ebenfalls didaktisch orientierte Lehrkonzept vertieft die in dem vorigen Abschnitt schon erkennbaren Ansätze einer Neuorganisation gruppentheoretischer Inhalte noch weiter: Es werden nicht nur zu Beginn des Lernprozesses die für das Studium der Gruppentheorie notwendigen *Voraussetzungen* anschaulich erarbeitet, nein, es werden darüber hinaus wesentliche gruppentheoretische Inhaltszusammenhänge anschaulich studiert und erfasst. Dabei wird dem solcherart anschaulich entwickelten Theoriegefüge durchaus ein axiomatisch geprägter, mathematischer Rahmen verliehen, der aber eben mit anschaulichen Interpretationen und Anwendungen durchsetzt ist. Ein möglicher Ansatz für ein solches Vorgehen findet sich in der Symmetriebetrachtung geometrischer Figuren. Zu beobachten sind dabei zwei Herangehensweisen: eine innermathematische Herangehensweise, bei der Symmetriebetrachtungen der eigentlichen, abstrakten Gruppentheorie sowohl vorangehen als auch diese begleitend durchdringen (wie etwa bei [BURN 1985]), und eine naturwissenschaftlich-anwendungsorientierte Herangehensweise, bei der die Verschmelzung des Symmetriekonzeptes mit gruppentheoretischen Überlegungen durch die Anwendung selbst motiviert und begründet ist (wie etwa bei [ATKINS 1987]).

6.1 Ein innermathematisches Symmetriekonzept

Mit seinem Symmetriekonzept zielt BURN hauptsächlich auf die innermathematische Betrachtung der Gruppentheorie ab. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf geometrischen Symmetriebetrachtungen. Die Diskussion der gruppentheoretischen Inhalte erfolgt in mehreren Stufen: An geometrischen Symmetriebetrachtungen werden Gesetzmäßigkeiten beobachtet und formuliert. Anschließend erlangen diese Gesetzmäßigkeiten mit der axiomatischen Einführung der Gruppentheorie eine streng mathematische Begründung. Zuletzt werden die Erkenntnisse und Deduktionen angewendet auf verschiedene Themenkomplexe, in denen ebenfalls ein enger Zusammenhang zwischen geometrischen und gruppentheoretischen Betrachtungen offenkundig ist (BURN diskutiert z. B. Gruppen von Quaternionen, affine Abbildungsgruppen, orthogonale Gruppen und Gruppen von Parkettierungen).

BURN formuliert seine Lehrinhalte als eine Folge von über 800 Aufgaben, die in seminaristischer Form bearbeitet und erarbeitet werden sollen. Das Lehrwerk erscheint somit weniger für das Selbststudium der Studierenden als vielmehr als ein Kursbuch für die Lehrenden gedacht: Nur spärlich werden zwischen den Aufgabenstellungen einzelne Definitionen (etwa die Formulierung der Gruppenaxiome) eingestreut; jedes Kapitel endet mit einer knappen inhaltlichen Zusammenfassung, mit historischen Bemerkungen und den Antwortskizzen der voranstehenden Aufgaben.

Das Lehrwerk zeichnet sich durch eine größere Zahl von (inhaltsspezifischen, weil hauptsächlich symmetriebezogenen) gruppentheoretischen Veranschaulichungen aus. In besonderer Weise aber wirkt das didaktikorientierte Konzept auf die Anschaulichkeit und Fasslichkeit des – letztendlich doch abstrakt-mathematischen – Lehrstoffes: Schon vor der Einführung einer axiomatischen und mithin abstrakten Betrachtungsweise entwickeln die Studierenden anschauliche Vorstellungen von gruppentheoretischen Gesetzmäßigkeiten. Die inhaltliche Tiefe der präaxiomatischen Betrachtung ist durchaus beachtlich. Sie umfasst die Inhalte grundlegender gruppentheoretischer Begriffe, u. a. solcher Begriffe wie Untergruppen, Nebenklassen, Normalteiler oder Faktorgruppen. So berichten sowohl BURN als auch ALMEIDA über Erfahrungen mit dem auf dem Lehrbuch basierenden Lehrkonzept:

„… I tried starting a group theory course with 50 hours on geometric symmetry, before offering axioms. … I can now provide work with subgroups, cosets, normal subgroups and quotient groups before they are defined …“ [BURN 1996, S. 377].

„The course … allows for extensive work with subgroups, cosets, conjugate elements, normal and quotient groups before they are formally defined.“ [ALMEIDA 1999, S. 161]

ALMEIDA hebt zusätzlich die visuellen Aspekte einer der abstrakten Auseinandersetzung vorangehenden Veranschaulichung mit Symmetriebetrachtungen hervor und widerspricht gleichzeitig der Befürchtung, eine auf Anschaulichkeit ausgerichtete Betrachtungsweise wäre der Abstraktionsfähigkeit der Studierenden hinderlich:

„… undergraduates' understanding of group theory will be enriched and consolidated by a substantial preliminary study of symmetry. The rationale in all off this is that an initial focus on visual aspects of group theory will better prepare students to appreciate and prove results and understand deeper concepts.

The evidence from the experience … suggests that an initial stress on the visual does not disadvantage them when they later have to work with abstract ideas without the support of visual ideas.“ [ALMEIDA 1999, S. 165].

