Mentale Modelle zum Vektorraumbegriff

Erste Ergebnisse einer empirische Untersuchung unter Studierenden

von

Astrid Fischer, Dortmund

Zusammenfassung: In diesem Aufsatz werden unterschiedliche Zugänge und Vorstellungen über Vektorräume diskutiert, die drei Studierende in Einzelgesprächen im Rahmen einer qualitativen empirischen Untersuchung zeigten. Drei Kategorien von Vorstellungen werden im Hinblick auf ihre Tragfähigkeit, Grenzen und Ausbaufähigkeit erörtert.

Summary: This paper discusses different mental models of the concept of vector space that were revealed by three students in a qualitative empirical study. Three categories of conceptions are presented with respect to their adequacy, their limitations, and the chances of further development and amelioration.

1 Das Untersuchungskonzept

Als zentrale Einführungsvorlesung stellt die „Lineare Algebra" die Studierenden vor die Herausforderung, sich die Denk- und Kommunikationsformen der Hochschulmathematik anzueignen.

Ziel der Studie, die Grundlage für diesen Aufsatz ist, war es herauszufinden, welche Vorstellungen einzelne Studierende sich zu dem Begriff „Vektorraum" bildeten, mit welchen Schwierigkeiten sie sich konfrontiert sahen, und welche individuellen Strategien zu deren Bewältigung sie einsetzten.

1.1 Untersuchungsmethode

Bislang sind wenige Untersuchungen über Vorstellungen vom Vektorraumbegriff bekannt. Zu individuellen Konzepten vom Begriff des „Vektors" hat (Wittmann 2003) qualitative empirische Untersuchungen mit Schülern durchgeführt. Die Schülervorstellungen bestanden vorwiegend aus geometrischen Anschauungen von Pfeilen und Punkten im $\mathbb{R}^3$, selbst dann, wenn Vektoren im Unterricht zunächst als *n*-Tupel eingeführt waren. Eine Fallstudie von (Wittmann 2000) zeigt Hindernisse beim Erlernen des Vektorraumbegriffs auf: Die Schüler müssen zunächst ihnen bekannte Begriffe wie Abbildungen oder Funktionen als Objekte verstehen und anschließend eine Menge dieser Objekte als ein neues Objekt auffassen. Hinzu kommen Schwierigkeiten bei der exakten Formulierung der Axiome sowie mit ihrer Bedeutung.

Die Arbeitsgruppe um (Dorier 2000b) hat quantitative empirische Untersuchungen über das Lernen von Studierenden in Anfängervorlesungen zur linearen Algebra an französischen Universitäten erhoben und festgestellt, dass das größte Lernhindernis die Formalisierung ist, die die lineare Algebra zu einer Theorie macht, welche Phänomene unterschiedlicher Inhaltsbereiche übertragbar macht. Diese Untersuchungen betrachteten keine individuellen Vorstellungen von Studierenden.

Die Studie, die hier beschrieben werden soll, wurde als qualitative empirische Untersuchung angelegt, die die beobachtbaren Vorstellungen der Studierenden nicht auf die Möglichkeiten, welche eine im voraus bestehende Theorie antizipiert, einschränkt.[1]

In den Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I" wurden die Studierenden gefragt, wer bereit ist, an einer Untersuchung über das eigene Verständnis der Vorlesung teilzunehmen, in der die Übungsleiterin Einzelgespräche mit den Probanden führt und mit einer Videokamera aufnimmt. Hierzu meldeten sich ein Student und zwei Studentinnen freiwillig. Die Drei waren im ersten Studiensemester für Lehramt der Sekundarstufe II, und sie hatten in der Schule Erfahrungen in der Vektorrechnung gesammelt. Zum Thema „Vektorräume" wurde mit jedem der Drei ein ca. einstündiges Interviewgespräch geführt.

Die Videoaufnahmen wurden später transkribiert. Dabei wurden schriftliche Darstellungen, die an der Tafel vorgenommen wurden, das Zeigen auf Teile des Tafelanschriebs, und die Wortbeiträge der beiden Gesprächspartner wiedergegeben. Gestik anderer Art und Mimik ist auf den Videoaufnahmen meist nicht zu erkennen. Die Auswertung der Transkripte wurde durch eine Analyse einzelner Sequenzen in chronologischer Reihenfolge vorgenommen, wobei die Breite der Interpretationsmöglichkeiten einzelner Äußerungen mit der fortschreitenden Analyse eingeschränkt wird. Es folgte eine Hypothesenbildung über die Ideen des betreffenden Studierenden, die die Deutungsmöglichkeiten der einzelnen Episoden abglich und zu einem Gesamtbild zusammenfasste.

Die Interviewgespräche waren Unterhaltungen über ein Thema, in deren Verlauf die Studierenden inhaltlich dazu lernten: Sie bekamen Aufgaben gestellt, die so konzipiert waren, dass sie nicht mit Lösungsverfahren oder Zitaten aus der Vorlesung beantwortet werden konnten. Stattdessen erforderten die Aufgaben das kreative Einsetzen, Umorganisieren und Weiterführen der aus der Vorlesung gewonnenen Erkenntnisse. Dabei bekamen die Studierenden Gelegenheit, Ideen nicht nur zu äußern, sondern auch weiter zu entwickeln. Um sicher zu stellen, dass das Anspruchsniveau des Gesprächs die Studierenden herausforderte ohne sie zu überfordern, nahm der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erst im Laufe des Gesprächs zu.

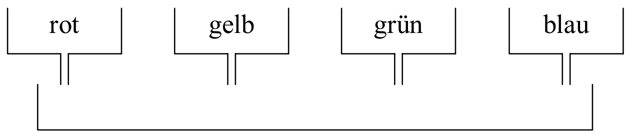
---

1 Vgl. (Beck/Maier 1993) zu qualitativen und quantitativen empirischen Untersuchungen.

Außerdem war wichtig, dass die Gesprächspartner sich in ihren Antworten nicht allein an formal korrekte Aussagen hielten, deren Bedeutung sie womöglich gar nicht erfassten. Darum wurden die Aufgaben so konstruiert, dass sie das Untersuchungsthema indirekt aus einem Kontext ansprachen, der für die Studierenden ungewohnt war. Dieser Zugang erforderte in einer Aufgabe einen Transfer, in einer anderen lenkte er ihren Aufmerksamkeitsschwerpunkt auf andere Begriffe.

1.2 Aufgaben

Die Interviewgespräche bestanden aus zwei Aufgabenbereichen. Im ersten Teil wurde die Skizze



einer Maschine vorgestellt, welche neue Farben produziert, indem sie Farben (rot, gelb, grün, blau) aus vier kleinen Behältern in einen großen Behälter laufen lässt und dort mischt. Die Zuläufe aus den kleinen Behältern werden durch einen Computer gesteuert. Der erste Auftrag an die Studenten lautete, diese Situation durch einen Vektorraum zu modellieren. Später wurden sie insbesondere noch aufgefordert, die Begriffe „linear abhängig“ und „linear unabhängig“ für die Farbmaschine zu deuten. Außerdem erhielten sie die zusätzliche Information, dass die grüne Farbe aus dem dritten kleinen Behälter aus zwei der anderen, nämlich blau und gelb, gemischt werden kann. An diese neue Bedingung sollten sie dann ihr mathematisches Modell anpassen.

Diese Aufgabe war vordergründig eine Modellbildungsaufgabe. Zweck dieser Aufgabenstellung war es, die Studierenden zu veranlassen, über ihre Vorstellungen von Vektorräumen und deren Struktur in einem Sinnzusammenhang zu sprechen, in dem es mehr um die Ideen der Begriffe als um formal korrekte Definitionen ging. Wenn sie formale Darstellungen für ihre Antworten verwenden wollten, so mussten sie diese selbst einführen und ihnen Bedeutung im Kontext der Farbmaschine zuweisen.

Zudem hatten zwei Probleme das Potential, im Laufe des Gesprächs kognitive Konflikte zu wecken. Die Auseinandersetzung mit diesen Konflikten konnte Einblick in die Vorstellungen der Studierenden von Vektorraumstrukturen geben.

- Das eine Problem ist, dass der Produktionsprozess nicht umkehrbar ist, und daher ein Eins-zu-Eins-Transfer zwischen Merkmalen der Farbmaschine und Merkmalen eines Vektorraums nicht möglich ist.

- Problematisch ist zum anderen der Ansatz, die „natürlichen" Erzeugenden in der Farbmaschine abhängig zu wählen, da er nicht kompatibel ist mit der Zuordnung, die diese erzeugenden Farben mit den Elementen einer Basis des gewählten Vektorraums identifiziert.

Die Studierenden waren in der Vorlesung keiner Aufgabe mit ähnlichen Anforderungen begegnet.

