Die Kluft des Nicht-Verstehen-Wollens

Ein Beitrag zur Pädagogik Martin Wagenscheins

von

Peter Buck und Markus Rehm, Heidelberg

Zusammenfassung: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in *einem* Punkt: Zwei Verstehensprozesse dieses Phänomens, die auf unterschiedliche Zugriffsmodi beruhen (‚analytischer' vs. ‚holistischer' Zugriff) werden phänomenographisch beschrieben. Auf beide (und mehr solcher) Zugriffe gefasst zu sein wird als bedeutsam für Lehrende herausgestellt, die Wagenscheins Exemplarisches Prinzip im Unterricht beachten wollen.

Summary: The three bisectors of a triangle meet in *one point*: A phenomenography of two understanding processes of this phenomenon based upon different modes of approach (‚analytical' vs ‚holistic') is given. Both (and more such) approaches turn out to be important for those teachers, who are practising Wagenschein's exemplaric way of teaching.

1 Das Anliegen dieses Beitrags

1.1 Nicht verstehen können und nicht verstehen wollen

Der niederländische Chemiedidaktiker Henk ten Voorde hat in den Siebziger Jahren – anknüpfend an die „Niveautheorie" der Mathematikdidaktikerin D. van Hiele-Geldof (1957) – auf die „Kluft des Nicht-Verstehen-Könnens" hingewiesen, die im Unterricht regelmäßig auftritt, weil der Fachbegriff des/der wissenschaftlich ausgebildeten Lehrers/Lehrerin nicht mit dem Lebensweltbegriff des Schülers/der Schülerin übereinstimmt (ten Voorde 1977, 1983, 1987). Inzwischen ist diese Kluft durch zahlreiche Untersuchungen von Schülervorstellungen reichlich belegt (Pfundt & Duit 1994).

Folgt man dem Ansatz der Affektlogik (Ciompi 1997), der – grob gesprochen – davon ausgeht, dass jedem Denkprozess stets ein Affekt vorgelagert ist, der darüber entscheidet, ob verstanden oder nicht verstanden wird, dann ist zu erwarten, dass nicht nur kognitive, sondern eben auch affektive Verstehenshemmungen im Fachunterricht zu erwarten sind. Wir möchten dieses affektive Verstehenshindernis die „Kluft des Nicht-Verstehen-Wollens" nennen, selbst wenn der vorgeschaltete Affekt, etwa eine Abneigung, nicht bewusst auftritt. Uns ist ein solches Hindernis im Zusammenhang mit der Wagenscheinschen genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehr-Lernmethode deutlich geworden, das wir in diesem Beitrag phänomenographisch (Marton 1981, Marton & Booth 1997) untersuchen wollen. Die Tragweite einer solchen vermutlich weit verbreiteten „Kluft-des-Nicht-Verstehen-Wollens“ betrifft nicht nur den Fachunterricht, sondern – darüber hinaus – die Akzeptanz der Mathematik und Naturwissenschaft und damit auch indirekt die *mathematical* und die *scientific literacy.*

Was wir hier phänomenographisch beschreiben wollen, ist uns in einer *schulpädagogischen* Lehrveranstaltung begegnet, nicht in einer mathematikdidaktischen. Wir halten es für bemerkenswert, dass das konsequente Betrachten von genuinen Verstehensprozessen – Rumpf (2002) hebt solches Verstehen in den von ihm herausgegebenen „pädagogischen [Wagenschein-]Texten zum Bestehen der Wissenschaftsgesellschaft“ typographisch als „WIRKLICHES Verstehen“ hervor – auch einen Nichtmathematiker (wie wir es sind) zu einem der Grundlagenprobleme der Wissenschaft – hier der Mathematik (vgl. Kleinert 2002) – hinführt. In einer gewissen Weise tragen wir als Nichtmathematiker damit Eulen nach Athen: Natürlich wird in der Mathematikdidaktik selbst die in unserem Beitrag angesprochene Kluft zwischen strengem Beweis und dem inhaltlich anschaulichen Zugang zur Mathematik längst breit diskutiert, zumal Wagenschein, in dessen schulpädagogischen Zusammenhang unser Beitrag entstanden ist, von Hause aus Mathematikdidaktiker war[1]. Wir glauben gleichwohl, auch Mathematikdidaktikern einen Hinweis geben zu können: Bei dieser Untersuchung ist uns ein wesentliches Anliegen Wagenscheins deutlich geworden, das er mit den Begriffen „Aufmerksamkeit“ und „Einwurzelung“ in Worte fasst (wir werden es in Abschnitt 5 genauer entfalten). Dieses Anliegen halten wir für einen zentralen Punkt der Wagenschein'schen Lehr- und Lernmethode, obgleich es von den meisten Autoren, die Wagenschein und seine Pädagogik thematisieren, nicht ins Auge gefasst wird.

1.2 Die Unterrichtsmethode Wagenscheins, unsere Ausgangsfrage und die Methode ihrer Beantwortung

Wer Wagenschein verstehen will, kommt am Begriff „genetisch-sokratisch-exemplarisch“ nicht vorbei. Dieser Begriff steht für eine pädagogisch fundierte, didaktisch bestimmte und methodisch festgelegte Praxis. Er ist nicht so zu verstehen, dass die drei Worte „genetisch“, „sokratisch“, „exemplarisch“ einzeln der Pädagogik, der Didaktik und der Methodik zugeordnet werden könnten; sie bilden, wie Wagenschein dies beschreibt, ein verbundenes Ganzes (Wagenschein 1982, Wagenschein, Köhnlein & Buck 1981). In jedem der drei steckt Pädagogisches (z. B. eine menschliche Grundhaltung), Didaktisches (z. B. eine inhaltliche Zielsetzung) und Methodisches (ein Arrangement, das jeden Einzelnen ernst nimmt). Gleich-

---

1 Nicht von ungefähr spricht E. C. Wittmann in einem mit einem Titel Wagenscheins überschriebenen Beitrag „Rettet die Phänomene“ (Wittmann 2001) oder in einem anderen, mit Gerhard Müller verfassten Beitrag „Wann ist ein Beweis ein Beweis?“ (Wittmann & Müller 1990) die ganze Bedeutsamkeit der hier von uns entwickelten Frage an.

wohl drücken die drei Begriffe bestimmte Akzente aus. So verweist das *Genetische* (auch als Überbegriff, der alle drei umfasst) auf eine pädagogische Grundhaltung, für die das Erwachen des Verstehens, das Reifen der Erkenntnis (das WIRKLICHE Verstehen, wie Rumpf (2002) es satztechnisch hervorhebt) leitend ist. Das *Sokratische* markiert die Mäeutik, die Hebammenkunst, die zum Gelingen des Genetischen notwendig ist, und weist dem sokratischen Lehrer (Gesprächsleiter) hin und wieder die Rolle einer Stechfliege zu. Dies Studierenden zu vermitteln, gelingt meist problemlos.

