

Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“

von

Heinz Schumann, Weingarten

Zusammenfassung: Das Konstruieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D eröffnet neue Behandlungsmöglichkeiten klassischer raumgeometrischer Themen. In diesem Beitrag über das Analogisieren der besonderen Linien und Punkte des Dreiecks zu entsprechenden Objekten des Tetraeders wird gezeigt, wie das Entdecken der Analogien durch die Nutzung des dynamischen Raumgeometrie-Systems unterstützt werden kann und diese für die Schüler und Schülerinnen eigentlich erst zugänglich gemacht werden können.

Summary: Geometric constructions in the virtual space with Cabri 3D open up new possibilities to treat classic spatial geometric topics. This contribution about the analogical processing of specific lines and points of the triangle to corresponding objects of the tetrahedron shows how to support the discovery of analogies with the dynamic 3D-system and how to make them really accessible for the students.

1 Einleitung

Die synthetische Raumgeometrie ist ein Stiefkind der Schulgeometrie; sie beinhaltet heute die Formenkunde, einfachste Darstellungen und Berechnungen von Standardkörpern. Andere traditionelle Themen der synthetischen Raumgeometrie finden heute nur sehr selten Berücksichtigung im Schulalltag: etwa Themen aus dem Bereich der Darstellenden Geometrie, z. B. die Lagebeziehungen räumlicher Basisobjekte, die Dreitafelprojektion oder Themen, die spezielle Körper (z. B. die Platonischen Körper) zum Inhalt haben, die räumlichen Kongruenzabbildungen oder Themen mit vor allem heuristischem Aspekten, z. B. die analogisierende Veräumlichung von Inhalten der ebenen Geometrie, etwa die der ebenen Dreiecksgeometrie zur Geometrie des Tetraeders.

Das mag vor allem an der Tatsache liegen, dass für das Zugänglichmachen solcher Themen der synthetischen Raumgeometrie nur beschränkt adäquate Medien zur Verfügung stehen. Physische Medien sind oft nur aufwändig herzustellen oder sie sind teuer; sie sind meist starr, von eingeschränkter Komplexität und nur für eine Art der konfigurativen Dimensionierung verfügbar; außerdem ist ihre Verwaltung und Kommunizierbarkeit problematisch. Die Verwendung physischer Medien hat aber den Vorteil der ganzheitlichen Wahrnehmung.

Auch die im didaktischen Kontext verfassten Beiträge zur räumlichen Analogisierung der Dreiecksgeometrie (u. a. Tietz 1972; Fritsch 1983, 1984, 1986; Neubrand 1985) spiegeln die Misere der bisher verfügbaren Medien wider. Es ist anzuneh-

men, dass die dort gemachten unterrichtspraktischen Überlegungen mangels einer praktikablen Lernumgebungsgestaltung mit traditionellen Medien wohl keinen Eingang in den geometrischen Schulalltag gefunden haben.

Die Mängel solcher Medien können teilweise durch die Nutzung von direkt manipulativer Computergrafik behoben werden. In Schumann (2001) wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Werkzeugs „Körpergeometrie“ (Bauer et al. 1999) computergrafisch repräsentierte Körper auf synthetische Weise behandeln kann. Mit „Körpergeometrie“ können wir diese aber nur eingeschränkt modifizieren und in oder auf ihnen konstruieren. Mit GeometerPRO (<http://www.geosoft.ch/geometer>) hat Klemenz (2001) ein plattformunabhängiges dynamisches Raumgeometriewerkzeug geschaffen, das aber Probleme bei der räumlichen Wahrnehmung der konstruierten dreidimensionalen Konfigurationen bereitet und den aktuellen software-ergonomischen Ansprüchen nur teilweise gerecht wird.

Es sei angemerkt, dass die Nutzung derartiger Computerwerkzeuge durch die KMK-Standards für die mittleren Schulabschlüsse im Fach Mathematik legitimiert ist (<http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm>).

Wir wollen hier eine räumliche Analogisierung der üblichen besonderen Linien und Punkte des Dreiecks vornehmen, die die Mittel des computerunterstützten Konstruierens im virtuellen Anschauungsraum nutzt. Unter dem virtuellen Anschauungsraum verstehen wir eine geeignete Parallel- oder Zentralprojektion des systemintern in „Weltkoordinaten“ repräsentierten reell euklidischen Raumes auf die Bildelebene. Der virtuelle Anschauungsraum hat räumliche Wahrnehmungsqualität. Mit dem dynamischen Raumgeometrie-System Cabri 3D in der Version 1.0 steht uns ein Werkzeug zur Verfügung mit dem wir u. a.

- raumgeometrische Konstruktionen in der „Tiefe“ des Bildschirms ausführen, indem wir die ebenen Konstruktionen zu den räumlichen Konstruktionen erweitern,
- raumgeometrische Konfigurationen visualisieren, indem wir diese mit reichhaltigen Objektattributen gestalten und mit dem *Virtual Sphere Device*, der Einbettung von Konfigurationen in eine direkt referenzierbare Kugel, von allen Seiten anschauen,
- raumgeometrische Konfigurationen durch Verziehen variieren, wie wir es schon von den ebenen dynamischen Geometrie-Systemen her gewohnt sind.

Im Einzelnen verfolgen wir bei unserem Analogisierungsprozess folgende Zielsetzungen:

- die heuristischen Methoden des Analogisierens und der Induktion sowie die Gegenbeispielmethode anwenden (vgl. u. a. Polya 1962); raumgeometrische Konfigurationen experimentell explorieren und analysieren (metakognitive Lehrziele),

- geometrische Kenntnisse (Sätze, Begriffe, Verfahren) anwenden und diese erweitern (kognitive Lehrziele),
- genaues Beobachten, räumliches Vorstellen und Interpretieren trainieren, das Agieren im virtuellen Anschauungsraum lernen (wahrnehmungsphänomenologische Lehrziele),
- das Computerwerkzeug beherrschen lernen (technisches Lehrziel).

Beim raumgeometrischen Arbeiten und Denken im Rahmen einer Lernumgebung, in der ein Computerwerkzeug wie das dynamische Raumgeometriesystem Cabri 3D vorherrschend zum Einsatz kommt, intervenieren drei wesentliche, in Wechselbeziehung stehende kognitive Kompetenzbereiche (vgl. Diagramm 1).

