Formalisierung von Wissen – ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen

von

Johann Sjuts, Leer

Zusammenfassung: Theoretische Ansätze und empirische Studien zu Kognition und Metakognition deuten darauf hin, dass die Zuschreibung, nur wenige Schülerinnen und Schüler seien zur Lösung komplexer Aufgaben fähig, nur wenige seien dazu zu befähigen, nicht haltbar ist. Analysiert man Strukturen und Strategien mathematischen Denkens, wird erreichbar, was nicht selten als kaum zu schaffen gilt: Wo mathematisches Denken sich entfalten darf, da lässt es sich auch entwickeln. Wer sich anspruchsvollen mathematischen Anforderungen nicht entzieht, kann sie – mit verfügbar gemachten Werkzeugen – bewältigen. Ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen ist die Formalisierung von Wissen.

Summary: Theoretical attempts and empirical studies on cognition and metacognition indicate that the attribution that only few pupils are able to solve complex problems or only few of them are to be enabled to do so is untenable. If structures and strategies of mathematical thinking are analysed, it is achieved what hardly ever is considered to be manageable: Where mathematical thinking is allowed to set forth, this is where it can also be developed. The one who does not evade superior mathematical demands can deal with them – with the corresponding tools available. A proven tool for the dealing with complex demands is the formalization of knowledge.

1 Kognitive Komplexität

Was ist Komplexität? Lässt sich bei mathematischen Anforderungen, bei Aufgaben und Problemen, die Schwierigkeit, sie zu bewältigen, präzisieren – und zwar im Hinblick auf die zu erbringenden Denkleistungen? Lassen sich Denkvorgänge ausmachen, die zum Lösen erforderlich sind? Lässt sich das Denken entwickeln, lässt sich dementsprechend die Wahrscheinlichkeit erhöhen, ja erheblich erhöhen, die in einer anspruchsvollen Aufgabe enthaltenen Hürden zu überwinden?

Die kognitionstheoretisch orientierte Mathematikdidaktik hat Komplexität zu analysieren versucht (Cohors-Fresenborg & Sjuts 2001, Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004). Sie unterscheidet zunächst *sprachlogische* und *kognitive Komplexität*.

Wer eine Aufgabe löst, hat zu ermitteln, welche relevanten Informationen aus einem sprachlich vorliegenden Kontext sich identifizieren und in eine mathematische

Beschreibung überführen lassen. *Sprachlogische Komplexität* liegt vor, wenn die Reihenfolge der Informationen im Text anders ist als die der Lösungsschritte, wenn die sprachlichen und sprachlogischen Verklausulierungen nicht auf Anhieb erkennen lassen, was zu tun ist. Insbesondere rufen sprachliche Konstruktionen, die die logische Struktur der Kontextdarstellung betreffen, sowie solche Formulierungen, die durch die Authentizität einer Situation bedingt sind, Schwierigkeiten hervor. Die *sprachlogische Komplexität* kann dazu beitragen, Aufgabenschwierigkeiten zu erklären, die über inhaltliche Kategorien hinausreichen.

Neben *sprachlogischer Komplexität* gibt es *kognitive Komplexität*. Die Teile, die zur Lösung einer Aufgabe gehören, können unterschiedlich zusammengesetzt sein. *Kognitive Komplexität* besteht einerseits darin, dass eine größere Anzahl von Denkvorgängen nacheinander abzuarbeiten ist. Die Anforderung steigt, wenn die Ergebnisse vorhergehenden Denkens bei einem neuen Denkschritt benutzt werden müssen. *Kognitive Komplexität* besteht andererseits darin, dass bei einem Denkschritt gleich mehrere Informationen zu verarbeiten sind.

Die *kognitive Komplexität* kann gering sein, wenn die nötigen Denkvorgänge auf der Hand liegen; sie kann sehr ausgeprägt sein, wenn heuristische, strategische, strukturierende und metakognitive Überlegungen die Denkvorgänge begleiten müssen, um unvertraute und unübersichtliche Situationen zu meistern, um mittels eines zunächst nicht ersichtlichen Gedankengangs von möglicherweise beziehungsreichen inneren Abhängigkeiten zu einer Lösung zu gelangen.

Zwei kontrastive Möglichkeiten, komplexe Anforderungen zu bewältigen, liegen nahe: aufgrund eines (zumeist als Begabung bezeichneten) könnerhaften mathematischen Denkvermögens einerseits und aufgrund eines erlernten mathematischen Denkvermögens andererseits. Die Version „gekonnt“ ist häufig mit der Zuschreibung verbunden, höchstens mathematische Talente seien zur Lösung komplexer Aufgaben fähig, die Version „gelernt“, nur wenige seien zur Lösung komplexer Aufgaben zu befähigen.

Mehr als bisher gilt es also zum einen, das Potential mathematischen Denkens freizusetzen: schöpferische Individualität, ideenreiche Originalität und problembewältigende Kreativität. Und es gilt zum anderen, das Repertoire mathematischen Denkens zu vergrößern, mathematisch-geistige Werkzeuge zu erschließen, zu bedienen, einzusetzen und als solche bewusstzumachen (Sjuts 2004).

2 Formalisierung von Wissen

Von eigener Art und Bedeutung ist die Fähigkeit zur *Formalisierung von Wissen*. Hiermit ist nun weniger gemeint, inwieweit der zugehörige Modellierungsprozess kompliziert ist in einem mathematisch-technischen Sinne, sondern mehr, in welchem Maße Werkzeuge des Präzisierens, Formalisierens, Abstrahierens und Generalisierens nützlich oder weitgehend unverzichtbar sind.