Im zweiten Teil der Gespräche bekamen die Studierenden folgende Angabe:

$$f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2$$

sei eine lineare Abbildung vom Raum der Polynome mit Grad kleiner oder gleich 1 in $\mathbb{R}^2$, die die Bedingungen erfüllt:

$$f(x+1) = (1, 0)$$
$$f(2x) = (0, 4)$$

Die Frage war, ob eine solche Abbildung überhaupt existiert, und falls ja, ob sie durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist. Später schloss sich die Frage an, wie man diese Abbildung mit Hilfe einer Matrix darstellen kann.

- Diese Aufgabe sollte auf indirektem Weg Einblick in die mentalen Modelle geben, welche die Studierenden sich über Vektorraumstrukturen gebildet hatten. So wurde nicht die Frage gestellt, ob $x+1$, $2x$ eine Basis des Polynomraums bildet, aber in der Auseinandersetzung mit der gegebenen Abbildung mussten die Eigenschaften einer Basis eine entscheidende Rolle spielen.
- Darüber hinaus zeigt der Umgang mit dem Polynomraum Vorstellungen über das Wesen von Vektorräumen, denn er gehört nicht zu den Vektorräumen, die den drei Studenten von der Schule her vertraut waren.

Die Studierenden hatten sich in den Übungen mit zwei Aufgaben über Polynomräume beschäftigt, und sie hatten Eigenschaften linearer Abbildungen kennen gelernt, aber weder in den Übungen noch in der Vorlesung war eine Fragestellung angesprochen worden, die der hier genannten ähnlich war.

Die Aufgabe setzte im Unterschied zum ersten Teil des Gesprächs ein gutes Verständnis von formalen Darstellungen voraus. Ihr Aussagewert ist daher sehr begrenzt, wenn dieses Verständnis fehlt.

2 Vektorraumvorstellungen von R, S und B

2.1 Die Studentin R

Die Studentin R beginnt ihre Modellierung der Farbmaschine im ersten Gesprächsteil mit folgenden Worten:

> „Also theoretisch also ich nehm z.B. Vektor x, dann würde ich z.B. r mal den Inhalt von r nehmen, also von rot, plus s mal gelb plus t mal grün plus y mal blau“

und notiert dazu:

$$\vec{x} = r\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Die Buchstaben *r*, *s*, *t* und *y* tragen in dieser Darstellung zwei verschiedene Bedeutungen:

- Einerseits bezeichnen sie jeweils einen der vier kleinen Behälter bzw. die darin enthaltene Farbe.
- Andererseits sind sie Variablen, die für Mengenangaben stehen, nämlich für die Menge an Farbe, die aus dem jeweiligen Behälter fließen soll.[2]

Dagegen tragen die leeren Spaltenvektoren keine Bedeutung. Sie stehen zwar möglicherweise stellvertretend für die vier kleinen Behälter, aber da sie leer sind, sind sie nicht voneinander zu unterscheiden. Die Information, welchen Behälter ein Spaltenvektor repräsentiert, kann nur am Koeffizienten abgelesen werden, allerdings auch nur solange, wie dieser Koeffizient mit seinem Variablennamen und nicht als konkrete Mengenangabe auftritt.

Die Nachfrage, was in der Farbmaschine den Vektoren im Vektorraum entsprechen soll, beantwortet R mit:

> „x ist das Komplette, was ich da raus haben möchte, (sie zeigt bei diesen Worten auf die gezeichnete Maschine) und r oder s oder y sind immer die Regulatoren, wie lange man was öffnet, damit z.B. rot oder gelb oder grün oder blau reinkommt.“

R deutet hier den Ergebnisvektor $\vec{x}$ als die zu produzierende Farbe. Sie sagt nicht, wofür die Spaltenvektoren ihrer Gleichung stehen. Stattdessen erklärt sie die Bedeutung der Koeffizienten. Offenbar haben diese Spaltenvektoren in ihrer Vorstellung keine echte Bedeutung.

Diese Episode verdeutlicht, dass R in ihrer Modellierung der Farbmaschine ausschließlich die Regulierung des Produktionsprozesses übersetzt: So wie die vier Öffnungszeiten den Produktionsprozess steuern und damit für die Erzeugung einer bestimmten neuen Farbe verantwortlich sind, sind die Koeffizienten in der Linearkombination von gegebenen Vektoren für die Erzeugung eines bestimmten Vektors

---

[2] Gemäß den Kategorien von (Malle 1993, S. 46) haben die Variablen in dieser zweiten Bedeutung einen Einsetzungsaspekt, während sie in der ersten Bedeutung als Namen für wohlbestimmte Gegenstände auftreten. Diese Rolle ist nicht mit dem Einsetzungsaspekt kompatibel.

verantwortlich. Die Bedeutung der Vektoren, aus denen der neue Vektor erzeugt wird, ist aus R's Sicht unwesentlich. Als sie darauf hingewiesen wird, dass ein Computer Anweisungen in Form von Tupeln geben kann, ersetzt R den Vektor $\vec{x}$ durch einen Spaltenvektor mit vier beliebig gewählten Zahlen als Einträgen und beginnt, auch die anderen Spaltenvektoren mit irgendwelchen ganzen Zahlen zu füllen: Auch hier wird nochmals deutlich, dass sie den erzeugenden Spaltenvektoren keine Bedeutung beimisst. Sie unterbricht sich mit der Feststellung, dass die vier Vektoren der Standardbasis einfacher wären, und ändert ihre Einträge nochmals. Sie kann dann auch die Koeffizienten ermitteln, die zum Erzeugen ihres gewählten Vektors $\vec{x}$ führen, und notiert abschließend:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{x}=\overset{3}{r}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\overset{0}{s}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\overset{1}{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\overset{0}{y}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Hierbei zeigt sie deutlich, dass sie nicht die Bedeutung des Ergebnisvektors $\vec{x}$ als wesentlich ansieht, sondern dass die entscheidenden Informationen in den Koeffizienten der Linearkombination liegen. Sie stimmen nur „zufällig" miteinander überein. Mit anderen Worten liegt die Bedeutung des Zeichens

$$\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

nicht darin, dass es eine Gesamtanweisung darstellt, sondern nur darin, dass aus ihm die Einzelanweisungen ermittelt oder in diesem Spezialfall abgelesen werden können. R behandelt hier den Spaltenvektor noch nicht als eigenständiges Denkobjekt.

R's Interpretation der Farbmaschine scheint von einer Vektorraumvorstellung herzurühren, in der ein Vektorraum durch die Handlungen charakterisiert ist, die mit seinen Objekten möglich sind, nämlich das Vervielfachen und das Addieren von Vektoren, bzw. die Verbindung dieser Operationen (das Erzeugen von Vektoren aus einigen Grundbausteinen nach bestimmten Regeln).

Dabei liegt ihr Augenmerk auf den einzelnen Handlungen bzw. der Verbindung mehrerer Handlungen zu einem Prozess, nicht jedoch auf den Objekten, auf die diese Handlungen angewendet werden. Den Schritt, solche Handlungen (wie das Erzeugen eines Vektors) als ein neues abstraktes Gesamtobjekt zu verstehen, vermeidet R weitgehend: Zwar nimmt sie den Spaltenvektor $\vec{x}$ als solchen wahr, aber sie betont die Einzelinformationen, die diese Schreibfigur liefert. Dabei sieht sie die Einzelbestandteile des Ergebnisvektors nicht als Beschreibung der produzierten

Farbe in Form eines bestimmten Mischverhältnisses, sondern als Information für den Vorgang der Produktion.

Auf die Frage nach einer Erklärung der Begriffe der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit antwortet R auf der Ebene von 4-Tupeln mit einer korrekten Wiedergabe von den Definitionen und von Verfahren zur Überprüfung dieser Eigenschaften. Sie bezieht sich dabei auf das Beispiel der Standardbasis.

Ihre Deutung der linearen Abhängigkeit an dem Beispiel der Farbmaschine bleibt sehr vage. Sie bezieht den Begriff nur auf die vier Grundfarben aus den kleinen Behältern und bringt ihn in enge Verbindung mit der Vorstellung eines Erzeugendensystems: Sie nennt als Beispiel, dass drei der vier Grundfarben linear abhängig sind und stellt sich diese drei Farben damit automatisch als Erzeugendensystem des gesamten Farbenraums vor. Das Konzept des Erzeugendensystems passt zu der Vorstellung der Konstruktion von neuen Vektoren aus Grundbausteinen und scheint für R das grundlegende Konzept zur Erschließung von Vektorraumcharakteristika zu sein. Dabei spielen diese Grundbausteine eine ausgezeichnete Rolle, und nur auf sie bezieht R die Kategorien der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit.

