

Inhaltliche Elemente und Anforderungsniveau des Unterrichtsgesprächs beim geometrischen Beweisen

Eine Analyse videografierter Unterrichtsstunden

von

Sebastian Kuntze, Markus Rechner und Kristina Reiss, Augsburg¹

Zusammenfassung: In diesem Beitrag werden deskriptive Befunde einer Auswertung von Unterrichtsvideos vorgestellt, deren Gegenstand Erarbeitungsprozesse von Beweisen im Geometrieunterricht sind. Es wurde einerseits untersucht, inwiefern inhaltliche Elemente der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht geleistet wurden, andererseits wurden Anforderungsniveaus von Fragen und Aufforderungen der Lehrperson mittels eines Kategoriensystems erfasst. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Erarbeitung von Beweisen oft nicht ausreichend durch beweisrahmende inhaltliche Elemente in den Unterricht eingebettet wird und inhaltlicher Fortschritt bei der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht ganz wesentlich durch Fragen niedrigen Anforderungsniveaus zustande kommt.

Summary: In this paper we present results of a descriptive video-based study on proof in the mathematics classroom. The results indicate that so-called content elements of proof development focussing on the metacognitive understanding are hardly integrated in the process of developing proofs in class. Moreover, the discourse in the classrooms is often characterized by questions of the teacher on a low level of complexity.

1 Theoretischer Hintergrund

Die Förderung von Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Bereich des mathematischen Beweisens, Begründens und Argumentierens ist ein Ziel des Mathematikunterrichts, das in jüngerer Zeit wieder verstärkt wahrgenommen wird (NCTM, 2000; OECD, 1999). Gleichzeitig zeigen sich jedoch für das Beweisen und Argumentieren bei Schülerinnen und Schülern besonders starke Defizite (Reiss, Klieme & Heinze, 2001, für die gymnasiale Oberstufe). Reiss, Hellmich & Thomas (2002) stellten anhand von Leistungstests fest, dass Schülerinnen und Schüler der 7. und 8. Jahrgangsstufe bei Beweis- und Argumentationsaufgaben trotz vorhandenen Grundwissens signifikant schlechter abschneiden als bei eher technischen Items. In dieser Studie konnte von Reiss et al. mittels eines Rasch-

¹ Die Durchführung der Studie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität von Schule“ unterstützt (RE 1247/4).

skalierbaren Tests ein Kompetenzstufenmodell zur Beweis- und Argumentationskompetenz bestätigt werden, das aus den folgenden Kompetenzstufen besteht:

- (I) einfaches Anwenden von Regeln und elementares Schlussfolgern
- (II) Begründen und Argumentieren (einschrittig)
- (III) Begründen und Argumentieren (mehrschrittig)

Reiss, Hellmich & Thomas (2002) beobachteten etwa in dieser Untersuchung, dass gerade 56% aller Probanden Kompetenzstufe II und 24% aller Probanden Kompetenzstufe III erreichten.

Diese Befunde zur Beweis- und Argumentationskompetenz erinnern an Ergebnisse internationaler Leistungsvergleichsstudien wie TIMSS und PISA (Baumert, Lehmann et al., 1997; Deutsches PISA-Konsortium, 2001), in denen sich die Schwächen der deutschen Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik besonders deutlich bei Nicht-Routine-Aufgaben zeigten, zu denen auch Aufgaben gehören, die Argumentationen erfordern.

Nach den Ergebnissen von Healy & Hoyles (1998), Reiss, Hellmich & Thomas (2002) und Heinze & Reiss (2003) können diese Schwächen einerseits in für die Schülerinnen und Schüler nicht verfügbaren Problemlöseheuristiken für Beweisaufgaben und andererseits in Defiziten in der beweisspezifischen Methodenkompetenz vermutet werden. Die Ausgangspunkte für solche Mängel werden auch in Merkmalen des Mathematikunterrichts, die noch nicht näher identifiziert wurden, vermutet. Starke Unterschiede in der Beweiskompetenz zwischen einzelnen Klassen scheinen jedenfalls darauf hinzudeuten, dass die Art der Behandlung von Beweisen im Unterricht tatsächlich eine Ursache für die genannten Defizite darstellt (Reiss, 2002).

Um vermutete Zusammenhänge zwischen Aspekten von Schulleistung und Merkmalen des Mathematikunterrichts zu untersuchen, sind in den zurückliegenden Jahren vermehrt Videostudien durchgeführt worden, in denen verschiedene Merkmale von Mathematikunterricht betrachtet und Unterschiede im Klassenraumgeschehen auch im internationalen Vergleich diskutiert wurden.

Der Ländervergleich im Rahmen der TIMSS-Videostudie von 1995 zeigte, dass ein inhaltlich kleinschrittiges, fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch, wie es auch bereits früher von Voigt (1984a, 1984b) beschrieben wurde, für den Mathematikunterricht in Deutschland charakteristisch ist. Eine wesentliche Eigenschaft dieses Unterrichtsstils ist es, dass Aufgaben von der Lehrperson in sehr viele kleine Teilschritte zerlegt und in diesen kleinen Schritten auch behandelt werden (vgl. auch Neubrand, 2002).

Gleichzeitig wurde eine starke inhaltliche Lenkung des Diskurses im Klassenzimmer durch die Lehrperson beobachtet, die innerhalb dieses Unterrichtsstils eher die Rolle eines Wissensvermittlers als die eines Initiators von Lernprozessen zu spielen scheint.

Wissensvermittlerrolle und Lenkung des Diskurses im Klassenzimmer durch die Lehrperson muss andererseits nicht notwendig bedeuten, dass die inhaltlichen Beiträge der Schülerinnen und Schüler zu diesem Diskurs gering sind. Die zentrale Forderung des fragend-entwickelnden Vorgehens ist ja, dass es zu einem Austausch zwischen Lernenden und der Lehrerin bzw. dem Lehrer in einem sinnvollen, wenn auch gelenkten Dialog kommen soll. Dies sollte insbesondere für Unterrichtsinhalte gelten, die verständnisorientiertes Lernen erfordern, also etwa beim Thema „Beweisen, Begründen, Argumentieren“.

Ein Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, zu beschreiben, wie Beweise im gymnasialen Mathematikunterricht behandelt werden. In einem ersten Herangehen wurden zwei Bereiche des Unterrichtsgeschehens untersucht, die von den Lehrenden mitgestaltet werden können:

- Zum einen wurde für eine Reihe von so genannten inhaltlichen Elementen der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht beobachtet, inwiefern sie auftraten und wie groß die jeweilige inhaltliche Beteiligung der Schülerinnen und Schüler war.
- Zum anderen wurde erfasst, wie hoch das Anforderungsniveau einzelner Fragen bzw. Aufforderungen der Lehrperson war und auf welche Weise diese Fragen bzw. Aufforderungen jeweils von den Schülerinnen und Schülern beantwortet wurden.

1.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Bei Erarbeitungsprozessen von Beweisen im Klassenraum kann eine Reihe von Tätigkeiten auftreten, die in dieser Untersuchung zu sog. „inhaltlichen Elementen der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht“ zusammengefasst wurden. Diese „inhaltlichen Elemente“ wurden aus Tätigkeiten abgeleitet, die für Experten beim Generieren von Beweisen beobachtet wurden.