Für seine „genetisch-sokratisch-exemplarische" Unterrichtsmethode charakterisiert Martin Wagenschein das *Exemplarische* als ein „Erleuchten des Ganzen" (Wagenschein 1982, 18). Ein einzelnes, gut gewähltes Exemplum aus dem Bereich der Mathematik könne das Wesen der ganzen Mathematik aufscheinen lassen. Am Beispiel des Satzes von Pythagoras führt Wagenschein dies inhaltlich aus. Es ermöglicht, „von einem geeigneten Knotenpunkt aus die systematischen Beziehungen [zu] entdecken", sagt er und nennt unter vielen anderen Stichpunkten die Irrationalen Zahlen, die Infinitesimalrechnung, die Ähnlichkeitslehre (Wagenschein 1970, S. 409/410). Wichtiger noch als diese inhaltliche Seite ist uns aber der Beitrag seiner Unterrichtsmethode zur Ausbildung von Selbstkompetenz, zum „Aufbau von Selbstvertrauen", wie Wagenschein es formuliert (Wagenschein 1970, S. 416).

In einer gemeinsamen Lehrveranstaltung an unserer Hochschule hatten wir „Das exemplarische Prinzip" bei Wagenschein zum Thema gemacht. Unser Lehrarrangement zielte nicht auf die verbal-explikative Vermittlung dessen, was unter dem Exemplarischen zu verstehen sei, sondern wir wollten es an einem Beispiel vorführen und vielleicht auch – wie wir hofften – mit*erleben* lassen, wie das Exemplarische Prinzip auf den Lernenden/die Lernende selbst zurückwirkt.

Bei der ernsthaften Vorführung des Exemplarischen Prinzips sind wir indessen immer wieder an Grenzen gestoßen. Diese Grenzen werden wohl gezogen einerseits durch den Konventionencharakter der Wissenschaft selbst, die durch das Exemplum entfaltet werden soll, andererseits durch eine Nichthintergehbarkeit von Zugriffsmodi (gemeint ist hier die Art und Weise, wie eine Person denkend an eine Problemstellung heran geht, seine Denk- und Argumentationsmethoden und Argumentationsmuster)[2]. Diese beiden Grenzen *des Exemplarischen Prinzips* bilden den Gegenstand dieses Beitrags, den wir noch einmal in Frageform formulieren:

1. *Der Konventionencharakter wissenschaftlicher Beschreibung*: Kann es überhaupt ein *einheitliches* Ergebnis eines Sokratischen Gesprächs geben, das mit den bestehenden Ergebnissen der Wissenschaft (genauer: der „Normal Science" (T. S. Kuhn 1976)) korrespondiert?

---

[2] Zum Begriff der Zugangsmodi vgl. Buck (1996)

2. *Die Nichthintergehbarkeit gewählter Zugriffsmodi*: Muss nicht immer mit unterschiedlichen Zugriffsmodi der agierenden Personen gerechnet werden, so dass Konsens erst nach langwieriger, nüchterner und offener Diskussion erreicht werden kann?

Wir zeigen die Grenzen des Exemplarischen zunächst an einem geometrischen Problem auf, das wir auch in unserer Lehrveranstaltung als Exemplum eingesetzt haben und das nach Wagenscheins eigenen Worten ein *geeignetes* Problem für die genetisch-sokratisch-exemplarische Lehrweise ist. An diesem geometrischen Problem arbeiten wir die unüberwindliche Diskrepanz von zwei Verstehensprozessen heraus, die auf unterschiedlichen Zugriffsmodi beruhen. In einer phänomenographischen Analyse[3] präparieren wir anschließend mit Hilfe von Henri Bortofts Unterscheidung zwischen „analytischem" und „intuitivem Denken" die unterschiedlichen Zugriffsmodi der Problemlösung heraus und können diese dann auch benennen. Die verschiedenen Verständnisse, als solche, müssen nebeneinander stehen bleiben und können nicht ineinander überführt werden. Wir stellen uns die Frage, ob Wagenschein eine solche Verstehensdiskrepanz vorausgesehen hat, und beantworten sie hermeneutisch aus den Beiträgen Wagenscheins, insbesondere aus solchen, die expressis verbis Bezug auf Simone Weil nehmen.

Last but not least sehen wir den Nutzen unserer phänomenographischen Analyse darin, dass wir noch lebende Zeitzeugen, die Wagenscheins Unterricht selbst erlebt haben, präzise zu dem hier aufgeworfenen Problem befragen können: Welche Mathematik meint Wagenschein wohl, wenn er vom „Erleuchten" der „ganzen Mathematik" spricht? Wie ist Wagenschein in konkreten Diskussionssituationen mit der Diskrepanz umgegangen, die wir hier herauspräparieren?

2 Die Genese eines geometrischen Problems und zwei unterschiedlich er-lebte Lösungen

Eine für Wagenschein höchst charakteristische Initiation[4] in einen genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehr- und Lernprozess ist auf einem Film[5] des FWU festgehalten. Wir haben diese Initiation unseren Studierenden im Film vorgeführt

---

3 Zum Begriff der Phänomenographie vgl. Marton (1981), Marton & Booth (1997)

4 ‚Initiation' ist ein Begriff, den Wagenschein benutzte, um damit ein Doppeltes seiner Lehrmethode zum Ausdruck bringen: Vordergründig handelt es sich um den *Anfang* eines Verstehensprozesses („initio"); in einem tieferen Sinn „schreitet man in einer anderen, geheimnisvolleren Dimension [als der Geometrie] vor", wie Simone Weil dies in ihrer „Betrachtung über den rechten Gebrauch des Schulunterrichts und des Studiums im Hinblick auf die Gottesliebe" (Weil 1953, S. 97) formulierte, auf die Wagenschein mehrfach expressis verbis hinwies.

5 Martin Wagenschein: Anmerkungen zum Genetischen Prinzip im Physikunterricht. FWU, 1970. Serie: Pädagogen sprechen.

und anschließend einen sokratischen Dialog über das geometrische Problem inszeniert:

