

Rekonstruktives Modellieren in Dynamischen Geometriesystemen

von

Heinz Schumann, Weingarten

Herrn Prof. Dr. Immo Kerner zum 75. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung: Dynamische Geometrie-Systeme (DGS) sind leistungsfähige Werkzeuge zur Modellierung von als zweidimensional interpretierbaren Ausschnitten der uns umgebenden geometrisierbaren Realität. Eine Modellierungsaufgabe besteht in der Rekonstruktion der Geometrie, die bewusst bzw. unbewusst von Menschenhand in unsere Welt implementiert worden ist oder die wir in der Natur vorfinden. Das Ergebnis eines entsprechenden Rekonstruktionsprozesses ist ein statisches oder dynamisches Modell. – Das rekonstruktive Modellieren in DGS erweitert die traditionellen Modellierungsmöglichkeiten im Geometrieunterricht. Als computerunterstützte Modellierungsmethode induziert es durch die von den Schülern/-innen selbst gewählten und zu bearbeitenden authentischen Modellierungsvorlagen offene Lernumgebungen, die sich für das Lernen in Projekten eignen.

Summary: Dynamic geometry systems are powerful tools for the geometric modelling of two-dimensionally interpretable parts of reality which surrounds us. A modelling task involves the reconstruction of the geometry which has been consciously or subconsciously created in our world by „human hand“ or which can be found in the natural environment. The result of a corresponding reconstruction process is a static or dynamic model. Reconstructive modelling provides us with more possibilities than the traditional modelling in the geometry classroom. This new computer supported modelling method induces open learning environments through students' self-selection and solving of authentic examples. These environments are conducive to project work.

1 Einleitung

Die Bedeutung außermathematischer Anwendungen im Mathematikunterricht allgemein bildender Schulen, also auch des mathematischen Modellierens, ist unbestritten. Eine lesenswerte bildungstheoretische Erörterung der Beziehung von geisteswissenschaftlich orientierter Mathematik, geprägt durch das „Prinzip durchgängiger Rationalität“, und anwendungsorientierter Mathematik als „dienender Magd“ findet sich u. a. bei v. Hentig (1996). Die Problematik der Anwendung in der Schulmathematik, also auch die der Modellierung, analysiert Schupp (1988); diese Analyse ist nach wie vor aktuell.

Winter (1975) hat in seinem anthropologischen Ansatz zur Begründung allgemeiner Lernziele – heute würde man Kompetenzen sagen – für den Mathematikunter-

richt das „Mathematisieren“ aufgenommen. „Mathematisieren“, das auch das mit dem mathematischen Modellieren beinhaltet, ist beschrieben als eine dispositive Haltung und Fähigkeit, reale Situationen mathematisch zu erfassen und zu beschreiben.

Modellieren ist auch ein zentraler Begriff der „Mathematical Literacy“ im Rahmen der PISA-Studie (Deutsches PISA-Konsortium 2001). Der gesamten Vorgang des Lösen einer anwendungsbezogenen Aufgabe wird als Modellierungsprozess bezeichnet. Das folgende Diagramm skizziert den in Zyklen ablaufenden Modellierungsprozess, der abbricht, wenn die Validierung ein passendes Ergebnis feststellt.

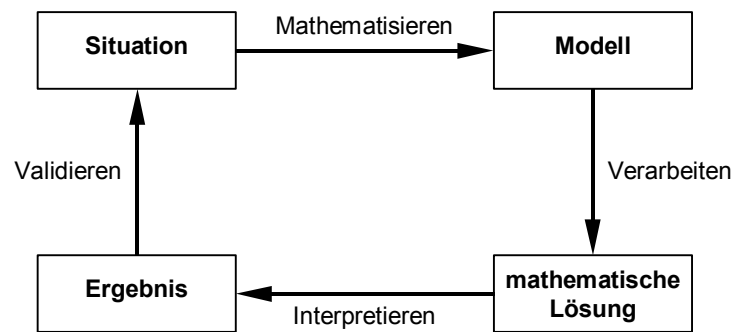


Diagramm 1 (Modellierungsprozess bei PISA-Aufgaben)

Merkwürdigerweise mutiert das „Modellieren“ im Heymannschen Diskussionsvorschlag über zentrale Ideen (Heymann 1996) in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss“ (KMK 2003) zu einer allgemeinen mathematischen Kompetenz (die Autoren der Standards waren vermutlich unsicher in der Unterscheidung zwischen formaler und materialer mathematischer Bildung). Gemäß dieser Bildungsstandards gehört zum mathematischen Modellieren Folgendes:

- Den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen.
- In dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten.
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

Um näher auf unsere Themenstellung einzugehen, spezialisieren wir uns nun auf das Modellieren im Geometrie-Unterricht: Im Bereich der Elementargeometrie, die vor allem in der Sekundarstufe I angesiedelt ist, bleibt das „Geometrisieren“ bzw. das geometrische Modellieren im Wesentlichen beschränkt auf die Formerkennung

(die auch die Symmetrie-Erkennung einschließt) und auf die Berechnung an geometrischen Figuren (inklusive der geometrischen Extremwertaufgaben). Derartiges Modellieren besteht vorwiegend aus der Rekonstruktion der geometrischen Begriffe, Aussagen und Verfahren, die vorher in die Realität implementiert worden sind bzw. die vorher eine (pseudo-)realistische Einkleidung erfahren haben. Es fehlt an authentischen Beispielen für das geometrische Modellieren (auch die geometrischen Musteraufgaben für die o. g. Bildungsstandards bieten nichts Authentisches). Vielseitigere und systematisch geordnete Aspekte des geometrischen Modellierens finden sich bei Wittmann (1987) und Graumann (1988); diese Arbeiten seien hier stellvertretend für andere Arbeiten mit entsprechenden Inhalten genannt. Leider haben die dort ausgeführten Modellierungen nur spärlich Eingang in Unterrichtswerke und in den Unterricht gefunden. Das mag u. a. an der mangelnden Bereitstellung bzw. Verfügbarkeit der für komplexere Modellierungen notwendigen geometrischen und außergeometrischen Werkzeuge und Lernvoraussetzungen, an dem relativ großen zeitlichen Bearbeitungsaufwand, an der Relevanz für das Stellen von Aufgaben für Klassenarbeiten und nicht zuletzt an der Ausbildung von Mathematiklehrern und -lehrerinnen liegen. In aktuellen Standardwerken über Didaktik der Geometrie für die Ausbildung, beispielsweise in „Geometrie in der Sekundarstufe“ (Holland 1996) und in „Zentrale Themen des Geometrie-Unterrichts aus didaktischer Sicht“ (Kratz 1993) wird das geometrische Modellieren nicht thematisiert.

Die Projektorientierung des Geometrie-Unterrichts kann hier punktuell Abhilfe schaffen; wir verweisen in diesem Zusammenhang z. B. auf die Arbeit „Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums“ (Ludwig 1997), in der auch Projektbeispiele für das Geometrisieren dokumentiert sind.