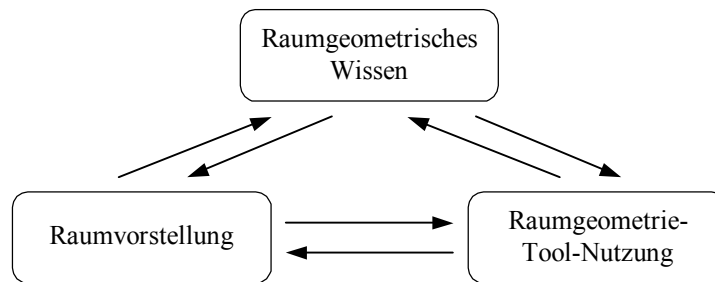


Diagramm 1 (jeder Pfeil bedeutet „unterstützt“)

Raumvorstellungsfähigkeit unterstützt raumgeometrisches Wissen und 3D-Werkzeugnutzung: Notwendige Voraussetzung für raumgeometrisches Wissen und das Arbeiten mit einem Raumgeometrie-Tool ist die Raumvorstellungsfähigkeit, die die individuelle räumliche Interpretation der mit dem Tool oder auf andere Weise dargestellten statischen und dynamischen raumgeometrischen Informationen sicherstellt.

Raumgeometrisches Wissen unterstützt Raumvorstellungsfähigkeit und 3D-Computerwerkzeugnutzung: An raumgeometrischem Wissen und der mittels diesem modellierten Welt wird Raumvorstellung entwickelt und geübt. Für die adäquate Nutzung eines 3D-Tools wie Cabri 3D ist raumgeometrisches Vorwissen, d. h. Kenntnis und Verständnis elementarer raumgeometrischen Begriffe und Verfahren, weitgehend vorauszusetzen.

3D-Computerwerkzeugnutzung unterstützt raumgeometrisches Wissen und Raumvorstellungsfähigkeit: Die Nutzung eines solchen Werkzeugs fördert einerseits die Aneignung, das Verstehen und Anwenden raumgeometrischen Wissens und andererseits die Raumvorstellungsfähigkeit durch das Agieren im virtuellen Anschauungsraum.

In der Hand der in den genannten Bereichen kompetenten Lehrkraft ist Cabri 3D ein mächtiges raumgeometrisches Demonstrations- und Explorationswerkzeug.

Inhaltlich gliedern wir den Beitrag in der Reihenfolge der Analogiebildung:

- Mittelsenkrechte und ihr Schnittpunkt,
- Winkelhalbierende und ihr Schnittpunkt,
- Seitenhalbierende (Schwerlinien) und ihr Schnittpunkt,
- Höhen und ihr Schnittpunkt.

Als Unterrichtsmethode eignet sich die Methode des durch den Lehrer/die Lehrerin gelenkten Entdeckens mittels geometrischem Konstruieren. Diese Methode wird auf unsere Thematik erst mit den konstruktiven Optionen von Cabri 3D anwendbar.

Auf die teilweise analytischen bzw. vektoriellen Beweise und ihre mögliche Visualisierung wird in unserem vorwiegend phänomenologischen Zugang aus Platzgründen nicht eingegangen; diese befinden sich weitgehend in der angegebenen Literatur bzw. in der dort zitierten.

2 Analogisierendes Entdecken mittels Konstruktion

Die Beschreibung des folgenden Analogisierungsprozesses mittels raumgeometrischem Konstruieren ist in der Art eines Entdeckungsprotokolls abgefasst. Allerdings ist für die Erfassung der Dynamik des experimentellen und konstruktiven Arbeitens im virtuellen Anschauungsraum das Printmedium nur bedingt geeignet. Um die Anzahl der (ursprünglich farbigen) Abbildungen zu reduzieren, wurde auf alle Abbildungen verzichtet, die verschiedene Ansichten derselben Konfiguration zum Zwecke der Visualisierung zeigen oder die durch Verziehen variierte Konfigurationen zum Zwecke einer Eigenschaftsinvarianz-Untersuchung dokumentieren. Farbige Abbildungen können auf der Cabri-3D-Seite der Homepage des Autors angesehen werden (<http://www.mathe-schumann.de>).

Bei der Analogisierung von Punkten, Geraden und Strecken als Polygonseiten ist grundsätzlich zu beachten, dass

- Punkte in Punkten bzw. in (besondere) Geraden,
- Geraden in Geraden bzw. in (besondere) Ebenen,
- Polygonseiten in entsprechende Polyederkanten bzw. in Seitenflächen von Polyedern

übergehen können, dabei bleiben im Allgemeinen die relationalen Begriffe wie „verbinden“, „inzidieren“, „orthogonal“, „parallel“ erhalten.

2.1 Analogisierung des Dreiecks

Die Verbindungsstrecken von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte bilden ein Dreieck. Entsprechend bilden die Verbindungsstrecken von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkte ein Tetraeder (Vierflächner). Wir erhalten ein Tetraeder (Abb. 1), bei dem wir die dem Betrachter zugewendete Seite halbtransparent darstellen, so dass man in den Körper hineinsehen kann.

2.2 Analogisierung der Mittelsenkrechten und ihres Schnittpunkts

Wir haben die Mittelsenkrechten eines Dreiecks gezeichnet und analogisieren nun den Begriff Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite zum Begriff Mittelsenkrechte einer Tetraederseitenfläche, indem wir im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks das Lot auf die Dreiecksebene errichten (Abb. 2).

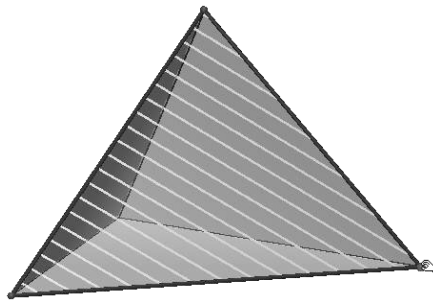


Abbildung 1

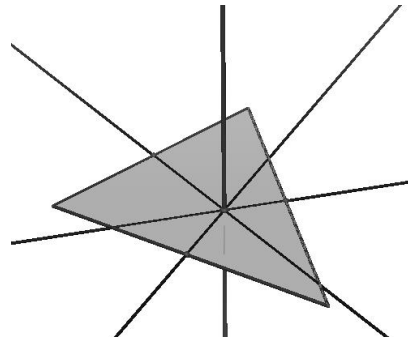


Abbildung 2

In Analogie zu den Umkreisen einer Strecke können wir die Umkugeln eines Dreiecks konstruieren, indem wir auf das Lot im Schnittpunkt der Dreiecksmittelsenkrechten einen beweglichen Punkt legen; dieser hat nach Konstruktion stets jeweils gleiche Entfernung zu den Dreiecksecken (Abb. 3). Die Bewegung des Kugelmittelpunktes erzeugt eine dem Dreieck umbeschriebene Kugelschar (Abb. 4 zeigt eine solche Kugel).