Wagenschein beginnt im genannten Film so: „*Wenn Sie ein Dreieck sich hinmalen*“ – man sieht, wie Wagenschein ein solches Dreieck in die Luft malt – „*und dann die so genannten Winkelhalbierenden zeichnen*“, – er zieht mit der Hand an der passenden Stelle drei imaginierte Geraden ein – „*Nicht dass sie diesen Namen haben müssten! Gar nicht! Nein, nein. Nicht diese Fachsprache. Nicht, gar nicht. Eine Linie ist ja auch nichts Winkelhalbierendes.*“ – Kurze Sprechpause. – „*Die gehen in der Mitte zwischen den Schenkeln des Winkels gehen die durch.*“ – Die linke Hand Wagenscheins bewegt sich von links unten nach rechts oben, der rechte Arm mit gestreckter Hand markiert die Basis des Dreiecks – „*Immer schön in der Mitte, nicht?*“ – Wagenschein schaut sein Gegenüber an. – „*Können Sie sich's vorstellen?*“ – Er hat mit seiner Ansprache längst die Aufmerksamkeit des Gegenüber (und der Filmbetrachter) eingefangen. – „*Ich sage Ihnen jetzt, wie ich das einführe für die Schüler. Denn ich habe ja die Aufgabe, nicht bloß das Rätsel zu stellen, sondern es sogar zu verstärken, die Rätselhaftigkeit, indem ich etwa sage: Aus dieser Ecke*“ – erneut die linke Hand wie vorhin von links unten nach rechts oben, aber diesmal flattern die Finger ein wenig und verstärken so den Prozesscharakter seiner Betrachtung – „*Aus dieser Ecke vom Dreieck kommt also die Winkelhalbierende heraus. Immer gerade. Gut! Da ist sie!*“ – Die linke Hand wiederholt nochmals im Schnellgang ihren winkelhalbierenden Weg. – „*Aus einer anderen Ecke kommt eine Zweite.*“ – Die rechte Hand bewegt sich jetzt von rechts unten nach links oben. – „*Das sehen Sie, dass sie sich da schneidet in einem Punkt. Das ist ja klar, nicht?*“ – wieder Blickkontakt mit dem Gegenüber – „*Die müssen sich schneiden, nicht?*“ – Wagenschein zeigt auf einen imaginierten Punkt. „*Aber jetzt kommt aus der dritten Ecke eine.*“ – Die linke Hand kommt jetzt von oben lotrecht mit ausgestrecktem Zeigefinger nach unten. – „*Und dann erlaube ich mir zu sagen: Die weiß von nichts! [Die dritte Linie] Worauf die Kollegen von der Schule empört sind. Die weiß von nichts. Die hat nur im Kopf: Immer auch zwischen den beiden entlang!*“ – Die beiden Seiten des Dreiecks, an denen sich die dritte, in der Luft gezeichnete Winkelhalbierende orientiert, wird mit beiden Händen und Armen angedeutet. – „*Und zwar, sieht man, genau auf die beiden anderen los. Das kann jeder auf seiner Zeichnung sehen: Die steuert genau auf den Schnittpunkt von den beiden anderen los.*“ – Der rechte Finger stößt auf diesen imaginierten Schnittpunkt zu und der Betrachter wird erneut in Blickkontakt genommen: „*Kann man das verstehen? Oder nicht? Ist doch rätselhaft nicht?*“ – Acht lange Schweigesekunden, bevor Wagenschein weiterredet.

Hier haben wir den Film abgebrochen und anschließend den Studenten vorgespielt, wie ein sokratisches Gespräch nach einer solchen Initiation weitergehen könnte.

Der nachstehende Dialog zwischen B und M rekonstruiert die dabei hin- und hergehende Diskussion.[6]

B hat zunächst eine ins Abseits führende Argumentation vorgebracht, die wir hier nicht weiter berichten. Dann aber argumentiert er so, indem er auf dem Overheadprojektor Skizzen wie in Abb. 1 zeichnet und diese erläutert: „*Wenn ich in das Dreieck einen Kreis einzeichne, der zwei Schenkel berührt, dann liegt sein Mittelpunkt genau zwischen den beiden Schenkeln. Und ein zweiter Kreis genauso. Die Verbindungslinie aller Mittelpunkte solcher Kreise ist also genau die Winkelhalbierende. Das gilt für jeden Kreis, den ich von der Ecke B aus zeichne. Irgendwann komme ich, wenn ich meine Kreise immer größer ziehe, an einen Punkt, wo dieser neue Kreis die gegenüberliegende Seite des Dreiecks berührt. Es gibt genau nur einen Kreis, der gleichzeitig auch die gegenüberliegende Seite berührt. Das* kann *nur* ein *Kreis sein, denn jeder größere Kreis hat mindestens vier Punkte mit dem Dreieck gemeinsam und jeder kleinere nur zwei. Und das gilt ja für jedes Schenkelpaar in jeder Ecke.*“

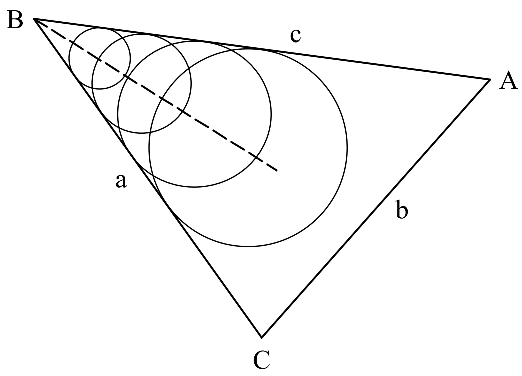

Abbildung 1

M wendet nun ein (Abb. 2 bis 4): „*Das ist doch noch lange kein Beweis. Meine Idee wäre folgende: Ich habe ein Dreieck, in dem zwei Winkelhalbierende eingezeichnet sind, sie schneiden sich im Schnittpunkt* M_x*.*

[6] Der folgende Dialog fand in unserer Lehrveranstaltung statt. Er war nicht im Detail vorgeplant, sondern wurde improvisiert. Wir rekonstruieren auf den folgenden Seiten die damalige Gesprächsabfolge.

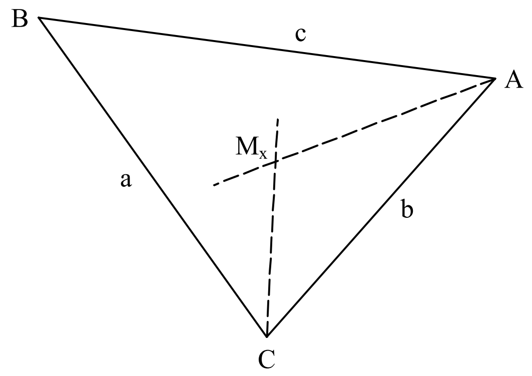

Abbildung 2

Ich nehme nun einen Punkt an, sagen wir den Punkt M_1. Diesen Punkt will ich auf der Winkelhalbierenden hin und her bewegen. Von den Punkten A_1 und B_1, die auf den Seiten a bzw. b des Dreiecks liegen, fälle ich jeweils das Lot auf den Punkt M_1. Diese Lote sollen nun mit dem Punkt M_1 mitwandern können. Das gleiche mache ich bei der zweiten Winkelhalbierenden, ich nenne den Punkt auf dieser Winkelhalbierenden zur Unterscheidung M_2 und fälle die Lote von B_2 und C_2, die auf den Seiten b bzw. c liegen, auf M_2.