Eine weitere Möglichkeit, das geometrische Modellieren in der Art des Rekonstruierens zu fördern, besteht in der Nutzung von adäquaten Computerwerkzeugen, hier von Dynamischen Geometriesystemen (DGS), die helfen sollen, vor allem den konstruktiven Anteil beim Modellieren zu verstärken (Schumann 2003). Unseres Erachtens ist diese Art der Computernutzung ein Beispiel für die effektive Integration des Computers in den Geometrie-Unterricht. Die curriculare Legitimation des Einsatzes von DGS ist in den o. g. Bildungsstandards unter der Leitidee „Raum und Form“ verankert. DGS sind leistungsfähige Werkzeuge zur Modellierung von als zweidimensional interpretierbaren Ausschnitten der uns umgebenden Realität. Die technische Voraussetzung für eine solche Modellierung ist die Möglichkeit, entsprechende Bild-Dateien in DGS zu importieren. Unter Nutzung der adäquaten Eigenschaften von DGS, die weiter gehende Möglichkeiten als herkömmliche Modellierungswerkzeuge bieten, können nun die importierten Modellierungsvorlagen bearbeitet werden. Die Lösungen vielfältiger *authentischer* Modellierungsaufgaben bestehen in der Rekonstruktion der betreffenden Geometrie, die bewusst bzw. unbewusst von „Menschenhand“ in unsere Welt implementiert worden ist oder die wir in der Natur vorfinden. Ergebnisse entsprechender Rekonstruktionsprozesse sind virtuelle statische oder dynamische Modelle.

Das folgende Diagramm gibt einen Überblick über Methoden bzw. Arbeitsformen beim Einsatz von DGS im Kontext des Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I (Schumann 2001); das Modellieren in DGS wird unterstützt durch alle anderen im Diagramm aufgeführten Methoden bzw. Arbeitsformen.

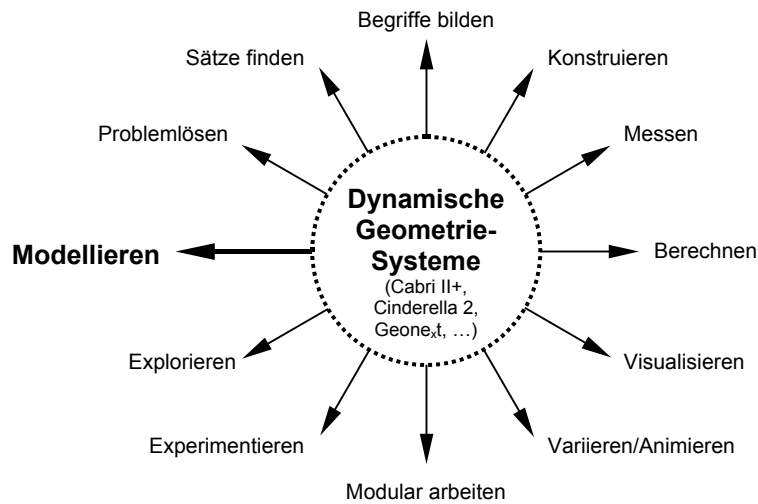


Diagramm 2 (Methoden bzw. Arbeitsformen mit DGS)

Beim Einsatz von DGS für das geometrische Modellieren verfolgen wir u. a. nachstehende allgemeine geometrische Lehrziele:

- Das geometrische Sehen bzw. „Auge“ schulen. (Wahrnehmungsphänomenologisches Lehrziel).
- Die Nützlichkeit der Geometrie schätzen. (Affektives Lehrziel)
- Geometrisches Wissen (Begriffe, Aussagen und Verfahren) anwenden und erweitern. (Kognitives Lehrziel)
- Geometrisierbare Phänomene experimentell explorieren und analysieren. (Metakognitives Lehrziel)
- Die Nutzung von DGS üben. (Technisches Lehrziel)

Den Ablauf des Modellierens veranschaulicht das folgende Diagramm:

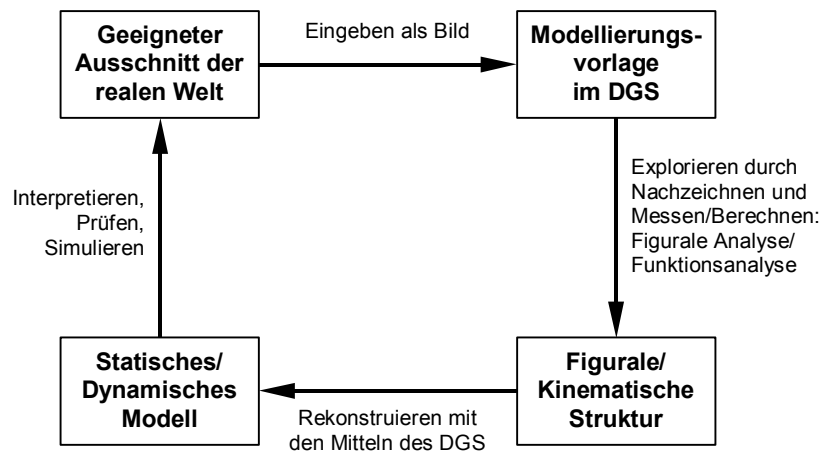


Diagramm 3 (Ablauf des Modellierens in DGS)

Den Ablauf des Modellierens für die Gewinnung statischer/dynamischer Modelle beschreiben wir hier in der Art von Projekt-Anleitungen für Schüler/-innen.

Anleitungen für das Erstellen eines statischen Modells:

- (1) Halte Ausschau nach einem Objekt in der dich umgebenden Welt oder in gedruckten Darstellungen bzw. im Internet, von dem du annimmst, dass dieses mit den Mitteln der ebenen Geometrie analysiert und rekonstruiert werden kann.
- (2) Erfasse das geeignete Objekt mittels einer Digitalkamera oder eine geeignete Darstellung des Objekts mittels Scannen bzw. als digitale Kopie und lade die entsprechende Bilddatei in das DGS, mit dem du arbeitest.
- (3) Erforsche und analysiere das Bild des Objekts im DGS durch Nachzeichnen, Ausmessen und Berechnen auf besondere geometrische Figuren und Gesetzmäßigkeiten hin. Finde Begründungen für Gesetzmäßigkeiten.
- (4) Rekonstruiere die erkannte Figur oder Konfiguration mit den Werkzeugen des DGS.
- (5) Überprüfe dein Rekonstruktionsergebnis anhand des Originals im Bild.
- (6) Veröffentliche dein überprüfetes Modell zusammen mit einer Beschreibung und dem Bild des Originals z. B. im Internet oder in einer Wandzeitung.

Anleitungen für das Erstellen eines dynamischen Modells:

- (1) Halte Ausschau nach einer beweglichen Vorrichtung in der dich umgebenden Welt oder in gedruckten Darstellungen bzw. im Internet, von der du annimmst,

dass diese mit den Mitteln der ebenen Geometrie analysiert, rekonstruiert und simuliert werden kann.