Während eine Anforderung darin besteht, *sprachlogische und kognitive Komplexität* mental zu repräsentieren, bietet der Einsatz kognitiver Werkzeuge gerade eine Handhabe für die Überwindung der Komplexität (Cohors-Fresenborg & Sjuts 2001). Die Kompetenz zur *Formalisierung von Wissen* hilft nicht nur bei der Bewältigung von *kognitiver Komplexität*, sondern auch von *sprachlogischer Komplexität* (Freudenthal 1973).

Die Fähigkeit zur *Formalisierung von Wissen* umfasst zweierlei: Formalisieren und Abstrahieren einerseits sowie Erfassen und abstraktes Vorstellen formaler Ausdrücke (Terme, Gleichungen, Funktionen) andererseits. Ein steigendes Niveau lässt sich ausmachen und beschreiben (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004).

Die *Fähigkeit zur Formalisierung* von Wissen ist in einer geringen Ausprägung erforderlich, wenn lediglich Präzisierungen oder naheliegende Symbolisierungen in tabellarischer, grafischer oder rechnerischer Form zur Lösung zu erstellen sind oder vorliegende überschaubare Repräsentationen zu erfassen sind.

Sie ist in einer leichten Ausprägung erforderlich, wenn zur Lösung sehr einfache formale Darstellungen (z. B. Funktionsterme) zu erfinden oder einfache formale Darstellungen zu verstehen sind.

Sie ist in einer erhöhten Ausprägung erforderlich, wenn zur Lösung einfache formale Darstellungen (z. B. Funktionsterme) eigenständig zu erbringen sind oder wenn die in einer Anforderung liegende Schwierigkeit durch den Rückgriff auf eine eigenständig zu erbringende symbolische Repräsentation wesentlich durchschaubarer wird, insbesondere wenn neben den Abstraktionsleistungen bei zu erschließenden oder zu erstellenden formalen Repräsentationen auch noch gezielte Überwachungs- und Kontrollüberlegungen vorzunehmen sind, um Fehlvorstellungen auszuschließen.

3 Aufgaben mit hohem Anspruch

Sucht man anspruchsvolle Aufgaben, so findet man sie in großer Fülle in den Sammlungen der seit vielen Jahren existierenden Mathematik-Olympiaden und Mathematik-Wettbewerbe. Sie eignen sich in besonderer Weise zur Talent- und (Hoch-)Begabten-Förderung. Sie liefern Tüftel- und Trainingsmaterial in entsprechenden Arbeitsgemeinschaften an Schulen und Universitäten. Sie erfreuen sich eines steigenden Interesses. Wie eine solche Förderung zu gestalten ist, was dabei zu beachten ist – das hat Bauersfeld (2003) geradezu mit Leidenschaft dargelegt.

So paradox es nun anmuten mag, aber gerade die in der Talentförderung eingesetzten Aufgaben mit hohem Anspruch eignen sich auch, um die Allgemeinbildung, die sich auf Mathematik bezieht, zu erreichen. Allgemeinbildung liegt insbesondere darin, etwas Wichtiges zu lernen, was man ohne Schule nicht lernen würde. Mathematisches Denken zählt dazu.

Nun kann es freilich nicht darum gehen, genau das originelle, kreative und ideenreiche Denken in der Breite erreichen zu wollen, das gerade die (Hoch-)Begabten auszeichnet. Aber es sollte darum gehen, Denkfähigkeiten zu entwickeln, die zur komplexitätsreduzierenden Bewältigung eben auch anspruchsvoller Anforderungen führen.

Auf die Möglichkeiten, das mittels Einsatz des Formalisierungswerkzeugs zu erreichen, haben Kaune (1991, 1995) und Cohors-Fresenborg (2001) mehrfach hingewiesen. „Dieses Handwerkszeug gestattet es, wirklichkeitsnahe Anwendungsaufgaben zu bearbeiten, deren Komplexität diejenige in herkömmlichen Schulbüchern bei weitem übersteigt." (Cohors-Fresenborg 2001, S. 8) Allerdings kann Formalisierung nur dann als Erleichterung empfunden werden und damit auch zu einer größeren Sicherheit in der Bewältigung hoher Anforderungen führen, wenn es ein Vertrauen und keine Abwehrhaltung zu formalen mathematischen Repräsentationen gibt (Kaune 1995).

Ist eine mittels Formalisierung komplexitätsreduzierende Bewältigung anspruchsvoller Probleme ein realistisches Unterfangen? Oder ist sie Zauberei? „Können wir zaubern? Was heißt denn zaubern? Es heißt doch, wir benutzen Einsichten, die andere nicht haben, und Werkzeuge, die der üblichen Erfahrung nicht zugänglich sind. Damit erreichen wir Dinge, die als nicht machbar gelten." (Kaune 1991, S. 63)

4 Lösungsanalysen

Das in gewisser Weise komplementäre Verhältnis von „gekonntem" mathematischen Denken und „gelerntem" mathematischen Denken ist leitend für die folgenden Ausführungen: Wo mathematisches Denken sich entfalten darf, da lässt es sich auch entwickeln. Beispielaufgaben und deren Lösungen in sich ergänzenden Ausformungen dienen der Illustration.

Die Aufgaben stammen aus Mathematik-Olympiaden und aus der Hochbegabtenförderung. Die zitierten Lösungen sind in ganz verschiedenen Situationen entstanden: unter alltäglichen Lernbedingungen (von Mathematikunterricht und Mathematik-Arbeitsgemeinschaften), unter Lernkontroll- oder Wettbewerbsbedingungen.