Im zweiten Gesprächsteil hat R große Mühe, die Zeichen „$x+1$“ und „$2x$“ als Elemente des Polynomraums als Vektorraum zu akzeptieren. Stattdessen erklärt sie:

> „Aber ich verstehe nicht, weil x ist für mich irgendwie ’ne konkrete Zahl, die ich hier einsetzen kann, hundert oder ’ne Million oder so etwas, und dann hätte ich hier z.B. hundert plus eins oder so und dann soll das abgebildet werden auf eins null, das ist mein Problem.“

Das Zeichen „$x+1$“ wird für sie zur Aufforderung, für x eine Zahl einzusetzen, und dann die Zahl Eins zu addieren.[3] Dieses Verfahren kann sie nicht in Verbindung mit einer Abbildung in einen Vektorraum bringen. Dies ist ein weiteres Beispiel, in dem R einen mathematischen Ausdruck als Handlungsanweisung liest, statt ihn als Objekt aufzufassen. Sie findet in der Notation dieser Aufgabe nicht die für Vektorräume typischen Konstruktionen wieder, welche ihr zur Orientierung dienen.

In ihrer Auseinandersetzung mit der Frage, ob eine lineare Abbildung mit den gegebenen Bedingungen existiert, konzentriert sie sich auf die Überprüfung der Linearität an einer einzigen Stelle, wobei sie nicht zwischen der linearen Fortsetzung der Abbildung auf den Polynomraum und der Überprüfung der Linearitätseigenschaften unterscheidet. Auch hier orientiert sie sich an konkreten Handlungsschemata. Sie beschäftigt sich nicht mit grundsätzlichen strukturellen Überlegungen.

---

[3] Hier wird die Variable in dem Term im Sinne von (Malle 1993) im Einsetzungsaspekt interpretiert, während sie als formales Symbol in einer formalen Summe, also im Kalkülaspekt zu verstehen ist, wenn der Ausdruck als Element des Polynomraums verstanden werden soll.

2.2 Der Student S

S modelliert die Farbmaschine mit Hilfe eines Vektorraums, indem er vorschlägt, dass man

> „den Vektor als Vektor mit vier Koordinaten darstellt“,

wobei die vier Koordinaten die jeweiligen Mengen der vier Grundfarben bezeichnen.

Ein Vektor ist in seiner Vorstellung dadurch charakterisiert, dass er aus Koordinaten besteht, wobei eine Spezifizierung des Typs dadurch erfolgt, dass die Anzahl der Koordinaten angegeben wird.

Lineare Abhängigkeit deutet er für die Farbmaschine mit zwei Beispielen: Zunächst nennt er zwei verschiedene Darstellungen, die dieselbe Farbe ergeben, indem sie sich nur durch den Faktor zwei unterscheiden. Anschließend schlägt er vor, dass auch drei Farben genügen könnten, um die gleiche Farbe zu erzeugen. Daraufhin wird die Bedingung eingeführt, dass grün aus gelb und blau gemischt werden kann. S wendet nun ein:

> „Ich hab das Bild noch nicht so ganz verstanden. Weil da würde ja eigentlich die eine Koordinate wegfallen. Da könnte man ja eigentlich aus was Vierdimensionalem was Dreidimensionales machen.“

Dies sieht er offenbar als einen Widerspruch zu seiner Vektorraumvorstellung an: Ein Ding kann nicht zugleich drei- und vierdimensional sein. Die Dimension eines Vektorraums ist eine ihn charakterisierende Eigenschaft, die unveränderlich ist. In der Tat sind alle Vektorräume mit derselben endlichen Dimension isomorph. Diese Eigenschaft, die S vielleicht nicht in der Form formulieren würde, scheint in seinem mentalen Modell ein entscheidendes Merkmal zu sein. Diese Dimension liest er an der Anzahl der Koordinaten ab. Dabei bedenkt er nicht, dass im Raum der 3- bzw. 4-Tupel diese Notation auf ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bezogen ist, während er in den vier Farben Erzeugende hat, welche abhängig sind.

Diese beiden Episoden weisen auf ein Vektorraumverständnis hin, in dem ein Vektorraum als eine Menge dadurch charakterisiert ist, dass ihre Elemente alle aus einer festen Anzahl von Komponenten bestehen.

Vektorraumoperationen wurden nicht explizit in Bezug auf die Farbmaschine gedeutet; das Vervielfachen eines Tupels, welches die Farbe nicht ändert, und das Bilden einer Summe als Mischen der Farben setzt S ohne Erklärung voraus.

In der Frage im zweiten Gesprächsteil, ob die angegebene Abbildung existiert, argumentiert S nicht mit den formalen Eigenschaften einer linearen Abbildung, sondern mit Hilfe seiner Vorstellung über die Beschaffenheit von Vektorraumelementen und der Überzeugung, dass lineare Abbildungen Strukturen erhalten:

> „Ich hab ja auf der rechten Seite in zwei verschiedenen Koordinaten ’ne Null und egal, ob ich jetzt die erste Koordinate als die x-Koordinate wähle und die

> zweite Koordinate als die x hoch null […], egal wie rum ich das wähle, kann ich, eh, geht es auf jeden Fall nicht auf, weil die erste hat ja beides, für x und für die Konstante und die zweite hat nur 'n x -Faktor, nur das x ."

Nachdem in einem längeren Gespräch nachgewiesen ist, dass aus den gegebenen Bedingungen folgt, dass $f(x) = (0, 2)$ und $f(1) = (1, -2)$, wendet S ein:

> „Jetzt haben wir nicht mehr diese Eindeutigkeit, dass eine Koordinate, also ein Eintrag, genau das x oder die Eins repräsentiert."

Er äußert dann die Vermutung, dass es keine lineare Abbildung gibt, die diese beiden Bedingungen erfüllt.

Die beiden zitierten Äußerungen von S zeigen eine Strukturierung des Polynomraums nach „Koordinaten", die formal anders notiert werden als die Koordinaten von 2-Tupeln, die in S' Vorstellung aber eine analoge Funktion übernehmen. Er nennt sie *x*- und x^0-Koordinate und hegt die Überzeugung, dass eine lineare Abbildung nach $\mathbb{R}^2$ entweder die *x*-Koordinate auf ein (von null verschiedenes) Vielfaches von $(1, 0)$ und die x^0-Koordinate auf ein (von null verschiedenes) Vielfaches von $(0, 1)$) abbilden muss oder umgekehrt. Mit anderen Worten stellt er sich eine strukturerhaltende Abbildung zwischen Vektorräumen so vor, dass sie „die" kanonischen Koordinaten der Vektorräume mehr oder weniger miteinander identifiziert.

Auch hier wird eine Strukturierung der Vektorraumelemente nach festen Bestandteilen sichtbar. S' Überzeugung, dass die Art dieser Bestandteile nicht variabel ist, zeigt sich in dem geringen Spielraum, den er strukturerhaltenden Abbildungen gibt: Er erlaubt nur Variationen in der Reihenfolge und in der Skalierung der Komponenten.

2.3 Die Studentin B

B weist ähnlich wie S in der Modellierung der Farbmaschine ausschließlich dem Begriff des Vektors eine Bedeutung zu, nicht jedoch den Vektorraumoperationen. Sie verwendet ebenfalls 4-Tupel als Zeichen für die produzierten Farben, unterscheidet dabei die produzierten Farben jedoch nur hinsichtlich Farbtypen, nicht aber hinsichtlich Farbmengen. Dies hat zur Folge, dass sie zwei 4-Tupel, welche sich nur durch ein Vielfaches unterscheiden, als Bezeichnung für dasselbe Farbprodukt verwendet und somit gleichsetzt. Die vier Komponenten eines Zeichens für die Farbe sieht sie als Angabe des Mischverhältnisses der vier Grundfarben. B modelliert die Farbmaschine trotz der Verwendung der 4-Tupel also nicht mit Hilfe des $\mathbb{R}^4$, sondern gibt den ihr vertrauten Zeichen neue Bedeutung. Sie geht rein von der zu modellierenden Situation aus, die sie nicht mit einer in ihrem Kopf fertigen Struktur zu identifizieren versucht.

Für B ist a priori keine Farbe gegenüber anderen ausgezeichnet. So beschreibt sie eine Abhängigkeitsbeziehung für drei beliebige Farben in dem Farbenraum, ohne den vier Grundfarben eine Ausnahmestellung zu geben. Dabei fallen ihr Grenzen der Übertragbarkeit auf, als sie feststellt, dass in einer Abhängigkeitsbeziehung, in der eine Farbe aus zwei anderen produzierbar ist, die Farben nicht vertauscht werden können wie bei einer linearen Abhängigkeit in einem Vektorraum.