- (2) Erfasse die bewegliche Vorrichtung mittels einer Digitalkamera/einem Camcorder oder eine geeignete Darstellung der Vorrichtung mittels Scannen bzw. als digitale Kopie und lade entsprechende Bilddateien/das digitalisierte Video in das DGS, mit dem du arbeitest.
- (3) Erforsche und analysiere das Bild/die Bilder der beweglichen Vorrichtung durch Nachzeichnen und Ausmessen auf besondere geometrische Figuren und Gesetzmäßigkeiten hin. Beobachte die Funktion der beweglichen Vorrichtung oder verschaffe dir Informationen über ihre Funktion. Finde Begründungen für Gesetzmäßigkeiten und Funktionsweise.
- (4) Rekonstruiere mit den Werkzeugen des DGS ein funktionierendes Modell.
- (5) Teste dein Rekonstruktionsergebnis anhand von Simulationen, ob die Funktionalität mit der des Originals genügend übereinstimmt.
- (6) Veröffentliche dein überprüfetes dynamisches Modell zusammen mit einer Beschreibung und dem Bild des Originals z. B. im Internet oder in einer Wandzeitung.

Die in den o. g. Bildungsstandards gegebene Kennzeichnung des mathematischen Modellierens trifft im Wesentlichen auch auf das rekonstruierende Modellieren in DGS zu.

Diese Modellierungen mit DGS unterliegen folgender Einschränkung: Es kommen nur solche Objekte bzw. solche beweglichen Vorrichtungen für eine Modellierung in Frage, die mit den Mitteln der ebenen Elementargeometrie beschrieben werden können und die sich außerdem mit den Mitteln und Methoden von DGS rekonstruieren lassen. (Echtes dreidimensionales Modellieren als Rekonstruieren würde die digitale Erfassung des räumlichen Gegenstandes bzw. der räumlichen Vorrichtung voraussetzen. Einerseits sind entsprechende Digitalisierungstechniken für den Einsatz in der Schulgeometrie noch nicht verfügbar und andererseits existieren noch keine schulgeometrischen 3D-Werkzeuge, die einen Import solcher 3D-Bilder als Modellierungsvorlage gestatten würden.)

Ein weiteres Problem entsteht in der Berücksichtigung der außerhalb der Schulmathematik liegenden Erkenntnisse über den betreffenden Modellierungsgegenstand, deren Außerachtlassen die Gefahr des Dilettierens mit sich bringt.

2 Beispiele für das rekonstruktive Modellieren

Vorbemerkungen: Im Folgenden konkretisieren wir das Erstellen von statischen und von dynamischen Modellen an einigen ausgewählten Beispielen mit unterschiedlichen Anforderungsniveaus. Diese Sammlung soll zu eigenem Tun anregen. Dabei ist eine Beratung der Schüler/-innen durch den kompetenten Lehrer/die

kompetente Lehrerin hinsichtlich der Eignung von zu rekonstruierenden Objekten bzw. beweglichen Vorrichtungen notwendig. So ist z. B. beim zentralprojektiven Fotografieren von Objekten bzw. Vorrichtungen zu beachten, dass die Fotoebene parallel zur Objektebene und die Kamera möglichst mittig zum Objekt positioniert wird.

Bei der Dokumentation der einzelnen Beispiele gehen wir nicht auf die technischen Details der DGS-Nutzung ein. Wir weisen nur auf die Reproduzierbarkeit bzw. Korrigierbarkeit der DGS-Konstruktionen im Wiederholmodus bzw. Undo-Modus hin. Das von uns verwendete DGS, Cabri-Geometrie II Plus, ist hinsichtlich der intuitiven Benutzerführung und der Art und des Umfangs der Optionen für die Zwecke der rekonstruktiven Modellierens geeignet.

Die den Beispielen innewohnenden fächerverbindenden bzw. allgemein bildenden Aspekte können hier, schon aus Platzgründen, nur angedeutet werden; sie könnten aber das betreffende Projekt über den geometrischen Rahmen hinaus erweitern. Lehrplankonformität kann nicht immer erzielt werden. Wir sind aber der Meinung, dass sich bei der Rekonstruktion die geometrischen Beschreibungsmittel an die realen Phänomene anpassen müssen und nicht umgekehrt. Das wirft natürlich das Problem der situativen Verfügbarkeit bzw. Bereitstellung solcher Beschreibungsmittel und der Beschränktheit des betreffenden Computerwerkzeugs auf.

2.1 Statische Modelle

Beispiel 1 (Fahne)

Die Rekonstruktion des Designs von Fahnen/Flaggen soll hier stellvertretend für textile Design-Rekonstruktion (z. B. die von Quilts und Patchwork) stehen. Sie ist ein motivierendes Projektthema für Schüler/-innen der Klassenstufen 7 und 8; andere geeignete Modellierungsthemen sind Firmenlogos, Verkehrsschilder etc.

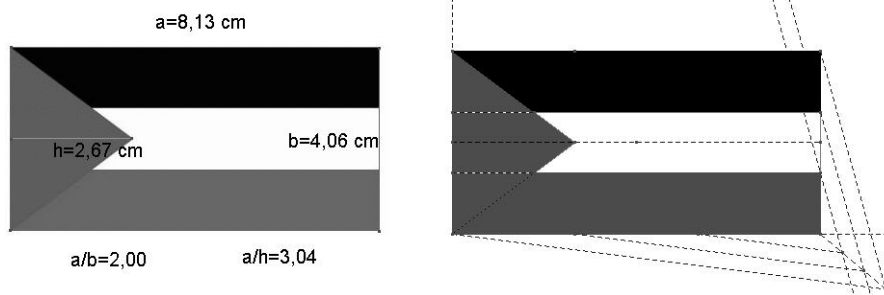


Abbildung 1

Die hier zu rekonstruierende rechteckige Fahne (Abb. 1) hat ein relativ einfaches Design. Länge und Breite verhalten sich wie 2:1; die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ist der dritte Teil der Fahnenlänge; die Fahnenbreite ist durch waagerechte Streifen in drei gleiche Teile zerlegt. Bei der Rekonstruktion werden die entsprechenden Teilpunkte durch Konstruktion gewonnen. Die Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks und der beiden zueinander kongruenten „Rechtwinkeltreapeze“ als einfärbare Objekte ist nicht schwierig. Um eine größenunabhängige Reproduktionsmöglichkeit zu schaffen, kann ein adäquates Konstruktionsmakro definiert werden.

Beispiel 2 (Bildwerk)

Stellvertretend für die geometrisch-strukturelle Kreation von künstlerischen Bildwerken haben wir eine der „Kompositionen mit Rot, Gelb und Blau“ (Abb. 2, Originalgröße: 51cm × 51cm) von Piet Mondrian (1872 – 1944) ausgewählt, die nach geometrischen Proportionen und wahrnehmungsästhetischen Gesetzen konstruiert worden ist. So wird ein Rechteck, dessen Höhe geringfügig kleiner als seine Breite ist, als Quadrat wahrgenommen.

Bei der ökonomischen Rekonstruktion zeichnet man besten zuerst das rote „Fastquadrat“ $ABB'A'$ und das blaue „Fastquadrat“ $BDD'B''$, dann das gelbe halbe Quadrat $GFF'G'$ usw.