Wenn Mathematikerinnen und Mathematiker Beweise entwickeln, durchläuft ihr Arbeiten und Denken während eines längeren Prozesses in der Regel eine Reihe verschiedener Phasen. Nach einem Modell von Boero (1999) für solche Entwicklungs- und Auffindungsprozesse von Beweisen durch Experten besteht eine erste, explorative Phase aus der Entwicklung einer Behauptung und der Identifikation möglicher Argumente. Während einer zweiten Phase wird eine Behauptung nach formalen Konventionen formuliert. Darauf folgen zwei weitere, wiederum explorative Phasen, in denen das Erkunden der Hypothese, die Suche nach möglichen Argumentverknüpfungen, und schließlich das Auswählen von Argumenten sowie ihre Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen im Vordergrund stehen. Erst danach werden in einer fünften Phase Argumente in einem Beweis organisiert, der mathematischen Standards formalsprachlicher Formulierung entspricht, wie sie etwa für Publikationen verlangt werden. Eine mögliche sechste Phase wird in einer Annäherung an einen formalen Beweis gesehen.

Diese Beweisentwicklungsphasen des Modells von Boero (1999) werden weniger als lineare Abfolge verstanden, sondern sind aufgrund möglicher Rücksprünge und Wiederholungen eher als Elemente inhaltlichen Arbeitens an einem Beweisproblem anzusehen.

Will man dieses Beweisprozessmodell, das die Arbeit von Experten beschreibt, auf den Mathematikunterricht und seine Beobachtung anwenden, so ist die spezielle Situation im Klassenraum zu berücksichtigen. Folgende wesentliche Aspekte, die die schulische Unterrichtssituation kennzeichnen, sind mit einzubeziehen:

- An Beweisfindungsprozessen im Mathematikunterricht sind in der Regel nicht nur Experten beteiligt, sondern auch Lernende, die zunächst als Novizen anzusehen sind. Als grundsätzliche Folgerung ergibt sich daraus, dass den Schülerinnen und Schülern gegenüber Transparenz hergestellt werden muss, worin das gestellte Problem besteht. Beispielsweise verfügen Schülerinnen und Schüler anders als Experten zunächst nicht über beweispezifisches Methodenwissen (vgl. Heinze & Reiss, 2003). Dieses beweispezifische Methodenwissen stellt eine notwendige Voraussetzung für Beweis- und Argumentationskompetenz dar.
- Auch für die Darstellung von Lösungswegen von Beweisproblemen ergibt sich die Forderung nach Transparenz. Ein mit dem Beweisproblem verbundenes Verständnis muss von den Lernenden erst erarbeitet werden. So ist für alle Beteiligten zu klären, welche Aussage zu beweisen ist und was der Ausgangs- bzw. der Zielzustand des zu lösenden Problems ist. Um für alle Beteiligten die Voraussetzungen für ein solches Verständnis zu schaffen, ist eine transparente Darstellung des Lösungsweges notwendig (Schoenfeld, 1985; vgl. auch Polya, 1949).

Für das Entwickeln von Beweisen im Mathematikunterricht werden also weitere inhaltliche Elemente, die expertentypische Tätigkeiten des Beweisens nach Boero gewissermaßen einrahmen, erforderlich. Zunächst muss in der Regel ein gemeinsam zu bearbeitendes Beweisproblem zwischen den am Unterricht Beteiligten festgelegt werden, dessen Lösungsbedürftigkeit von den Lernenden erkannt wird. Den Schülerinnen und Schülern gegenüber muss ferner Transparenz hergestellt werden, welche Funktionen bestimmte Argumentationsweisen haben, und welches Wissen und welche Verfahren in Beweisen benutzt werden dürfen. Solche Aspekte des beweispezifischen Methodenwissens (Heinze & Reiss, 2003), das Experten bereits beherrschen, müssen den Lernenden im Anfangsunterricht zum mathematischen Beweisen verfügbar gemacht werden.

Aus diesen Überlegungen leiten sich eine Reihe so genannter „inhaltlicher Elemente der Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht“, d.h. auf den Beweis bezogener Arbeitsphasen ab, wie sie in der folgenden Aufstellung wiedergegeben sind und weiter unten genauer erläutert werden:

1. Voraussetzungen sammeln/bereitstellen
2. Behauptung(en) formulieren
3. Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren
4. Grundwissen bereitstellen bzw. aktivieren
5. Argumente finden und sammeln
6. Argumente erkunden
7. Argumente zusammensetzen
8. Überblick über das Beweisproblem gewinnen
9. Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg treffen
10. Beweisredaktion
11. Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises
12. Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen

Diese inhaltlichen Elemente betreffen einen Bereich der *Beweisfindung* (4.–8.) und einen Bereich der *Beweisrahmung im Unterricht* (1.–3. und 9.–12.). Die inhaltlichen Elemente der Beweisfindung entsprechen weitgehend den explorativen Phasen des Beweisentwicklungsmodells von Boero (1999). Für eine diesbezügliche Detailanalyse sei auf Heinze & Reiss (2004) verwiesen. Im Folgenden werden die sieben inhaltlichen Elemente der Beweisrahmung betrachtet, die vermutlich auch eine wichtige Rolle für das Abschneiden der Schülerinnen und Schüler in Tests spielen.

- *Voraussetzungen sammeln/bereitstellen*: Dieses inhaltliche Element stellt gewissermaßen eine Grundvoraussetzung für das Entstehen von Beweisen dar. Dabei können Voraussetzungen aufgabenartig gegeben oder hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit einer Aussage in explorativen und ordnenden Prozessen erst gesammelt werden (vgl. Steinhöfel & Reichold, 1971).
- *Behauptung(en) formulieren*: Ebenfalls als Ergebnis eines Satzfindungsprozesses (Steinhöfel & Reichold, 1971; Stein, 1986) anzusehen ist die Formulierung einer Behauptung. Dies entspricht auch einer Beweisphase bei Boero (1999), die einen wichtigen Entscheidungsschritt für das Suchen und Generieren von Beweisen darstellt.
- *Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren*: Steinhöfel & Reichold (1971) nennen zu Beginn des Beweisführungsprozesses die Phase der „Motivierung der Beweisnotwendigkeit“ als wichtigen Erarbeitungsschritt von Beweisen im Unterricht. Neben die motivationale Komponente dieses inhaltlichen Elements tritt eine kognitiv-methodische: Die Einsicht zu gewinnen, dass das in der Voraussetzung gegebene Wissen zunächst, d.h. ohne Beweis nicht ausreicht, um über die Gültigkeit der behaupteten Aussage mathematisch abgesichert ent-

scheiden zu können, ist eine ganz wesentliche Funktion dieses inhaltlichen Elements der Erarbeitung von Beweisen im Mathematikunterricht.