Zu der Frage, ob die im zweiten Gesprächsteil gegebene Abbildung vom Polynomraum nach $\mathbb{R}^2$ wohldefiniert ist, bemerkt B:

> „Also, ich verstehe den Zusammenhang nicht so genau. Also ich verstehe jetzt nicht, warum jetzt hier die Eins steht und hier 'ne Vier und hier die Null."

Dabei zeigt sie auf die Komponenten der Bildtupel $(1, 0)$ und $(0, 4)$. Sie ergänzt:

> „Da kann ich jetzt nicht rauslesen, was wäre x plus 2, also die Abbildung von x plus 2."

B sucht hier zunächst nach einer allgemeinen Anweisung zur Bestimmung der einzelnen Bilder, welche nicht die Besonderheiten der Struktur eines Vektorraumes berücksichtigt.[4] Sie kommt dann aber auf die Idee zu versuchen, $x+2$ mit Hilfe von $x+1$ und $2x$ darzustellen. Später wird sie auf die Möglichkeit hingewiesen, dass $x+1$ und $2x$ eine Basis des Polynomraums bilden. Im weiteren Verlauf des Gesprächs geht sie alle Fragen unter dem Gesichtspunkt der Strukturierung durch Basen an. Dabei unterscheidet sie Basen hinsichtlich ihrer Rolle, die sie spielen, und ordnet jeder Problemstellung eine ganz bestimmte Basis zu. So wird z.B. $x+1$, $2x$ zu derjenigen Basis des Polynomraums, welche die Abbildung *f* definiert, während ihre Bilder $(1, 0)$ und $(0, 4)$ *die* Basis des Bildraums bilden. $(1, 0)$, $(0, 1)$ hingegen ist *die* Basis von $\mathbb{R}^2$, nämlich die kanonische Basis, die den Elementen von $\mathbb{R}^2$ ihre Namen verleiht. Die Tatsache, dass dieser mit dem Bildraum der Abbildung identisch ist, erwähnt B nicht. Anders als im ersten Gesprächsteil verwendet B hier also die Idee der Strukturierung eines Vektorraums mit Hilfe von einer Art Grundbausteinen, wobei die Grundbausteine im Unterschied zu R's und S' Vorstellung gewechselt werden können. Allerdings scheint B zwei konstruierte Vektorräume, die zwar als Mengen gleich sind, jedoch aus unterschiedlichen Grundbausteinen erzeugt sind, als verschieden zu betrachten.

2.4 Vergleichende Zusammenfassung

Die Vektorraumvorstellung, die R im ersten Gesprächsteil zeigt, wird im Weiteren als *Baukastenvorstellung* bezeichnet. Ein Vektorraum besteht nach dieser Vorstellung aus bestimmten Konstruktionsregeln und einigen Grundbausteinen, aus denen durch Anwendung der Konstruktionsregeln neue Objekte, genannt „Vektoren", ge-

[4] Die Vokabel „Abbildung" verwendet B generell als Synonym der Vokabel „Bild".

schaffen werden können. Im zweiten Teil erkennt R den Polynomraum von sich aus nicht als Vektorraum, weil sie die formale Darstellung als eine Handlungsaufforderung anderer Art versteht.

S zeigt in beiden Gesprächsteilen die Vorstellung von einem Vektorraum als Menge von Elementen, welche folgende Struktur aufweisen: Die Elemente, genannt „Vektoren", besitzen *n* Bestandteile, die in allen möglichen Variationen auftreten. In seiner Begegnung mit den Vektorräumen, die in diesem Gespräch auftreten, hat S eine entsprechende spezifische Wahrnehmung: Er sieht die Elemente eines Vektorraums in ihrer Eigenschaft als Komposition aus bestimmten Komponenten. Dieses Bild von einem Vektorraum soll unter den Namen *Komponentenvorstellung* gefasst werden.

Trotz eines Zugangs, der sich von R's Verständnis erheblich unterscheidet, indem er den Schwerpunkt auf den Charakter der Elemente statt auf Handlungsmöglichkeiten in einem Vektorraum legt, sind die Konsequenzen für die Strukturvorstellungen der beiden Studenten sehr ähnlich: Beide Vorstellungen zeichnen eine Basis als kanonisch aus in dem Sinne, dass die Struktur des Vektorraums von einer einzigen eindeutig festgelegten Basis aus erfasst wird.

B stellt im ersten Gesprächsteil den Charakter der Elemente eines Vektorraums in den Vordergrund und tastet sich von dort aus zu Beziehungen vor, in welchen diese Elemente zueinander stehen. Diese Beziehungen sind charakteristisch für eine Menge, die als Vektorraum bezeichnet wird. In dieser Struktur sind keine Elemente vor anderen ausgezeichnet. Diese Vorstellung, die die Idee des Konstruierens überhaupt nicht berücksichtigt, hat als Schwerpunkt eine *Elementtypvorstellung*, die allein vom Wesen der jeweiligen Elemente ausgeht, ohne sie von vornherein in einer bestimmten Struktur wahrzunehmen, wie das bei S der Fall ist.

Im zweiten Teil des Gesprächs strukturiert B einen Vektorraum auf andere Weise. Hier sieht sie ihn charakterisiert durch zwei Merkmale, nämlich eine Grundmenge und ein Konstruktionsprinzip, mit dessen Hilfe aus der Grundmenge die Elemente des gesamten Vektorraums erzeugt werden. Sie scheint jedoch zwei Vektorräume zu unterscheiden, wenn sie aus verschiedenen Teilmengen eines Vektorraums mit den dort geltenden Operationsregeln konstruiert werden, auch wenn sie in ihren Elementen im Ergebnis übereinstimmen. Anders als R und S berücksichtigt B die Tatsache, dass die Elemente eines Vektorraums aus unterschiedlichen Basen konstruiert werden können, von denen keine einen grundsätzlichen Vorzug hat.

3 Spuren der drei Vorstellungen in der linearen Algebra

In diesem Kapitel soll der Frage nachgegangen werden, wie weit die drei genannten Vorstellungen in der Geschichte oder Gegenwart in der linearen Algebra eine Rolle spielen.

3.1 Geschichtliche Entwicklung der linearen Algebra

Wir finden alle drei Vorstellungen in den historischen Wurzeln der linearen Algebra wieder.

Elementtypvorstellungen treten in großer Zahl in der Geschichte der linearen Algebra auf (vgl. Wittmann 2003, S. 32 ff). Bevor die Vektorraumaxiome zusammengestellt wurden, wurden lineare Eigenschaften in vielen Bereichen der Algebra entdeckt bzw. genutzt. Ein Beispiel für eine Elementtypvorstellung, welche von einer Menge von Objekten mit bestimmten Wesensmerkmalen ausgeht und auf dieser Menge Operationen definiert, sind die „Vektorpfeile", welche von Newton als Darstellung von physikalischen Kräften verwendet wurden, von Wessel mit geometrischen Operationen, die Vektorraumoperationen entsprechen, versehen wurden, und heute in der Schule manchmal als Einstieg in die Vektorrechnung dienen. Auch das Axiomensystem für einen Vektorraum, das Weyl 1918 veröffentlichte, geht zunächst von dem Elementtyp des Vektorpfeils aus, den er als Darstellung einer Translation im Raum auffasste, und von dem er die für einen Vektorraum charakteristischen Verknüpfungseigenschaften „abstrahierte", d.h. ableitete.

Ein anderes Beispiel ist die Beschreibung geometrischer Kurven wie z.B. der Kegelschnitte. Dies war eine Fragestellung, welche von einer Menge spezifischer Elemente ausging. Das Problem der Klassifizierung dieser Punktmengen wurde z.B. von Euler mit Hilfe linearer Substitutionen angegangen (vgl. Brieskorn 1983, S. 502). Dieses Verfahren entspricht letztlich einer Strukturierung des geometrischen Raums mit Hilfe von geeigneten Bezugssystemen (Basen), und gründet auf den linearen Strukturen des $\mathbb{R}^3$, d.h. auf seinen Vektorraumeigenschaften.

Als Komponentenvorstellung finden wir die Beschreibung der geometrischen Ebene oder des geometrischen Raums mit Hilfe eines Koordinatensystems als $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, den Raum der reellen 2- bzw. 3-Tupel, der in vielen Fragestellungen wie z.B. der oben erwähnten Kurvenklassifikation als Grundmenge auftrat.

Die Notwendigkeit der Wahl eines Koordinatensystems relativiert jedoch die Suggestion eindeutig bestimmter Komponenten. Erst in Situationen, wo vorgegebene algebraische Bedingungen den Ausgangspunkt bilden, wo also die Zuordnung eines Bezugssystems nicht mehr vorzunehmen ist, treten die Komponenten von n-Tupeln als vorgegebene Strukturmerkmale auf. Ein Beispiel zur Komponentenvorstellung, das nicht aus der linearen Algebra stammt, ist die bis auf Reihenfolge eindeutige Primzahlzerlegung natürlicher Zahlen. Hier haben wir Bestandteile, durch die das Objekt ohne weiteres Bezugssystem eindeutig festgelegt ist.