> **Aufgabe 1** (Fürther Mathematik-Olympiade 1996/1997, 1. Runde, 7./8. Schuljahrgang):
>
> *Aus 77%igem und 87%igem Spiritus sollen durch Mischen 1000 g eines 80%igen Spiritus hergestellt werden.*
>
> *Ermittle die dafür benötigten Massen der beiden Spiritussorten, aus denen das Gemisch hergestellt werden soll!*

Aufgaben dieser Art gelten als schwierig und unangenehm (Sjuts 2002).

Tonjas Lösung:

Zusammen sind die beiden Spirituosen 10% vom
Spiritus mit 80% entfernt. Davon hat der 1. Spiritus
3% und der 2. 7%. Der 2. Spiritus ist also um das
$7:3 = 2\frac{1}{3}$ fache weiter entfernt als der 1. Um das
auf 80% zu bringen muss der 77% also einen
Anteil haben der um das $2\frac{1}{3}$ fache größer ist als
der des 87%. Wenn es bei einem Gesamtanteil von 10
7 und 3 sind, sind es bei 100%: 70% und 30%.
Auf 1000g umgerechnet ergeben das 700g und 300g.

Die Schülerin Tonja (7. Klasse) benutzt den Ausdruck, dass die beiden Spiritussorten („Spirituosen") zusammen ein bestimmtes Maß von dem herzustellenden Spiritus „entfernt" sind, der zweite Spiritus um ein Mehrfaches „weiter entfernt" ist als der erste. Versucht man als Leser ein Bild zu entwerfen, wie die Schülerin sich das in ihrem Kopf zurechtlegt, so kommt einem sofort eine dynamische und prozesshafte Vorstellung (Schwank 2003) in den Sinn: Jemand schüttet aus zwei Spiritusbehältern die beiden Spiritussorten zusammen, so dass sich die Spirituskonzentration nach und nach ändert. Dies ist so zu regulieren, dass die beiden Anteile die gewünschte Mischung ergeben. Der von der Mischung auf einer gedachten Skala weniger entfernte Spiritus muss also einen Anteil haben, der um einen bestimmten Faktor größer ist als der des weiter entfernten Spiritus.

Zu einer solchen Lösung (einschließlich Vorstellung) gehört auch eine Kontrolle über die Größe(nordnung) der beiden Anteile. Der Gedankengang dieser – gewiss bemerkenswerten – Lösung enthält zugleich eine Selbstüberwachung. Nicht-plausible Lösungen würden ja sofort auffallen. Aber all dies gilt eben nur unter der Voraussetzung, dass ein ausgeprägtes Denkvermögen vorliegt und auch durchgängig aktiviert ist. Eine stützende Routine gibt es wohl nicht (Sjuts 2002).

Ilkas Lösung:

• Benötigte Masse des 77% igen Spiritus in g: x
• Benötigte Masse des 87% igen Spiritus in g: (1000 - x)

$$\frac{77}{100} \cdot x + \frac{87}{100} \cdot (1000 - x) = \frac{80}{100} \cdot 1000$$

$$\Leftrightarrow 77x + 87000 - 87x = 80000$$
$$\Leftrightarrow -10x = -7000$$
$$\Leftrightarrow x = 700$$

$x = \underline{700}$, $1000 - 700 = \underline{300}$.

Vom 77% igen Spiritus werden 700 g gebraucht und vom 87% igen Spiritus werden 300 g benötigt.

Ilkas Lösung (9. Klasse) basiert auf der im Mathematikunterricht (üblicherweise) erworbenen Fähigkeit, Wissen formal zu repräsentieren und elementaralgebraische Verfahren zu praktizieren. Es handelt sich in diesem Fall neben der Variablenerklärung um das Aufstellen und Lösen einer linearen Gleichung.

Auch die Kontrolle, so sie denn stattfindet, ist Lernergebnis des Unterrichts; sie hat sich einerseits auf die rechnerische Lösung (in Form einer Probe) zu beziehen, andererseits auf die Situation selbst (da ja eine Modellierung vorliegt). Formalisierung von Wissen, Algebraeinsatz und Kontrollvorgang bilden ein Instrumentarium, das die Komplexität einer Anforderung (hier: der Mischungsaufgabe) in allen Teilen reduziert (Sjuts 2002, 2003). Sich dieses Instrumentarium anzueignen, ist keine unüberwindbare Hürde.

Mittels der folgenden Aufgabe lässt sich verdeutlichen, wie die Fähigkeit zum Formalisieren unterrichtlich vermittelt werden kann.

Aufgabe 2 (Mathematik-Olympiade 2003/2004, Regionalrunde, 5. Schuljahrgang):

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, vergleichen am Nikolaustag die Anzahl ihrer Walnüsse.

Andrea sagt: „Eva hat doppelt so viele Walnüsse wie ich.“
Bettina sagt: „Ich habe eine Walnuss mehr als Andrea.“
Christian sagt: „Ich habe zwei Walnüsse mehr als Bettina.“
Dirk sagt: „Ich habe drei Walnüsse mehr als Christian.“
Eva sagt: „Ich habe vier Walnüsse mehr als Dirk.“

Wie viele Walnüsse haben die Kinder jeweils?

Zunächst deutet der Umstand, dass die Aufgabe im 5. Schuljahrgang gestellt worden ist, auf eine algebrafreie Lösung hin. Eine solche Lösung liegt hier vor.

