

# Experimenteller Umgang mit Spiegelung und Perspektive unter Verwendung von Dynamischer Geometriesoftware

von

Engelbert Niehaus, Münster

**Zusammenfassung:** Der Artikel zeigt Möglichkeiten auf, um reale Operationen vor einem Spiegel mit perspektivischen Darstellungen in Dynamischer Geometriesoftware (DGS) zu verbinden. In einem neurophysiologischen Verständnis des Raumvorstellungsvermögens ist der direkte Bezug von realen Objekten vor dem Spiegel und geometrischen Konstruktionen im DGS von besonderer Bedeutung für die assoziative Verknüpfung der beiden geometrischen Darstellungsebenen des dreidimensionalen Raumes und der perspektivischen Zeichnung.

**Abstract:** This paper shows an approach to combine real operations in front of a mirror with perspective drawings in Dynamic Geometry Software. In a neurophysiological view on the spatial sense the relationship between real-life objects in front of a mirror and geometrical constructions in the software are of fundamental importance for the association of geometrical representations of 3D-space and perspective drawings.

## 1 Einleitung

Bei der Auseinandersetzung mit Perspektive geht es um die Darstellung dreidimensionaler räumlicher Zusammenhänge in einer zweidimensionalen Zeichenebene. Betrachtet man die Zeichnung auf Papier, so ist das Abbild des dreidimensionalen Originals auf der Zeichenebene statisch. Verwendet man Dynamische Geometriesoftware (DGS), so eröffnet diese die Möglichkeit, Objekte in Analogie zum dreidimensionalen Raum zu bewegen und die Veränderung der geometrischen Zusammenhänge in der Zeichenebene zu beobachten. Lowrie (2003) beschäftigt sich mit der computerbasierten 2D-Präsentation und Manipulation von dreidimensional dargestellten Objekten. Er verwendet offene Aufgaben, in denen die Schüler u.a. grundlegende Beziehungen zwischen 2D- und 3D-Repräsentationen von Objekten herstellen.

Übertragen auf den Kontext der perspektivischen Konstruktion wird in diesem Artikel der Spiegel als 2D-Projektionsfläche des 3D-Raumes verwendet. Im Gegensatz zu Lowrie (2003), der das Entwickeln von Fragestellungen durch die Schüler in den Mittelpunkt stellt, geht es hier um die Anwendung eines neurophysiologischen Verständnisses von Lernprozessen auf 2D-3D-Bezüge. Aus neurophysiolo-

gischer Sicht ist nämlich das Bewegen von *Objekten vor dem Spiegel* in unmittelbarer *Verbindung* mit der Manipulation von *Objekten innerhalb der DGS* von besonderer Bedeutung. Ludwig (2001) zeigt am Beispiel der Raumgeometrie, wie die konkrete Herstellung der Körperformen mit perspektivischen Repräsentationen der Körperformen am Computer verbunden werden kann.

Der Aufbau dieses Artikels ist kursartig, indem schrittweise das Operieren vor dem Spiegel zusammen mit der perspektivischen Konstruktion von Halbgeraden (Abschnitt 5.1), Punkten (Abschnitt 5.2), senkrecht stehenden Strecken (Abschnitt 5.3) und einfachen Polyedern (Abschnitt 5.4) behandelt wird. Ziel dieses Artikels ist dabei nicht der Einsatz von DGS zur Visualisierung mathematischer Inhalte aus der Linearen Algebra oder das Erlernen von „DGS-Konstruktionsalgorithmen“, sondern die Herstellung von Bezügen zwischen den Konstruktionen mit DGS und den beobachtbaren Phänomenen mit einem Spiegel. Weiter führende Informationen speziell zu DGS im Zusammenhang mit perspektivischem Zeichnen und Raumgeometrie finden sich bei Sanders (1994) und Schumann (2001). Elschenbroich und Meiners (1994) beschreiben die Verbindung von Computergrafik und Darstellender Geometrie im Unterricht der Linearen Algebra<sup>1</sup>.

## 2 Neurophysiologische Aspekte der Beziehung zwischen 2D und 3D

Konstruktive Aspekte des perspektivischen Zeichnens (DGS) im zweidimensionalen Raum sollen durch den Lernprozess mit dreidimensionalen Seherfahrungen vor dem Spiegel verbunden werden. *Assoziationsfähigkeit* und die *Kontextabhängigkeit* sind fundamentale Kennzeichen eines neurophysiologischen Verständnisses von Lernprozessen. Assoziationsfähigkeit bedeutet in diesem Kontext:

- 2D → 3D: Anreichern einer 2D-Konstruktion mit räumlichen Interpretationen,
- 3D → 2D: Verbindung von 3D-Seherfahrungen mit konstruktiven Aspekten in der Ebene (bzw. DGS).