Das Baukastenprinzip, welches von einigen Grundbausteinen und bestimmten Konstruktionsregeln ausgeht und die Vektoren erst als Konstrukte aus diesen Grundbausteinen ins Leben ruft, finden wir bei algebraischen Körpererweiterungen: Hier wird eine „Wurzel" einer algebraischen Gleichung über einem Körper K adjungiert, indem man zunächst formale Zeichen für dieses noch nicht existierende

Objekt und seine „Potenzen" einführt. Dabei wird durch die algebraische Gleichung eine Beziehung zwischen den neuen Objekten definiert. Anschließend wird die Menge aller formalen Linearkombinationen dieser neuen Objekte mit Koeffizienten aus *K* gebildet. Zusammen mit den von *K* induzierten Verknüpfungen ist diese Menge ein Vektorraum über *K*, dessen Elemente erst durch die Bildung der Linearkombinationen konstruiert werden. Sie sind ausschließlich über die Linearkombinationen definiert. Ein Beispiel einer solchen Körpererweiterung ist der Körper der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

der in dieser Darstellungsform offensichtlich der Vektorraum der Linearkombinationen aus 1 und i mit reellen Koeffizienten ist. Die Körpermultiplikation wird durch Anwendung der Körpergesetze und der Regel, dass $i \cdot i = -1$, ausgeführt, d.h. es gilt:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Ähnliche Konstruktionen versuchte Hamilton durch die Bildung von Linearkombinationen mit einer weiteren imaginären Einheit und passenden Nebenbedingungen für einen dreidimensionalen Raum (vgl. z.B. Scholz 1990, S. 346ff).

Eine modernere Form der Definition des komplexen Zahlenkörpers basiert auf einer Darstellung der Elemente als Paare von reellen Zahlen. Als $\mathbb{R}^2$ bilden sie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum; zusätzlich wird folgende Multiplikation definiert, mit der der Raum zu einem Körper wird:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Diese Variante der Definition von $\mathbb{C}$ entspricht eher der Komponentenvorstellung als dem Baukastenprinzip, denn hier wird die Komponentenstruktur der reellen 2-Tupel als Ausgangspunkt genommen. Auf diesen 2-Tupeln werden dann passende Operationen definiert.

Die Theorie der linearen Gleichungssysteme ist eine wichtige Wurzel der linearen Algebra (vgl. Dorier 2000a, S. 5). Sie fragt nach der Lösungsmenge von einem System von linearen Gleichungen über einem Körper *K*. Diese bildet im Falle eines homogenen Gleichungssystems einen Vektorraum, der über spezifische Eigenschaften seiner Elemente definiert ist, also eine Elementtypvorstellung widerspiegelt. Die Grundmenge, in der die Lösungen gesucht werden, ist K^n. Die Darstellung seiner Elemente in n Kategorien als n-Tupel ermöglicht einfache Bezeichnungen für die Lösungen. Sie ist eine Komponentenvorstellung.

Eine Untersuchung linearer Gleichungssysteme führt zu der Erkenntnis, dass man aus einzelnen Lösungen weitere Lösungen konstruieren kann, und zu der Frage, aus welchen Lösungen man alle anderen in eindeutiger Weise konstruieren kann.

Hier spielt das Konstruktionsprinzip eine wichtige Rolle, aber es geht nicht von der Idee aus, dass ein erzeugendes System gegenüber anderen herausgehoben ist.

Lineare Gleichungssysteme repräsentieren noch in einer zweiten Hinsicht Vektorräume. Die Gleichungen des Systems definieren die Lösungsmenge. Das System wird zur Lösungsfindung in einer Weise vereinfacht, dass einzelne Gleichungen durch andere (einfachere) ersetzt werden, ohne dass die Lösungsmenge dabei verändert wird. Dies geschieht, indem eine Linearkombination von zwei Gleichungen an die Stelle einer der Gleichungen tritt: Aus den gegebenen Gleichungen werden andere linear erzeugt. Dieses Verfahren entspricht dem Baukastenprinzip insofern, als es von fest vorgegebenen Erzeugenden ausgeht. Allerdings ist es weniger an den einzelnen erzeugten Gleichungen oder an allen erzeugbaren Gleichungen interessiert, als vielmehr an Gleichungen, welche als Gesamtheit die gesuchte Lösungsmenge beschreiben. So erörtert Euler das Phänomen, dass eine Gleichung eines Systems durch andere Gleichungen des Systems linear erzeugt werden kann, unter dem Aspekt, dass die Bedingung, die sie an die Lösungsmenge stellt, bereits von den anderen Gleichungen abgedeckt wird (vgl. Dorier 2000a, S. 6 ff). Somit ist diese Gleichung überflüssig. Hier hat also nicht der Gedanke des Erzeugens Vorrang.

3.2 Beispiele aus der Gegenwart für Darstellungen von Vektorräumen

Nicht nur in der Entwicklung der Theorie der linearen Algebra spielten die drei beschriebenen Vorstellungen eine Rolle. Auch in der Vermittlung und Verwendung dieser Theorie kommen Probleme zur Sprache, die mit diesen Zugängen zum Vektorraumbegriff unterschiedlich gut gelöst werden können.

Wir sehen uns Untervektorräume an, die eine wichtige Beispielklasse von Vektorräumen bilden. Zwei Darstellungen eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ sind:

„Die Ebene, in der die Punkte $(1, 2, 3)$, $(0, -2, 3)$, $(1, 0, 6)$ liegen."

„Die Lösungsmenge der Gleichung $-12x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$."

Hier sind nur die Elemente der Menge beschrieben. Die Tatsache, dass sie zusammen mit den im $\mathbb{R}^3$ gültigen Operationen eine Vektorraumstruktur bilden, ist nicht unmittelbar ohne weitere Theorie erkennbar, sondern ergibt sich erst aus bestimmten Gemeinsamkeiten der Elemente. Eine andere Darstellung dieses Untervektorraums ist

„Die Menge aller Linearkombinationen von $(1, 4, 0)$ und $(0, 2, -3)$."

oder ausgeschrieben

„$\{a(1, 4, 0) + b(0, 2, -3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$".

Eine entsprechende geometrische Formulierung lautet:

„Die Ursprungsebene, die von $(1, 4, 0)$ und $(0, 2, -3)$ aufgespannt wird.“

Diese drei Beschreibungen kommen der Baukastenvorstellung eines Vektorraums nahe. Zwar kann dieselbe Menge auch durch andere Vektoren erzeugt werden, aber in der Definition erhalten jeweils zwei Vektoren als Grundbausteine zunächst eine ausgezeichnete Rolle.

Eine der Komponentenvorstellung entsprechende Darstellung dieses Vektorraums als Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ hat die Komponenten der 3-Tupel dieser Menge im Blick:

„$\{(a, 4a+2b, -3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$“

Eine Komponentenvorstellung, die mehr die Struktur dieses Vektorraums und weniger seine Einbettung im $\mathbb{R}^3$ ansieht, findet sich in folgender Repräsentation wieder:

„$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, wobei (a, b) Komponenten bzgl. $(1, 4, 0)$ und $(0, 2, -3)$ bezeichnen.“

Die Beispiele zeigen, dass jede der drei Vorstellungen durch sinnvolle Beschreibungen angesprochen werden kann. Die Eignung der einzelnen Darstellungen hängt vom jeweiligen Kontext ab.

Nun werden einige Aufgaben gezeigt, die sich mit den Vorstellungen unterschiedlich leicht lösen lassen:

Der Auftrag, ein nicht-triviales Beispiel für einen Untervektorraum eines gegebenen Vektorraums anzugeben, ist unter Heranziehung der Baukastenvorstellung sehr leicht zu lösen, indem man irgendwelche Elemente des Raums auswählt und sie als Grundbausteine für den Untervektorraum bestimmt. Für diese Lösung ist auch keine tiefere Strukturkenntnis über die Auswechselbarkeit von Basen oder den Unterschied der Begriffe „Erzeugendensystem“ und „Basis“ erforderlich. Sofern der Vektorraum entsprechend einer Komponentenvorstellung strukturiert ist, ist hier in ähnlicher Weise die Angabe eines Untervektorraums möglich, indem man in den einzelnen Komponenten lineare Terme in freien Variablen angibt. Die alleinige Verwendung der Elementtypvorstellung zur Lösung der Aufgabe ist hier sehr mühsam, da man zunächst für das spezifische Wesen der Elemente herausfinden müsste, welche Eigenarten dieser Elemente einen Untervektorraum konstituieren.