Markus' Lösung:

Bettina hat 1 Nuss mehr als Andrea. Also hat Christian
3 mehr, Dirk 6 mehr und ~~Ek~~ Eva hat 10 mehr. Sie hat
doppelt so viele Nüsse, also hat Andrea 10, Bettina 11, Christian
13, Dirk 16 und Eva 20 Walnüsse.

Indem Markus (7. Klasse) die Informationen des Aufgabentextes umstrukturiert, aber auch in anderer Reihenfolge auflistet, gelangt er zur Lösung. So stellt er einerseits fest, dass Eva 10 Walnüsse mehr hat als Andrea, andererseits, dass Eva doppelt so viele Walnüsse wie Andrea hat. Daraus gewinnt er dann unmittelbar die Antwort, wie viele Walnüsse die Kinder jeweils haben.

„Kreativität ist die Fähigkeit, vorhandene Informationen gewinnbringend umzustrukturieren und zu vermehren." (1997, S. 40), so Gerd Binnig (Nobelpreisträger für Physik). Dies praktiziert der Schüler beim Lösen der Aufgabe. Nur ist es mit der schlichten Aufforderung, Informationen gewinnbringend umzustrukturieren und zu vermehren, nicht getan. Ein solches Verlangen lässt sich eben nicht so leicht umsetzen wie sagen. Das Warten auf Kreativität ist unsicher – und verunsichernd.

Allerdings kann die vorliegende Lösung dazu beitragen, sich das Werkzeug zur Formalisierung von Wissen zu erschließen. Die folgende Lösung verdeutlicht dies.

Monikas Lösung:

Andrea $(a) = x$

Bettina $(b) = x+1$

Christian $(c) = x+3$

Dirk $(d) = x+6$

Eva $(e) = x \cdot 2$ oder $x+10$

$$2 \cdot x = x + 10 \quad | -x$$

$$\underline{\underline{x = 10}}$$

$a = 10 \quad b = 11 \quad c = 13 \quad d = 16 \quad e = 20$

Das, was der Schüler Markus in seinem kurzen und knappen Text formuliert, schreibt die Schülerin Monika (7. Klasse) in übersichtlicher Weise mit Variablen auf. Sie geht offenbar recht unbekümmert mit Variablen um. Die Variablen a, b, c, d und e stehen jeweils für die Anzahl der Walnüsse (im Sinne ganz bestimmter und eindeutig feststehender Zahlen). Die Variable x ist die unbekannte und daher noch zu ermittelnde Zahl, in diesem Fall zugleich die Anzahl der Walnüsse, die Andrea besitzt und von der alle anderen Zahlen funktional abhängen. Über sie gibt es außerdem zwei mit Eva verbundene Auskünfte. Eva hat einerseits doppelt so viele Walnüsse wie Andrea, andererseits 10 Walnüsse mehr als Andrea. Daraus gewinnt Markus in seinem Text sogleich die geforderte Lösung, während Monika das als Gleichung – eben als weitere Formalisierung – notiert. Und mit ihrem algebraischen Wissen ermittelt sie dann auf diese Weise, wie viele Walnüsse Andrea hat, und schließlich, wie viele die anderen Kinder jeweils haben.

Mit Markus' und Monikas Lösungen liegen zwei Repräsentationen in verschiedenen Formen vor, deren Überführbarkeit augenfällig ist und die dem gewünschten Erwerb von Formalisierungsfähigkeit dienen können.

Ist man mit der formalen Repräsentation vertraut, liegen auch Vorzüge auf der Hand. Die formale Repräsentation ist übersichtlich und klar und ermöglicht einen raschen Kontrollabgleich mit dem Aufgabentext. Obwohl eine formale Repräsentation zumeist eine Verkürzung mit sich bringt, wirkt in diesem Fall Markus' ausformulierte Lösung komprimierter, die, so darf man annehmen, zum Nachvollzug mehrfach gelesen werden muss.

Die Lösungen der nachstehenden Aufgabe vermitteln weitere Aufschlüsse.

> **Aufgabe 3** (Mathematik-Olympiade 2003/2004, Schulrunde, 7. Schuljahrgang):
>
> *In einem Buch, das um 1350 geschrieben wurde, veröffentlichte Maximus Planudes folgende Aufgabe:*
>
> *Ein Maultier und ein Pferd trugen einige Säcke. Das Pferd ermüdete schneller und sagte zum Maultier: „Hilf mir bitte, nimm einen Sack von meinem Rücken und trage du ihn weiter!" „Würde ich das machen", erwiderte das Maultier, so wäre meine Last doppelt so groß wie deine. Wenn du mir aber einen Sack abnimmst und ihn trägst, werden wir die gleichen Lasten tragen."*
>
> *Wie viele Säcke trug das Maultier, wie viele das Pferd?*

Manfreds Lösung:

Der letzte Satz der Aufgabe lässt erschließen, dass das Maultier zwei Säcke mehr als das Pferd trägt, denn wenn das Maultier einen Sack abgibt, haben beide gleichviele Säcke. Der Anfang des Gespräches lässt erschließen, dass das Maultier, wenn es einen Sack vom Pferd abnimmt, vier Säcke mehr als das Pferd besitzt, denn wenn man dem Pferd einen Säck wegnimmt und dem Esel gibt wird der Abstand um zwei Säcke vergrößert, also beträgt der Abstand vier. Da das Maultier dann doppelt so viele Säcke trägt wie das Pferd, muss das Pferd vier und das Maultier acht Säcke tragen. Jetzt braucht man dem Pferd einfach nur den einen Sack zurückgeben und man findet heraus, dass das Pferd fünf und das Maultier sieben Säcke trägt.