6.2 Das Symmetriekonzept der Molekülstrukturen

Ein naturwissenschaftlich-anwendungsorientiertes Konzept zum Lernen von Gruppentheorie, das hauptsächlich aus der Betrachtung von Symmetrieeigenschaften molekularer Strukturen resultiert, findet sich bei ATKINS. Das Konzept zielt ab auf die systematische Beschreibung der Symmetrie der Moleküle und auf die aus dieser Symmetrie ableitbaren Eigenschaften. Bereits in den einleitenden Worten wird die Vorgehensweise von ATKINS deutlich:

„Ein großer Teil der Gruppentheorie ist nichts anderes als eine systematische Zusammenfassung unserer anschaulichen Erfahrungen über die Symmetrie von Körpern …“ [ATKINS 1987, S. 416]

Entsprechend behandelt ATKINS die gruppentheoretischen Inhalte. Im ersten Abschnitt seines Kapitels über die Symmetrie und ihre Anwendung führt er die Symmetrieoperationen und Symmetrieelemente an Molekülen ein. Anschließend beschreibt er ausführlich die möglichen Punktgruppen der molekularen Strukturen, die er folgendermaßen motiviert:

„Um die Moleküle nach ihrer Symmetrie zu klassifizieren, listen wir alle Symmetrieelemente eines Moleküls auf und schreiben Moleküle, deren Listen übereinstimmen, in die gleiche Gruppe." [ebd., S. 417]

ATKINS gelangt somit zu einer Arbeitsversion des Begriffes Punktgruppe, ohne den gruppentheoretischen Hintergrund erläutern zu müssen. In einer umfangreichen Darstellung diskutiert er die Elemente der Punktgruppen, studiert zahlreiche Molekülbeispiele und entwickelt ein algorithmisches Verfahren zur Bestimmung der Punktgruppe eines Moleküls. Alle darin auftauchenden Begriffe entstehen aus einer anschaulichen Diskussion ohne Rückgriff auf mathematische Terminologie. Als Abschluss dieses Abschnittes verweist ATKINS auf erste chemische Anwendungen der Punktgruppenklassifizierung: auf die optische Aktivität sowie auf das elektrische Dipolmoment.

Der zweite Abschnitt des Kapitels zur Symmetrie und Gruppentheorie vertieft die bisher nur anschaulich erfassten, gruppentheoretischen Zusammenhänge. ATKINS hebt die Betrachtung von Symmetrieoperationen hervor und führt den Begriff der Gruppentafel als Multiplikationstafel von Symmetrieoperationen einer Punktgruppe ein. Aus der Gruppentafel leitet er die Verknüpfung der Hintereinanderausführung von Symmetrieoperationen als eine *„Gruppeneigenschaft"* ab und baut darauf im Zusammenspiel mit mathematisch formulierten Axiomen den Begriff der Gruppe auf. ATKINS spricht dabei von einem *„Satz von Objekten"* als Gruppe, die bestimmte Bedingungen erfüllen müssen; die Formulierung der Gruppenaxiome ist eng an die symbolische Terminologie der Symmetrieoperationen angelehnt [ATKINS 1987, S. 424]. Es wird in den Darlegungen deutlich, dass ATKINS das Studium der Symmetrie mit dem Studium der Gruppentheorie identifiziert:

„Die Symmetrieoperationen der Moleküle erfüllen die ... angegebenen Bedingungen (die Gruppenaxiome – B. X.)*; aus diesem Grund verwenden wir für die Theorie der Symmetrie der Moleküle auch die Bezeichnung Gruppentheorie."* [ebd., S. 423]

Weiterhin beschreibt ATKINS im zweiten Abschnitt die Darstellung von Symmetrieoperationen in Form von Transformationsmatrizen, er führt den Begriff des Charakters von Symmetrieoperationen ein und widmet sich irreduziblen Darstellungen von Gruppen. Im dritten Abschnitt seines Symmetriekapitels diskutiert ATKINS die Anwendung der Charaktertafeln, die bis hin zur Orbitalsymmetrie reicht.

Die von ATKINS praktizierte Verschmelzung von Symmetriebetrachtungen an molekularen Systemen und Gruppentheorie zeichnet sich durch einen hohen Grad an

Anschaulichkeit aus. Grundlegende gruppentheoretische Inhalte werden in Arbeitsversionen angewendet, bevor sie mathematisch exakt gefasst werden. Auf diese Weise entsteht ein erfassbares Bild der mathematischen Gruppentheorie, bei dem die abstrakt-mathematischen Inhalte auf den ersten Blick überdeckt werden. Diese Vorgehensweise (einer abstrakten Betrachtung der Gruppentheorie geht eine anschauliche Erarbeitung grundlegender gruppentheoretischer Inhalte voraus bzw. durchdringt diese) erscheint als besonders geeignet für Studierende naturwissenschaftlicher und somit anwendungsorientierter Fachgebiete. Zudem muss das Konzept aus dem Blickwinkel der Veranschaulichung betont werden. Mit dem diskutierten Lehrkonzept wird nämlich nicht nur eine inhaltliche Verschmelzung von Symmetrie und Gruppentheorie realisiert; mit der symmetrieorientierten Erarbeitung eröffnen sich zahlreiche Ansätze zur inhaltsspezifischen Veranschaulichung gruppentheoretischer Begriffe und Zusammenhänge.

7 Ein Definitionsansatz mit Gruppentafeln

Gruppentafeln sind im Allgemeinen gebräuchlich als eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Veranschaulichung endlicher Gruppen und gruppentheoretischer Zusammenhänge. Weniger häufig Verwendung findet die bemerkenswerte Eigenschaft der Gruppentafeln, nicht nur eine Gruppe zu veranschaulichen, sondern auch gleichzeitig die Gruppe zu definieren. Mit der Tafel ist nämlich die Gruppe in ihrem gesamten strukturellen Gefüge eindeutig bestimmt. (Eine gewisse Einschränkung stellt das Merkmal der Assoziativität der Gruppenoperation dar: Dieses Merkmal kann nicht direkt ersehen werden und muss aus der Tafel abgeleitet werden.)