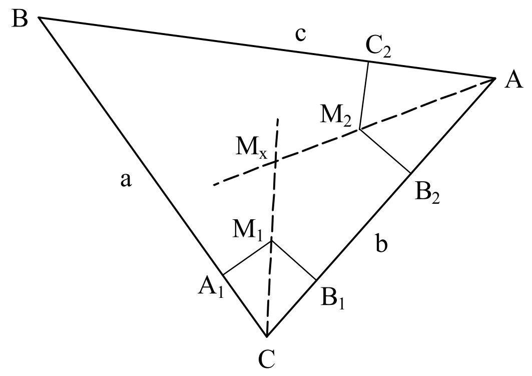

Abbildung 3

Dabei ergeben sich nun Strecken, die sich wie folgt zueinander verhalten:

$$M_1A_1 = M_1B_1 \text{ und } M_2B_2 = M_2C_2.$$

Nun lasse ich die beiden Punkte M_1 und M_2 aufeinander zu wandern, bis sie sich im Schnittpunkt M_x der beiden Winkelhalbierenden treffen. Das heißt $M_1=M_2=M_x$. Auch im Punkt M_x werden die gleichen Lote gefällt (auf die Punke A_x und B_x). Im Punkt M_x gibt es dann nur ein Lot auf die Seiten des Dreiecks. Es gilt jetzt:

$$M_xA_x = M_xB_x \text{ und } M_xB_x = M_xC_x.$$

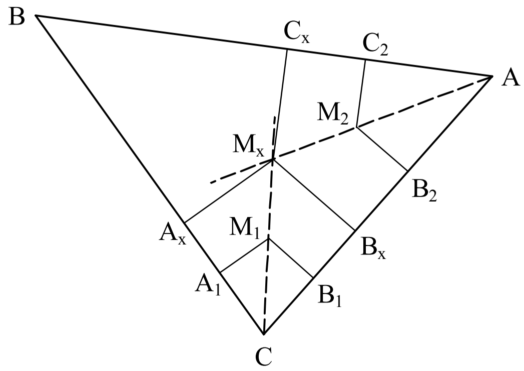

Abbildung 4

Also, obwohl ja mit $M_xA_x = M_xB_x$ und $M_xB_x = M_xC_x$ schon alles gesagt ist, wiederhole ich doch noch einmal, damit man es besser versteht: Wenn nun die dritte Winkelhalbierende die beiden anderen Winkelhalbierenden im Punkte M_x schneiden sollte (d.h. wenn alle drei Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden), dann müsste ebenfalls gelten: $M_xB_x = M_xC_x$.

Schaut man sich das oben genannte Verhältnis der Strecken zueinander mit einem schlussfolgernden Blick an, drängt sich doch der Schluss auf:

Wenn $M_xA_x = M_xB_x$ und $M_xC_x = M_xB_x$ dann folgt daraus das gesuchte Verhältnis: $M_xA_x = M_xC_x$.

Wenn dem so ist (also $M_xA_x = M_xC_x$), dann trifft die dritte Winkelhalbierende die beiden anderen genau in M_x (also in einem einzigen gemeinsamen Punkt), und das heißt alle drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.“

B: „*Das mag ja alles stimmen, aber mich überzeugt dein Beweis trotzdem nicht! Erstens ist das alles viel zu kompliziert, also nicht elegant genug. Zweitens bringst du da unnötige und fremde Elemente ins Spiel: Du fällst Lote auf die Seiten des Dreiecks und vor allem diese vielen Gleichungen! Ich kann damit nichts anfangen!*

Ich mach' das anders: Ich geh' genau so vor, wie der Wagenschein das gezeigt hat: Diese Winkelhalbierende – die hält immer genau den gleichen Abstand von den Seiten. Wenn ich von dieser Winkelhalbierenden aus irgendeinen Kreis ziehe, der die Seiten berührt, dann muss *er die beiden Schenkel des Winkels gleichzeitig treffen, denn er hält doch genau den gleichen Abstand. Und ein Kreis berührt eine Gerade nur in einem Punkt, sonst schneidet er die Gerade und das ergäbe dann zwei Schnittpunkte. Und wenn ich ihn nun in Gedanken immer größer mache, stufenlos, bis er die gegenüberliegende Seite des Dreiecks trifft, gerade eben berührt, dann trifft dieser Kreis das Dreieck an genau drei Punkten, an jeder Seite genau einmal. Sein Mittelpunkt liegt dann nicht nur auf der Winkelhalbierenden, die von A ausgeht, sondern auch auf der Winkelhalbierenden, die von B ausgeht, und natürlich auch auf der, die von C ausgeht.*"

M: „*Aber wo liegt hier der logische Schluss? Woher weißt du, dass sein Mittelpunkt dann nicht nur auf der Winkelhalbierenden liegen wird, die von A ausgeht, sondern auch auf der Winkelhalbierenden, die von B ausgeht und natürlich auch auf der, die von C ausgeht liegen wird? Wenn die dritte Winkelhalbierende von C losläuft, wie es Wagenschein gezeigt hat, und nun eben nicht die beiden anderen in deren Schnittpunkt trifft, sondern eben ein bisschen daneben, dann gäbe es doch drei verschiedene Kreise und drei verschiedene Mittelpunkte auf drei verschiedenen Geraden! Woher weißt du überhaupt, dass dein letzter Kreis, wenn er die gegenüberliegende Seite berührt, mit seinem Mittelpunkt genau an der Stelle angekommen ist, wo auch der Schnittpunkt der beiden anderen Winkelhalbierenden liegt? Und genauso bei der, die von C losgeht! Woher weißt du, dass es nicht drei Kreise gibt statt einem nur? Und ebenso, dass es nicht drei Schnittpunkte der Winkelhalbierenden gibt statt einem nur? Es könnte ja sein, dass sich die drei Mittelpunkte der Kreise, die da aus den Ecken aufeinander zu kommen, nicht in einem Punkt treffen. Es könnten ja auch drei Punkte (bzw. drei Kreise) sein, die einen nur sehr kleinen Abstand voneinander haben, den man in einer Zeichnung (also in einer empirischen Lösung) nicht sehen kann.*"

B: „*Nein, das kann gar nicht sein! Wie soll das zugehen? Wenn du meinen Kreis nimmst, der gerade eben die gegenüberliegende Seite von A berührt hat, sie genau an* einem *Punkt auf der gegenüberliegenden Seite berührt und du bewegst jetzt diesen Kreis ein kleines bisschen in Richtung B, dann schneidet dieser Kreis die Schenkel des Winkels, der von B ausgeht jeweils zweimal und er verliert dabei die Berührung mit der Dreiecksseite, die B gegenüberliegt. Außerdem liegt sein Mittelpunkt nun auch nicht mehr auf der Winkelhalbierenden, die von A ausgeht. Du siehst also, dieser ausgezeichnete Kreis, der das Dreieck genau dreimal, nicht weniger und nicht öfter, berührt, der darf seinen Mittelpunkt nur auf der Winkelhalbierenden haben, zunächst nur mal auf der Winkelhalbierenden, die von A ausgeht. Und das muss doch ganz genau so auch für* *die Winkelhalbierenden von B aus und von C aus zutreffen. Bis jetzt hab' ich das ja nur von A aus gemacht: Den Kreis immer größer gemacht. Erst berührt er das Dreieck nur zweimal, dann an genau einem Punkt berührt er die A gegenüber liegende Seite. Hier an diesem einen Punkt berührt er das Dreieck genau dreimal; – ein bisschen größer, und schon gibt es vier gemeinsame Punkte. Dasselbe Spiel kann ich von jeder Ecke aus machen: Immer gibt es einen ausgezeichneten Kreis, der das Dreieck genau dreimal berührt. Diesen ausgezeichneten Kreis kann es nur einmal geben, denn sobald er ein bisschen größer gerät oder sein Mittelpunkt ein bisschen von der Winkelhalbierenden abkommt – für jede der drei Winkelhalbierenden gilt das übrigens! – gibt es mehr oder weniger Schnittpunkte/Berührungspunkte mit dem Dreieck, aber nicht genau drei!*"