Konstruiert man jetzt für alle vier Seitenflächen des Tetraeders die Lote in den jeweiligen Schnittpunkten der Mittelsenkrechten, so schneiden sich diese Lote im Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders (Abb. 5 zeigt die Umkugel mit den Flächenmittelsenkrechten und Radien) – in Analogie zum Umkreis des Dreiecks. Durch entsprechendes Verziehen der Tetraederecken kann man untersuchen, welche Form das Tetraeder hat, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Tetraeders oder in einer seiner Seitenflächen zu liegen kommt.

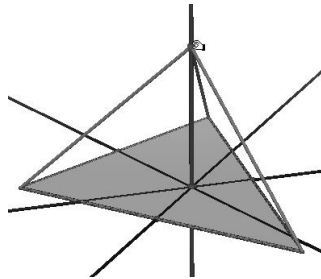


Abbildung 3

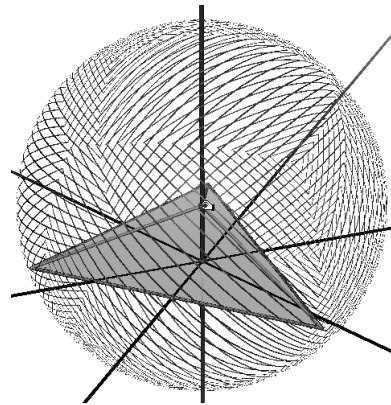


Abbildung 4

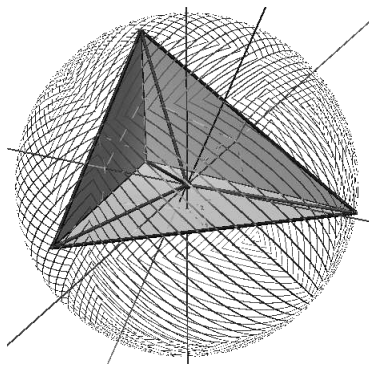


Abbildung 5

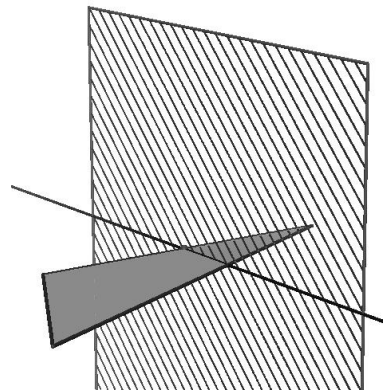


Abbildung 6

Eine andere Möglichkeit wäre, die „Streckenmittelsenkrechte“ in der Dreiecksebene zu einer senkrecht auf der Strecke stehende und durch ihren Mittelpunkt gehende Ebene zu analogisieren (Abb. 6). Die entsprechenden Lotebenen durch die Mittelpunkte der drei Dreieckseiten schneiden sich in der Lotgeraden durch den Umkreismittelpunkt (Abb. 7). Nach Konstruktion schneiden sich dann die „Mittelsenkrechtenebenen“ der sechs Tetraederkanten im Umkugelmittelpunkt. In Abbildung 8 sind der Schnittpunkt dieser Ebenen und die durch ihn laufenden Schnittgeraden zu sehen; vier der Ebenen sind der Übersichtlichkeit wegen transparent dargestellt.

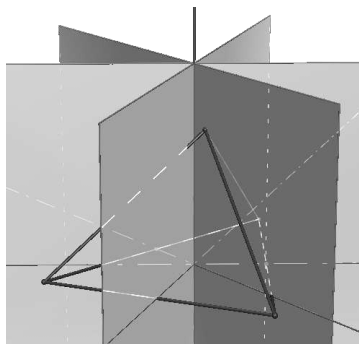


Abbildung 7

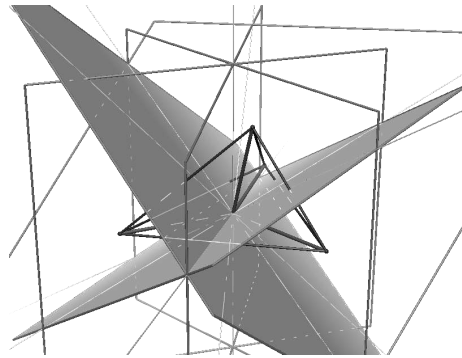


Abbildung 8

2.3 Analogisierung der Winkelhalbierenden und ihres Schnittpunkts

Wir versuchen die Winkelhalbierende einer Dreiecksecke zur Winkelhalbierenden einer Tetraederecke, also einer räumlichen dreiseitigen Ecke, zu analogisieren. Dazu verwenden wir erst einmal die drei Ebenen, die jeweils senkrecht auf der betreffenden Tetraederfläche stehen und durch die betreffende Winkelhalbierende gehen (Abb. 9 zeigt eine der Ebenen als Halbebene).

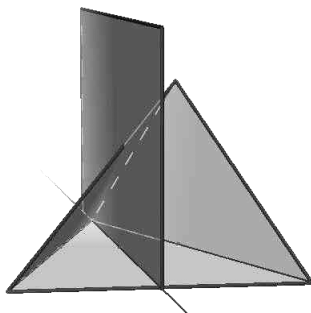


Abbildung 9

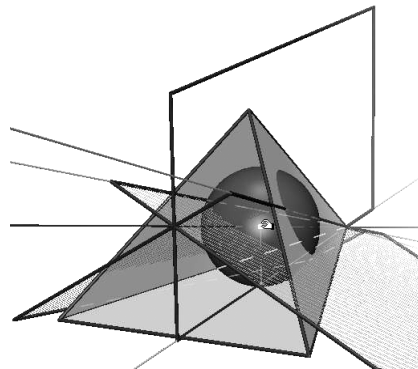


Abbildung 10

Diese drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Ist die Schnittgerade ein möglicher Ort für eine die drei Flächen berührende Kugel? Im Allgemeinen berührt eine solche Kugel leider nur *eine* der Seitenflächen (Abb. 10). Wählt man stattdessen die Ebenen, jeweils gebildet aus den Winkelhalbierenden einer Seite und der gegenüberliegenden Kante (Abb. 11, eine der Ebenen als Halbebene), so schneiden sich