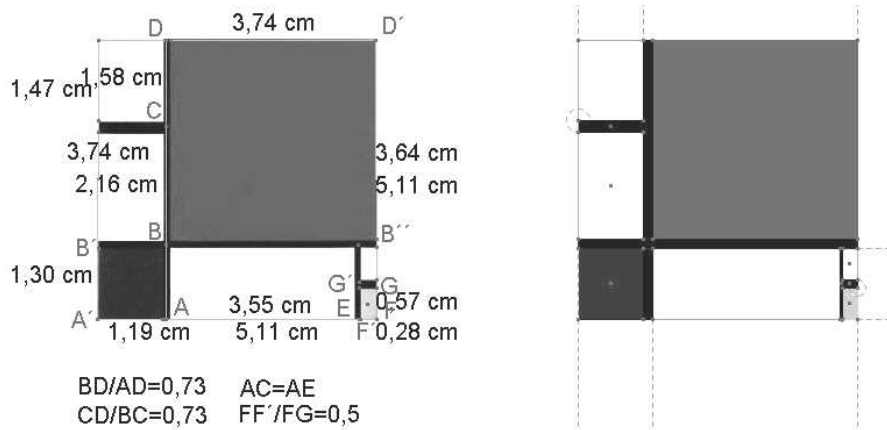


Abbildung 2

Beispiel 3 (Parkett)

Pflasterungen mit Betonsteinen oder Fliesen sind ein lohnender Gegenstand für eine rekonstruktive Modellierung. Sie eröffnet einen realitätsbezogenen Zugang zur Thematik der geometrischen Parkettierung der Ebene.

In unserem Beispiel (Abb. 3) kann dem punktsymmetrischen „Parkettstein“ ein Quadrat umbeschrieben werden. Ausgehend vom rekonstruierten Parkettstein ist das Parkett mittels Parallelverschiebungen, Geradenspiegelungen und 45° -Drehungen rekonstruierbar.

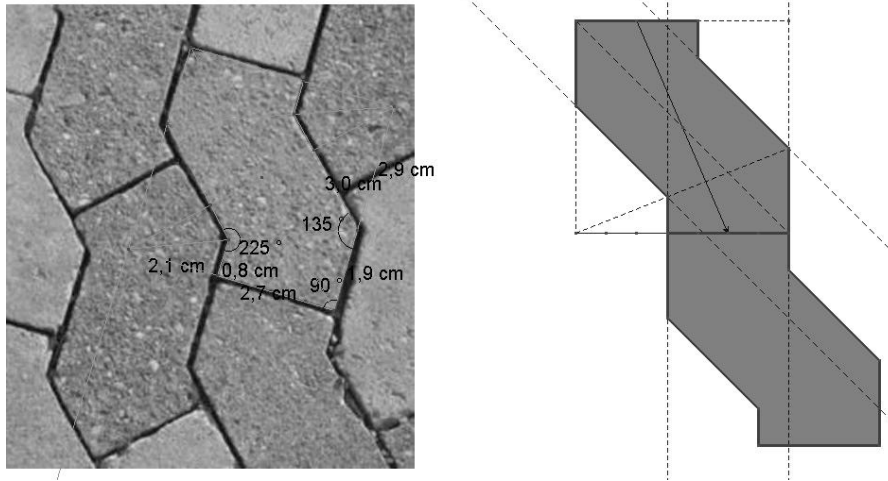


Abbildung 3

Beispiel 4 (Gebäudefassade)

Gebäudefassaden bilden eine Fundgrube für Rekonstruktionen. Es ist interessant, herauszufinden, welche Proportionen der Architekt verwendet hat.

In unserem Beispiel (Abb. 4), einer neoklassizistischen Fassade (Kirche, Birkenfeld bei Pforzheim), hat der Baumeister klassische Proportionen verwendet: Das Rechteck ABCD ist ein sogenanntes Sixton, dessen Diagonalen zwei gleichseitige Dreiecke (BCM, ADM) bilden. Der Fries besteht aus zwei halben Hemidiagonalen, das sind Rechtecke, deren Seiten im Verhältnis 2:3 stehen. Beide Formen gehören zu den als ästhetisch ausgezeichneten Rechteckformen (u. a. Wersin 1956). Die zeitaufwändige Rekonstruktion der Fassade ist hier nicht zu Ende geführt, da es uns vor allem auf das Entdecken der Fassadenproportionen ankommt.

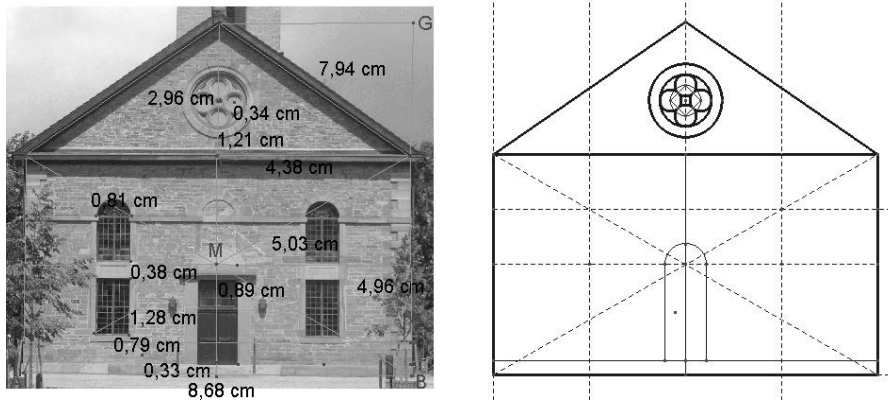


Abbildung 4

Beispiel 5 (Fenster)

Auch die Rekonstruktion von Fenstern bzw. Türen kann eine herausfordernde Modellierungsaufgabe sein. In unserem Beispiel eines neugotischen Fensters (Abb. 5, ev. Stadtkirche, Weingarten/Württ.) findet man heraus, dass sich der Radius der kleinen Spitzbögen zum Radius des die Rosette umfassenden Kreises wie 3:1 verhält; das ist auch das Verhältnis dieses Kreisradius zum Radius des kleinen konzentrisch liegenden Rosettenkreises.

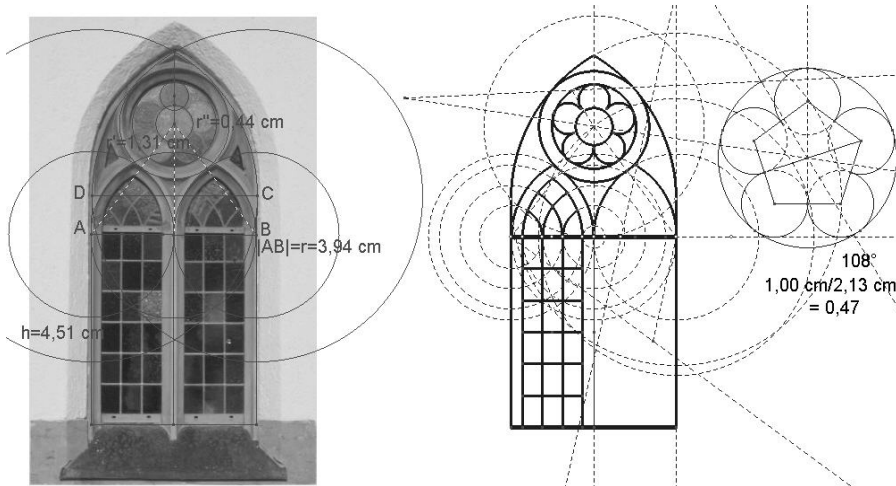


Abbildung 5

Will man nun den großen, den oberen Teil des Fensters umfassenden Spitzbogen konstruieren, so muss man zuerst folgende Konstruktionsaufgabe lösen: Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt und dem Radius eines zweiten Kreises mit einer Geraden als geometrischem Ort seines Mittelpunkts. Konstruiere diesen so, dass sich die beiden Kreise berühren. – Für die Konstruktion des Rosettenfensters verwenden wir eine zentrische Streckung. Die Rekonstruktion solcher Fenster eignet sich für ein Projekt im 9. Schuljahr.