- *Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg treffen:* Oft gibt es – auch im Mathematikunterricht – mehrere Möglichkeiten, einen mathematischen Beweis zu führen. Die Entscheidung, wie eine deduktive Kette von Argumenten organisiert werden soll (vgl. Boero, 1999), prägt weitere, anzustellende Überlegungen der Beweisfindung. Für den Unterricht dient es der Transparenz der Darstellung von Gedankengängen, wenn verschiedene mögliche Beweiswege erkannt und diskutiert werden und eine Entscheidung gefällt wird.
- *Beweisredaktion:* Das Formulieren und schriftliche Darstellen des Beweises ist ein wesentlicher Schritt (und gewissermaßen ein Ziel) in den Beweisprozessmodellen von Boero (1999), Stein (1986) und Steinhöfel & Reichold (1971).
- *Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises:* Neben einem Überprüfen der Beweisschritte (Steinhöfel & Reichold, 1971) ist zur Vermittlung von Problemlöseheuristiken ein Rückblick über den Beweisfindungsprozess sinnvoll. Eine solche rückschauende Diskussion kann als Maßnahme zum Aufbau von Metawissen bezogen auf das Modell von Boero (1999) interpretiert werden.
- *Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen:* Der Aufbau beweisbezogenen Methodenwissens kann durch das Sprechen über mathematisches Beweisen unterstützt werden. Dieses Wissen ist eine Voraussetzung für die Entwicklung von Beweisen nach den Beweisprozessmodellen (Boero, 1999; Stein, 1986; Steinhöfel & Reichold, 1971).

Für diese sieben inhaltlichen Elemente soll untersucht werden, ob sie in den Erarbeitungsprozessen von Beweisen im Unterricht (im Folgenden kurz „Unterrichtsbeweise“ genannt) inhaltlich geleistet werden und wie groß der inhaltliche Beitrag der Schülerinnen und Schüler im Unterrichtsgespräch an den jeweiligen inhaltlichen Elementen ist.

Die Beteiligung der Schülerinnen und Schüler bezieht sich dabei nicht auf eine linguistische Sichtweise oder auf das Erfassen von Zeitanteilen. Vielmehr wird die Beteiligung von Schülerinnen und Schülern auf das Liefern inhaltlicher Beiträge zu den zum jeweiligen inhaltlichen Element zu leistenden Gedankenschritten verstanden. Untersucht wird, welchen Anteil die Lehrperson von Schülerinnen und Schülern erfragt bzw. welcher Anteil von den Schülerinnen und Schülern beigetragen wird.

1.2 Anforderungsniveau von Lehrerfragen im Unterrichtsgespräch

Wenn im Mathematikunterricht Beweise erarbeitet werden, sind einige spezifische Probleme zu berücksichtigen. So zeichnen sich Beweisaufgaben oft bereits aufgrund der Anzahl der zur Lösung notwendigen Gedankenschritte durch einen ho-

hen Schwierigkeitsgrad aus. Während des Lösungsprozesses sind in der Regel wiederholt Soll-Ist-Vergleiche durchzuführen, für die ganz unterschiedliches Wissen genutzt werden muss. Beispielsweise müssen zur Argumentation zugelassene Tatsachen, erlaubte Argumentationsmittel, wie etwa anwendbare, bereits bewiesene Sätze, sowie eine Wissensbasis auf der Ebene beweissspezifischer Methodenkompetenz (vgl. Heinze & Reiss, 2003) in solchen Vergleichen zwischen dem Stand der Argumentation und ihrem Ziel reflektiert werden.

Dem entspricht das Forschungsinteresse, abzuschätzen, wie Lehrerinnen und Lehrer mit Fragen und Aufforderungen an die Schülerinnen und Schüler Impulse für zu leistende Gedankengänge geben und wie die Schülerinnen und Schüler auf diese Impulse reagieren. Da es darum geht, eine komplexe Problemstellung transparent zu machen, ohne den Schwierigkeitsgrad des Problems durch zu starke Vorgaben zu trivialisieren, scheint insbesondere das von der Lehrperson vorgegebene Anforderungsniveau eine wichtige Rolle zu spielen.

Das Anforderungsniveau von Fragen und Aufforderungen der Lehrperson steht auch in Wechselwirkung mit der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler. In einer Videostudie von Clausen, Reusser & Klieme (2003) zeigten sich bei der hochinferenten Beurteilung von Merkmalen der Unterrichtsqualität faktoranalytisch die vier Grunddimensionen Instruktionseffizienz, Klarheit und Strukturiertheit, Schülerorientierung und kognitive Aktivierung. Insbesondere die Grunddimension der kognitiven Aktivierung könnte Klassenunterschiede in der Beweis- und Argumentationskompetenz mit erklären, falls in den drei anderen Grunddimensionen von Unterrichtsqualität keine gravierenden Beeinträchtigungen für Lernprozesse im Unterricht auftreten.

Auf den Grad der themenbezogenen kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler können sowohl auf der Basis des Ausmaßes der Beteiligung an inhaltlichen Elementen, als auch anhand der Art der Beantwortung der Lehrerfragen Rückschlüsse gezogen werden. Dabei dürfte sich ein mittleres Anforderungsniveau im Sinne einer optimalen Passung als besonders kognitiv aktivierend auswirken (vgl. Klieme, Schümer & Knoll, 2001). Beim Treffen von Aussagen zur kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler ist jedoch zu berücksichtigen, dass es sich bei dem beobachteten Unterrichtsgeschehen lediglich um das von der Lehrkraft orchestrierte „Bühnengeschehen“, d.h. um eine Oberflächenstruktur des Unterrichts handelt. Kognitive Aktivierung und Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern, die sich nicht am Unterrichtsdiskurs beteiligen oder die mit ihren eventuellen Wortmeldungen nicht zum Zuge kommen, bleiben daher in der Regel ausgeblendet. Dies entspricht einem Forschungsinteresse, das in erster Linie dem unterrichtsbezogenen Handeln und Reagieren der Lehrperson bei der Erarbeitung von Beweisen gilt.

Auf der Grundlage der Erfassung der Anforderungsniveaus der einzelnen Lehrerfragen und -aufforderungen werden auch flankierende Beobachtungen wie etwa das Feststellen der durchschnittlichen Anzahl von Fragen pro Minute möglich, die auf das von der Lehrperson vorgegebene Interaktionstempo hindeuten. Diese Daten können in einem Übergangsbereich hin zur Grunddimension Schülerorientierung (Klieme, 2002; Clausen, Reusser & Klieme, 2003) weitere Informationen zur Unterrichtsqualität geben.

1.3 Forschungsfragen

Aus den dargestellten Überlegungen ergeben sich für den Bereich der inhaltlichen Elemente die folgenden Forschungsfragen:

- (i) Welche inhaltlichen Elemente der Behandlung von Beweisen werden in den Unterrichtsbeweisen geleistet oder teilweise geleistet?
- (ii) Wie groß ist der Grad der Beteiligung der Schülerinnen und Schüler bei den geleisteten bzw. teilweise geleisteten inhaltlichen Elementen der Unterrichtsbeweise, d.h. welcher Anteil an den inhaltlichen Elementen entfällt auf Beiträge der Schülerinnen und Schüler?

Für den Bereich des Anforderungsniveaus der Lehrerfragen und -aufforderungen interessieren die Fragestellungen:

- (iii) Wie groß ist das Anforderungsniveau von Lehrerfragen und -aufforderungen und welche Anteile entfallen auf einzelne Anforderungsniveaus?
- (iv) Auf welche Art und Weise werden die Lehrerfragen und -aufforderungen von den Schülerinnen und Schülern im Unterrichtsgespräch beantwortet?