M: „*Das überzeugt mich überhaupt nicht, denn du verlässt dich ganz auf deine Anschauung. Du argumentierst nicht logisch. Die Mathematik verlässt sich nicht auf zeichnerische und also empirische Lösungen, die du anstrebst. Sie geht vielmehr denkend vor und zieht logische Schlussfolgerungen heran! Gleichungen und logischen Figuren, wie ich sie benutze,* helfen *nur, meine logische Schlussfolgerung, die ja bei dir erst gar nicht vorkommt, zu verstehen: Ich* beweise *aber mit der allgemeingültigen Schlussfolgerung: Wenn $A = B$ und $B = C$, dann ist auch $A = C$. Du aber willst dich auf eine Zeichnung verlassen, also auf Empirie, und da fehlt dann einfach die allgemein nachvollziehbare Logik*!"

B: „*Ich argumentiere nicht wie du, das stimmt, aber mein Beweis ist trotzdem kräftiger und überzeugender* für mich*, denn ich sehe ihn genau vor Augen. Ich sehe den einen, besonderen Kreis, der alle drei Seiten berührt, ich seh' diesen Kreis vor mir und wie er von allen Seiten, von wo auch immer du ihn anguckst, wie er von allen Seiten gleich rund ist. Deshalb ist es egal, ob ich ihn von A oder von B oder von C aus betrachte. Das gehört zu meinem Argument, dass er von außen, wo er die Geraden, die das Dreieck bilden, berührt, ununterscheidbar gleich aussieht. Zu meinem Argument gehört auch, dass sein Mittelpunkt immer auf einer Winkelhalbierenden liegen muss. Das liegt an der geradlinigen Beschaffenheit der beiden Schenkel, die den Winkel bilden. Die dürfen meine Kreise ja nur je einmal, nicht weniger und nicht öfter, berühren.*

Deine Abstände A_1M_1, A_2M_2, B_xM_x usw. sind, wenn du so willst, die Radien meiner Kreise. Trotzdem brauche ich deine Rechnungen nicht, denn das „gekrümmte" Wesen der Kreises (was ich damit meine, habe ich soeben ausgesprochen), gepaart mit dem „streng geradlinigen" Wesen des Dreiecks ergeben für mich in meinem inneren Bild zwangsläufig die für mich eben evidentere Lösung der von Wagenschein gestellten Frage. Es ist nicht falsch, was du sagst, aber es ist einfach nicht überzeugend für mich, denn diese Rechnerei von dir ist mühsam und du kannst tausend Fehler dabei machen."

M: „*Und du kannst tausend Scheinbildern aufsitzen. Was du mir erzählst, kommt mir suspekt vor. Das versteht* du *vielleicht, aber sonst kein anderer. Ich halte mich lieber an die Logik eines klassischen Beweises. Die kann jeder verstehen. Die Mathematik ist ein System von Konventionen, das als Verständigungssystem dient.* Und wenn jemand etwas mathematisch beweisen will, muss er dieses Verständigungssystem benutzen. *Dazu gehört auch die Form von Beweisen. Verständigen können sich natürlich nur diejenigen, die in das System eingeweiht sind.*"

B: „*Das verstehe ich nicht: Ich verwende doch die klassische Definition eines Kreises als eines Ortes, dessen* sämtliche *Punkte gleich weit von seinem Mittelpunkt entfernt sind und die ebenso klassische Definition einer Tangente (die Seiten des Dreiecks sind doch Tangenten in meiner Beweisführung), dass sie einen Kreis* nur an einem Punkt *berührt. Mit diesem „sämtliche" und „nur an einem Punkt" argumentiere ich doch gerade!*"

3 Eine Phänomenographie zweier Verstehensprozesse

Wir lösen an dieser Stelle die Argumentation zunächst *nicht* von den Personen ab, die sie vorbringen, denn mit der Ablösung eines Verständnisses von der Person wird der Verstehensinhalt zwar präziser gefasst, zugleich aber geht dabei Exaktheit verloren. Wir unterscheiden der Ethymologie der beiden Begriffe „präzis" und „exakt" entsprechend zwischen einer durch Abstraktion *präziser* (eindeutiger, zugespitzter, trennschärfer; → prae-cidere = abhacken, abschneiden) gewordenen Begriffsbildung (≅ Verstehensprozess) und einem durch umfassende Beschreibung genauer, *exakter* (→ ex-actus = gut ausgeführt) gewordenen Begriffsbildung (vgl. Buck 1990). Wir halten zugleich fest, dass die von B vorgebrachte Argumentation β für B evident ist, d.h. als „stärker" bewertet wird, für M ist das nicht so. Umgekehrt hat M's Argumentation μ für B zu wenig Überzeugungskraft, auch wenn B zugibt, sie zu akzeptieren.

Die phänomenographische Analyse verwendet zur Verortung verschiedener Vorstellungen/Begriffe/schèmes (wie Piaget (1976) sagt) ein und desselben Phänomens skizzenhafte Zeichnungen, die quasi als Landkarten fungieren. Lybeck, Marton, Strömdahl und Tullberg (1988) haben z. B. für den chemischen Begriff ‚Mol', der ähnliche Schwierigkeiten birgt, das Schema der Abbildung 5 entwickelt. In dieser Zeichnung werden Bedeutungsaspekte des Phänomens „Mol" verortet und ihr Verhältnis zueinander dargestellt. Eine solche Skizze versetzt die phänomenographisch arbeitenden Forscher in die Lage, z. B. in Interviews geäußerte Aussagen eines Probanden einzuordnen, dessen Argumentationsgang festzuhalten und den Grad des Verstehens und ggf. auch Defizite und Unvollständigkeiten zu erfassen.