diese Ebenen ebenfalls in einer Geraden. Aber auch die Kugeln mit Mittelpunkten auf dieser Schnittgeraden berühren im Allgemeinen nur *eine* der Seitenflächen (Abb. 12). Wir müssen uns also eine andere Analogisierung einfallen lassen. Dazu wird die ebene Winkelhalbierende als Halbgerade, deren Punkte zu den Winkelschenkeln abstandsgleich sind, analogisiert zu einer Halbebene, deren Punkte jeweils gleichen Abstand von zwei Halbebenen mit gemeinsamer Randgerade haben (Abb. 13). Bezogen auf ein Polyeder bezeichnet man diese Konfiguration als Kantenwinkel oder anschaulicher und allgemeiner als Keilwinkel zweier (Halb-)Ebenen.

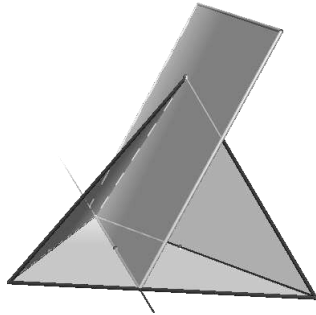


Abbildung 11

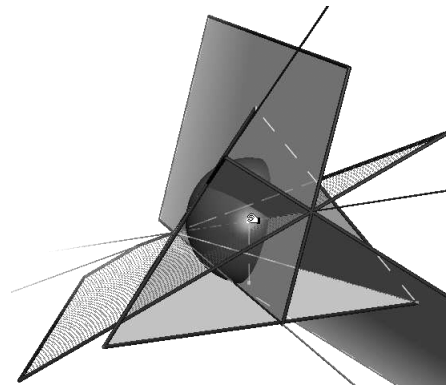


Abbildung 12

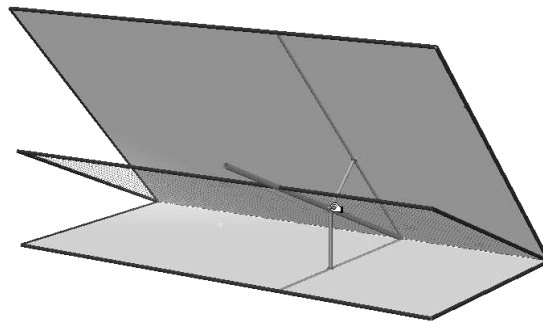


Abbildung 13

Die drei Kantenwinkelhalbierenden einer Tetraederecke schneiden sich in einer Geraden, die Ort für die Mittelpunkte der Kugeln ist, die alle drei Seitenflächen berühren (Abb. 14). Diese Schnittgerade kann man als Winkelhalbierende einer drei-

seitigen räumlichen Ecke bezeichnen. Die Anwendung der entsprechenden Konstruktion auf die vier Tetraederecken zeigt, dass sich ihre vier Winkelhalbierenden in einem Punkt, dem Mittelpunkt der Inkugel schneiden (Abb. 15, mit eingezeichneten Winkelhalbierenden, Inkugel und Berührradien).

In Analogie zur Zerlegung eines Dreiecks in drei höhengleiche Teildreiecke vom Mittelpunkt des Inkreises aus kann man ein Tetraeder vom Inkugelmittelpunkt aus in vier höhengleiche Teiltetraeder zerlegen, deren Grundflächen die Oberfläche des Tetraeders bilden (Abb. 16 mit Inkugelradien). Aus dieser Zerlegung folgt unmittelbar, dass das Tetraedervolumen gleich dem dritten Teil des Produkts aus Inkugelradius und Tetraederoberfläche ist – analog der entsprechenden Beziehung am Dreieck.