2 Beschreibung der Studie

Die Untersuchung stützt sich auf 19 videografierte Unterrichtsstunden der 8. Jahrgangsstufe aus 8 Gymnasialklassen. Diese Klassen wurden von sieben Lehrern unterrichtet. Die vorkommenden, abgeschlossenen Unterrichtsbeweise aus der Geometrie wurden in 26 „Beweiseinheiten“ eingeteilt. Die Lehrer wurden ohne weitere Vorgaben gefragt, ob sie dazu bereit seien, in ihrem Anfangsunterricht zum Beweisen aufgezeichnet zu werden. Um zu kontrollieren, ob es sich bei den Unterrichtsvideos weitgehend um „Normalunterricht“ handelt, wurde von den Schülerinnen und Schülern nach der Unterrichtsstunde ein Fragebogen ausgefüllt, der in der Gruppe von Andreas Helmke an der Universität Landau entwickelt wurde. In diesem Fragebogen waren Items wie etwa „Die Mathestunde heute war (abgesehen von der Videoaufnahme) ... genau so wie andere Mathestunden auch/anders als sonst, weil ...“ enthalten.

Die Unterrichtsstunden wurden transkribiert. Auf der Grundlage der Videos und der Transkripte wurden die Unterrichtsmitschnitte von zwei Beobachtern unabhängig voneinander beurteilt. Die Kategoriensysteme, nach denen die Unterrichtsvideos ausgewertet wurden, werden im Folgenden vorgestellt (vgl. Kuntze, 2003).

2.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Die 26 Beweiseinheiten wurden darauf hin untersucht, inwieweit beweisrahmende inhaltliche Elemente der Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht geleistet wurden. Es wurden dazu die Kategorien „nicht geleistet“, „teilweise geleistet“ und „vollständig geleistet“ verwendet.

Der Beitrag der Schülerinnen und Schüler zu den in der jeweiligen Beweiseinheit geleisteten inhaltlichen Elementen wurde jeweils einer der folgenden fünf Kategorien zugeordnet:

- „im Wesentlichen keine Beiträge der Schüler“
- „Beiträge der Schüler, die deutlich unter dem Anteil des Lehrerbeitrags liegen“
- „Beiträge der Schüler, die mit dem Anteil des Lehrerbeitrags vergleichbar sind“
- „Beiträge der Schüler, die deutlich über dem Anteil des Lehrerbeitrags liegen“
- „im Wesentlichen keine Beiträge des Lehrers“

In der Untersuchung von Clausen, Reusser & Klieme (2003) haben sich hoch inferente Rating-Verfahren bei der Beurteilung von Unterrichtsqualität bewährt (vgl. auch Klieme, 2002). Summarische Einschätzungen geschulter Beobachter zu Faktoren wie Interaktionstempo, Leistungsdruck, anspruchsvolles Üben etc. wurden mit Fragebögen erfasst, die die Beobachter nach dem Betrachten des Unterrichtsvideos ausfüllten. Ein derartiges, hochinferentes Beurteilungsverfahren wurde für die Untersuchung zu den inhaltlichen Elementen bei der Erarbeitung von Beweisen gewählt: Nach dem Betrachten der einzelnen videografierten Beweiseinheiten wurden von den Beobachtern zu den einzelnen inhaltlichen Elementen jeweils kumulative Urteile abgegeben. Die zur Kontrolle bestimmten Inter-Rater-Übereinstimmungen lagen durchweg im einem akzeptablen Bereich.

2.2 Anforderungsniveau von Lehrerfragen im Unterrichtsgespräch

Die Untersuchung des Anforderungsniveaus der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen stellte im Vergleich mit der Untersuchung zu den inhaltlichen Elementen eine Art der Auswertung dar, die sich weitaus stärker an Details des Unterrichtsgeschehens orientierte und so die summarischen Urteile bei der Einschätzung der inhaltlichen Elemente der Erarbeitungsprozesse ergänzen kann. Inhaltliche Fragen, die die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern stellt, sowie die Art ihrer Beantwortung durch die Schülerinnen und Schüler wurden einzeln erfasst und kodiert.

Das Kategoriensystem zur Erfassung des jeweiligen Anforderungsniveaus der Lehrerfragen bzw. Lehreraufforderungen basiert auf dem Stufenmodell von Beweis- und Argumentationskompetenz (vgl. Reiss, 2002; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Neben der Ausrichtung an der inhaltlichen Einstufung der Itemschwierigkeit der verwendeten Beweiskompetenztests wurden auch Überlegungen von Neubrand (2002) zur Beurteilung von Aufgaben nach den in ihnen angesprochenen Wissensseinheiten in die Entwicklung des Kategoriensystems einbezogen. Diese Bestandteile des Unterrichtsdiskurses werden in dieser Untersuchung einzeln ausgewertet, während Neubrand einzelne Lehrerfragen und Aufforderungen zusammenfasst.

Für die Einstufung der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen wurden folgende Kategorien verwendet:

- 1: „leicht“, wenn die Frage oder Aufforderung mit einem Stichwort, höchstens mit einem Satz beantwortbar ist, wenig Spielraum für mögliche Variationen der Antwort durch den Antwortenden gibt und aufgrund der vorher mitgeteilten Information ein geringes Anforderungsniveau aufweist (höchstens einem Gedankenschritt entsprechend),
- 2: „mittel“, falls die Frage oder Aufforderung mit einem Satz, höchstens mit zwei Sätzen beantwortbar ist, einen Spielraum für Variationen der Antwort durch den Antwortenden gibt und aufgrund der vorher mitgeteilten Information ein gehobenes Anforderungsniveau aufweist (mindestens einem und höchstens zwei Gedankenschritten entsprechend),
- 3: „schwer“, falls die Frage oder Aufforderung nur mit mehr als zwei Sätzen/Gedankenschritten vollständig zu beantworten ist, dem Antwortenden ggf. eine eigene Interpretation, ein eigenes Ordnungs- bzw. Gedankengerüst abverlangt (d.h. eine Variation der möglichen Antwort durch den Antwortenden ist in der Regel möglich) und aufgrund der vorher mitgeteilten Information ein höheres Anforderungsniveau aufweist (mehr als zwei Gedankenschritten entsprechend).
- 0: „sonstiges“ wurde für nicht themenbezogene oder sinnlose (d.h. nicht korrekt beantwortbare) Fragen bzw. Aufforderungen gewählt.

Die Art der Beantwortung der Lehrerfragen bzw. Lehreraufforderungen durch die Schülerinnen und Schüler wurde mit den folgenden vier Kategorien erfasst:

- 0: „keine Antwort“
- 1: „fehlerhafte Antwort“
- 2: „nicht vollständige, teilweise Antwort“
- 3: „korrekte und vollständige Antwort“

3 Ergebnisse

Insgesamt war zunächst festzustellen, dass es sich bei dem beobachteten Unterricht fast ausschließlich um fragend-entwickelnden Frontalunterricht handelte. Zwei Phasen von Gruppen- bzw. Partnerarbeit, in denen Schülerinnen und Schüler Beweisaufgaben bearbeiteten, bildeten die Ausnahme. Weitere Phasen von Einzel- und Partnerarbeit konnten lediglich beim Zeichnen bzw. Übertragen geometrischer Figuren beobachtet werden. Dass das fragend-entwickelnde Vorgehen in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler tatsächlich als Normalunterricht gesehen wurde, ging aus den Äußerungen der Lernenden in den Kontrollfragebögen hervor.

3.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

In den Abbildungen 1 bis 7 sind die Ergebnisse der Auswertung zusammengestellt. Für die inhaltlichen Elemente „Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren“, „Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis/Diskussion des Beweises“ und „Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen“ wurden die Kategorien „vollständig geleistet“ und „teilweise geleistet“ zusammengefasst.