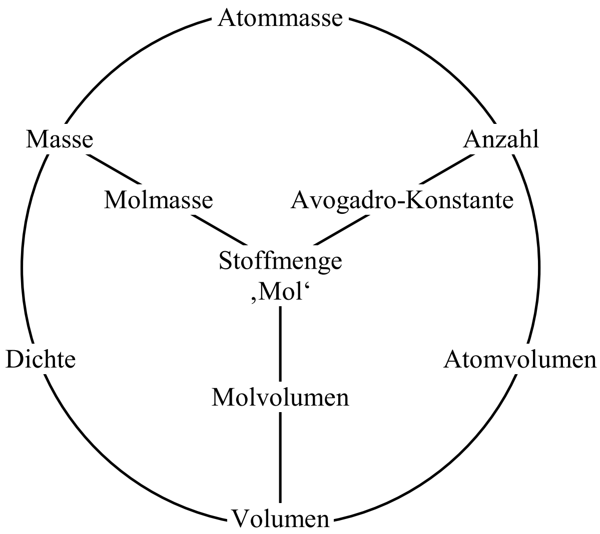

Abbildung 5

Für unser Beispiel der drei Winkelhalbierenden ziehen wir hierzu ein Schema des Wissenschaftstheoretikers Henri Bortoft heran (Abb. 6). Bortoft unterscheidet zwischen *ganzheitlicher* (*holistischer*) und *analytischer* Erkenntnisgewinnung, die er am Vergleich einer Holografie mit einer Fotografie erläutert:

> „Das Hologramm[7] liefert ein Modell für die Vielfalt in der Einheit. Es gibt verschiedene ungewöhnliche Eigenschaften des Hologramms; die, die hier interessiert, hängt mit dem zusammen, was passiert, wenn man einen Film in, sagen wir, zwei Teile zerschneidet. Bei einem konventionellen Foto oder Dia würde das Bild zerteilt, so dass unterschiedliche Teile des fotografierten Objekts auf jedem Teilstück zu sehen wären. Wenn ein Hologramm-Film in zwei Teile zerschnitten wird, wird das vollständige Objekt durch jeden Film-Teil optisch rekonstruiert. Die wiederholte Teilung eines Hologramm-Films ist zwar materiell eine extensive Operation – jedes Teilstück wird immer kleiner. Optisch aber ist die Teilung intensiv – es wird zwar geteilt, aber bleibt doch

[7] Holographie ist Fotographie mit Laserlicht. Das Hologramm eines Objekts ist ein Film, der eine vollständige dreidimensionale Rekonstruktion des Objekts zur Erscheinung bringen kann, wenn sie richtig beleuchtet wird. Was auf dem Film zu sehen ist, zeigt keine Ähnlichkeit wie auch immer mit dem holographierten Objekt. Wenn man aber durch den Film hindurchschaut, sieht es aus, als ob das Objekt im Raum dahinter wäre. Es sieht so aus, als ob die dreidimensionale visuelle Erscheinung des Objekts von ihm abgezogen wäre, wie eine Haut, und dort, im Raum hinter dem Film, hingestellt wäre.

> ein Ganzes, reproduziert Vielfalt in der Einheit. Während es dann materiell viele Hologramme („die Vielen") gibt, gibt es optisch nur ein Hologramm (das Eine, das die vielen ist), weil jedes zerteilte Materiestück genau dieses eine Hologramm ist. …
>
> Es ist jetzt möglich, den Unterschied zwischen dem Allgemeinen und dem Universellen zu klären. Es ist klar, dass das Allgemeine die Struktur der Einheit in der Vielfalt aufweist, denn sie betrifft das Gemeinsame vieler partikulärer Fälle. Das Universelle dagegen hat die Struktur der Vielfalt in der Einheit und diese wird nicht dadurch erreicht, dass man von den vielen Einzelfällen zurücktritt, um einen Überblick zu gewinnen, sondern nur durch einen Wechsel des Bewußtseinszugriffs. In diesem Fall sieht man das Eine in den Vielen wiedergespiegelt, so dass die Vielen im Lichte dieses Einen erscheinen, und nicht dadurch, dass man in einer mentalen Abstraktion versuchte, das Eine aus den Vielen herauszudestillieren. Das Universelle ist daher die Einheit des intuitiven Verstandes. Das Allgemeine ist die Einheit des intellektuellen Verstandes." (Bortoft 1996, S. 85 ff.)

Während M oben offensichtlich analytisch argumentiert hat, eine Aussage logisch an die andere reihend, und so zu einem *allgemeinen* Beweis kommt, in dem er vor allem auf die Einheit in der Vielfalt abhebt (am Punkt M_x ist $M_xA_x = M_xB_x = M_xC_x$) und diese betont, argumentiert B offensichtlich anders: Er betont immer wieder, dass es ja nur einen Kreis geben kann, der die drei Seiten des Dreiecks tangential berührt. Diese Einsicht kommt ihm intuitiv. Ihre Evidenz ist für B *nicht hintergehbar*. Er sieht das (ganzheitlich) Universelle des Kreises in diesem speziellen Kreis verwirklicht.

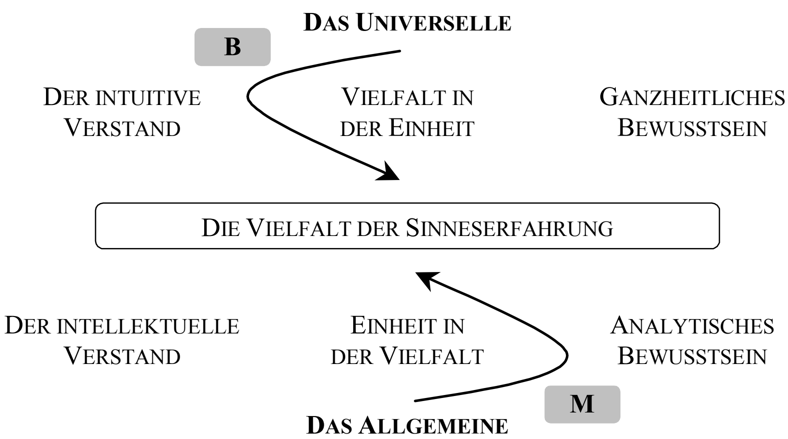

Abbildung 6

Wir sprechen daher zur Charakterisierung der beiden Verstehensprozesse von einem *analytischen Zugriffsmodus* (bei M) und einem *intuitiven Zugriffsmodus* (bei B). Abbildung 6 verortet die Argumentation von M und B in das oben stehende Schema von Bortoft.

Diese nicht wertende Sprechweise vom analytischen (M) und intuitiven (B) Zugriffsmodus erlaubt uns, die wertende Sprechweise von M bzw. B aufzulösen. Für sich genommen ist dies bereits ein Abstraktionsprozess (wir sehen nämlich von der persönlichen Evidenz ab), der sowohl der ganzheitlichen (intuitiven) als auch der klassischen logisch-analytischen Erkenntnisgewinnung zu Gute kommt, wenn wir intersubjektiv und „sachlich“ über die beiden Lösungswege sprechen wollen.

Nun mag man an dieser Stelle argumentieren: Was soll’s? Die Mathematiker haben sich auf Beweisverfahren wie das von M verwendete geeinigt und misstrauen der Intuition zu Recht. Im Arbeitskreis von Ephraim Fischbein sind schließlich zahllose Belege für „intuitive Regeln“ gesammelt worden, die habituell und nicht etwa einzelfallweise in die Irre führen (Stavy & Tirosh 2000). Fischbein selbst (1987) spricht von der „*fundamental* widersprüchlichen Natur der Intuition“: „Was ‚imperfekt‘ ist, kann nicht als sicher genommen werden“ (S. 63), lautet der Widerspruch. Gleichwohl gibt er uns mit einer Klassifizierung der Intuitionen ein Instrument in die Hand, die relative Sicherheit einer Intuition zu beurteilen. Er unterscheidet zunächst zwischen einer „semantischen“ und einer „antizipatorischen“ Intuition. Eine „semantische Intuition“ wie die von B (er argumentiert – formal gesehen – mit der Bedeutung des Begriffs ‚Tangente‘) hat eben eine größere Verlässlichkeit als eine „antizipatorische Intuition“, die eben noch „bewiesen“ werden muss.