Diese *Dualität der Wirkung* einer Gruppentafel (veranschaulichende und definitorische Wirkung), findet sich bereits bei ARTHUR CAYLEY, der die Darstellungsform der Gruppentafel begründete. Bereits in seinem ersten Artikel zur abstrakten Gruppentheorie *„On the theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\Theta^n = 1$“* führt CAYLEY 1854 die Terminologie der Gruppentafel ein. Aus seiner Analyse von Gruppentafeln spezieller 4-elementiger und 8-elementiger Gruppen lässt sich dabei deutlich erkennen, dass CAYLEY die Gruppentafeln als ein *Instrument zur Gruppendefinition* (mit veranschaulichender Wirkung) auffasst und behandelt [CAYLEY 1854, S. 125 ff.]. In seinen 1878 erscheinenden gruppentheoretischen Arbeiten kommt die definierende Funktion der Gruppentafel dagegen weniger zum Ausdruck, vielmehr verwendet CAYLEY Gruppentafeln in ihrer darstellenden und veranschaulichenden Funktion. So nutzt er in dem Artikel *„The Theory of Groups“* zur Illustration der Strukturgleichheit zweier endlicher Gruppen eine Gruppentafel einer 6-elementigen Gruppe [CAYLEY 1878a, S. 402].

Aus unserer heutigen Sichtweise heraus betrachtet DÖRFLER die definierende und veranschaulichende Funktion der Gruppentafeln unter dem Aspekt des *„diagram-*

matischen Denkens". DÖRFLER unterscheidet in Anlehnung an CHARLES S. PEIRCE zwischen Diagramm und Veranschaulichung:

„Die Struktur von, und die zulässigen Transformationen mit Diagrammen sind in wesentlicher und exakter Weise der Inhalt und die Bedeutung des zugehörigen mathematischen Begriffs. Dessen Eigenschaften werden durch das Manipulieren der Diagramme und dessen Ergebnisse präsentiert. Demgegenüber legen Veranschaulichungen (Skizzen, Zeichnungen) eine Idee oder ein Konzept ‚nur' nahe, ohne ein direktes Operieren damit zu ermöglichen. Diagramme können und sollen sozusagen ‚beim Wort' genommen werden. Veranschaulichungen hingegen müssen metaphorisch oder allegorisch gedeutet werden, sie müssen interpretiert und gedanklich ergänzt werden." [DÖRFLER 2002, S. 151]

Im Zusammenhang mit der Betrachtung von Beispielen für diagrammatisches Denken regt DÖRFLER an, Gruppentafeln als eine diagrammatische Ausdrucksform gruppentheoretischer Begriffe und Sätze aufzufassen:

„Die Theorien (endlicher) algebraischer Strukturen wie etwa Halbgruppen oder Gruppen, Ringe oder Körper können diagrammatisch interpretiert werden als Diskurse über die jeweiligen Operationstafeln, ihre Eigenschaften oder Transformationen. Eine Gruppentafel ist ein Diagramm (eine Inskription) mit gewissen Eigenschaften. Es ist kein besonderer Aufwand, Begriffe und Sätze der abstrakten Gruppentheorie in Eigenschaften und Operationen von Gruppentafeln zu übersetzen. Macht man dies, so entwickelt sich zunehmend das Gefühl, dass Gruppentheorie als ein symbolisch-formalisiertes Sprechen über Gruppentafeln angesehen werden kann. Die Gruppentafeln werden dadurch von bloßen Veranschaulichungen oder Repräsentationen zu den Gegenständen der Gruppentheorie." [DÖRFLER 2001, S. 159]

Über eine solche konkrete Ausgestaltung des Definitionsansatzes mit Gruppentafeln und die dabei gewonnenen Erfahrungen berichtet RIMON [RIMON 1984]. Er definiert allgemein eine Gruppe als eine Menge mit gegebener Multiplikationstafel. Daraus leitet er die (äquivalente) axiomatische Definition des Gruppenbegriffes ab und folgert grundlegende gruppentheoretische Sätze aus seinem Definitionsansatz (u. a. den Satz von LAGRANGE [RIMON 1984, S. 25]).

RIMON weist ausdrücklich auf die natürlichen Grenzen seiner Vorgehensweise hin: die ausschließliche Darstellung endlicher Gruppen durch Gruppentafeln [ebd., S. 20].

Insgesamt erscheint es durchaus lohnenswert, das definitorische Potenzial solcher diagrammatischen Darstellungsformen auszuloten.[4] Es verändert sich nämlich

---

[4] Eine vergleichbare veranschaulichende und definitorische Wirkung findet sich in den Gruppengraphen, die ebenfalls auf CAYLEY zurückgehen [CAYLEY 1878b, S. 404]. Gruppengraphen veranschaulichen eine Gruppe; zugleich lassen sich aus dem Graphen die Gruppenelemente und das strukturelle Wirken der Gruppenoperation ablesen. Während

nicht nur die Sichtweise auf die Darstellung der Gruppentafel, es verändert sich auch die Art der Integration der Gruppentafel in den Lernprozess:

„Die Diagramme werden von Mitteln zum Nachdenken über abstrakte Objekte zu den Gegenständen des abstrakten Denkens." [DÖRFLER 2001, S. 159]

8 Computerbasierte Ansätze und Lehrkonzepte zur Gruppentheorie

Im Blickpunkt des letzten Abschnittes befindet sich der Computer als Lehrmedium. Es wird sich zeigen, dass die damit verknüpften Ansätze und Konzepte *inhaltlich* nicht neuartig sind: Das strukturorientierte Inhaltskonzept in Analogie zu VAN DER WAERDEN ist auch hier durchaus bestimmend. Andererseits steht mit dem Computer ein Medium zur Verfügung, das eine veränderte Gestaltung des Lehr- und Lernprozesses von gruppentheoretischen Inhalten realisieren kann. Die erweiterten Darstellungsmöglichkeiten und Darstellungsformen gestatten die Umsetzung von handlungsorientierten Konzepten, die die Lernenden im Vergleich zu herkömmlichen Lehr- und Lernformen (Lehrbuch, Vorlesung, Seminar) in bisher nicht gekannter Weise aktivieren und in den Lehr- und Lernprozess integrieren.