In Abbildung 1 (s. nächste Seite) ist dargestellt, bei welcher Anzahl von Beweiseinheiten das inhaltliche Element „Voraussetzungen sammeln/bereitstellen“ vollständig, teilweise, bzw. nicht geleistet wurde. Im Diagramm ist aufgeschlüsselt, an wie vielen der geleisteten bzw. teilweise geleisteten Beweiseinheiten welcher Grad an Beteiligung der Schüler beobachtet wurde.

Das inhaltliche Element „Voraussetzungen sammeln/bereitstellen“ wurde meist vollständig geleistet, wobei die Schülerbeteiligung gering ausfiel. Eine Diskussion, unter welchen Bedingungen eine Behauptung gültig ist, bzw. unter welchen nicht, bzw. ein Öffnen von Aufgaben konnte nicht beobachtet werden. In drei Beweiseinheiten wurden die Voraussetzungen nicht vollständig dargestellt.

Das inhaltliche Element „Behauptung(en) formulieren“ wurde in aller Regel geleistet (vgl. Abbildung 2). Beiträge der Schülerinnen und Schüler zum Erarbeiten der Behauptung, etwa durch ein Entdeckenlassen von Eigenschaften geometrischer Figuren durch die Schülerinnen und Schüler, konnte in einer knappen Hälfte der Fälle festgestellt werden. Oft blieb es jedoch bei einem bloßen Abfragen von vorher evident gemachten Eigenschaften: Nur in vier Fällen erreichten die inhaltlichen Beiträge der Schülerinnen und Schüler das Niveau des Lehrerbeitrags.

Die Beweisbedürftigkeit der Behauptung wurde nur bei etwas weniger als einem Drittel der Beweiseinheiten überhaupt diskutiert (vgl. Abbildung 3). Ein substantieller Beitrag der Schülerinnen und Schüler zu diesem inhaltlichen Element war eher die Ausnahme.

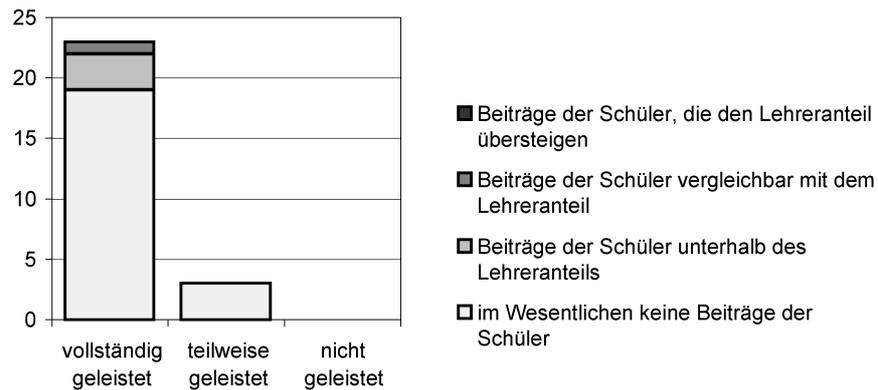


Abbildung 1:
Voraussetzungen sammeln/bereitstellen

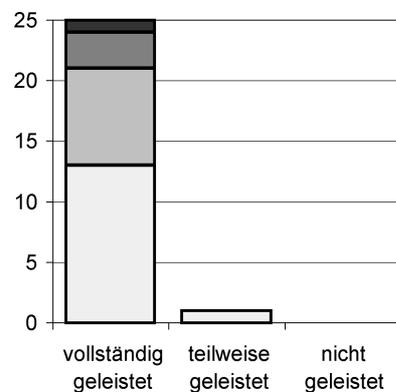


Abbildung 2:
Behauptung(en) formulieren

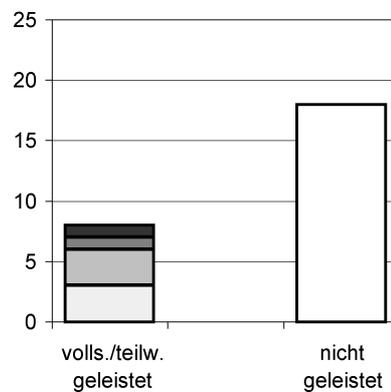


Abbildung 3:
Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren

Eine „Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg“ wurde nur relativ selten, d.h. in weniger als einem Fünftel der Fälle, erkennbar thematisiert (vgl. Abbildung 4). Für die Mehrzahl der Beweiseinheiten konnte kein Ansprechen von Alternativen beobachtet werden. Wenn eine Entscheidung über den Beweisweg getroffen wurde, wurde dies meistens im Wesentlichen vom Lehrer geleistet.

Das inhaltliche Element „Beweisredaktion“, d.h. das Formulieren und Aufschreiben des erarbeiteten Beweises, wurde in der Mehrheit der Beweiseinheiten vollständig geleistet (vgl. Abbildung 5). Meist dominierte der Lehrer das schriftliche

Formulieren des erarbeiteten Beweises: Nur in sechs Fällen erreicht die Beteiligung der Schülerinnen und Schüler mindestens das Ausmaß der Lehrerbeiträge.

Ein Auftreten von Teilaspekten des inhaltlichen Elements „Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises“ konnte nur in weniger als einem Drittel der Beweiseinheiten überhaupt verzeichnet werden (vgl. Abbildung 6). Die Beiträge der Schüler zu rückblickenden Gedanken über erarbeitete Beweise erreichten bis auf zwei Fälle nicht das Ausmaß der Beiträge des Lehrers.

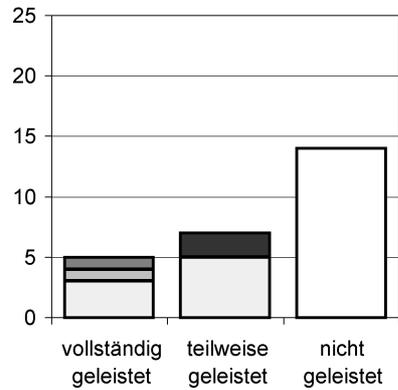


Abbildung 4:
Entscheidung über den eingeschlagenen
Beweisweg treffen

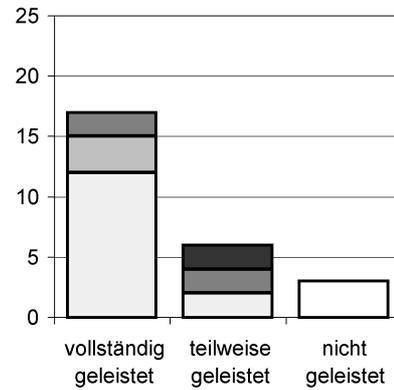


Abbildung 5:
Beweisredaktion

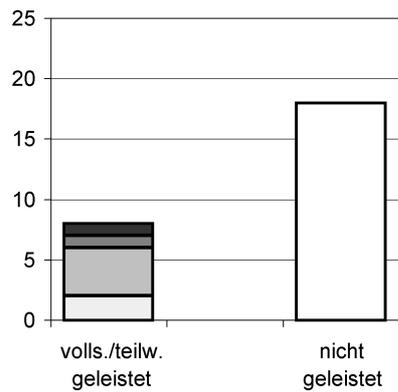


Abbildung 6:
Verifikation/Rückschau/Überblick über
den Beweis, Diskussion des Beweises