Beispiel 6 (Bierdeckel)

Bisher haben wir für die Rekonstruktion statischer Modelle nur polygonale Formen und Kreisformen verwendet. Jetzt setzen wir weitere Formen, wie algebraische und transzendente Kurven, ein. Damit vergrößert sich das Problem der verfügbaren mathematischen Lernvoraussetzungen für das Modellieren in der Sekundarstufe I. Beim dynamischen Adaptieren des geometrischen Beschreibungsobjekts an das Bild des realen Objekts kommt der direkten Manipulation und dem Zugmodus eine noch größere Rolle zu als bisher; außerdem unterstützt das Plotten von Kurven, z. B. in Polarkoordinatendarstellung, die Modellierung.

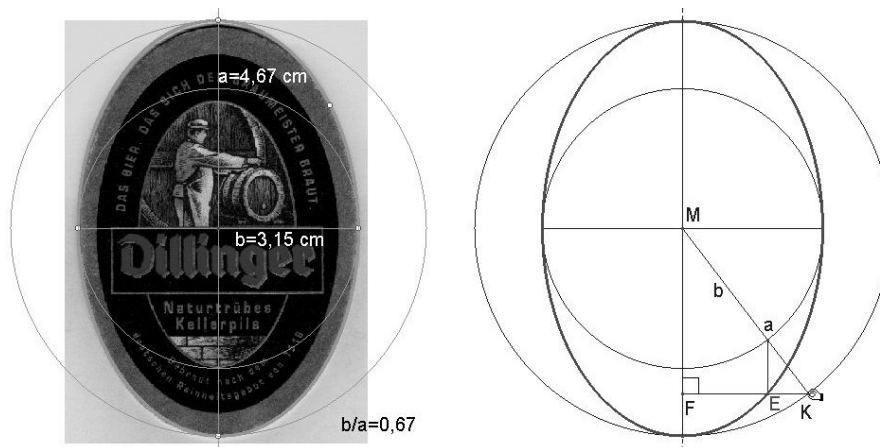


Abbildung 6

Elliptische Formen finden sich an vielen Objekten unserer Umwelt, so z. B. als flächenhaftes Stilmittel des Barock. Wir haben hier ein banales Alltagsobjekt ausgewählt (Abb. 6). Um die Bierdeckelform zu modellieren, zeichnet man mit den auf dem Deckel gegebenen Informationen die beiden Hauptachsen ein. Das Verhältnis der Hauptachsen weicht nur wenig vom Verhältnis des Goldenen Schnitts ab. Mit einem fünften Punkt, der auf dem Deckelrand justiert wird, konstruieren wir die

durch die fünf Punkte gehende Ellipse, die sich gut der Form des Deckels anpasst. Zur zeichnerischen Rekonstruktion der Ellipse als Bild eines Kreises bei orthogonaler Achsenaffinität verwenden wir den Groß- und Kleinkreis und den 1. Strahlensatz von K aus. Um das Konstruktionsergebnis zu kontrollieren, ziehen wir es als Overlay über das Bierdeckelbild (ohne Abbildung). – Die analytisch-geometrische Beschreibung der Ellipse kann sich anschließen.

Beispiel 7 (Brückenbogen)

Aus statischen Gründen haben Brückenbögen Parabelform, die z. B. durch eine Gleichung der Gestalt

$$y = ax^2$$

algebraisch beschrieben werden kann. Um diese Gleichung für die Millenium Bridge in Newcastle (Abb. 7) zu erhalten, verschieben wir den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems zusammen mit einer Parabel der genannten Gleichung, deren Parameterwert per Schieber variierbar ist, in den Scheitel des Brückenbogens. Dann variieren wir den Wert von a solange, bis die Parabel mit dem Brückenbogen zur Deckung kommt, und erhalten als „Brückengleichung“

$$y = -0,17x^2$$

sowie für die flache Fußgängerbrücke

$$y = -0,02x^2$$

(Schumann 2001). – Jetzt könnte man diese Bögen als Schaubilder in einem Koordinatensystem rekonstruieren.

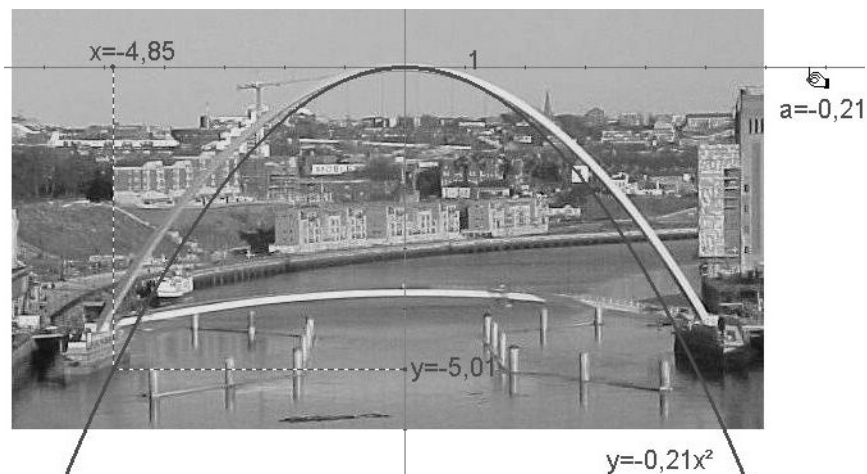


Abbildung 7

Eine andere Modellierungsmöglichkeit besteht in der Leitgeradenkonstruktion einer Parabel. Dann muss man durch Lageänderung des Brennpunkts die konstruierte Parabel an den Brückenbogen dynamisch adaptieren.

Beispiel 8 (Rosette)

Bei der Gestaltung des Dekors einer Badezimmerkachel (Abb. 8) wurde eine symmetrische zwölfblättrige Rosette verwendet, die einem handwerklichen Entwurf entstammt. Diese Form rekonstruieren wir mittels der Polarkoordinatendarstellung der Rosettenkurve:

$$r = a \cos(b\alpha),$$

a steht für die Rosettengröße, b (hier geradzahlig) für die halbe Anzahl der Blätter. Der Übersicht wegen wird nicht auf der Vorlage modelliert. Mit Schiebern variieren wir die Werte für a und b , bis die Kurve die passende Form hat. Das wird überprüft, indem wir den Ursprung des Koordinatensystems, in den Mittelpunkt der Rosette verschieben. (Wir mogeln hier ein wenig, um eine dicklinige Rosette zu erhalten, indem wir den Wert für b geringfügig vergrößern; so erhalten wir sich dicht überlagernde Blätter.)

Auf gleiche Weise wäre auch die Modellierung von Blüten mit radialsymmetrisch angeordneten Blättern möglich.