Eine Einbeziehung des *Mediums Computer* in das Lehren und Lernen von Gruppentheorie beginnt sehr frühzeitig, spätestens aber mit der großflächigen Verbreitung der Computertechnik. Erste Berichte dazu datieren bereits aus dem Jahr 1978. Die Auseinandersetzung mit Lehransätzen und Lehrkonzepten, die das Medium Computer verwenden, lässt im Wesentlichen vier verschiedene Ausrichtungen des Computereinsatzes erkennen (vgl. [XYLANDER 2003, S. 102 ff.]). So wird ein Lehransatz offenbar, in dem der Computer als reines *Werkzeug* erscheint, um einzelne gruppentheoretische Sachverhalte quantitativ zu erfassen. Ein zweiter Ansatz verwendet den Computer hauptsächlich als *Einstiegs- und Motivationshilfe*, um anhand der Darstellung einzelner gruppentheoretischer Inhalte ein vertieftes Eindringen in die Gruppentheorie zu forcieren. In einer dritten Herangehensweise erscheint der Computer als ein *Experimentierfeld*, in dem gruppentheoretische Begriffe und Zusammenhänge quantitativ in konkreten Beispielen hergestellt und ausgedrückt werden können. Die vierte Form des Computereinsatzes sieht den Computer schließlich als das umfassende *Lehrmedium*, das die abstrakt-mathema-

für endliche Gruppen prinzipiell Gruppentafeln aufgestellt werden können, ist nicht jede endliche Gruppe auch für eine graphentheoretische Repräsentation geeignet. Dies liegt darin begründet, dass die strukturellen Zusammenhänge einer Gruppe zu einer Mehrdimensionalität in der Graphendarstellung führen können. Hauptsächlich werden daher Gruppengraphen zur Veranschaulichung zyklischer Gruppen mit einem oder zwei erzeugenden Elementen verwendet. (Unter dem Gesichtspunkt der Veranschaulichung von Gruppen diskutieren BESSENRODT und TÖRNER vielfältige Beispiele für Gruppengraphen [BESSENRODT et. al. 1982].)

tischen Inhalte den Lernenden für das Selbststudium in Ergänzung oder Ersetzung eines Lehrbuches zur Verfügung stellt.

8.1 Der Computer als quantifizierendes Werkzeug in der Gruppentheorie

Mit der Entwicklung des Computers wachsen naturgemäß die Möglichkeiten zur Berechnung mathematischer Problemstellungen, insbesondere auch gruppentheoretischer Problemstellungen. Daraus resultiert der Ansatz, mit dem Computereinsatz die Studierenden von zeitintensiven (Hand-)Rechnungen zu befreien, um somit ihren Blick unverstellt stärker auf wesentliche inhaltliche Zusammenhänge der Gruppentheorie lenken zu können.

Aus der Sicht der physikalischen Anwendungen der Gruppentheorie beschreibt HERGERT die Aufwändigkeit der physikalischen Rechnungen als ein grundlegendes Hindernis für die Vertiefung der gruppentheoretischen Inhalte:

„Aufgabenstellungen der Gruppentheorie haben die Eigenschaft, entweder trivial zu sein, oder schnell in aufwendige Rechnungen auszuarten, wobei die Teilschritte der Berechnungen im Wesentlichen aus elementaren Operationen bestehen. Daher haben die Studenten zumeist Schwierigkeiten die Gruppentheorie auf komplexere physikalische Fragestellungen anzuwenden.“ [HERGERT 1997, S. 64]

Einen möglichen Ausweg sieht HERGERT im Einsatz eines Computers und entsprechender Software in Form eines Computeralgebrasystems. Am Beispiel der Zerlegung einer bekannten normierbaren Funktion in eine Linearkombination von Basisfunktionen der irreduziblen Darstellungen der Gruppe der SCHRÖDINGER-Gleichung [ebd., S. 65] wird dies verdeutlicht:

„Sind entsprechende Algorithmen in einem CA-System (Computeralgebrasystem – B. X.) *implementiert, so können physikalische oder quantenchemische Problemstellungen effektiv diskutiert werden, indem die redundanten, zeitaufwendigen, elementaren Operationen dem Computeralgebrasystem übertragen werden.“* [HERGERT 1997, S. 64]

Die Bezeichnung des solcherart beschriebenen Computereinsatzes als *„computerbasierenden Lehransatz für Gruppentheorie“* mag auf den ersten Blick vielleicht übertrieben erscheinen. Dennoch sind der Computer und das Computeralgebrasystem in diesem Vorgehen ein unverzichtbarer Bestandteil des gruppentheoretischen Lehr- und Lernprozesses: Die oftmals aufwändigen Rechenwege der physikalischen Anwendungen werden (fast) nebensächlich und die Studierenden können zu den tatsächlichen Inhalten hingeführt werden:

„Das Paket (das MATHEMATICA-Softwarepaket – B. X.) *gestattet nun in der Vorlesung zur Gruppentheorie Übungsteile einzubauen, in denen wesentlich komplexere Aufgabenstellungen untersucht werden können. Damit kommt man praktischen Problemstellungen der Forschung näher.“* [ebd., S. 65]

8.2 Der Computer als Einstieg in die Gruppentheorie

Während der eben beschriebene Lehransatz den Computer und die entsprechende Software als ein Werkzeug ansieht, das nur wenig mit einer inhaltlichen Erarbeitung der Gruppentheorie zu tun hat, basiert das nun diskutierte Lehrkonzept auf einer verstärkt inhaltsorientierten Anwendung des Computers: Aus der computergestützten Untersuchung und Entwicklung einzelner gruppentheoretischer Sachverhalte entwickelt sich ein Einstieg in eine vertiefende inhaltliche Auseinandersetzung. Die thematischen Möglichkeiten zur motivierenden Eingangsgestaltung sind dabei vielgestaltig.