An eine Verständnisgrenze stößt die Baukastenvorstellung in ihrer Reinform beim Basiswechsel, denn dieser zeigt die prinzipielle Gleichstellung aller Basen auf. Die Idee, dass die Grundbausteine zuerst existieren und alle anderen Vektoren erst mit Hilfe dieser Grundbausteine geschaffen werden, ist ihrem Wesen nach ebenso unumkehrbar wie die Zeit. Eine Möglichkeit, mit dem Konzept einer zweiten Basis unter dem Primat der Baukastenvorstellung umzugehen, sieht so aus: Zunächst gibt es eine Basis $\mathcal{A}$, aus welcher alle anderen Vektoren erzeugt werden, darunter auch die Vektoren einer zweiten Basis $\mathcal{B}$. Alle Linearkombinationen von $\mathcal{B}$ werden letztlich als Erzeugnis von $\mathcal{A}$ durch eine Hintereinanderschaltung des Bildens von Linearkombinationen gedacht. In der Tat impliziert die Darstellung der Elemente in K^n genau diese Vorstellung, indem jede Linearkombination einer anderen als der kanonischen Basis durch ein Ausrechnen der Summe auf eine Tupelnotation führt, welche die Linearkombination aus der kanonischen Basis angibt. So ist – auch ohne die Durchführung der Rechnung – erkennbar, dass die Linearkombination

$$-2 \cdot (2,1) + 4 \cdot (3,1) = (8,2)$$

von $(2,1)$ und $(3,1)$ ein 2-Tupel ist, dass sie also eine Linearkombination aus der kanonischen Basis ist. Ein analoges Problem tritt bei einem Basiswechsel mit Komponentenvorstellung auf, da auch hier eine Basis als strukturierende Basis ausgezeichnet wird.

3.3 Darstellungen der Vektorraumtheorie in Lehrbüchern

Eine Reihe von Lehrbüchern (Artmann 1991, Beutelspacher 1998, Brieskorn 1983, Fischer 2002, Koecher 1985, Kowalsky/Michler 1995, Lorenz 1988) zur linearen Algebra, die seit den 80er Jahren in Deutschland geschrieben wurden, definieren den Vektorraum in ähnlicher Weise. Als typisches Beispiel soll die „Lineare Algebra“ (Fischer 2002) angeführt werden, der einen Vektorraum als Menge zusammen mit zwei Verknüpfungen definiert, welche bestimmte Bedingungen erfüllen.

Diese Definition entspricht weder der Baukastenvorstellung noch der Komponentenvorstellung, denn sie erwähnt kein Erzeugendensystem. Zwar gibt es in jedem Vektorraum Erzeugendensysteme, aber im Allgemeinen ist keines von ihnen ausgezeichnet. Eine Auszeichnung einer Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums kommt einer Identifizierung mit K^n gleich, da sie einen kanonischen Isomorphismus zwischen den beiden Vektorräumen induziert. Die axiomatische Definition ist ebensowenig mit Elementtypvorstellungen gleichzusetzen, da diese jeweils nur ein Beispiel erfassen, in dem mathematische Objekte spezifische Eigenschaften besitzen, welche eine Verknüpfung und Vervielfachung nahelegen, die den Axiomen eines Vektorraums entsprechen.

Die drei Vorstellungen stehen nicht in einem Widerspruch zur formalen Vektorraumdefinition. Jede greift wesentliche Aspekte des Vektorraumbegriffs auf und veranschaulicht sie, ohne den Begriff jedoch vollständig zu füllen.

Beispiele für Elementtypdarstellungen werden von allen genannten Lehrbüchern entweder vor oder nach der axiomatischen Vektorraumdefinition angeführt, wenn auch in unterschiedlicher Ausführlichkeit und Anzahl.

Sie sprechen ebenfalls alle die Komponentenvorstellung an: Sie betrachten K^n ausführlich bei der Behandlung von Matrixdarstellungen von linearen Abbildungen. Diese Matrixdarstellungen beruhen auf dem Prinzip der Notation von Vektoren nach Komponenten.

Das einzige dieser Lehrbücher, das den Lesern verschiedentlich Anregungen zum Aufbau einer Baukastenvorstellung gibt, ist (Beutelspacher 1998), der gegenüber den anderen durch eine subtile Schwerpunktverschiebung in seiner Darstellung auffällt. Diese suggeriert den Eindruck einer Konstruktion der Vektorraumstruktur durch lineares Erzeugen, anstelle der Beschreibung einer Menge mit einer fertigen Struktur, die vom Ganzen ausgeht und dann Unterstrukturen analysiert. Aber auch hier wird eine Baukastenvorstellung nicht explizit vorgestellt, sondern lediglich implizit unterstützt. Dieses Modell von einem Vektorraum scheint von Lehrenden wenig als hilfreiche Vorstellung eingeschätzt zu werden.

3.4 Zusammenfassung

Die aufgeführten Beispiele aus diesem Kapitel verdeutlichen folgende Schwerpunkte und Schwächen der drei Vorstellungen:

- Bezogen auf einen bestimmten Raum liefert die Elementtypvorstellung einen Prototyp von Vektorraum, eine reichhaltige Gesamtvorstellung, von der aus typische Strukturen jedoch abstrahiert werden müssen, wenn sie als Werkzeug zur Lösung komplizierter Probleme eingesetzt oder auf andere Beispiele übertragen werden sollen.
- Die Komponentenvorstellung wird insbesondere durch die Notation der Elemente des K^n betont, welcher das wichtigste Beispiel für einen Vektorraum ist. Er hat sowohl in der Geschichte wie in Lehrbüchern einen besonderen Platz. Als alleinige Grundlage eines mentalen Modells von Vektorräumen ist diese Vorstellung problematisch, wenn sie starr an der Strukturierung durch eine einzige Basis festhält.
- Für manche Problemstellungen erweist sich die Baukastenvorstellung als eine sinnvolle Grundlage, auf die ein tragfähiges Vektorraumverständnis aufgebaut werden kann. Ebenso wie die Komponentenvorstellung muss die Baukastenvorstellung aber mit der Idee verbunden werden, dass der Wechsel des Bezugssystems in einem Vektorraum möglich ist.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die besprochenen Vorstellungen:

	Repräsentation des Vektorraumbegriffs als …		
	Baukasten-vorstellung	**Komponenten-vorstellung**	**Elementtyp-vorstellung**
Merkmale	Konstruktion der Vektoren aus einem ausgezeichneten Erzeugendensystem	Beschreibung der Vektoren aufgrund einer ausgezeichneten Basis	eine Struktur muss a priori nicht erkennbar sein
Auftreten in der Mathematik	algebraische Körpererweiterung	Primzahlzerlegung, n-Tupel	Kräftepfeile als Vektoren, Lösungsmengen von LGS
Auftreten in Lehrbüchern	selten und nicht explizit	K^n als Standardbeispiel	Einstieg häufig über ein oder mehrere Elementtypbeispiele
Aufgabenbeispiel für Stärken	Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums angeben	Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums angeben	einen gegebenen Vektorraum entsprechend einer Problemstellung strukturieren
Aufgabenbeispiel für Schwächen	Wechsel des Bezugssystems (Basiswechsel)	Wechsel des Bezugssystems (Basiswechsel)	Erkenntnisse auf andere Vektorräume übertragen

4 Abstraktionsstrategien von R, S und B

In diesem Kapitel wird analysiert, wo Fehlvorstellungen bei den drei Studierenden aus mental unzulänglich nachvollzogener Abstraktion resultieren. Solche Fehler in einem mentalen Modell sind nicht durch einen einfachen Hinweis auf ein Missverständnis zu beheben, sondern erfordern das Erlernen und Anwenden von schwierigen kognitiven Strategien.

(Dubinsky 1991) spricht in Anlehnung an Piaget von „reflective abstraction" als höchste Form von Abstraktion. Er erklärt diesen Begriff als die Konstruktion von mentalen Objekten und von mentalen Handlungen mit und an solchen Objekten. Dabei spricht er vor allem über das Erfassen von mentalen Prozessen als neue mentale Objekte, die wie andere mathematische Objekte behandelt werden. Er nennt diesen Abstraktionsschritt „encapsulation", was ich mit „Verkapselung" übersetzen möchte. Ein ähnliches Konzept wendet (Sfard 1994) an: Sie spricht von „reification", wenn das Ergebnis eines Prozesses als unveränderliches, eigenständiges mathematisches Objekt betrachtet wird. Unter Umständen wird das Ergebnis eines Prozesses mental erst durch diesen konstruiert und ist in diesem Fall ein Objekt, dass im Sinne Dubinskys durch reflektive Abstraktion entsteht. Reifikation unterscheidet sich von Verkapselung dadurch, dass im ersten Fall das Ergebnis eines Prozesses, im zweiten dieser Prozess selbst als neues mentales Objekt verstanden wird. So kann das Zeichen „x^2“ Handlungen beschreiben, indem für x verschiedene, z.B. natürliche, Zahlen einzusetzen und zu quadrieren sind. Wird der Ausdruck x^2 als das Ergebnis all dieser Handlungen, nämlich als Bezeichnung für die Quadratzahlen, verstanden, so bezeichnet Sfard diesen mentalen Schritt als Reifikation. Eine Verkapselung im Sinne Dubinskys tritt auf, wenn der Gesamtprozess des Einsetzens von natürlichen Zahlen und Berechnens ihrer Quadrate als Objekt aufgefasst wird, wenn also die Funktion

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad x\mapsto x^2$$

mental als Objekt konstruiert wird.