Auch hier ist zum Verstehen der Lösung ein sorgfältiges Lesen erforderlich. Und ebenso wird deutlich, dass der Schüler Manfred (8. Klasse) gedanklichen Aufwand investiert, um das Ergebnis der Aufgabe zu ermitteln. Denn er muss die Reihenfolge der Aufgabentextinformation verändern, damit seine Überlegungen schlüssig und nachvollziehbar werden. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass Pferd und Maultier ja ein Gedankenexperiment machen, die darin verborgene Situation ja nicht der tatsächlichen Verteilung der Säcke entspricht, sondern man die Anzahl der Säcke erst durch die „Rückgabe“ herausbekommt.

Dieses Ausmaß an gedanklicher Investition enthält die folgende Lösung nicht:

Theas Lösung:

Anzahl der Säcke, die das Maultier trug: x

Anzahl der Säcke die das Pferd trug: y

$$\left| \begin{array}{l} (x+1)=(y-1)\cdot 2 \\ x-1=y+1 \end{array} \right|$$

$$\underset{\text{TI}}{\Leftrightarrow} \left| \begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \end{array} \right|$$

Das Maultier trägt 7 Säcke und das Pferd 5.

Neben einem gewissen algebraischen Repertoire muss Thea (9. Klasse) allerdings über eine Kompetenz verfügen, die der Ausdruck „Formalisierung von Wissen" explizit benennt. Sie muss formalisieren können, nämlich den Text in eine formale Notation übertragen. Das ist bei den beiden Gleichungen in diesem Fall gewiss nicht ganz einfach; indes lässt es sich schulen und trainieren.

Eine Besonderheit dieser Lösung verdient noch Erwähnung und Beachtung. Unter dem Äquivalenzzeichen steht (etwas unleserlich): TI. Thea hat das lineare Gleichungssystem nicht mehr selbst gelöst, sondern einen computeralgebrasystemfähigen TI-Rechner lösen lassen. Die beiden Buchstaben TI markieren also einen aktuellen Wandel der (Schul-)Mathematik. Algorithmische Fertigkeiten sind somit in einem gewissen Maße verzichtbar; leistungsfähige (Taschen-)Rechner übernehmen einen Teil der algebraischen Arbeit. Diese Entlastung bringt aber nur dann einen Gewinn, wenn dafür mathematisch-geistige Werkzeuge in eine souveräne Verfügbarkeit gelangen, wie in diesem Fall das Formalisieren und das Abstrahieren.

Der Wechsel von Repräsentationen gilt in der Mathematikdidaktik schon lange als ausgewiesene Fördermaßnahme. Die folgende Aufgabe greift dies auf.

Aufgabe 4 (Bauersfeld 2003, S. 12):

Nora sagt zu Simon: Gib mir 8 Nüsse, dann habe ich doppelt so viele wie du. Simon sagt zu Nora: Gib du mir 8 Nüsse, dann haben wir beide gleich viele.

Wie viele Nüsse hat Nora, wie viele hat Simon?

Theas Lösung:

Wenn Nora Simon 8 von ihren Nüssen gibt, dann haben beide gleich viele Nüsse, also hat Nora 16 Nüsse mehr als Simon.
Wenn aber Simon 8 Nüsse an Nora abgibt, hat Nora 32 Nüsse mehr als Simon und doppelt so viele wie Simon. Also hat Simon, wenn er 8 Nüsse an Nora abgibt 32 Nüsse und Nora, wenn sie 8 Nüsse von Simon erhält 64 Nüsse.
Jetzt muss Nora aber noch die 8 Nüsse an Simon zurückgeben, also hat Simon 32+8 = 40 Nüsse und Nora 64−8 = 56 Nüsse

Jörgs Lösung:

Anzahl der Nüsse, die Simon hat: x
" , die Nora hat: x+16

$2\cdot(x-8) = x+16+8$
$2\cdot x-16 = x+24$
$2\cdot x = x+40$
$x = 40$

Also hat Simon 40 Nüsse und Nora 56.

Die Gleichartigkeit von Aufgabe und Lösungen der Schülerin Thea (9. Klasse) und des Schülers Jörg (7. Klasse) zum vorangegangenen Beispiel ist offenkundig, eine erneute Analyse also entbehrlich. Allerdings enthält Jörgs Lösung gegenüber der auf Formalisierung beruhenden Lösung der vorangegangenen Aufgabe einen erwähnenswerten Unterschied. Jörg kombiniert Denken und Formalisieren. Er benutzt nur eine Variable, nicht zwei, was nahe gelegen hätte. Er verwertet ein gedanklich gewonnenes Zwischenergebnis, nämlich, dass Nora 16 Nüsse mehr hat als Simon. Infolgedessen verringert sich für ihn der algebraische Aufwand. Er hat nun nicht mehr ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen zu lösen, sondern lediglich eine lineare Gleichung, in der eben nur eine Variable auftritt. Ihm als Schüler der 7. Klasse ist ja noch nicht bekannt, dass er eine solche Reduktion gar nicht vorzunehmen braucht. Folglich muss er noch einen höheren gedanklichen Aufwand betreiben. Weiß er aber, was die elementare Algebra und ein Computeralgebrasystem zu leisten vermögen, kann er sich getrost auf das Formalisieren verlassen. Formalisieren entlastet eben.