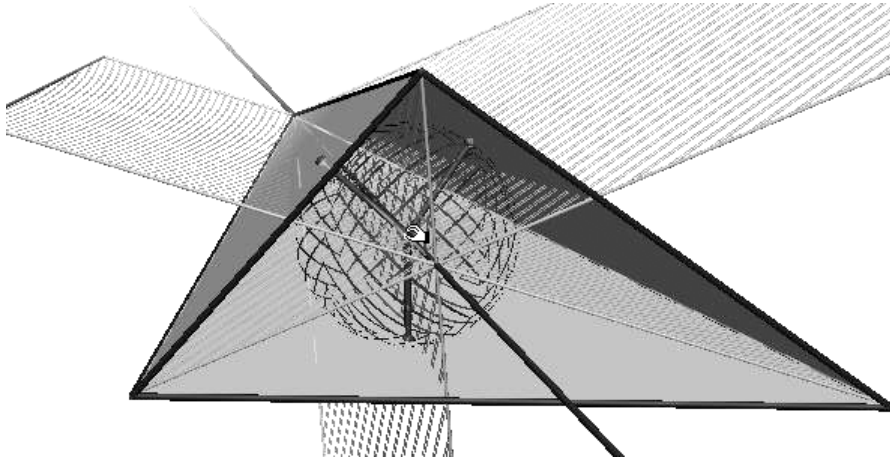


Abbildung 14

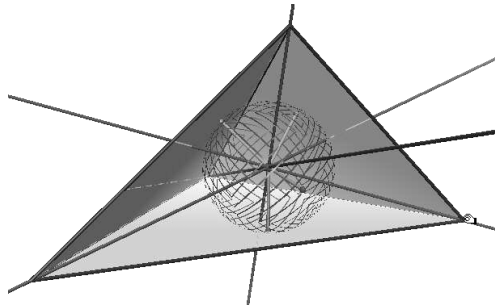


Abbildung 15

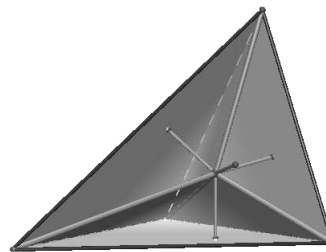


Abbildung 16

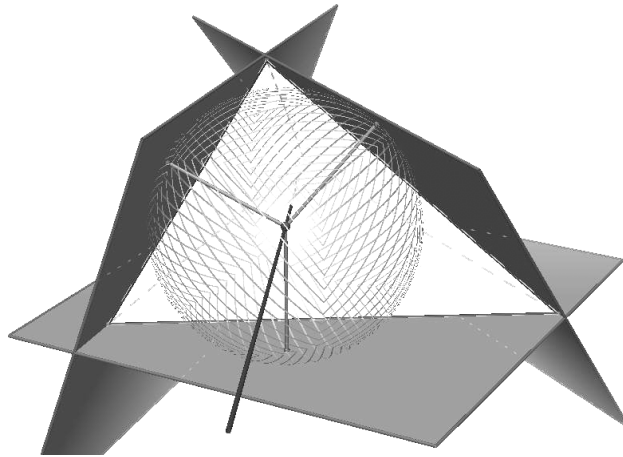


Abbildung 17

2.4 Analogisierung der Schwerlinien (Seitenhalbierenden) und ihres Schnittpunkts

Gemäß der Konstruktion der Schwerlinien im Dreieck als Verbindungslinien der Seitenmitten, den Schwerpunkten der Dreiecksseiten, mit den jeweils gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks, verbinden wir auf analoge Weise die Schwerpunkte der Tetraederseitenflächen mit den jeweils gegenüberliegenden Tetraederecken (Abb. 18). Die vier Verbindungslinien schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Tetraeders; man kann sie als Schwerlinien des Tetraeders bezeichnen. Der Schwerpunkt des Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2:1 (Verhältnis Streckenlänge Schwerpunkt – Eckpunkt zu Streckenlänge Schwerpunkt – Seitenmittelpunkt). Gibt es ein analoges Teilverhältnis beim Tetraeder? Mittels Punktspiegelung stellt man fest, dass hier das Verhältnis 3:1 vorliegt (Abb. 18).

Auch das Mittendreieck des Dreiecks, das aus dem Dreieck auch durch zentrische Streckung vom Schwerpunkt aus mit dem Streckfaktor $-1/2$ entsteht, kann analogisiert werden. Dazu verbindet man die Seitenflächenschwerpunkte zu einem Tetraeder (Abb. 19), das auch durch zentrische Streckung des Tetraeders vom Tetraederschwerpunkt aus mit dem Streckfaktor $-1/3$ erzeugt werden kann.

Eine andere Art von Schwerlinien, die in geeigneter Projektion des Tetraeders auf dem Bildschirm genau wie die Schwerlinien des Dreiecks aussehen, sind die drei Verbindungslinien der Schwerpunkte (Mittelpunkte) von je zwei Gegenkanten des Tetraeders. Diese Linien schneiden sich und halbieren einander. Wir erkennen, dass ihr gemeinsamer Schnittpunkt stets mit dem Schwerpunkt übereinstimmt (Abb. 20).

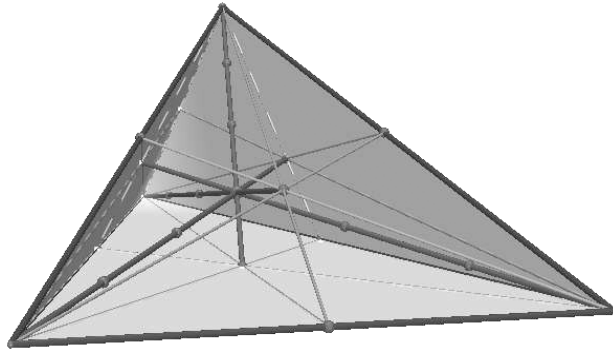


Abbildung 18

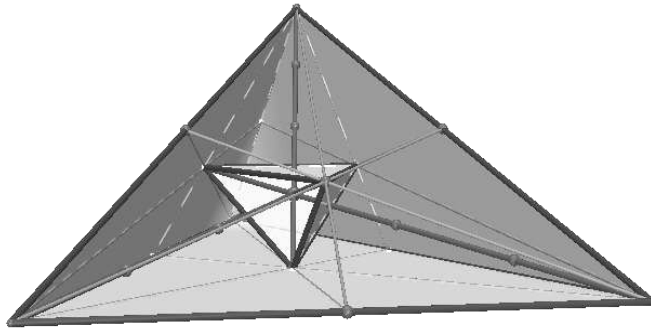


Abbildung 19

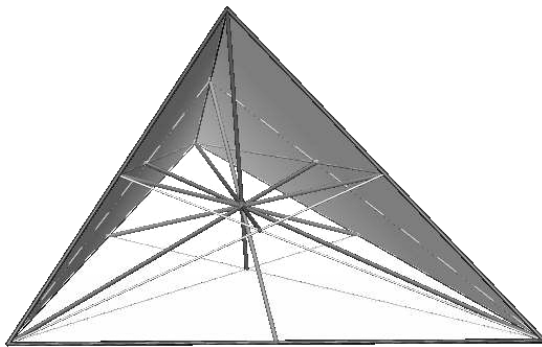


Abbildung 20

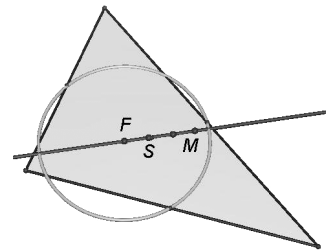


Abbildung 21

Durch die Mittelpunkte (Schwerpunkte) der Dreiecksseiten kann man einen Kreis legen, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden des Umkreismittelpunkts M und des Schwerpunkts S liegt (Abb. 21). Dieser Kreis ist unter dem Namen Feuerbachkreis bekannt, weswegen sein Mittelpunkt mit F bezeichnet wird. S liegt zwischen F und M ; es gilt das Streckenverhältnis $SF : SM = 1 : 2$.

Auf analoge Weise legt man durch die vier Schwerpunkte der Tetraederseiten eine Kugel („4-Punkte-Kugel“ analog zum „3-Punkte-Kreis“) und stellt fest, dass ihr Mittelpunkt F ebenfalls auf der Geraden durch den Umkugelmittelpunkt M und den Schwerpunkt S des Tetraeders liegt (Abb. 22) und dass S die Strecke FM im gleichen Verhältnis wie beim Dreieck teilt. Die Feuerbachkugel verhält sich aber nicht in jeder Hinsicht wie der Feuerbachkreis: So berührt sie weder die Inkugel noch die Ankugeln.