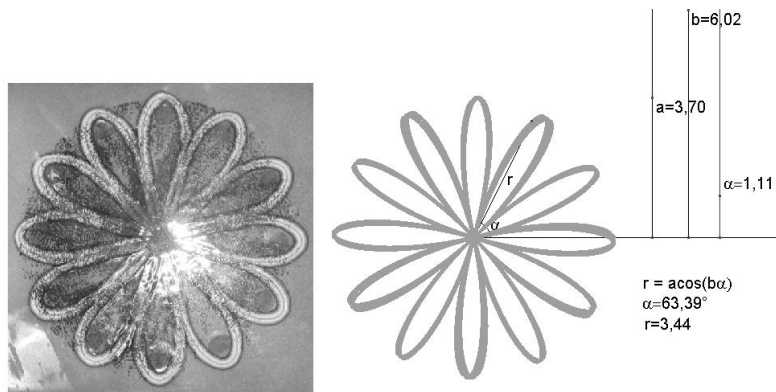


Abbildung 8

Beispiel 9 (Schnecke)

Die Kontur des Querschnitts einer Nautiluschnecke (Abb. 9) ist spirilig. Experimentell kann man auf der Bildvorlage feststellen, dass die Strahlen die vom Zentrum des Querschnitts ausgehen, die Randkurve jeweils im gleichen Winkel (hier

etwa 79°) schneiden. Spiralen mit dieser Eigenschaft sind so genannte Logarithmische Spiralen, die folgende Polarkoordinatendarstellung besitzen:

$$\rho = a \cdot e^{\frac{\psi}{\tan \alpha}}$$

Der Parameter a steht für die Größe der Spirale, α für den genannten Schnittwinkel. Mittels der Schieber für die Variation der Werte von a und α passen wir die logarithmische Spirale an die Querschnittslinie an.

Die Form des Bogens einer logarithmischen Spirale haben auch die Messer an Vorrichtungen für das Schneiden von Papier bzw. Pappe; der konstante Winkel zwischen Messer und zu schneidendem Material sichert gleichen Andruck und so guten Schnitt.

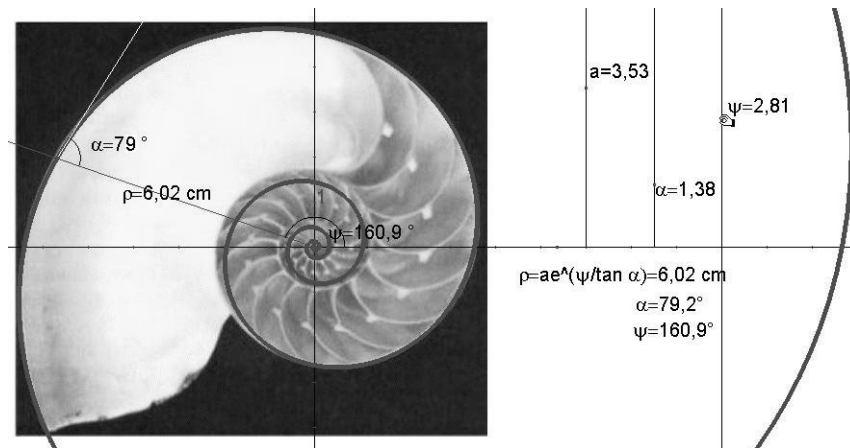


Abbildung 9

Beispiel 10 (Schmetterling)

Um die achsensymmetrische Umrissform eines Schmetterlings (Abb. 10, Kaiser-mantel) geometrisch zu modellieren, bedürfte es einer Option, die zu gewählten Stützstellen eine „gut“ interpolierende Kurve zeichnet. Da eine solche Option in dem hier gewählten DGS nicht verfügbar ist, behelfen wir uns mit einem Polygon, mit dem wir eine Schmetterlingshälfte durch Setzen vieler passender Eckpunkte beschreiben. Anschließend spiegeln wir dieses Polygon. Durch Ausblenden der Bildvorlage erhalten wir das achsensymmetrische Modell für sich.

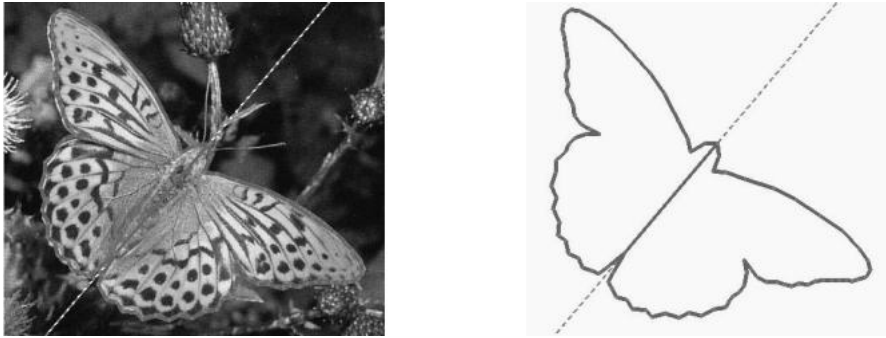


Abbildung 10

2.2 Dynamische Modelle

Bei den mit DGS zu konstruierenden Modellen handelt es sich um simplifizierte Modelle, mit denen man die wesentliche Funktion der beweglichen Vorrichtung simulieren kann. Die Funktionsprüfung bzw. Simulation eines dynamischen Modells erfolgt per Hand im Zugmodus oder per automatischer Animation (mit dem Vorteil der ungeteilten Aufmerksamkeit beim Beobachten). Der Spurmodus dient der (statischen) Dokumentation des Bewegungsablaufs im Phasenbild.

Erste dynamische DGS-Modelle, allerdings ohne authentische Vorlage, werden in „Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer“ (Schumann 1991) behandelt. Eine Fundgrube für die Rekonstruktion weiterer beweglicher Vorrichtungen bzw. Maschinen zu einfachen dynamischen Modellen ist das Buch von Brian Bolt (1995) „Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun?“. Die Verbindung der Geometrie zum Fach Technik und auch zum Fach Physik (u. a. Romanovskis; Schumann 2002) wird offensichtlich!

Beispiel 11 (Windkraftanlage)

Ein sehr einfaches dynamisches Modell kann man für eine Windkraftanlage (Abb. 11) konstruieren. Die Spur eines Propellerflügels erzeugt bei Animation der Rotation ein dynamisch wirkendes Phasenbild.

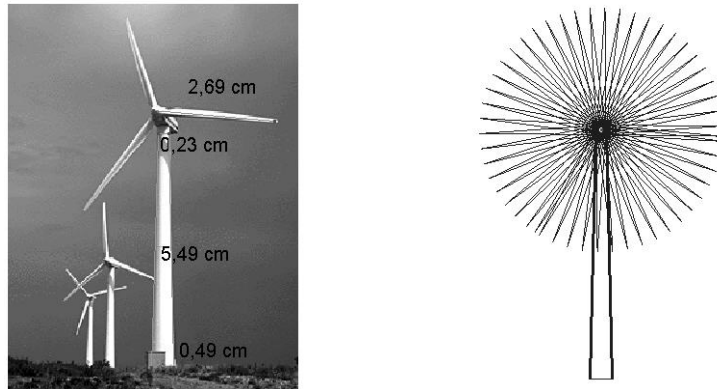


Abbildung 11

Beispiel 12 (Garagentor)

Kipptore als Garagentore eignen sich für die Rekonstruktion zu dynamischen Modellen. (Garagentore sind so konstruiert, dass sie beim Öffnen und Schließen möglichst wenig Raum beanspruchen.) Die vereinfachende Rekonstruktion im Schnitt ist nicht schwierig. In der Abbildung 12 ist ein Phasenbild der Kipptor-Bewegung zu sehen. Welche Hüllkurve erzeugt das Tor in Seitenansicht?