Nun soll sein Denkvermögen aber keineswegs Geringschätzung erfahren. Schließlich ist er darauf angewiesen, und es darf auch zur Entfaltung kommen. Ein hohes Denkvermögen zeichnet sich gerade dadurch aus, dass ein Hin- und Herspringen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen sowie ein gleichzeitiges Aktivieren verschiedener Repräsentationsformen stattfindet (Krause & Seidel & Heinrich 2003).

Von selbst geschieht dies offenbar nicht allzu häufig; die mathematikdidaktische Forderung, Multimodalität und Modalitätswechsel zu fördern, kann daher unverändert Gültigkeit beanspruchen.

Ein letztes Beispiel soll die Gegenüberstellung abschließen.

> **Aufgabe 5** (Mathematik-Olympiade 2002/2003, Länderrunde, 8. Schuljahrgang):
>
> *Bill und Tom hatten beim Goldwaschen vier ansehnliche Goldklumpen gefunden. Die Freude war riesengroß. Mit einer Balkenwaage stellten die beiden Goldwäscher fest:*
>
> - *Die Goldklumpen A und B zusammen waren gleich schwer wie die beiden anderen Goldklumpen C und D zusammen.*
> - *B und C zusammen waren leichter als A und D zusammen.*
> - *B allein hingegen war schwerer als A und C zusammen.*
>
> *Ordne mit Hilfe dieser Angaben die Goldklumpen nach ihrer Masse, beginnend bei der größten Masse!*

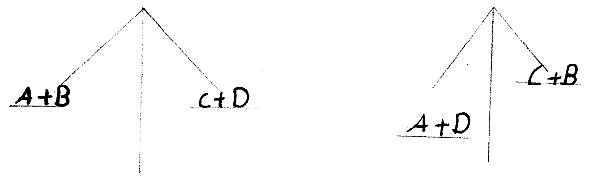
Ein erste Formalisierung verschafft zunächst eine bessere Übersicht:

$$A + B = C + D$$
$$B + C < A + D$$
$$B > A + C$$

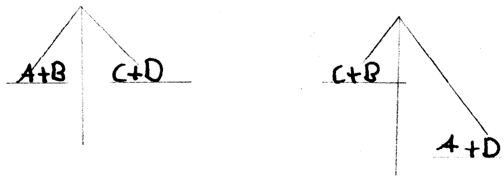
Die letzte Ungleichung ist sehr aussagekräftig. Mit den in ihr enthaltenen Informationen gewinnt man über Fallunterscheidungen oder mittels einer Betrachtung aller noch denkbaren Fälle die gewünschte Lösung. Anders ist es, wenn man die Aufgabe abwandelt und fragt, welche Beziehungen man lediglich aus den beiden ersten Bedingungen ableiten kann, also aus:

$$A + B = C + D$$
$$B + C < A + D$$

Silvias Lösung:



D ist schwererals B, weil bei der 2. Waage
D und B vertauscht wurden, ging die linke
Waage runter.



A ist schwerer als C, weil bei der 2. Waage
A und C vertauscht wurden, ging die linke
Waage hoch.

Silvia (8. Klasse) kann sich offenbar den Wägevorgang vorstellen. Indem sie das Gleichgewicht zwischen A + B und C + D und das Ungleichgewicht nach dem Vertauschen der Goldklumpen D und B auf den Waagschalen miteinander vergleicht, folgt für sie, dass D schwerer ist als B. Auf analoge Weise begründet sie, dass A schwerer ist als C. Wenn man über eine entsprechende gedankliche Vorstellungskraft nicht verfügt, wird man sich fragen, ob diese Argumentation überhaupt stimmt. Und wie kommt jemand auf eine solche Argumentation?

Indes ist auch in diesem Fall eine Bewältigung mittels Einsatz formaler Werkzeuge möglich, wie die folgende Lösung zeigt.

Konrads Lösung:

$$A+B=C+D$$
$$B+C<A+D$$

$$A=C+D-B$$
$$B+C<A+D$$

$$B+C<D+D+C-B$$

$$B<2D-B$$

$$2B<2D$$

$$B<D$$

$$A+B=C+D$$
$$B+C<A+D$$

$$D=A+B-C$$
$$B+C<A+D$$

$$B+C<A+A+B-C$$
$$C<A+A-C$$
$$2C<2A$$
$$C<A$$

Konrad (10. Klasse) benötigt eine gedankliche Vorstellung des Wägevorgangs überhaupt nicht (und übrigens auch das so genannte Waagemodell nicht). Er nutzt seine im Umgang mit symbolischer Darstellung und symbolischer Handhabung erworbene abstrakte Vorstellung, um zum Resultat zu gelangen. Gleichwohl muss er strategische Überlegungen anstellen, welche Umformungen zum Ziel führen. Allerdings sind mehrere Wege möglich. Der hier dokumentierte enthält einfache Umformungen und Einsetzungen, zu denen es auch gar keine Veranschaulichungen (mit Balkenwaage und Goldklumpen) zu geben braucht (und, weil 2B oder 2D in der Goldklumpen-Realität nicht vorkommen, auch gar nicht geben kann).

Man wird auch sagen dürfen, dass im Vergleich zu Silvias Lösung trotz der dabei unterstützenden Visualisierung Konrads Lösung eher durchschaubar und nachvollziehbar, sogar eher erlernbar ist.