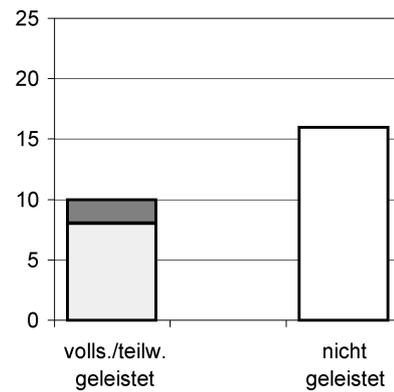


Abbildung 7:
Bemerkungen zu allgemeinem Wissen
über das mathematische Beweisen

Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen fehlten in einer Mehrzahl der Beweiseinheiten (vgl. Abbildung 7). Hierzu sei angemerkt, dass in der Kategorie „teilweise bis vollständig geleistet“ auch Fälle enthalten sind, in denen beispielsweise lediglich eine kurze Bemerkung zur Nichtzulässigkeit des Messens gemacht wurde. Mit Ausnahme von zwei Fällen stammten die Bemerkungen zu allgemein auf das Beweisen bezogenem Wissen im Wesentlichen vom Lehrer.

3.2 Anforderungsniveau von Lehrerfragen im Unterrichtsgespräch

Innerhalb dieses Teils der Untersuchung wurden insgesamt knapp über 1000 Lehrerfragen bzw. -aufforderungen ausgewertet, die während 788 Minuten, d.h. 13 Stunden 8 Minuten, innerhalb der 26 Beweiseinheiten gestellt wurden. Eine Information zum Interaktionstempo, die auch vorsichtige Rückschlüsse auf Lehrerfragen und -aufforderungen zulässt, ist die durchschnittliche „Frage-Frequenz“ von ca. 1,3 Fragen pro Minute, die sich rechnerisch aus diesen Rahmendaten ergibt.

Die Lehrerfragen bzw. -aufforderungen verteilen sich – wie in Abbildung 8 dargestellt – anteilig auf die Kategorien des Anforderungsniveaus 1-„leicht“, 2-„mittel“ und 3-„schwer“.

Auffällig ist der hohe Anteil von knapp 60% an Fragen, die nur einen Gedankenschritt oder etwa die Nennung eines Stichwortes zur Beantwortung erfordern und wenig Variation in der Art der Beantwortung zulassen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich bei diesen Werten zwischen verschiedenen Klassen erhebliche Unterschiede ergeben (vgl. Kuntze & Reiss, 2004).

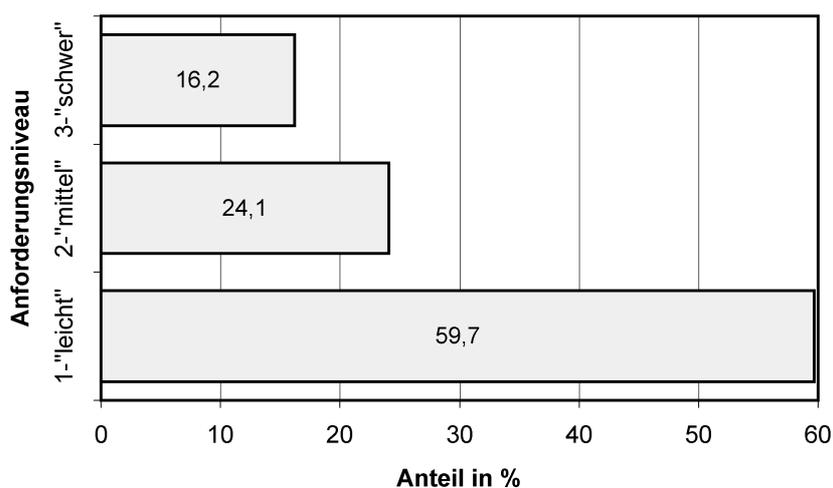


Abbildung 8: Anforderungsniveau von Lehrerfragen und -aufforderungen

Um das Anforderungsniveau der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen mit der Art ihrer Beantwortung durch die Schüler in Zusammenhang zu bringen, gibt Abbildung 9 eine Übersicht über die jeweiligen Anteile der Kombinationen dieser beiden Merkmale. Abbildung 9 enthält die Aufstellung der Art der Beantwortung der Lehrerfragen bzw. Lehreraufforderungen in Abhängigkeit von ihrem Anforderungsniveau in auf die Gesamtzahl aller (sinnvollen) Fragen bzw. Aufforderungen bezogenen Prozentwerten. Beispielsweise wurden 8,9% aller Lehrerfragen bzw. -aufforderungen der Kategorie 3-„schwer“ zugeordnet und blieben seitens der Schülerinnen und Schüler ohne Antwort.

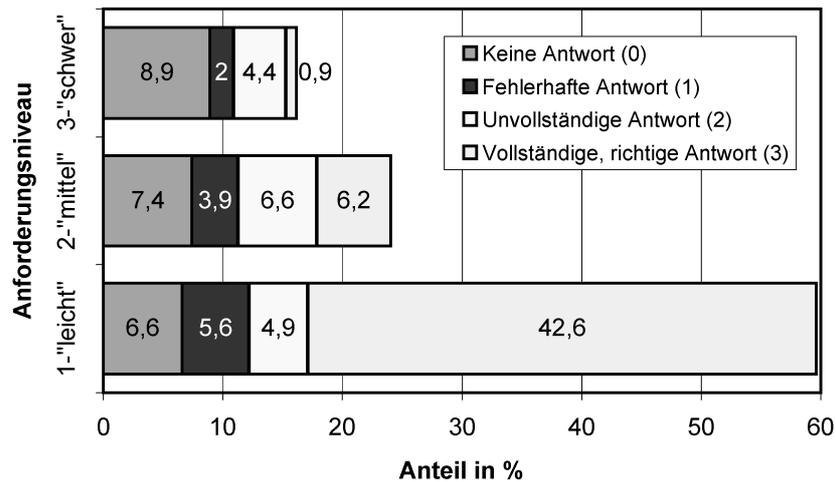


Abbildung 9: Anforderungsniveau der Lehrerfragen und Art ihrer Beantwortung

Es fällt der hohe Anteil vollständig beantworteter „leichter“ Fragen auf, der mit 42,6% alle anderen Kombinationen um mehr als das Vierfache übersteigt. Demgegenüber sind etwa vollständige Antworten der Schülerinnen und Schüler auf Fragen, die mehr als zwei Gedankenschritte erfordern, mit 0,9% sehr selten.

Auf 22,9% aller Fragen bzw. Aufforderungen wurde keine Antwort gegeben, 11,5% wurden fehlerhaft, 15,9% unvollständig und mit 49,7% fast die Hälfte vollständig beantwortet. Gerade bei den Fragen der Anforderungsniveaus 2 und 3 fällt auf, dass der Anteil fehlerhaft beantworteter Fragen gegenüber der Kategorie „keine Antwort“ gering ausfällt. Fragen hohen Anforderungsniveaus (Kategorie 3) blieben sogar mehrheitlich von den Schülerinnen und Schülern unbeantwortet.