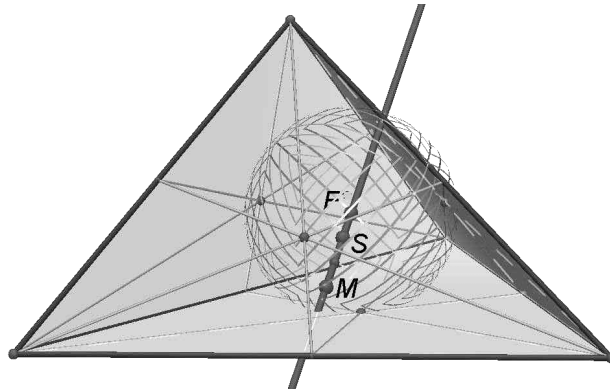


Abbildung 22

2.5 Analogisierung der Höhen und ihres Schnittpunkts

Wir fällen analog der Konstruktion der Höhen im Dreieck die Lote von den Tetraederecken auf die Ebenen der gegenüberliegenden Seitenflächen – und stellen überrascht fest, dass die Körperhöhen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Auch der Versuch mit den Loten auf den Seitenflächen in ihren jeweiligen Höhenschnittpunkten ist nicht erfolgreich.

Was tun? Vielleicht können wir etwas entdecken, wenn wir diese beiden Arten von Loten, die jeweils per Konstruktion parallel sind, in Beziehung setzen. In Abbildung 23 erkennt man erst einmal, dass sich jede der Körperhöhen mit den drei Loten in den Höhenschnittpunkten der Seitenflächen schneiden, die in derjenigen Körperecke zusammenstoßen, von der die Körperhöhe ausgeht. Das gilt dann auch umgekehrt für jedes der vier Höhenschnittpunktlote in Bezug zu den drei Körperhöhen, die von den betreffenden Dreiecksecken ausgehen. – Sozusagen als „goldenen Mittelweg“ zeichnet man die Mittell parallelen zu jedem Parallelenpaar Körper-

höhe – Höhengschnittpunktlot; die vier Mittelparallelen schneiden sich in einem Punkt (Abb. 24). Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit H^* und betrachten ihn als Ersatzpunkt für den nicht existierenden Schnittpunkt der Körperhöhen.

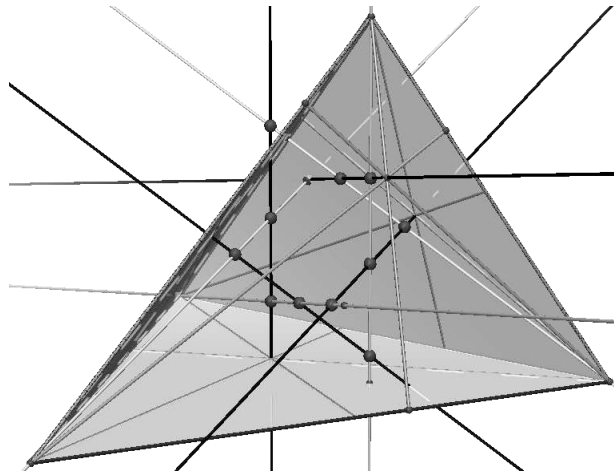


Abbildung 23

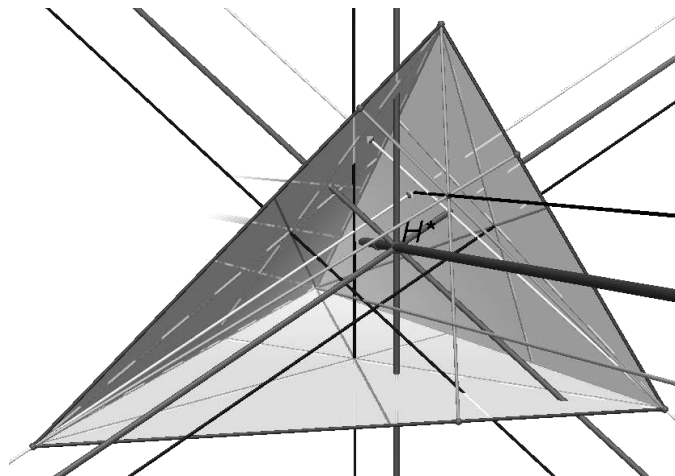


Abbildung 24

Wir entdecken außerdem, dass H^* auf der Geraden durch M , S und F liegt, und zwar in der Reihenfolge M , S , F , H^* (Abb. 25), und dass S der Mittelpunkt von MH^* ist und F der Mittelpunkt von SH^* ist. Die Gerade kann deshalb als Eulergerade des Tetraeders in Analogie zur Eulergeraden des Dreiecks bezeichnet werden.

Gibt es nicht doch so etwas wie Körperhöhen im beliebigen Tetraeder? Zeichnet man die Ebenen durch H^* senkrecht zu den Tetraederkanten, so erkennt man, dass jede dieser Ebenen durch den Mittelpunkt der Gegenkante geht. Umgekehrt kann man also H^* auch als Schnittpunkt dieser Ebenen („Höhenebenen“) erhalten, indem man durch den Mittelpunkt jeder Kante die auf der gegenüberliegenden Kante senkrecht stehende Ebene zeichnet. Diese Konstruktion von H^* stammt von Gaspard Monge (1746–1818), der als Stammvater der Darstellenden Geometrie angesehen werden kann. H^* wird deshalb auch „Punkt von Monge“ genannt.

Wir hätten anstatt der Mittelparallelen auch die Ebenen, die jeweils von einer Körperhöhe und dem der betreffenden Ecke gegenüberliegenden Seitenflächen-Höhenschnittpunkt aufgespannt wird, zum Schnitt bringen können, um H^* zu konstruieren. Diese Ebenen verdienen auch den Namen „Höhenebenen“.

Gehen wir zurück zu Abbildung 23. Die dort abgebildeten vier Paare aus je zwei Tripel von Schnittpunkten, die parallel liegen, bilden mit ihren jeweils äußeren Punkten vier Parallelogramme (Abb. 26). Die vier Parallelogrammflächen schneiden sich ebenfalls in H^* . Diese Parallelogramme könnte man deshalb „Monge-Parallelogramme“ nennen.