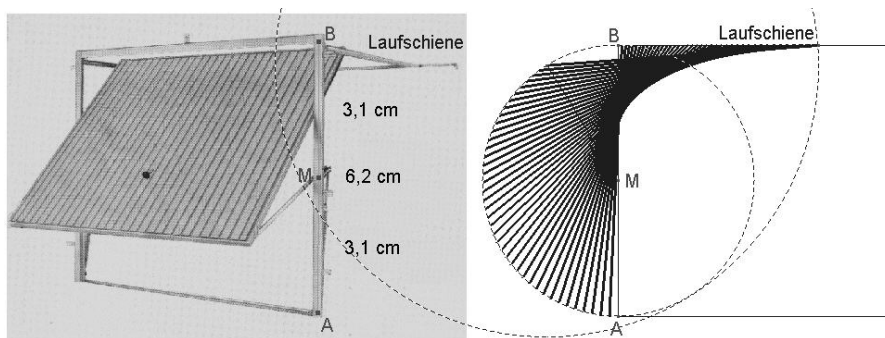


Abbildung 12

Beispiel 13 (Hebebühne)

Die Raute als Gelenkviereck ist Baustein vieler kinematischer Anwendungen: platzsparender portabler Scherenzaun, Topfuntersetzer, Lampe mit Ausziehvorrichtung, Narrenscherer, ... Als Modellierungsbeispiel haben wir hier eine Scheren-

arbeitsbühne (Abb. 13) gewählt, die mit Punkt- und Geradenspiegelungen schnell rekonstruiert werden kann. – Auf welchen Ortslinien bewegen sich die äußeren Gelenke der Hebevorrichtung?

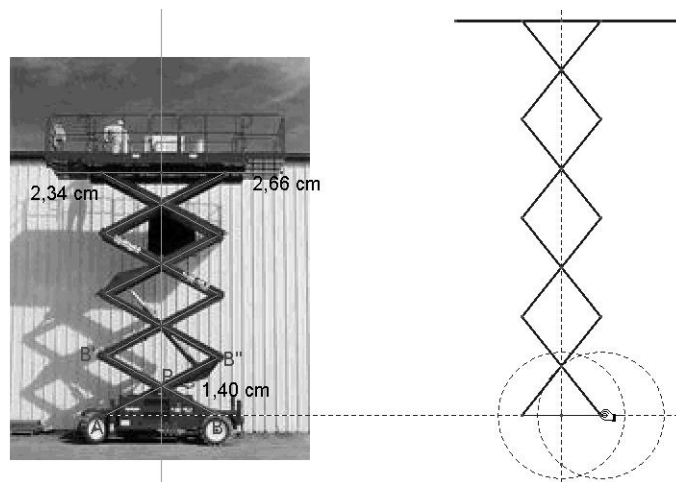


Abbildung 13

Beispiel 14 (Graviermaschine)

Die mechanischen Graviermaschinen (Beispiel in Abb. 14) gehören zur Klasse der Pantographen (Storchschnabel); das sind Vorrichtungen zum verkleinernden bzw. vergrößernden Kopieren von Vorlagen.

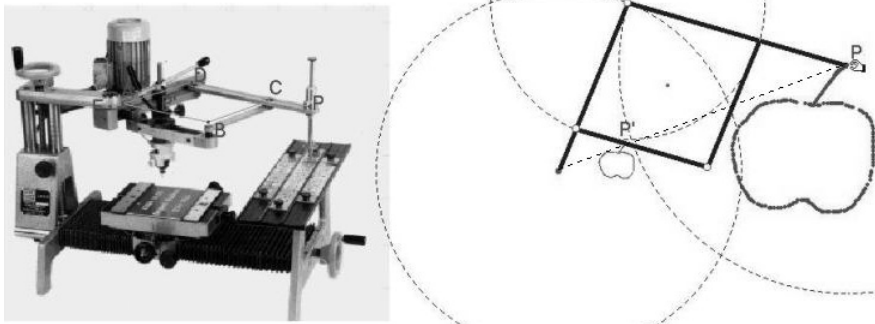


Abbildung 14

Mit P wird die Vorlage (z. B. eine Schablone) abgefahren; dabei fertigt P' eine formtreue Verkleinerung in Gestalt einer Gravur an. Es liegt eine zentrische Streckung mit dem Zentrum E vor. Der Maßstab für die Verkleinerung wird durch die Lage von P' auf AB festgelegt. Das Gelenkviereck ABCD ist eine Raute, für deren Seitenlängen wir 3 Einheiten gewählt haben; für die Strecke CP bzw. AE werden 2 Einheiten bzw. eine Einheit angenommen.

Beispiel 15 (Drehkran)

Das Ausmessen des Krans auf dem Bild (Abb. 15), der im Wesentlichen aus dem Gelenkviereck ABCD mit der festen Seite AB (Gestell) und dem Spitzenausleger DE besteht, führt zu seiner simplifizierten Rekonstruktion mit C als den Ausleger bewegendem Punkt. – Da die vom Kran zu transportierende Last nach ihrem Anheben auf gleicher Höhe bleiben muss, um nicht beim anschließendem Transport gefährliche Schwingungen hervorzurufen, darf sich der Auslegerkopf E im Arbeitsbereich des Krans nur horizontal bewegen. Dazu ist das Gelenkviereck und der Ausleger so dimensioniert worden, dass die Gerade durch E und dem Schnittpunkt F der verlängerten Grundausleger AD und BC im Arbeitsbereich vertikal verläuft (Stührmann; Wessels 1981). Dass E sich dann annähernd waagrecht bewegt, erkennen wir an dem betreffenden Stück der Ortskurve, einer algebraischen Kurve dritten Grades, die E erzeugt, wenn der Ausleger bewegt wird.