MEYER und PRADE beschreiben am Beispiel der Oktaedergruppe die Entwicklung eines programmierbaren Algorithmus, mit dem sämtliche Untergruppen einer endlichen Gruppe bestimmt werden können [MEYER et. al 1978]. Einen besonderen Stellenwert nimmt die Verbesserung der Effizienz des Algorithmus ein; beginnend mit der vollständiger Enumeration wird der Algorithmus bis hin zur effektiven (rekursiven) Betrachtung ausgezeichneter Teilmengen, die durch die Adjunktion einzelner Elemente erweitert werden, verbessert. Die Diskussion des Algorithmus bietet den Einstieg für die Untersuchung nichttrivialer gruppentheoretischer Inhalte: Es wird der Gruppenbegriff und der Untergruppenbegriff aus der Problemstellung selbst abgeleitet, es sind Untergruppenkriterien zu bestimmen, der Satz von LAGRANGE wird erarbeitet und Isomorphiebetrachtungen werden angestellt.

SIMMONDS berichtet über die theoretische Begründung computerbasierter Experimente zur Gruppentheorie [SIMMONDS 1982]. Mit Hilfe eines selbst entwickelten Computerprogramms zur Berechnung derjenigen primen Restklassengruppen, deren Elemente selbstinvers sind, entsteht die überraschende Vermutung über die beschränkte Anzahl dieser Gruppen. Das sich daran anschließende Beweisbedürfnis führt direkt zur Erarbeitung wesentlicher zahlentheoretischer und gruppentheoretischer Inhalte.

Auch IITAKA kennzeichnet das Entwickeln von gruppentheoretischen Computerprogrammen als eine Möglichkeit, Studierende an die inhaltlichen, mathematischen Grundlagen heranzuführen:

„By writing programs for ‚group theory', one get familiar with mathematical concepts and thus is able to find new formula and theorems in group theory." [IITAKA 1993, S. 95]

Am Beispiel der Entwicklung und programmtechnischen Umsetzung eines Algorithmus für die Bestimmung des direkten Produkts zweier zyklischer Gruppen beschreibt IITAKA, wie aus der gruppentheoretischen Problemstellung die Motivation und das Verständnis für die zugrunde liegenden gruppentheoretischen Inhalte erwächst [IITAKA 1993].

Zusammenfassend kann das Lehrkonzept folgendermaßen charakterisiert werden: Ausgehend von relativ einfachen und überschaubaren gruppentheoretischen Aufgaben führt die Auseinandersetzung sowohl mit der technischen, aber auch mit der oftmals reizvollen, inhaltlichen Problemstellung die Studierenden hin zur Erarbeitung und Aneignung der (abstrakten) gruppentheoretischen Grundlagen.

8.3 Der Computer als gruppentheoretisches Experimentierfeld

Es gibt verschiedene Softwarelösungen, die es Studierenden ermöglichen, gruppentheoretische Sachverhalte in vielfältiger Breite und inhaltlicher Tiefe exemplarisch – d. h. hauptsächlich quantitativ – zu erarbeiten. So analysiert PAULSEN verschiedene Strukturelemente konkreter endlicher Gruppen und stellt diese, ausgehend von einer symbolischen Gruppendarstellung, mit MATHEMATICA explizit dar [PAULSEN 1995]. Ein anderes Beispiel findet sich bei HIBBARD und LEVASSEUR, die in [HIBBARD et. al. 1999] beschreiben, wie mit MATHEMATICA grundlegende Inhalte der Gruppentheorie, aber auch der Ring- und Körpertheorie, exemplarisch erarbeitet werden können.

Sowohl bei PAULSEN als auch bei HIBBARD und LEVASSEUR handelt es sich vor allem um eine quantitative Analyse konkreter Gruppen und Beispiele. PAULSEN etwa definiert eine Gruppe G durch die explizite Angabe von erzeugenden Elementen und Relationen dieser Elemente in einer symbolischen Form, z. B. mit

$$G = < \{i, j, a\} \mid i^4 \rightarrow 1, j^2 \rightarrow i^2, ji \rightarrow i^3 j, a^3 \rightarrow 1, ai \rightarrow ija, aj \rightarrow ia >.$$

Diese symbolische Darstellung lässt sich in dem Computeralgebrasystem MATHEMATICA als Eingabe formulieren [PAULSEN 1995, S. 22]. Davon ausgehend können mit MATHEMATICA-Routinen verschiedene Gruppenstrukturen bestimmt und als Elementmengen ausgegeben werden, wie etwa Nebenklassen, Normalteiler, konjugierende Elemente, Kommutatorgruppen usw. Das Ansinnen dieser Vorgehensweise ist es, für konkrete Gruppen die gruppentheoretischen Begriffe und Zusammenhänge *quantitativ* erfassbar zu gestalten und somit auch *qualitativ* besser zu verdeutlichen:

„Thus, by using these few routines, we can exemplify the structure of many different groups. Students can use these routines to understand the meaning behind many of the theorems in modern algebra." [PAULSEN 1995, S. 24]

Auch bei HIBBARD und LEVASSEUR steht die Analyse konkreter Gruppenbeispiele im Mittelpunkt. Der von ihnen beschriebene Kurs *„Exploring Abstract Algebra with Mathematica"* [HIBBARD et. al. 1999] umfasst insbesondere eine umfangreiche und tiefgründige Erarbeitung gruppentheoretischer Begriffe und Zusammenhänge. In so genannten *„Group Labs"* werden mit Hilfe des MATHEMATICA-Pakets ABSTRACTALGEBRA konkrete Beispiele für Gruppen und ihre Untergruppen, für Isomorphismen und Automorphismen, für direkte Produkte von Gruppen, für Nebenklassen, Normalteiler und Faktorgruppen sowie für Gruppenhomomorphismen berechnet und zum Teil sogar visualisiert; die einzelnen *„Group Labs"* sind dabei zum Teil voneinander unabhängig.