Bei den drei Studenten finden wir Probleme mit diesen Abstraktionsprozessen in unterschiedlichem Maße und unterschiedlichen Schwerpunkten.

R ist in ihrem Zugang zu Vektorräumen ausschließlich an Handlungen interessiert, die typischerweise in Vektorräumen ausgeführt werden, nämlich an dem linearen Erzeugen von Vektoren. Der Prozess des Konstruierens von Linearkombinationen repräsentiert für sie das Wesen eines Vektorraums. Sie organisiert ihre Informationen über die Farbmaschine in solchen Handlungen und sie sucht im Polynomraum nach Repräsentationen solcher Handlungen. Dabei liegt ihr Augenmerk nicht auf den Linearkombinationen als den Ergebnissen dieser Handlungen, sondern auf den Handlungen selbst. Immerhin bezeichnet sie im ersten Gesprächsteil das Ergebnis einer Linearkombination der vier Grundfarben als einen Vektor. Das ist ein Hinweis auf eine Reifikation. Dabei versteht sie die Koordinaten des Ergebnisvektors jedoch eher als Informationen für die einzelnen ausgeführten Handlungen, als dass sie sie in ihrer Gesamtheit als Bezeichnung für ein Objekt auffasst. Im zweiten Gesprächsteil zeigt sich, dass sie mit der Sichtweise, dass $x+1$ ein Element des Polynomraums ist, Schwierigkeiten hat. Sie sieht in $x+1$ die Anweisung, Zahlen einzusetzen und anschließend eine Rechnung auszuführen. Sie fasst $x+1$ und $2x$ weder als Zeichen für Funktionen und damit als verkapselte Prozesse auf, noch sieht sie $x+1$ und $2x$ als Ergebnisse von Einsetzungsprozessen an, welche losgelöst von diesen Prozessen nun als eigenständige Objekte behandelt werden.

S speichert seine Informationen über Vektorräume in einem festen Beziehungsgeflecht. Er sucht in Elementen eines Vektorraums nach bestimmten Merkmalen, nämlich ihren – nach seiner Überzeugung eindeutigen – Bestandteilen. Einen Vektorraum erkennt er nur dann als Vektorraum, wenn er genau diese Struktur wiederfindet. Er vollzieht die Reifikation, den Prozess der Farbproduktion mental durch die produzierten Farben zu ersetzen, mit Selbstverständlichkeit. Ebenso sieht er in den Polynomen weder Handlungsanweisungen zum Einsetzen von Zahlen noch Funktionen, sondern betrachtet sie als Objekte, an deren formaler Notation ihm eine Komponentenstruktur ins Auge fällt, wie er sie für sein Verständnis von Vektorräumen braucht. Auch hier handelt es sich also um eine Reifikation.

S' Äußerungen zur Abbildung

$$f : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2$$

geben Hinweise darauf, dass er lineare Abbildungen als verkapselte Prozesse versteht. So spricht er von diesen Abbildungen vielfach in Begriffen, die Merkmale von Objekten bezeichnen.

Seine Argumentation, warum die gegebene Abbildung nicht linear sein kann, geht nicht auf konkrete Details ein, wie die Linearitätseigenschaft sich lokal auf die Möglichkeiten des Abbildens auswirkt, sondern benutzt die allgemeinen Struktureigenschaften, die seine Vorstellung von Vektorräumen prägen. Er konzentriert sich auf Ausgangs- und Ergebnisstruktur, ohne das Abbilden selbst zu erwähnen.

B beachtet ebenso wie S vorrangig statische Merkmale von Informationen. Anders als S zeigen ihre Ausführungen während des Gesprächs aber mehrere Ordnungssysteme, die ihr zur Orientierung dienen. Die Farben ordnet sie zunächst ohne Anwendung fester Vektorraumstrukturen, wie sie durch Basen beschrieben werden können. Erst nach und nach bezieht sie Begriffe, die Beziehungen in Vektorräumen beschreiben, in ihre Modellierung der Farbmaschine ein. Im zweiten Gesprächsteil hingegen verwendet sie, nachdem sie auf ihn aufmerksam gemacht wurde, vorrangig den Begriff der Basis zur Erfassung von Vektorräumen.

B zieht in allen ihren Überlegungen in auffälliger Weise keine Tätigkeiten in Betracht, sondern identifiziert sie unmittelbar mit ihren Ergebnissen. Sie interessiert sich nicht für Anweisungen zur Produktion von Farben, sondern ausschließlich für Mischverhältnisse in den fertig produzierten Farben. Sie ignoriert auch den Prozess des Abbildens. Eine Verkapselung zu einem mentalen Objekt entspricht der mathematischen Bedeutung der Begriffe „Abbildung" und „Funktion". Sie verwandelt ihn aber stattdessen durch Reifikation zu einem Objekt, indem sie eine Abbildung und ihr Bild miteinander identifiziert. Wir sehen also, dass B in beiden Situationen den Abstraktionsschritt der Reifikation ausführt.

5 Präferenzen für Denkstile

Für die Beobachtung, dass die drei Studenten sehr unterschiedliche Vorgehensweisen zur Verarbeitung und Einordnung von Informationen anwenden, gibt die Denkstiltheorie von (Schwank 1996) einen Erklärungsansatz mit weit reichenden Konsequenzen. Schwank unterscheidet zwei Präferenzen für die Art und Weise, wie wir die Wirklichkeit wahrnehmen und mental repräsentieren. Menschen mit einer Präferenz für *prädikatives Denken* legen ihr Augenmerk auf statische Merkmale wie Eigenschaften und Beziehungen. Über diese nehmen sie Strukturen wahr. Menschen mit einer Präferenz für *funktionales Denken* interessieren sich vorwiegend für Abfolgen und Wirkungsweisen von Handlungen. Sie erfassen Strukturen über Prozesse, die auf oder mit den Strukturen ablaufen. Schwanks Untersuchungen von Schülern zeigen, dass die Bevorzugung eines Denkstils stabil ist, d.h. unabhängig von dem jeweiligen inhaltlichen Kontext erfolgt, solange die Aufgabe einen Schwierigkeitsgrad besitzt, der den Schüler zu echtem Problemlösen herausfordert. Sie erklärt dieses Phänomen damit, dass eine Präferenz in der Wahrnehmung zu einer entsprechenden inneren Repräsentation von Informationen führt, welche ihrerseits die Präferenz für den betreffenden Denkstil verstärkt.

Bei der Studentin R sehen wir eine deutliche Präferenz für funktionales Denken. Sie ist organisiert ihre mentalen Modelle offensichtlich nach Handlungsabläufen. Die Charakterisierung eines Vektorraums durch das Konstruktionsverfahren des linearen Erzeugens scheint mir auf dem Hintergrund der Präferenz funktionalen Denkens eine naheliegende Idee zu sein, denn das lineare Erzeugen schöpft die Handlungsmöglichkeiten auf den Strukturen eines Vektorraums aus und macht dadurch diese Strukturen erfahrbar. Die Priorität, dynamische gegenüber statischen Aspekten zu bevorzugen, erklärt R's Problem mit der Konstruktion neuer mentaler Objekte, die sowohl bei der Reifikation wie auch bei der Verkapselung von Prozessen erfolgt. Diese Abstraktionsverfahren verlangen beide, dass sie in den Denkstil wechselt, der ihren internen Repräsentationen und Orientierungsmustern nicht entspricht.