4 Diskussion

4.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Die Ergebnisse zeigen, dass eine Reihe von inhaltlichen Elementen der Behandlung von Beweisen in einigen Unterrichtsstunden überhaupt nicht auftrat bzw. im Wesentlichen alleine oder überwiegend vom Lehrer geleistet wurde. Es handelte sich dabei insbesondere um inhaltliche Elemente, die geeignet erscheinen würden, übergreifendes Verständnis zu Zusammenhängen bei den behandelten Beweisen zu fördern. Im Einzelnen ergibt sich das folgende Bild:

- Die Problemstellung für das Erarbeiten von Beweisen wurde in den beobachteten Unterrichtsvideos in der Regel zielstrebig vom Lehrer entwickelt bzw. vorgegeben: Nur in 4 von 26 Beweiseinheiten konnten substantielle Schülerbeiträge zum Sammeln bzw. Identifizieren von Voraussetzungen beobachtet werden. Ebenfalls nur in 4 Fällen erreichten die Schülerbeiträge bei der Formulierung der Behauptung die Größenordnung des Lehreranteils an diesem inhaltlichen Element. Nur in Ausnahmefällen werden die beiden inhaltlichen Elemente des Sammelns von Voraussetzungen und des Formulierens der Behauptung, die gewissermaßen als „Einstiegsvoraussetzungen“ des Erarbeitens von Beweisen anzusehen sind, nicht geleistet.
- Die Diskussion der Beweisbedürftigkeit – ein inhaltliches Element, das einerseits dem Aufbau von Motivation zum Beweisen dienen kann, andererseits die Gelegenheit bietet, die Problemstellung für die Lernenden transparent zu machen – wurde in der Mehrzahl der Beweiseinheiten nicht geleistet. Innerhalb der 8 Fälle (von 26), in denen zumindest Ansätze einer Diskussion der Beweisbedürftigkeit der Behauptung beobachtet werden konnten, erreichten die Schülerbeiträge nur in zwei Beweiseinheiten eine mit dem Lehreranteil vergleichbare Größenordnung. Zugunsten eines zielstrebigem Erfragens von (aus Lehrersicht) beweisrelevanten Eigenschaften der betrachteten geometrischen Sachverhalte wurde meist die Chance vergeben, Problembewusstsein bei den Lernenden zu erzeugen, zum Beweisen zu motivieren und Methodenwissen zu stärken. Das Suchen von Antworten auf Fragen wie etwa „Was darf man für den Beweis wissen, und warum?“ wurde selten beobachtet.
- Eine Entscheidung über den Beweisweg wurde in der Mehrzahl der Beweiseinheiten nicht thematisiert. Nur in 5 Fällen trat explizit eine Situation auf, in der eine Entscheidung über den Beweisweg gefällt wurde. Sofern mögliche Entscheidungen über einzuschlagende Beweiswege im Unterricht auch nur annähernd thematisiert wurden, leistete dieses inhaltliche Element in 2/3 aller Fälle im Wesentlichen allein der Lehrer. Beweisen als dynamischen, vielfältig ausgestaltbaren Prozess zu sehen, bei dem im Laufe der Erarbeitung auch begründete persönliche Entscheidungen über auszuarbeitende Beweiswege gefällt werden und damit zu erkennen, dass Beweise aktiv gestaltet werden können,

dürfte eine Einsicht sein, die im beobachteten Unterricht nur äußerst selten gefördert wurde. Auch auf die Fähigkeit, Beweisaufgaben in Schulleistungstests erfolgreich zu bearbeiten, könnte sich die mangelnde Gelegenheit, sich im Unterricht mit den Möglichkeiten einzuschlagender Beweiswege auseinanderzusetzen, negativ auswirken.

- Eine schriftliche Beweisredaktion z.B. an der Tafel wurde in 23 der 26 Beweiseinheiten innerhalb des Unterrichts geleistet. Nur bei 9 dieser 23 Beweiseinheiten wurden die Schülerinnen und Schüler über meist geringe Beiträge hinaus an der Ausformulierung von Beweisen beteiligt. Bei 6 davon erreichten die Beiträge zur Formulierung des Beweises den Anteil des Lehrers. In 14 von 23 Fällen wurde kein wesentlicher Schülerbeitrag zur Formulierung von Beweisen verzeichnet. Mit einer Ausnahme (eine Verbesserung einer Hausaufgabe) schienen die Schülerinnen und Schüler nur während einer Gruppenarbeit die Möglichkeit zu haben, bei der Ausformulierung von Beweisen Beiträge einzubringen, die anteilmäßig über denen des Lehrers lagen.

Es fällt auf, dass die Schülerinnen und Schüler bei den Unterrichtsbeweisen nur wenige Trainingsmöglichkeiten für ein eigenes Formulieren von Beweisen hatten. Möglicherweise könnte sich auch dies negativ auf die Fähigkeit auswirken, in schriftlichen Tests Beweisaufgaben korrekt zu bearbeiten.

- Nur bei 8 von 26 Unterrichtsbeweisen fand eine Rückschau auf den Beweis statt. Bis auf zwei Fälle stammten diese überblicksartigen Gedanken mehrheitlich vom Lehrer. Offenbar wurde die Chance, mit Hilfe einer Rückschau Metawissen und beweispezifische Problemlöseheuristiken durch eine Reflektion des Beweisproblems und seines Lösungsprozesses zu fördern und aufzubauen, sowie die Lernenden Überblickswissen gewinnen zu lassen, nur selten wahrgenommen.
- Bei 10 von 26 Beweiseinheiten wurden allgemeine Bemerkungen zum Beweisen in der Mathematik gemacht. Dabei wurden nur bei 2 Unterrichtsbeweisen Schülerinnen und Schüler an diesen Gedanken wesentlich beteiligt. Auch wenn unterstellt wird, dass nicht bei jeder Beweiseinheit unbedingt Bemerkungen zu allgemeinem Wissen zum Beweisen angebracht werden müssen, so muss dennoch der geringe Beteiligungsgrad der Schülerinnen und Schüler ins Auge fallen.

Für die untersuchten Unterrichtsstunden scheint zu gelten, dass die Schülerinnen und Schüler beweispezifische Methodenkompetenz hauptsächlich auf der Basis von Lehrermitteilungen oder implizit durch die Beobachtung konkreter Unterrichtsbeweise erwerben konnten.

Insgesamt entsteht der Eindruck, dass bei der Erarbeitung von Beweisen im Mathematikunterricht beweisrahmende inhaltliche Elemente in erster Linie dann geleistet wurden, wenn sie sich im Sinne einer „zügigen Stoffvermittlung“ in einen stromlinienförmigen Unterrichtsablauf integrieren ließen. Das Erarbeiten von Be-

weisen kann meist mit einem Schema lediglich aus den drei Bestandteilen „gegebene Aufgabenstellung“ – „Erfragen und Zusammenstellen von beweisrelevanten Fakten“ – „Beweisredaktion (Aufschreiben des Beweises)“ beschrieben werden. Bei Aufgabenstellung und Beweisredaktion werden darüber hinaus nur sehr geringe inhaltliche Beiträge der Schülerinnen und Schüler einbezogen. Betrachtet man zusätzlich den Befund, dass sich die beobachteten substantiellen Schülerbeiträge auf wenige Klassen konzentrierten (Kuntze & Reiss, 2004), so erscheint die Interpretation naheliegend, dass sich die Rolle der Schülerinnen und Schüler meist auf das Nennen und Wiedergeben durch den Lehrer erfragter Eigenschaften geometrischer Figuren bzw. beweisrelevanter Fakten beschränkt.