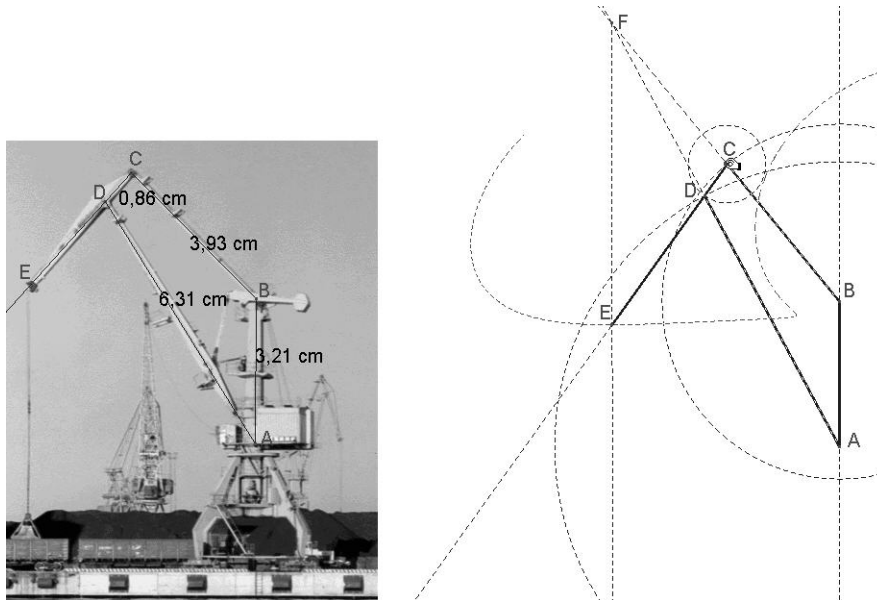


Abbildung 15

3 Abschließende Bemerkung

Zu den traditionellen Medien für das Herstellen geometrischer Modelle treten heute computergrafische Werkzeuge (Diagramm 4) hinzu, deren Anwendung wir am Beispiel eines DGS im 2. Abschnitt dieser Arbeit demonstriert haben. Für eine Nutzung solcher Werkzeuge zur Modellierung durch Schüler/-innen der Sekundarstufe I sehen wir generell nur direkt manipulative computergrafische Werkzeuge, wie z. B. DGS, als geeignet an. Auf die Schnittstellenprobleme (im Diagramm jeweils durch Pfeile symbolisiert) zwischen den medienspezifischen Modellierungsmöglichkeiten, insbesondere zwischen den computerunterstützten und den traditionellen Modellierungen im Kontext des Geometrieunterrichts gehen wir hier nicht ein.

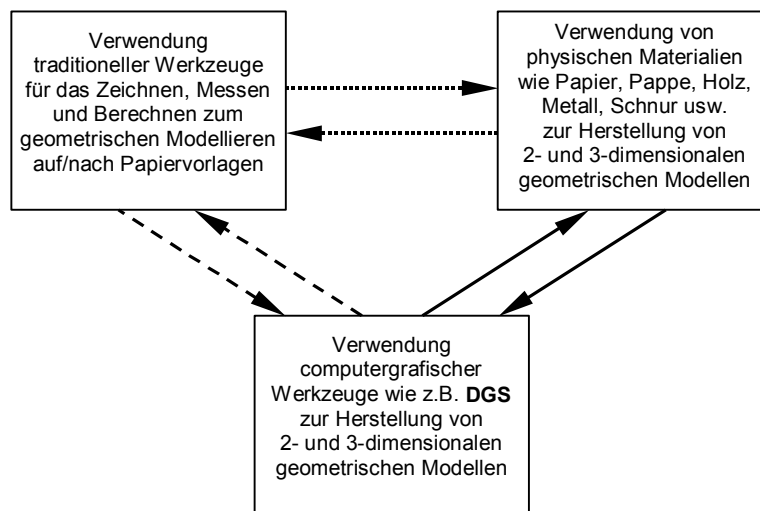


Diagramm 4 (Medienspezifische Modellierung)

Die Verwendung traditioneller Medien hat den Vorteil des ganzheitlichen Wahrnehmungs- und des Koordinationstrainings für Sehen und taktiles Handeln, was bei häufigem Fernsehkonsum und häufiger Maus- und Tastaturverwendung zunehmend an Bedeutung gewinnt. Außerdem können echt dreidimensional haptisch erfahrbare geometrische Modelle gebaut werden. Das Modellieren bleibt aber beschränkt hinsichtlich der Komplexität, Authentizität, Aktualität, Vielfalt, Portabilität, Reproduktion, Distribution, Kommunizierbarkeit und Administration der zu erstellenden bzw. der erstellten Modelle und der Selbstkorrekturmöglichkeiten und der Werkzeugpotenz im Modellierungsprozess. Diese Vorteile der Computernut-

zung bei der Erarbeitung und Behandlung virtueller geometrischer Modelle kommen nur zum Tragen, wenn die Verfügbarkeit und angemessene Beherrschung der entsprechenden Software vorausgesetzt werden kann.

Als einen Beitrag zur Medienerziehung im Geometrieunterricht könnte an dafür geeigneten Beispielen Vor- und Nachteile der verschiedenen Modellierungsmedien erfahrbar gemacht und bewertet werden. In diesem Zusammenhang wäre beispielsweise die Erforschung der kognitiven Effizienz bei der Nutzung verschiedener geometrischer Modellierungsmedien im Vergleich eine Aufgabe der Geometriedidaktik.

Literatur

- Bolt, B. (1995): Was hat der Bagger mit Mathematik zu tun? Stuttgart: Klett
- Deutsches PISA-Konsortium, Hrsg. (2001): PISA 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich
- Graumann, G. (1988): Geometrie im Alltag. In: *mathematik lehren*, Heft 29, S. 8–14
- Hentig, H. v. (1996): Bildung. München: Hanser
- Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz
- Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe – didaktische und methodische Fragen. – 2. Aufl., Heidelberg: Spektrum
- KMK (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss, unter www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm
- Kratz, J. (1993): Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag
- Laborde, J. M.; Bellemain, F. (2001–2003): Cabri géomètre II Plus. Grenoble: Cabrilog (Deutsche Anpassung als Cabri-Geometrie II Plus von H. Schumann. Bezug bei www.cotec.de oder www.cabri.com)
- Ludwig, M. (1997): Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Hildesheim: Franzbecker
- Mondrian, P. (1995): Komposition mit Rot, Gelb und Blau. Frankfurt am Main: Suhrkamp
- Romanovskis, T.; Schumann, H. (2002): Cabri-Modellierungen für den Physikunterricht. In: Peschek, W. (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25.02. bis 01.03.2002 in Klagenfurt. Hildesheim: Franzbecker
- Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler und Teubner (verfügbar im Archiv von www.mathe-schumann.de)
- Schumann, H. (2001): Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie. In: Elschenbroich, H.-J. et al.: *Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker, S. 173–182
- Schumann, H. (2001): Methoden der dynamischen Geometrie – eine Zusammenfassung. In: *BUS, Zeitschrift für Computernutzung an Schulen*, Nr. 43, Heft 1, S. 54–59
- Schumann, H. (2003): Modelling with Dynamic Geometry Systems – suggestions for projects in applied geometry. Powerpoint presentation, Dag- og Aftenseminarium Aarhus, 18.09.2003 (verfügbar unter www.mathe-schumann.de)

- Schupp, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: Der Mathematikunterricht 34, Heft 6, S. 5–16
- Stührmann, H.-J.; Wessels, B. (1981): Lehrerhandbuch für den technischen Werkunterricht, Bd. 1. – 5. Aufl., Weinheim: Beltz
- Wersin, W. v. (1956): Das Buch vom Rechteck. Ravensburg: Otto Maier
- Winter, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jg. 8, Heft 1, S. 106–116
- Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig: Vieweg

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. habil. Heinz Schumann
PH Weingarten, Fakultät III, Mathematik/Informatik
Institut für Mediendidaktik und Bildungsinformatik
Kirchplatz 2, D-88250 Weingarten
Email: schumann@ph-weingarten.de
Homepage: <http://www.mathe-schumann.de>