Bleibt man bei dem Verständnis eines Vektorraums als Rahmen für das Handlungsprinzip des linearen Kombinierens stehen, wobei die Ergebnisse dieses Verfahrens mental immer in ihrer Konstruktionsgeschichte gedacht werden und nicht den Status von eigenständigen Objekten erhalten, so werden die Grundbausteine zu ausgezeichneten Vektoren, wie das in der Baukastenvorstellung der Fall ist. Komplexe Vorgänge wie das Wechseln einer Basis und weitere Überlegungen, die darauf fußen, werden die Fähigkeiten, diese Konstruktionsgeschichten im Blick zu behalten, irgendwann überfordern. Daher scheint es mir unumgänglich, dass in eine Vorstellung, die das Konstruktionsprinzip in Vektorräumen als charakterisierendes Merkmal ansieht, die Erkenntnis integriert wird, dass die konstruierten Objekte unabhängig von ihrer Konstruktionsgeschichte existieren und zum Einsatz gebracht werden können. Das scheint mir am Besten über den Weg der Reifikation zu erfolgen: Eine Reifikation betrachtet das Ergebnis der Handlung als mathematisches Objekt eigenen Rechts, in diesem Fall als Element des Vektorraums, das unabhängig von den ursprünglichen Erzeugenden existiert. Eine Verkapselung betrachtet den Prozess des Erzeugens als abstraktes Objekt, das als n-Tupel die Koeffizienten des zugehörigen Erzeugendensystems enthält und so die Informationen für den Konstruktionsprozess verschlüsselt. Eine solche Verkapselung scheint mir die kompliziertere Abstraktion zu sein und hat vor allem den Nachteil, dass sie von den Erzeugenden noch nicht losgelöst ist. Gerade darum liegt sie dem Denken in Handlungsabläufen jedoch möglicherweise näher. Zur Gleichstellung aller Vektoren (mit Ausnahme des Nullvektors) ist ein weiterer Schritt erforderlich, in dem auch die ursprünglichen Grundbausteine als konstruiert gedacht werden. Ist das System der Grundbausteine eine Basis $\mathcal{B}$ des von ihm erzeugten Vektorraums V, so kann dieser Gedankengang mathematisch als Identifizierung des Vektorraums V mit dem K^n beschrieben werden. Dies geschieht mit Hilfe des Isomorphismus, welcher diese Basis $\mathcal{B}$ auf die kanonische Basis des K^n abbildet. Aber selbst diese Identifizierung von V mit dem K^n suggeriert noch immer eine Ausnahmestellung der ursprünglichen Basis $\mathcal{B}$, indem sie mit der kanonischen Basis des K^n identifiziert wird.

Das Denken von S und B orientiert sich an statischen Wesensmerkmalen. Beide ignorieren weitgehend die ablaufenden Prozesse, indem sie sie sofort unter dem Gesichtspunkt der Ergebnisse betrachten. Sie zeigen hier eine Präferenz für prädikatives Denken. Trotz des grundlegenden Unterschieds im Zugang von R und S hat S' Ordnungskriterium ähnliche Fehler in seiner Vektorraumvorstellung zur Folge wie R' Baukastenprinzip. Aber mir scheint, dass die Fehlvorstellung von S leichter zu korrigieren ist. Ich vermute, dass sie aus einer einseitigen Beschäftigung mit Beispielen resultiert, in welchen die Bezeichnungen der Vektorraumelemente auf einer kanonischen Basis beruhen, wie das sowohl im Polynomraum als auch im K^n der Fall ist.

Der Umgang mit Beispielen von Vektorräumen, in denen nicht a priori eine Basis ausgezeichnet ist, kann ihn zu mehr Flexibilität in der Organisation seiner Vektorraumvorstellung veranlassen, zumal wenn Aufgaben eine Basiswahl oder den Wechsel einer Basis nahelegen und ihm die Beliebigkeit der Basen als Bezugssysteme vor Augen führen. Als Beispiel dieser Art können Vektorpfeilklassen dienen, wenn sie ohne das kanonische Koordinatensystem des geometrischen Raums betrachtet werden.

So stellt etwa die Menge der Parallelverschiebungen im geometrischen Raum mit passenden, geometrisch definierten Verknüpfungen einen Vektorraum dar, der keine kanonische Basis besitzt. Die Beschreibung solcher Objekte und die Erschließung von Beziehungen und Strukturen in diesem Raum passt zu dem Interesse prädikativen Denkens an statischen Phänomenen und kommt daher S' Präferenzen entgegen. Das beschriebene Vorgehen entspricht dem Erschließen des Vektorraumbegriffs über eine Elementtypvorstellung, die nicht durch die Notation der Elemente oder ein Konstruktionsverfahren implizit eine Vorstrukturierung beinhaltet. Zur Vermeidung von S' Fehlvorstellung wäre das Kennenlernen des Vektorraumbegriffs über ein solches Beispiel sinnvoll. Nachdem er eine starre Strukturvorstellung aufgebaut hat, kostet es unter Umständen einen großen Aufwand, diese starke Struktur seines mentalen Modells wieder aufzubrechen und flexibler zu gestalten.

Für R wäre ein Beispiel wie das der Parallelverschiebungen viel schwerer zu verarbeiten, da es eine grundsätzlich andere Vorstellung vom Vektorraumbegriff impliziert, indem es von der Menge der Elemente und nicht von den zulässigen Operationen ausgeht. Ein Vektorraumbeispiel ohne ein Erzeugendensystem als Ausgangspunkt ist keine Variation oder Erweiterung der Baukastenvorstellung, sondern widerspricht ihr in ihren Fundamenten.

B's Bild von einem Vektorraum scheint eher auf einem Ansatz aufzubauen, der von einer Menge gegebener Elemente ausgeht, in welcher sie eine Struktur sucht, die nicht so starr ist wie die Ordnung, die S sich vorstellt. Dabei verwendet sie je nach Situation unterschiedliche Ordnungsprinzipien. Ihr Vorgehen erfasst dann auch die Möglichkeit des Strukturierens mit Hilfe verschiedener Basen.

6 Schlussbemerkung

In diesem Aufsatz wurden mentale Vorstellungen und Vorgänge von drei Erstsemestern in ihrer Auseinandersetzung mit dem Begriff des Vektorraums vorgestellt. Drei Probanden sind natürlich in keiner Weise repräsentativ für die Hörer der Vorlesung. Einige markante Merkmale ihrer mentalen Modelle finden wir jedoch in der Geschichte der linearen Algebra und in allgemeinen mathematischen Grundkonzepten wieder. Dies lässt vermuten, dass diese Ideen mehr als nur persönliche Vorstellungen eines einzelnen Menschen sind, sondern dass sie in Variationen und individuellen Kombinationen auch bei anderen Studierenden zu finden sind. Das heißt jedoch nicht, dass durch sie die Möglichkeiten innerer Repräsentationen ausgeschöpft werden.

Insbesondere die Stabilität der Präferenz für einen Denkstil macht es für Lehrende wichtig, kognitive Vorgänge und mentale Repräsentationen von Lernenden nicht an den eigenen zu messen, sondern prinzipiell zu respektieren. Eine Lehrmethode zur Förderung des Aufbaus adäquater Vektorraumvorstellungen basiert auf der Festlegung auf eine ganz bestimmte Vorstellung, auf die alle Darstellungen, Beispiele und Aufgaben abzielen. Im Hinblick auf die drei hier vorgestellten Studierenden scheint es jedoch fruchtbarer zu sein, wenn Hilfen gegeben werden, wie Lernende ihre mentalen Modelle unter Ausnutzung ihrer persönlichen Möglichkeiten und Stärken ausbauen und korrigieren können.

Literatur

Artmann, B. (1991). Lineare Algebra. Basel 1991.

Beck, C.; Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. In: JMD 14(2). S. 147–178.

Beutelspacher, A. (1998). Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen. Wiesbaden 1998.

Brieskorn, E. (1983). Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz. Braunschweig 1983.

Dorier, J.-L. (2000a). Epistemological Analysis of The Genesis of The Theory of Vector Spaces. In: Dorier, J.-L. (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht. S. 3–81.

Dorier, J.-L.; Robert, A.; Robinet, J.; Rogalski, M. (2000b). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. A Variety of Studies from 1987 until 1995. In: Dorier, J.-L. (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht. S. 85–124

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (Hrg). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht. S. 95–123

Fischer, G. (2002). Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger. Wiesbaden 2002.

Koecher, M. (1985). Lineare Algebra und analytische Geometrie. Berlin 1985.

Kowalsky, H.-J.; Michler, G. (1995). Lineare Algebra. Berlin 1995.

Lorenz, F. (1988). Lineare Algebra I. Zürich 1988.

Scholz, E. (1990). Geschichte der Algebra. Eine Einführung. Mannheim 1990.

Schwank, I. (1996). Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: ZDM 28(6). S. 168–183.

Sfard, A. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. In: Educational Studies in Mathematics 26. S. 191–228.

Wittmann, G. (2000). Schülerkonzepte und epistemologische Probleme. In: Tietze, U.-P.; Klika, M., Wolpers, H. (Hrg). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig 2000. S. 132–148

Wittmann, G. (2003). Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen. Hildesheim 2003.

Anschrift der Verfasserin

Astrid Fischer
Universität Dortmund
FB Mathematik, Lehrstuhl II
44221 Dortmund
e-Mail: astrid.fischer@uni-dortmund.de