Fischbein betont die große Bedeutung der Intuition für ein mathematisches Verständnis und er spricht von einem „*profunden* Widerspruch“ zwischen der *Natur der Mathematik,* die von der Intuition lebt, und der *Natur der mathematischen Argumentierweise* („reasoning“), die sie zu überwinden versucht (S. 212). Beide Widersprüche, den „fundamentalen“ Widerspruch jeglicher Intuition (vor Evidenz strotzend und *zugleich* unzuverlässig) und den „profunden“ Widerspruch zwischen Mathematik und mathematischer Argumentierweise, vermag Fischbein nicht aufzuheben. Wer könnte das auch?

Den Lehrerinnen und Lehrern, die sich an einer Unterrichtsform nach Wagenschein orientieren, kann es indessen nicht egal sein, welcher Zugriffsmodus und damit verbunden auch welche Gefühle (z.B. der Evidenz) mit dem selbst vollzogenen, genuinen Verstehensprozess verbunden sind. Sie/Er muss sich auch der Gleichwertigkeit der beiden Zugriffsmodi bewusst sein. In einem Unterricht, der sich an Wagenschein orientiert, wird man es schließlich *begrüßen*, wenn so verschiedenartige Argumentationsweisen auftreten, denn der eine Lerner kann dabei nur vom anderen lernen.

5 Unterschiedliche Formen von *awareness*

Die beiden in Abschnitt 4 beschriebenen Zugriffsmodi, der auf mathematischer Beweisführung beruhende analytische Zugriff von M wie der mit Beweisprozeduren nicht beizukommende, intuitive Zugriff von B, setzen unterschiedliche inhaltliche „Füllungen“ von Offenheit, Überzeugung und persönlicher Hinwendung voraus. Marton und Booth (1997) nennen die hier angesprochene psychische Disposition „awareness“ – wir übersetzen: „Bewusstheitsqualität“. Geht man von unterschiedlich gegebenen Formen und Graden von *awareness* aus, fällt ins Auge, dass Wagenschein sich mit den für ihn zentralen Begriffen „Einwurzelung“ und „Aufmerksamkeit“ dem intuitiven Zugriffsmodus mit Nachdruck zuwendet. Auch Horst Rumpf hält Wagenscheins Aufsatz „Über die Aufmerksamkeit“ zu Recht für einen *grundlegenden* Aufsatz im Werk Wagenscheins[8]. In ihm bedient sich Wagenschein ausführlicher Passagen aus Simone Weils Wert „Attente de Dieu“[9]. Es lohnt sich in unserem Zusammenhang, einen entscheidenden Abschnitt daraus zu zitieren:

> „Die Aufmerksamkeit besteht darin, das Denken auszusetzen, den Geist verfügbar, leer und für den Gegenstand offen zu halten, die verschiedenen bereits erworbenen Kenntnisse, die man zu benutzen genötigt ist, in sich dem Geist zwar nahe und erreichbar, doch auf einer tieferen Stufe zu halten, ohne dass sie ihn berühren. Der Geist soll hinsichtlich besonderen und schon ausgeformten Gedanken einem Menschen auf einem Berge gleichen, der vor sich hinblickt und gleichzeitig unter sich, doch ohne hinzublicken, viele Wälder und Ebenen bemerkt. Und vor allem soll der Geist leer sein, wartend, nichts suchend, aber bereit, den Gegenstand, der in ihn eingehen wird, in seiner nackten Wahrheit aufzunehmen.“ (Weil 1953, S. 103/104, zitiert nach Wagenschein 2002, S. 30)

Diese freihaltende Aktivität des *Er-wartens*, (d. h. nicht suchen, sondern bereit sein) scheint uns letztlich die Bedingung dafür zu sein, dass eine Intuition erwachen kann. Wagenschein hat die frei haltende Aktivität des *Er-wartens*, wann immer er die „Regeln des [genetisch-sokratisch-exemplarischen] Gesprächs“ thematisierte, ausdrücklich genannt: „Man sitzt im Kreis, entschlossen, ein natürliches Problem aus eigener Kraft vollständig zu klären; gemeinsam, miteinander, als Freunde. …Jeder fühlt sich verantwortlich dafür, dass *alle* von sich aus verstehen. … Kopf: *leer und wach, erwartend*, ob dir etwas einfällt. …“ Wagenschein 1986, S. 80/81, Hervorhebungen von Wagenschein).

---

8 Vgl. das Vorwort zu Wagenschein (2002“, S. 10.

9 In der Tat ein schwer zu übersetzender Titel. Die niederländische Übersetzung wählt „Wachten op God“, was ein geflügeltes (und völlig deplaziertes) „Warten auf Godot“ assoziiert. Die deutsche Übersetzung trägt den Titel „Das Unglück und die Gottesliebe“ (Weil 1953), ohne dass erklärt wird, was Übersetzer und Verlag im Einzelnen veranlasst hat, diesen (für das gesamte Buch durchaus treffenden) Titel zu wählen.

6 Zusammenfassung

Wir hatten zu Beginn dieses Beitrags zwei Fragen gestellt:

1. Kann es überhaupt ein *einheitliches* Ergebnis eines Sokratischen Gesprächs geben, das mit den bestehenden Ergebnissen der „Normal Science“ (T. S. Kuhn 1976) korrespondiert?
2. Muss nicht immer mit unterschiedlichen Zugriffsmodi der agierenden Personen gerechnet werden, so dass Konsens selbst bei nüchterner und offener Diskussion eigentlich gar nicht erreicht werden kann?

Die erste Frage beruhte auf der These, dass *jegliche* wissenschaftliche Formulierung auf *Konventionen* beruht. Wenn wir akzeptieren, dass die von M und von B gewählten „Beweise“ nicht gegeneinander ausgespielt werden können, sondern jeder von ihnen seine eigene Dignität besitzt, dann können wir auch nicht – ja dürfen dies gar nicht – auf den Weg von M. beharren, den Weg des mathematischen Beweises, weil dieser eben konventionellerweise als der „richtige“ gilt. Insofern muss jegliches genetisch-sokratisch-exemplarische Lehr- und Lern-Arrangement in seiner Zielsetzung so offen sein, dass nur „Verstehen“ als Ziel gesetzt wird. Der Inhalt des Verstandenen hingegen entzieht sich grundsätzlich der normativen Beurteilung als „falsch“, „richtig“ oder „logisch“. Nur der Verstehende kann beurteilen, ob er ein gegebenes Phänomen (hier: den *einen* Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) verstanden hat.

Das heißt aber nicht, dass dann kein Dialog über die (Er-)Klärung des Phänomens mehr möglich ist. Wie im dargestellten Fall B und M einander durchaus verstehen, speist sich der Dialog aus der Möglichkeit einer Perspektivenübernahme. Für die Lehrperson, die ja selbst ein *eigenes* Verstehen in den Unterricht einbringt, heißt diese Situation: Achtung: Halte dich zurück und respektiere den Zugriffmodus dieses Schülers/dieser Schülerin!