Die in dem Lehrmaterial behandelten Beispiele entstammen hauptsächlich den Bereichen der endlichen Zahlengruppen, der Permutationsgruppen und der Symmetriegruppen geometrischer Figuren. Die Darstellungsformen der Beispiele reichen von der symbolisch-verbalen Darstellung bis hin zu (animierbaren) ikonischen Darstellungen; die (berechneten) Veranschaulichungen treten vor allem in der (inhaltsspezifischen) Form von Gruppentafeln auf.

Insgesamt zeichnet sich dieser Konzeptansatz dadurch aus, dass es prinzipiell um die *Begleitung* von Lehr- und Lernprozessen zur abstrakten Algebra mit einer Vielzahl von Experimentierbeispielen geht. Im Mittelpunkt der inhaltlichen Vermittlung steht das Erforschen und Festigen der gruppentheoretischen Inhalte durch ein *aktives Erarbeiten* sowie durch das *Visualisieren* verschiedener Zusammenhänge. So umfangreich auch die computerbasierten Inhaltsangebote hier auftreten, die (qualitative) Auseinandersetzung der Studierenden mit der Gruppentheorie in einem Lernprozess (mittels Lehrbuch oder in Vorlesung und Seminar) ist dennoch unabdingbar.

8.4 Der Computer als umfassendes Lehrmedium für Gruppentheorie

Der Ansatz, den Computer als ein umfassendes Lehrmedium zu nutzen, besteht darin, die gruppentheoretischen Lehrinhalte nicht mit herkömmlichen (konventionellen) Medien, sondern mit dem Medium Computer darzustellen. Anders als die eben geschilderte Vorgehensweise etwa von HIBBARD und LEVASSEUR, bei dem *exemplarisch konkretisierte* gruppentheoretische Zusammenhänge durch Eingabeprozesse *aktiv* hergestellt und visuell am Computer dargestellt werden können, handelt es sich bei dieser Vermittlungsform um eine Präsentation umfangreicher *inhaltlicher Beziehungsgefüge* der Gruppentheorie mit dem Medium Computer zum Zweck des *Selbststudiums*.

Natürlich werden sich solche Lehrmaterialien im Umfang der dargestellten Inhalte und im Umfang der multimedialen Funktionalität (insbesondere der damit verbundenen Interaktivität) voneinander unterscheiden. So besitzt ein übergroßer Anteil der gruppentheoretischen Computer-Lehrmaterialien ausschließlich einen herkömmlichen Lehrbuchcharakter: Es handelt sich zumeist um im Internet veröffentlichte Vorlesungsskripte oder Lehrbuchäquivalente, die zwar eine ausgeprägte inhaltliche Breite und Tiefe aufweisen, in ihrer Präsentationsform jedoch kaum an die neue Wirkungsweise der neuen Medien angepasst werden (dies umfasst eine fehlende Aktivierung der Studierenden ebenso wie das Fehlen darstellungsorientierter Veranschaulichungsformen, die das neue Medium Computer eigentlich ermöglicht). Andererseits gibt es multimediale Lehrmaterialien, die speziell für das Lehren und Lernen mit dem Computer entwickelt werden. Ein Beispiel dafür ist das vom Autor erarbeitete gruppentheoretische Lehr- und Lernmodul SYMMETRIE MOLEKULARER STRUKTUREN.[5]

Das Lehrmaterial SYMMETRIE MOLEKULARER STRUKTUREN stellt sich aus inhaltlicher Sicht als eine Verschmelzung von Symmetriebetrachtungen mit gruppentheoretischen Inhalten dar: auf der Grundlage der axiomatische Strukturierung der gruppentheoretische Begriffe und Zusammenhänge im Sinne VAN DER WAERDENs und anknüpfend an das bereits diskutierte Lehrkonzept von ATKINS. Aus medialer Sicht werden die anwendungsbezogenen, aber auch abstrakt-mathematischen Inhalte von einer Vielzahl multimedialer Elemente und Veranschaulichungsformen durchdrungen. Ein zentrales Gestaltungsmittel sind hierbei *virtuell-dreidimensionale Polyeder*- und *Molekülmodelle*, die mit ihrer multimedialen Funktionalität speziell für das Lehrmaterial entwickelt wurden und die sich als besonders geeignet herausstellen, die gruppentheoretischen Begriffe und Zusammenhänge in der Molekülsymmetrie zu veranschaulichen (vgl. dazu [XYLANDER 2003, S. 115 ff.] und [XYLANDER et. al. 2004, S. 35 ff.]). So lassen sich zu virtuell-dreidimensionalen Polyedern und Molekülen deren Symmetrieoperationen (Drehungen, Spiegelungen, Drehspiegelungen und Inversionen) visualisieren, wobei u. a. die Orientierungserhaltung als Unterscheidungsmerkmal gerader und ungerader Symmetrieoperationen veranschaulicht werden kann [XYLANDER 2003, S. 141 f.]. Es lassen sich Mengen von Symmetrieoperationen ebenso darstellen wie Gruppen von Symmetrieoperationen (Symmetriegruppen) und Untergruppen von Symmetriegruppen [ebd., S. 133]. Durch die *Darstellungskombination* mehrerer Modelle in Verbindung mit einem *aktivitätsfördernden Handlungsbezug* [ebd., S. 122 ff.] können grundlegende gruppentheoretische Inhalte veranschaulicht werden wie z. B. die Hintereinanderausführung zweier Symmetrieoperationen in einer resultierenden Symmetrieoperation [ebd., S 123], die Erzeugung von Symmetriegruppen durch eine einzelne Symmetrieoperation als erzeugendes Element bzw. durch ein Erzeugendensystem von Symmetrieoperationen [ebd., S. 135] oder auch die Isomorphie von Symmetriegruppen zu (abstrakten) Gruppen mit abstrakten Operationen als Gruppenelementen [ebd., S. 165].