5 Lösungsvergleich

Die Gegenüberstellung der jeweiligen Lösungen wirft selbstverständlich auch die Frage auf, wie Schülerinnen und Schüler selbst einen Vergleich ziehen. Zwei Schülerinnen (9. Klasse) urteilen so:

Lauras Kommentar:

die Lösung mit variablen ist weniger komplex, da nicht so viel Schreibarbeit nötig ist.

Theas Kommentar:

Die Lösung mit den Variablen ist nicht so
kompliziert wie die andere Lösung.
Man muss nicht so viel schreiben, wenn man
die Aufgabe mit Variablen belegt.

Die Aufgabe ist übersichtlicher und wenn man
sie liest kann man sie leichter verstehen.

Die beiden Schülerinnen können hier als Gewährspersonen für die Feststellung dienen, dass die Lösungen mit Variablen einfacher, kürzer und übersichtlicher sind. Bemerkenswerterweise sind die formalen Lösungen auch leichter lesbar und verstehbar. Komplexes mathematisches Denken, das sich darin zeigt, anspruchsvolle Anforderungen zu bewältigen, kann unter gewissen Bedingungen demgemäß ersetzt werden durch den Einsatz probater Werkzeuge, die es ermöglichen, Komplexität zu reduzieren.

Die kognitionstheoretisch orientierte Mathematikdidaktik hat Unterschiede in Strukturen und Strategien mathematischen Denkens ausfindig gemacht (Schwank 2003). Strukturen und Strategien lassen sich bei bestimmten Aufgabenstellungen typisieren (Sjuts 2002) und hier vor allem bei Aufgabe 1 identifizieren. Insofern muss die unterrichtliche Intention, eine Kompetenz zur Benutzung formaler Werkzeuge aufzubauen, darauf Rücksicht nehmen. Der Unterricht sollte auch die in der kognitiven Struktur eines Individuums vorhandenen Gegebenheiten im Sinne von Multimodalität ausdrücklich anerkennen und nutzen.

So liegt eine Stärke der Lösung durch gedankliches Hineinversetzen gerade darin, dass die Plausibilität, vor allem jedoch die Nicht-Plausibilität eines Ergebnisses auffällt. (Beim gedankenlosen Einsatz eines Taschenrechners ist das zum Beispiel nicht der Fall.)

Für diejenigen, die mit komplexitätsreduzierenden geistig-mathematischen Werkzeugen arbeiten, ist dagegen eine metakognitive Begleitung wichtig. Die Übersichtlichkeit der formalen Wissensrepräsentation begünstigt dies, allerdings ist die Selbstüberwachung ebenso zu lernen wie die Formalisierung. Selbstüberwachung ist nötig, Selbstüberwachung ist gewissermaßen eine Bedingung des Erfolgs (Sjuts 2003).

6 Wissensrepräsentation

Neben vielen anderen Fragen ist im Zusammenhang mit den PISA-Aufgaben gerade die Frage von Bedeutung, wie die Schwierigkeit von Aufgaben sich möglichst genau kategorial beschreiben lässt. Dazu gibt es mittlerweile mehrere Ansätze (Baumert u. a. 2001, Neubrand u. a. 2001, Knoche & Lind u. a. 2002, Neubrand & Klieme & Lüdtke & Neubrand 2002, Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004), die je für sich Erklärungswert besitzen. Mathematikdidaktisch ist natürlich von besonderem Interesse, inwieweit sich daraus Folgerungen für das Mathematiklernen ableiten lassen.

Die vorliegenden Ausführungen rücken das Werkzeug *Formalisierung von Wissen* in den Mittelpunkt. In der mathematischen Ideengeschichte ist es von herausragender Bedeutung (Hefendehl-Hebeker 2004). PISA-Analysen, die sich auf stoff- und aufgabenübergreifende und so gesehen universelle Denkprozesse beziehen, untermauern die Bedeutung von Formalisierung für das Mathematiklernen durch bemerkenswerte empirische Befunde (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004). Dabei spielt das geistig-mathematische Instrumentarium, das Instrumentarium zur (intuitiven) Aufnahme, zum (präzisen) Erfassen und zum (zielorientierten) Bearbeiten von komplexen Text- und Aufgabeninformationen, die wesentliche Rolle. Mathematische Theoriebildung und mathematische Modellbildung unterscheiden sich danach nicht (Sjuts 2002).

„In weiten Teilen ist der methodische Ansatzpunkt, intuitiv vorhandenes Wissen zu präzisieren und zu formalisieren, nicht daran gebunden, ob es sich um innermathematisches Wissen handelt oder um Wissen aus so genannten Sachsituationen. Der Mathematik wohnt eine spezifische, nicht ersetzbare Weise zur gedanklichen Erschließung der Wirklichkeit inne; sie besteht darin, das Formale in Denkhandlungen herauszuarbeiten und damit mehr Transparenz und Einsicht in Zusammenhänge zu schaffen." (Cohors-Fresenborg 2001, S. 5) Dieses Charakteristikum der Mathematik verdeutlichen die vorliegenden Lösungsbeispiele vor allem durch ihre einander ergänzende wie entsprechende Art und Weise.

Überwiegend treten in der Schulmathematik Anforderungen auf, zu deren Bewältigung Fähigkeiten zur *Formalisierung von Wissen* in einer geringen, leichten oder allenfalls erhöhten Ausprägung erforderlich sind. Die meisten der hier dokumentierten Aufgaben sind dagegen nur mit einer Fähigkeit in einer hohen Ausprägung lösbar. Schulische Erfolge zur Bewältigung von *kognitiver Komplexität* mittels passender Werkzeuge sind also durchaus plausibel (Kaune 1991, 1995).