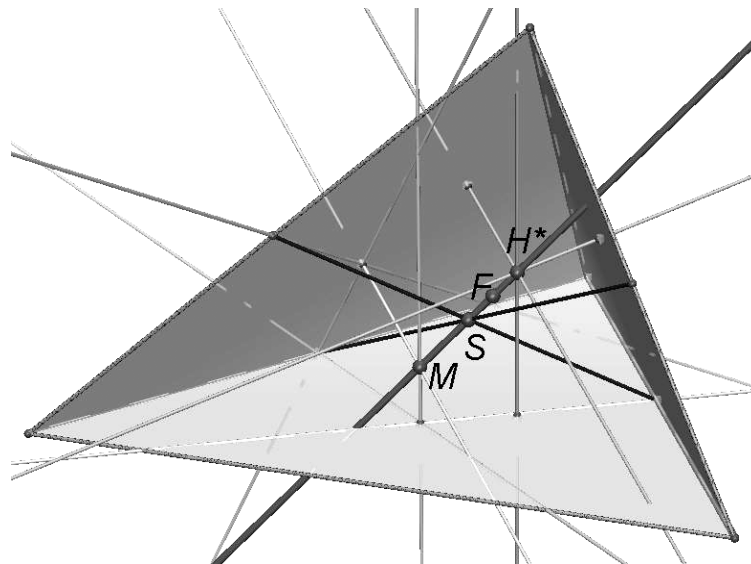


Abbildung 25

Wir wollen nun untersuchen, welche Tetraeder „richtige“ Körperhöhen besitzen, also solche, die einander in einem Punkt schneiden. Dazu verziehen wir die Ecken des Tetraeders (Abb. 27), bis die Körperhöhen und die Höhenschnittpunktrote zusammenfallen.

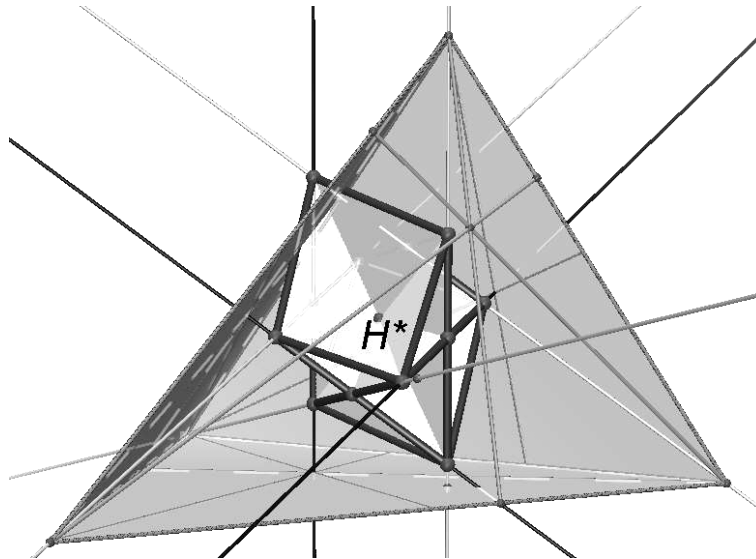


Abbildung 26

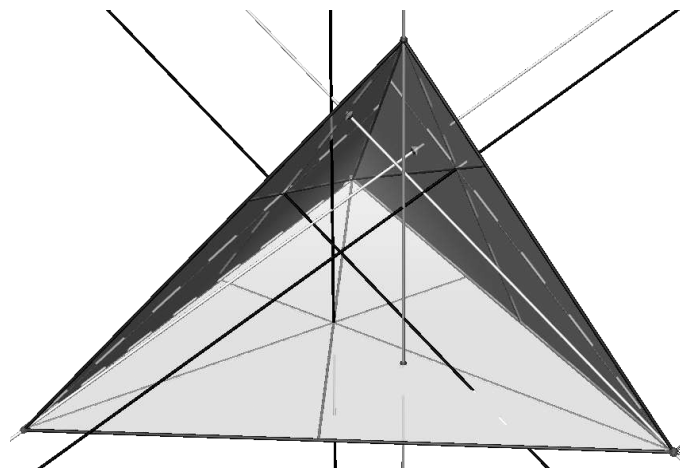


Abbildung 27

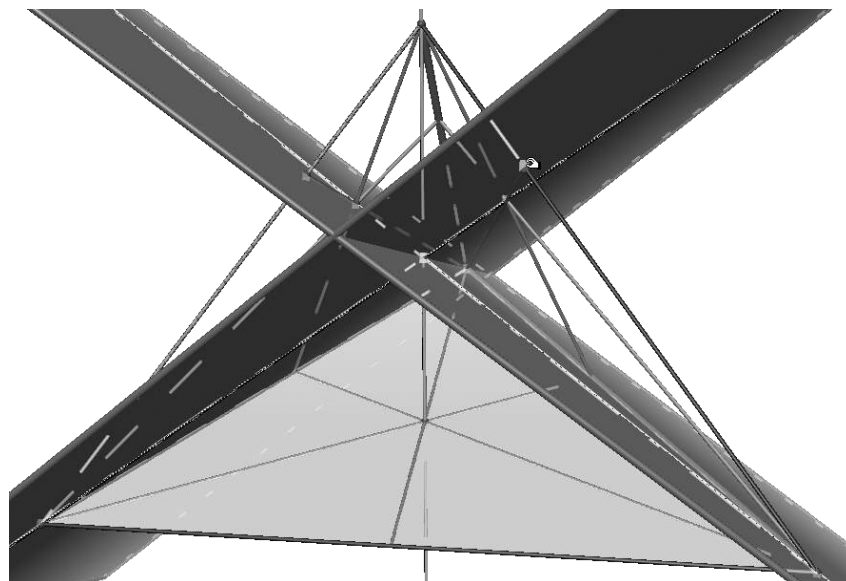


Abbildung 28

Wir können nun das Tetraeder so drehen, bis die „hintere“ Kante lotrecht zur Bildschirmenebene steht; die Gegenkante ist dann parallel zur Bildschirmenebene und steht orthogonal zur hinteren Kante. Das kann man auch überprüfen, indem man in einem Kantenpunkt die Lotebene konstruiert und anschließend den Punkt verschiebt, bis sie die Gegenkante enthält (Abb. 28, für zwei Kantenpaare). Also kann man folgenden Satz formulieren: Wenn sich die Körperhöhen im Tetraeder schneiden, dann stehen jeweils die gegenüberliegenden Kanten senkrecht zueinander.

Die Konstruktion solcher Körper ist jetzt einfach. Dazu geht man von einem beliebigen Dreieck aus und zeichnet die Lotebenen auf der Dreiecksebene durch die drei Höhenlinien des Dreiecks (Abb. 29). Diese Ebenen schneiden sich im Höhenschnittpunktlot. Verbindet man nun einen beliebigen, auf diesem Lot liegenden Punkt mit den Dreiecksecken, so bekommt man ein Tetraeder, bei dem nach Konstruktion jede Kante eine senkrecht zu ihr stehende Gegenkante hat (Abb. 30). Schließlich überzeugt man sich durch Konstruktion der fehlenden Körperhöhen von der Existenz des Höhenschnittpunkts; nun kann man die Umkehrung des oben stehenden Satzes formulieren.