Dem Lehrmaterial SYMMETRIE MOLEKULARER STRUKTUREN liegt ein didaktisches Konzept zugrunde, das sowohl bekannte und bewährte, aber auch für das Lehrme-

---

[5] Das Lehrmaterial entstand im Rahmen des Leitprojektes *„Vernetztes Studium – Chemie"* des Bundesministeriums für Bildung und Forschung der Bundesrepublik Deutschland. In diesem Leitprojekt werden Lehrinhalte des Basisstudiums Chemie in Wissensmodulen multimedial erarbeitet und fachübergreifend miteinander vernetzt. Die solcherart neu organisierten Lehrinhalte sollen ein problembezogenes und entdeckendes Lernen der Studierenden, begleitend zu Vorlesungen und Seminaren, sowie das berufsqualifizierende Lernen fördern und ermöglichen. Zielgruppe des Projektes sind Haupt- und Nebenfachstudierende sowie Postgradualstudierende der Fachrichtung Chemie und benachbarter Fächer (siehe auch [PEITZ et. al. 2004] bzw. http://vs-c.de).

dium Computer neu formulierte didaktische Prinzipien und Ideen entfaltet. Als bemerkenswert erscheinen hierbei didaktische Strategien, die gezielt die Studierenden zum handelnden Erarbeiten der Lehrinhalte aktivieren und sie somit eng in den Lehr- und Lernprozess integrieren [ebd., S. 127 ff.].

Multimediale Lehrmaterialen lassen sich nur eingeschränkt mit herkömmlichen Lehrmaterialien (etwa mit Lehrbüchern) vergleichen. Dies liegt darin begründet, dass die Lehrmaterialien inhaltlich, medial und didaktisch speziell auf das Lernen mit dem Medium Computer ausgerichtet und ausschließlich dafür konzipiert werden. Dabei eröffnen sich insbesondere mit den medialen und *interaktiven* Veranschaulichungsformen des Computers viel versprechende Ansätze zur Darstellung und Vermittlung von abstrakt-mathematischen, insbesondere auch gruppentheoretischen Inhalten, die sich in dieser Form nicht im herkömmlichen Lehr- und Lernprozess realisieren lassen.

9 Abschluss

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Konzepte und Ansätze des Lehren und Lernens von Gruppentheorie vorgestellt und diskutiert. Diese zeichnen sich durch einen eher abstrakt-mathematischen Charakter (Strukturkonzept von VAN DER WAERDEN, Theorie der Permutationen), einen eher anschaulichen Charakter (Geometrie- und Symmetriekonzepte, Gruppentheorie in der Schule) und einen diagrammatischen Charakter (definitorischer Ansatz mit Gruppentafeln) aus. Am Beispiel des Lehrmediums Computer wurde zudem dargestellt, wie die Lernenden durch eine computerbasierte mediale Organisation der gruppentheoretischen Inhalte zum handelnden Lernen aktiviert und somit eng in den Lehr- und Lernprozess integriert werden können.

Die Auswahl eines Weges zum Erlernen von Gruppentheorie ist abhängig von der konkreten Lehr- und Lernsituation. Neben personalen Faktoren (z. B. Vorkenntnisse, Fähigkeiten, Erfahrungen der Lernenden) und medialen Faktoren (z. B. zur Verfügung stehende Medien der Darstellung und der Vermittlung) sind inhaltliche Faktoren bedeutsam. So muss Klarheit darüber bestehen, in welcher Tiefe und in welcher Breite das Wissen über Gruppentheorie erlernt werden soll. Dazu gehört insbesondere auch ein Abwägen zwischen einer eher abstrakt-mathematischen und einer eher anschaulichen Herangehensweise, denn mit der Mehrzahl der beschriebenen anschaulichen Konzeptideen und Konzeptgedanken lassen sich zumeist nur *Ausschnitte* gruppentheoretischer Inhalte eingänglich darstellen: Alle anschaulichen Konzepte und Ansätze stehen irgendwann vor dem Problem, dass für ein vollständiges Verstehen des im Allgemeinen als Gruppentheorie bezeichneten Wissensumfangs ein mathematisches Abstraktions- und Denkvermögen erforderlich ist, welches über das gemeinhin *Vorstellbare* und *Begreifbare* hinausführt.

Literatur

ALMEIDA, D. F. (1999): Visual aspects of understanding group theory. In: International journal of mathematical education in science and technology, Band 30, Heft 2, London: Taylor & Francis, 1999, S. 159–166.

ATKINS, P. W. (1987): Physikalische Chemie. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft mbH, 1987.

BAUERSFELD, H. (1961): Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Band 14, Heft 6, Frankfurt/M.: Ferd. Dümmlers Verlag, 1961/62, S. 274–278.