Die zweite Frage beruhte auf der These, dass der von einem Lernenden gewählte *Zugriffsmodus* in seinem Verstehensprozess *nicht hintergehbar* sei, d. h. dass es für den Lernenden gar keine wirkliche Alternative zu seinem Zugriffsmodus gibt. Unsere Analyse führt auch hier zum gleichen Ergebnis: Dialog per Perspektivenübernahme ist möglich, aber der Verstehensprozess bleibt *individuell* je nach Zugriffsmodus. Konsens kann vermutlich genau genommen also nicht einmal im mathematischen (oder im naturwissenschaftlichen) Unterricht erreicht werden. An seine Stelle müsste unseres Erachtens die Bereicherung durch das Er-*leben* unterschiedlicher Perspektiven treten.

Wir haben den Titel unseres Beitrags bewusst ein wenig drastisch formuliert: Die Kluft des Nicht-Verstehen-*Wollens*. Es geht dabei nicht um Verweigerung, sondern um ein zumeist unbewusst bleibendes Lernhindernis, das sich ergibt, wenn im Sokratischen Gespräch, in der ernsthaften und selbstgesteuerten Bedeutungsaushandlung unterschiedliche Zugriffsmodi aufeinander stoßen. Hatten die Mathematik-und Chemiedidaktiker van Hiele-Geldof und ten Voorde auf die fatale Wirkung einer unbemerkten semantischen Kluft zwischen Fachsprache und Alltagssprache für das Verstehen der Mathematik bzw. der Chemie hingewiesen, so wollten wir auf Zugriffsunterschiede aufmerksam machen, die vielleicht ebenso fatal sein können für das Verstehen in einem Fach, und die sich vielleicht negativ auf die Akzeptanz eines Fachs auswirken können. Ablehnung ist sicher bei der Chemie stärker der Fall als bei der Mathematik, die eher polarisiert. Aversionen gegen ein Fach, ob Chemie oder Mathematik, sind unseres Erachtens auch eine Folge der dort oft sehr eingleisig geführten Argumentationsmuster, die die Lehrerinnen und Lehrer als die einzig möglichen ansehen. Mit der Fallstudie wollten wir die grundsätzliche Struktur einer solchen Zugriffs-Diskrepanz aufklären.

Literatur

Bortoft, H. (1996): The Wholeness of Nature: Goethe's way towards a science of conscious participation in nature. Hudson N.Y.: Lindisfarne Press.

Buck, P. (1990): Präzise und exakte Begriffsbildung. In: chimica didactica, Jg. 16, S. 223–225.

Buck, P. (1996): Über physikalische und chemische Zugriffsmodi. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, Jg. 2, S. 25–38).

Buck, P. (1998): Materialistisch-mechanische Indoktrination bei Wagenschein? Einspruch gegen Wolfgangs Dahlmanns Abschnitt 4. Das Phänomen und die Teilchen bei Wagenschein. In: chimica didactica, Jg. 23, S. 151–160.

Ciompi, L. (1997): Die emotionalen Grundlagen des Denkens: Entwurf einer fraktalen Affektlogik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

Dahlmann, W. (1997): Wie die Fußspur eines Vogels auf dem Schnee – Zur vermeintlichen Phänomenologie der atomaren Welt bei Martin Wagenschein – Teil II: Das Phänomen der Brownschen Molekularbewegung. In: chimica didactica, Jg. 23, S. 116–153.

Fischbein, E. (1987): Intuition in Science and Mathematics. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Kleinert, E. (2002): Beiträge zur Philosophie der Mathematik. Leizig: Leipziger Universitätsverlag.

Kuhn, Th. S. (1976): Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag. 2., revidierte Aufl.

Lybeck, L., Marton, F., Strömdahl, H. & Tullberg A. (1988): The Phenomenography of the ‚Mole Concept‘ in Chemistry. In: Paul Ramsden [Hrsg]: Improving learning: new perspectives. London: Kogan Page, Seite 81–108.

Marton, F. (1981): Phenomenography – describing conceptions of the world around us. In: Instructional Science, Jg. 10, S. 177–200.

Marton, F. & Booth, S. (1997): Learning and Awareness. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Ass.

Muckenfuß, H. (1995): Lernen im sinnstiftenden Kontext. Entwurf einer zeitgemäßen Didaktik des Physikunterrichts. Berlin: Cornelsen Verlag.

Piaget, J. (1976): Piaget's theory. In: B. Inhelder & H. H. Chipman [Hrsg]: A Reader in Developmental Psychology. New York, Heidelberg, Berlin: Springer Verlag, S. 11–23.

Pfundt, H. (1996): Bibliography Students' Alternative Frameworks and Science Education – Bibliographie Alltagsvorstellungen und naturwissenschaftlicher Unterricht. Kiel: IPN, 4. Aufl.

Ramseger, J. (1991): Was heißt durch Unterricht erziehen? Weinheim: Beltz Verlag.

Rumpf, H. (2002): Einleitung zu M. Wagenschein: „… zäh am staunen …". Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000): How Students Mis-Understand Science and Mathematics. New York: Teachers College Press.

ten Voorde, H. (1977): Verwoorden en verstaan. s'Gravenhage: Staatsuitgeverij.

ten Voorde, H. (1983): Die Kluft des Nicht-verstehen-könnens: Ein Problem des Unterrichtens. chimica didactica, Jg. 9, S. 138–75.

ten Voorde, H. (1987): Die Kluft des Nicht-verstehen-könnens: Ein Problem des Unterrichtens. In: chimica didactica, Jg. 13, S. 117–148.

van Hiele-Geldof, D. (1957): De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O. Groningen: J. B. Wolters.

Wagenschein, M. (1970): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band I. Stuttgart: Klett Verlag, 2. Aufl.

Wagenschein, M., Buck, P. & Köhnlein, W. (1981): Ein Interview zu seinem Lebenswerk. In: chimica didactica, Jg. 7, S. 161–175.

Wagenschein, M. (1982): Verstehen lehren. 7. Aufl., Weinheim: Beltz Verlag.

Wagenschein, M. (1986): Die Sprache zwischen Natur und Naturwissenschaft. Marburg: Jonas Verlag.

Wagenschein, M. (2002): „… zäh am staunen …". Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Weil, S. (1953): Das Unglück und die Gottesliebe. München: Kösel Verlag.

Wittmann, E. C. (2001): Rettet die Phänomene! In: C. Selter & G. Walther [Hrsg]: Mathematiklernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller. Leipzig u.a.: Klett-Grundschulverlag, S. 222–241.

Wittmann E. C. & Müller, G. (1990): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. [Hrsg.]: Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, S. 237–257.

Anschrift der Verfasser
Prof. Dr. Peter Buck und Dr. Markus Rehm
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Keplerstraße 87, D-69120 Heidelberg
buck@ph-heidelberg.de, rehm@ph-heidelberg.de