In Folge kann man z. B. untersuchen, ob für diese Tetraeder die Feuerbach-Kugel alle zum Feuerbach-Kreis analogen Eigenschaften aufweist. Solche Tetraeder haben noch weitere sie kennzeichnende Eigenschaften; auf die konstruktiv zugänglichen gehen wir hier ein: Die Inkreise der benachbarten Seitenflächen berühren ein-

ander; es existiert eine Kugel, die alle Kanten berührt (Abb. 31), außerdem ist zu erkennen, dass die „Kantenkugel“ die Seitenflächen in den betreffenden Inkreisen schneidet). Schließlich könnte man untersuchen, wie sich die im Vorstehenden behandelten besonderen Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln in speziellen Tetraedern, z. B. im regelmäßigen, verhalten.

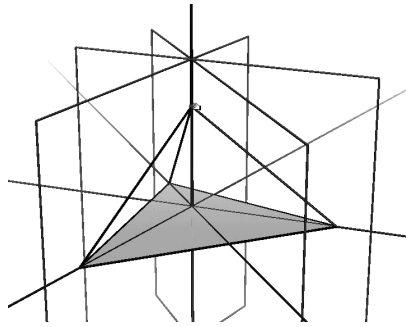


Abbildung 29

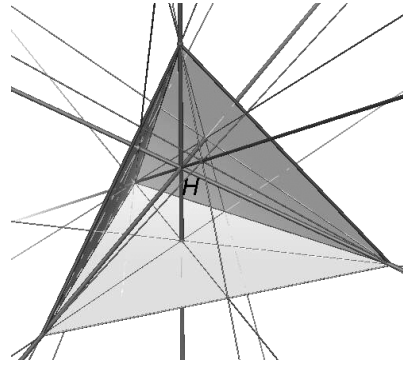


Abbildung 30

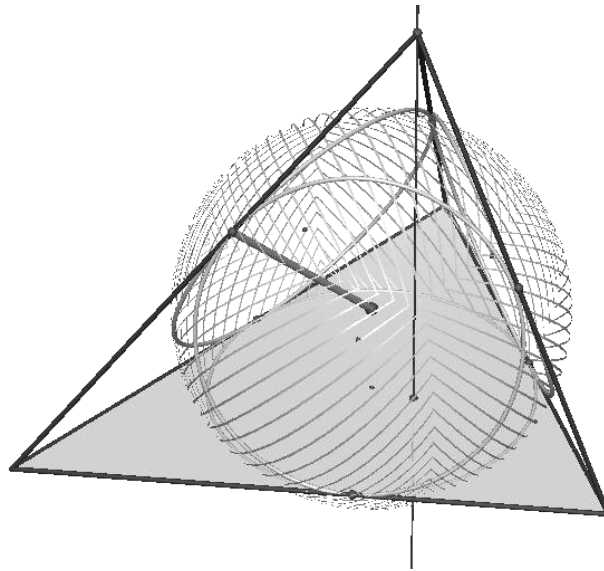


Abbildung 31

3 Ausblick

Die folgenden Analogisierungsideen bedürfen z. T. tiefer gehender raumgeometrischer Überlegungen. Ihre Konkretisierung eignet sich für die Projektarbeit, als Themen für Facharbeiten und als Seminarthemen für begabte Schüler und Schülerinnen. (Für eine computerunterstützte Bearbeitung sind teilweise weitergehende Werkzeugoptionen als die in der Version 1.0 von Cabri 3D verfügbaren notwendig.)

- *Analogisierung weiterer Linien und Punkte des Dreiecks*: Welche der zahlreichen besonderen Linien (Kreise eingeschlossen) und Punkte im Dreieck (vgl. u. a. Donath 1976) haben ein Analogon in beliebigen bzw. in besonderen Tetraedern?
- *Formenkunde des Tetraeders*: Wie könnte man in Analogie zu den Klassifikationsmöglichkeiten des Dreiecks nach Art der Seiten, Innenwinkel und Symmetrie eine Formenkunde des Tetraeders entwickeln.
- *Tetraederkonstruktionen*: Wie kann man die Dreieckskonstruktionslehre für Tetraeder analogisieren? – Wie lassen sich die Kongruenzsätze bzw. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke analog auf Tetraeder übertragen?

Natürlich sind damit noch nicht alle Analogisierungsmöglichkeiten in Bezug auf das Thema „Dreieck – Tetraeder“ erschöpft.

Schlussbemerkung: Dank des computerunterstützten raumgeometrischen Konstruierens, Darstellens und Variierens mit Cabri 3D können wir uns heute das weite Feld der Analogiebildungen zwischen Ebene und Raum besser erschließen bzw. überhaupt erst Analogisierungsmöglichkeiten auf experimentelle Weise erforschen.

Literatur

- Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog
- Bauer, H. et al. (1999): Körpergeometrie. (Software). Berlin: Cornelsen
- Donath, E. (1976): Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin: DVW
- Fritsch, R. (1986): Vorschläge für die Raumgeometrie in der Mittelstufe. In: MNU 39, Heft 6, S. 339–348
- Fritsch, R. (1983–1984): Merkwürdige Kugeln am Tetraeder. In: DdM 11 (1983), S. 262–269; 12 (1984), S. 18–35
- Neubrand, M. (1985): Analoga im Tetraeder zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks. In: PM 27 Nr. 5, S. 268–274
- Polya, G. (1962): Mathematik und plausibles Schließen. Band I, Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser
- Schumann, H. (2001): Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen
- Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005

Tietz, H. (1972): Die Raumhöhen des Tetraeders. In: MNU 25, S. 19–20

Tietz, H. (1974): Tetraeder mit berührenden Inkreisen. In: Math.-Phys. Semesterberichte 21, S. 143–144

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. habil. Heinz Schumann
PH Weingarten, Fakultät III, Mathematik/Informatik
Institut für Mediendidaktik und Bildungsinformatik
Kirchplatz 2, D-88250 Weingarten
Email: schumann@ph-weingarten.de
Homepage: <http://www.mathe-schumann.de>