BESSENRODT, CH.; TÖRNER, G. (1982): Gruppentheorie und anschauliches Denken – ein Plädoyer für die Behandlung von Gruppengraphen in der Lehramtsausbildung. In: Mathematische Semesterberichte, Band 29, Heft 2, Heidelberg: Springer-Verlag, 1982, S. 208–229.

BURN, R. P. (1985): Groups: A path to geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

CAYLEY, A. (1854): On the theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\Theta^n = 1$. In: CAYLEY, A.: The collected mathematical papers, Band 2. Reprint der Ausgabe Cambridge 1889–1897, New York: Johnson, 1963, S. 123–130.

CAYLEY, A. (1878a): The theory of groups. In: CAYLEY, A.: The collected mathematical papers, Band 10. Reprint der Ausgabe Cambridge 1889–1897, New York: Johnson, 1963, S. 401–403.

CAYLEY, A. (1878b): The theory of groups; graphical representations. In: CAYLEY, A.: The collected mathematical papers, Band 10. Reprint der Ausgabe Cambridge 1889–1897, New York: Johnson, 1963, S. 403–405.

CUNNINGHAM, S. (1994): Some strategies for using visualization in mathematics teaching. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Band 26, Heft 3, 1994, S. 83–85.

DÖRFLER, W. (2001): Worüber wollen wir mit mathematischen Sätzen reden? In: KAISER, G. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5. bis 9. März 2001 in Ludwigsburg. Hildesheim: Franzbecker, 2001, S. 157–160.

DÖRFLER, W. (2002): Grenzen diagrammatischen Denkens. In: PESCHEK, W. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt. Hildesheim: Franzbecker, 2002, S. 151–154.

HERGERT, W. (1996): Gruppentheorie und Graphentheorie mit MATHEMATICA. In: Computer Theoretikum und Praktikum für Physiker. Beiträge des XI. Computerworkshops in Halle vom 3. bis 5. Oktober 1996. Band 8, 1997, S. 62–70.

HIBBARD, A. C.; LEVASSEUR, K. M. (1999): Exploring abstract algebra with MATHEMATICA. New York: Springer-Verlag, 1999.

IITAKA, S. (1993): How to learn abstract algebra with help of Computer Programming. In: Proceedings of South East Asia Conference on Mathematics Education: Surabaya, Indonesia, 1993, S. 95–102.

KLEIN, F. (1884): Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Reprographischer Nachdruck der Ausgabe Leipzig: B. G. Teubner 1884, herausgegeben mit einer Einführung und mit Kommentaren von PETER SLODOWY. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag; Stuttgart, Leipzig: B. G. Teubner, 1993.

KLEIN, F. (1926): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Reprographischer Nachdruck der Ausgabe Berlin: Springer-Verlag 1926 in einem Band. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979.

KLIKA, M. (1981a): Der „Zauberwürfel” und fundamentale Ideen in der Gruppentheorie. Teil I. In: mathematica didactica: Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, Band 4, Heft 1. Hildesheim: Franzbecker, 1981, S. 51–58.

KLIKA, M. (1981b): Der „Zauberwürfel” und fundamentale Ideen in der Gruppentheorie. Teil II. In: mathematica didactica: Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, Band 4, Heft 2. Hildesheim: Franzbecker, 1981, S. 89–94.

KRONECKER, L. (1870): Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. (Gelesen in der Akademie am 1. December 1870.) In: HENSEL, K. (Hrsg.): LEOPOLD KRONECKER’s Werke. Erster Band. Leipzig: B. G. Teubner, 1895.

MEYER, H.-B.; PRADE, H. W. (1978): Aufsuchen von Untergruppen mit dem Computer. In: Didaktik der Mathematik, Band 6, Heft 4, 1978, S. 245–271.

PAULSEN, W. H. (1995): Group presentation using MATHEMATICA. In: MATHEMATICA in education and research, Volume 4, Nr. 4, 1995, S. 21–24.

PEITZ, B.; STÜBIG, J. (Hrsg.): Internet- und multimedial gestützte Lehre an Hochschulen: Beispiele und Transfer. Bonn: Bundesinstitut für Berufsbildung, 2004.

PERRON, O. (1927): Algebra. Band 1. Die Grundlagen. Berlin, Leipzig: Walter de Gruyter & Co., 1927.

PERRON, O. (1933): Algebra. Band 2. Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin, Leipzig: Walter de Gruyter & Co., 1933.

RIMON, U. (1984): Teaching group theory visually. In: The mathematical gazette, Volume 64, Nr. 443, März, 1984, S. 20–26.

SIMMONDS, G. (1982): Computer discovery of a theorem of modern algebra. In: Mathematics and computer education, Volume 1, Nr. 16, 1982, S. 58–61.

STEINER, H.-G. (1965): Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie. In: LÖFFLER, E. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht, Band 11, Heft 1. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1965, S. 20–39.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1930): Moderne Algebra. Erster Teil. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1930.

VOLLRATH, H.-J. (1974): Didaktik der Algebra. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1974.

WUSSING, H. (1969): Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.

XYLANDER, B. (2003): Veranschaulichung und Gruppentheorie und das gruppentheoretische Lehrmaterial „Symmetrie molekularer Strukturen“. Dissertation. Halle: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2003.

XYLANDER, B.; BRUHN, C.; STEINBORN, D. (2004): Über ein multimediales Lehrmaterial zur Symmetrie der Molekülstrukturen. In: PEITZ, B.; STÜBIG, J. (Hrsg.): Internet- und multimedial gestützte Lehre an Hochschulen: Beispiele und Transfer. Bonn: Bundesinstitut für Berufsbildung, 2004, S. 34–39.

Anschrift des Verfassers

Dr. Bert Xylander
Herderstraße 24a
07545 Gera