Die Analyse zeigt weiterhin, dass die Zusammenführung von stofflicher und kognitiver Didaktik sich als gewinnbringend erweist. Sie stützt die These, wonach „das Sachwissen, die Fähigkeit im Einsatz kognitiver Werkzeuge und die denkbegleitende Metakognition zusammen genommen Kompetenz bzw. Erfolg in Mathematik erklären" (Sjuts 2003, S. 36). Insbesondere das Konzept *Formalisierung von Wissen* vermag komplexe Anforderungen zu erfassen und

Wissen vermag komplexe Anforderungen zu erfassen und Hilfen zur Bewältigung anzubieten.

Hellsichtig hatte Freudenthal (1963) auf die Bedeutung des Formalisierens und die ihm entgegenstehenden Hemmnisse hingewiesen: „In wenigen Jahrzehnten wird von allen mathematischen Tätigkeiten das Formalisieren die mit den weitesten Anwendungen sein. Wenn man die Mathematik in Kapitel einteilen und in Kapiteln unterrichten will, weiß man allerdings nicht, wo man das Formalisieren hinstecken soll. … Man kann dazu also keinen programmatischen Kurs schreiben. … So fällt es bei den Diskussionen über moderne Mathematik auf der Schule ganz unter den Tisch. Das Formalisieren kann eben nur als Tätigkeit, nicht als Stoff unterrichtet werden, und darum passt es nicht in den Kram des traditionellen Mathematikunterrichts." (Freudenthal 1963, S. 28) Offensichtlich hat sich an dieser Analyse Freudenthals wenig geändert, auch wenn in der Schule unter modernem Mathematikunterricht heute etwas anderes verstanden wird, nämlich mehr Anwendungsorientierung und Praxisbezug als vor vierzig Jahren. Die erwähnte PISA-Analyse (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer 2004) kann aber einen Hinweis darauf geben, dass nach wie vor nur eine Minderheit über dieses äußerst nützliche Werkzeug des Formalisierens verfügt.

Literatur

Bauersfeld, Heinrich (2003): Das Anderssein der Hochbegabten. Merkmale, frühe Förderstrategien und geeignete Aufgaben. In: mathematica didactica, Jahrgang 25, Band 1, S. 5–16, 2003

Baumert, Jürgen u. a. (Hrsg.) (2001): PISA 200. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen 2001

Binnig, Gerd (1997): Aus dem Nichts. Über die Kreativität von Natur und Mensch. München 1997

Cohors-Fresenborg, Elmar (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 47, Heft 1, S. 5–13, 2001

Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann (2001): Die Berücksichtigung von kognitiver und metakognitiver Dimension bei zu erbringenden und zu beurteilenden Leistungen im Mathematikunterricht. In: Solzbacher, Claudia & Freitag, Christine (Hrsg.): Anpassen, Verändern, Abschaffen? Schulische Leistungsbewertung in der Diskussion. Bad Heilbrunn 2001, S. 147–162

Cohors-Fresenborg, Elmar & Sjuts, Johann & Sommer, Norbert (2004): Komplexität der Denkvorgänge und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.) (2004): PISA 2000: Differenzierte Analysen zur mathematischen Bildung (Arbeitstitel). Erscheint 2004.

Freudenthal, Hans (1963): Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 9, Heft 4, S. 5–29, 1963

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1 und 2. Stuttgart 1973

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2004): Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, Horst & Ralle, Bernd & Reiss, Kristina & Schön, Helmut & Vollmer, Helmut (Hrsg.) (2004): Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken. Erscheint 2004.

Kaune, Christa (1991): Die Computerwelt als Evidenzbasis zur Fundierung des algebraischen Anteils der Schulmathematik der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1991, S. 59–67

Kaune, Christa (1995): Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Steiner, Hans-Georg & Vollrath, Hans-Joachim (Hrsg.): Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathematikdidaktischen Forschung. Köln 1995, S. 66–76

Knoche, Norbert & Lind, Detlef u. a. (2002): Die PISA-2000-Studie, einige Ergebnisse und Analysen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 23, Heft 3/4, S. 159–202, 2002

Krause, Werner & Seidel, Gundula & Heinrich, Frank (2003): Über das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung beim Lösen mathematischer Probleme. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 49, Heft 6, S. 50–62, 2003

Neubrand, Michael & Biehler, Rolf & Blum, Werner & Cohors-Fresenborg, Elmar & Flade, Lothar & Knoche, Norbert & Lind, Detlef & Löding, Wolfgang & Möller, Gerd & Wynands, Alexander (2001): Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 33, Heft 2, S. 45–59, 2001

Neubrand, Michael & Klieme, Eckhard & Lüdtke, Oliver & Neubrand, Johanna (2002): Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: Unterrichtswissenschaft – Zeitschrift für Lernforschung, 30. Jahrgang, Heft 1, S. 100–119, 2002

Schwank, Inge (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 35, Heft 3, S. 70–78, 2003

Sjuts, Johann (2002): Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 23, Heft 2, S. 106–128, 2002

Sjuts, Johann (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 24, Heft 1, S. 18–40, 2003

Sjuts, Johann (2004): Mathematisches Denken beim Lösen anspruchsvoller Aufgaben – gekonnt oder gelernt? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004

Anschrift des Verfassers

Priv.-Doz. Dr. Johann Sjuts
Studienseminar Leer
Evenburg – Am Schloßpark 25, 26789 Leer
E-Mail: sjuts-leer@t-online.de