Neben dem „stromlinienförmig-Machen“ der Erarbeitungsprozesse mathematischer Beweise gewissermaßen durch eine „Scheinbeteiligung“ der Schülerinnen und Schüler an der Beweisgenerierung, wie sie in der Mehrzahl der Klassen (vgl. Kuntze & Reiss, 2004) beobachtet werden musste, erweist sich ein weiterer Aspekt als besonders problematisch: Der Aufbau von notwendigem Meta-Wissen zum mathematischen Beweisen erhält offenbar nicht den erforderlichen Raum im Mathematikunterricht. Dabei handelt es sich nicht nur um beweisspezifisches Methodenwissen (vgl. Heinze & Reiss, 2003), das eine notwendige Voraussetzung für Beweis- und Argumentationskompetenz ist, sondern auch um Problemlöseheuristiken der Beweisgenerierung, sowie um ein übergreifendes Bewusstsein der Bedeutung des Beweises bzw. der Beweisbedürftigkeit. Dadurch, dass die inhaltlichen Elemente der Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das Beweisen, der Diskussion der Beweisbedürftigkeit, der Entscheidung über den Beweisweg und der Verifikation/der Rückschau/des Überblickes über den Beweis bzw. der Diskussion des Beweises oft keine Rolle im beobachteten Unterricht spielten, ist offensichtlich davon auszugehen, dass die oben genannten Bereiche von Meta-Wissen im beobachteten Mathematikunterricht nicht ausreichend in ihrem Aufbau unterstützt wurden.

4.2 Anforderungsniveau von Lehrerfragen im Unterrichtsgespräch

Bei den Ergebnissen der Auswertung zu Anforderungsniveau und Art der Beantwortung von Lehrerfragen bzw. -aufforderungen (vgl. Abb. 8 und 9) fällt der sehr hohe Anteil der Fragen mit geringem Anforderungsniveau auf. Diese Fragen wurden oft vollständig beantwortet, während Fragen höheren Anforderungsniveaus häufig unbeantwortet blieben oder unvollständig beantwortet wurden. Neben dem sehr geringen Anteil vollständig beantworteter Fragen höheren Anforderungsniveaus zeigt auch die mittlere Frage-Frequenz in der Größenordnung von mehr als einer Frage pro Minute, dass es für die Lernenden unter diesen Unterrichtsbedingungen nicht leicht sein dürfte, reflektierte, inhaltlich mehrschrittige Gedankengänge zu generieren und im Unterrichtsgespräch darzustellen.

Die Gesamtsicht der Daten scheint also ein Portrait eines kleinschrittigen, fragend-entwickelnden Unterrichts zu zeichnen. Offenbar wurden Fragen höheren Anforderungsniveaus

rungsgrades ausgehend von fehlenden oder unvollständigen Schülerantworten durch Fragen niedrigeren Anspruchsniveaus abgelöst bzw. ersetzt. Dies wird bereits zahlenmäßig an den Daten von Abbildung 9 plausibel.

Gelegentlich stellt sich in diesem Zusammenhang auch die Frage, ob von den Lehrern vollständige Schülerantworten auf Fragen oder Aufforderung insbesondere der höheren Anforderungsniveaus überhaupt erwartet wurden. Solche impliziten und rollenbezogenen gegenseitigen Verhaltenserwartungen der am Unterricht Beteiligten dürften auch wesentlich mit beobachteten Klassenunterschieden (vgl. Kuntze & Reiss, 2004) im Zusammenhang stehen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass zusätzlich zu hohen Lehreranteilen an inhaltlichen Elementen der Erarbeitung von Beweisen in erster Linie Lehrerfragen und -aufforderungen geringen Anforderungsniveaus als Träger eines von Schülerinnen und Schülern durch ihr Antworten geleisteten inhaltlichen Voranschreitens im Unterricht in Betracht kommen.

Hier wird ein Dilemma des kleinschrittigen fragend-entwickelnden Unterrichts deutlich. Ein möglicher Lösungsansatz wäre in schülerzentrierten, materialgestützten Unterrichtsformen zu sehen, die den Aufbau beweisbezogenen Meta-Wissens fördern sollen. Der Einsatz solcher Lernumgebungen wäre auch als Ergänzung zum herkömmlichen Unterricht denkbar. Solche materialgestützte Unterrichtsformen erscheinen geeignet, Lehrerinnen und Lehrern zu helfen, sich aus individuellen Mustern und Routinen der Unterrichtsgestaltung zurückzunehmen und so einen Rollenwechsel vom „Stoffvermittler“ hin zu einem „Begleiter von Lernprozessen“ zu fördern.

Literatur

- Baumert, J.; Lehmann, R. et al. (1997). TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 1999, 7–8.
- Clausen, M.; Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hochinferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft*, 31(2), 122–141.
- Deutsches PISA-Konsortium (2001). (Hrsg.). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.
- Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Technical Report on the Nationwide Survey, Mathematical Science. London.
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Spring 2003.
[<http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf>].

- Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *ZDM* 36 (3), 98–104.
- Klieme, E. (2002). Was ist guter Unterricht? Ergebnisse der TIMSS-Videostudie im Fach Mathematik. In W. Bergsdorf et al. (Hrsg.), *Herausforderungen der Bildungsgesellschaft*. [4. Ringvorlesung der Universität Erfurt] (S. 89–113). Weimar: RhinoVerlag.
- Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung im internationalen Vergleich. In: E. Klieme & J. Baumert (Hrsg.), *TIMSS – Impulse für Schule und Unterricht* (S. 43–57). Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.
- Kuntze, S. (2003). Wie beteiligen Lehrer ihre Schüler an Beweisen im Geometrieunterricht? Erste Ergebnisse einer Auswertung videografierter Unterrichtsstunden. In W. Henn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003* (S. 373–376). Hildesheim: Franzbecker.
- Kuntze, S. & Reiss, K. (2004). Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen – Ergebnisse einer Videoanalyse. *Unterrichtswissenschaft* 32(4), 357–379.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). (Hrsg.). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Neubrand, J. (2002). Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Hildesheim: Franzbecker.
- OECD. (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills. A new Framework for Assessment*. [<http://www.pisa.oecd.org/Docs/download/PISAFrameworkEng.pdf>]
- Polyà, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.
- Reiss, K. (2002). Beweisen, Begründen, Argumentieren. Wege zu einem diskursiven Mathematikunterricht. In W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002* (S. 39–46). Hildesheim: Franzbecker.
- Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), 45. Beiheft zur Zeitschrift für Pädagogik (S. 51–64). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. *Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Stein, M. (1986). *Beweisen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Steinhöfel, W. & Reichold, K. (1971). Zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise im Mathematikunterricht (Teil 1). *Math. Schule* 9(11), 700–707.
- Voigt, J. (1984a). Der kurztaktige, fragend-entwickelnde Unterricht. *Szenen und Analysen. Mathematica didactica* 7, 161–186.
- Voigt, J. (1984b). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht*. Weinheim: Beltz.

Anschrift der Verfasser

Sebastian Kuntze, Markus Rechner und Kristina Reiss
Lehrstuhl für Mathematikdidaktik
Universität Augsburg, 86135 Augsburg
E-Mail: sebastian.kuntze@math.uni-augsburg.de