Dieser Zusammenhang für das „Begreifen“ und „Bewegen“ von Objekten bezieht sich dabei auf neurophysiologische Aspekte des Lernens mit mehreren Sinnen und der Kontextergänzung bei Lernprozessen (siehe Niehaus 2003 zur Kopfgeometrie). Deetjen und Speckmann (1999) beschreiben an medizinischen neurophysiologischen Beispielen, wie z.B. die Fähigkeit zur Klassifizierung und Individualerkennung<sup>2</sup> auf verschiedene Hirnareale verteilt ist und synchronisiert verarbeitet wird. Trotz der *individuellen* Erscheinung der 2D- bzw. 3D-Repräsentation gehören die Darstellungen zu einer gemeinsamen *Klasse* einer räumlichen Anordnung.

---

<sup>1</sup> Projektionen können als lineare Abbildungen durch Matrizen dargestellt werden.

<sup>2</sup> Individualerkennung meint im Gegensatz zur Klassifizierung das Erkennen des Besonderen bzw. des Individuellen eines wahrgenommenen Objektes.

Das reine Erlernen von DGS-Konstruktionsalgorithmen stellt nicht notwendig auch eine differenzierte Verknüpfung mit räumlichen Interpretationen der konstruierten Objekte her. Diese neurophysiologisch differenzierbaren Wahrnehmungsaspekte bestimmen aber das Gesamtbild eines wahrgenommenen Objektes (Zerlegung und kontextabhängige Verarbeitung submodaler Informationen; siehe Deetjen und Speckmann 1999, 250 ff.). Der vergleichende Umgang mit DGS und Spiegel zielt auf diese neurophysiologische Verbindung unterschiedlicher submodaler Informationen und die Kontextergänzung von 3D-Aspekten in 2D-Darstellungen. Daher geht es im Folgenden um die direkte Gegenüberstellung von realen 3D-Erfahrungen vor dem Spiegel und den analog modellierten Projektionen mit DGS.

### 3 Ausgangssituation unter Verwendung eines Spiegels

Im Folgenden wird die Ausgangssituation für die spätere perspektivische Konstruktion mit DGS beschrieben. Eine Wand wird vollständig mit einem Spiegel verkleidet. Diese Spiegelwand wird *Bildebene* genannt. Vor dem Spiegel befindet sich senkrecht zur Wand die *Standebene*. Bildebene und Standebene zerlegen den dreidimensionalen Raum in vier Teilräume. In Abbildung 1 wurde eine Schachtel in den oberen Teilraum vor dem Spiegel platziert. Geometrische Objekte werden in



Abbildung 1: Seitenansicht der Ausgangssituation

diesem Teilraum bewegt und das zugehörige Bild kann auf der Spiegelwand beobachtet werden.

Neben den geometrischen Aspekten der Spiegelung bestehen bei diesem Thema fächerübergreifende Bezüge zur Physik der Mittelstufe. In der Optik wird u.a. die Reflexion am ebenen Spiegel mit den zugehörigen Reflexionsgesetzen behandelt (siehe Dorn und Bader 1985, 192 ff.).

### 3.1 Bewegungen von Objekten und Betrachter vor dem Spiegel

Räumliches Vorstellungsvermögen ist neurophysiologisch eng mit der Motorik verbunden. Wenn man sich den Innenraum einer Kathedrale erschließt, so kann dies z.B. erfolgen, indem man den Raum abschreitet oder den Kopf bewegt und dabei ein Gefühl für Breite, Höhe und Winkel erhält. Dieser motorische Aspekt gehört neurophysiologisch zur Raumvorstellung. Für unsere Grundkonstruktion heißt das:

- Objekte werden vor dem Spiegel bewegt oder
- der Betrachter verändert seinen Standort (Augenpunkt).

Um die Konstruktion möglichst einfach zu halten, wird ein senkrecht zur Standebene (und damit parallel zum Spiegel) stehender Stab betrachtet. Die folgenden Abbildungen zeigen die konstruktiven Aspekte mit DGS.

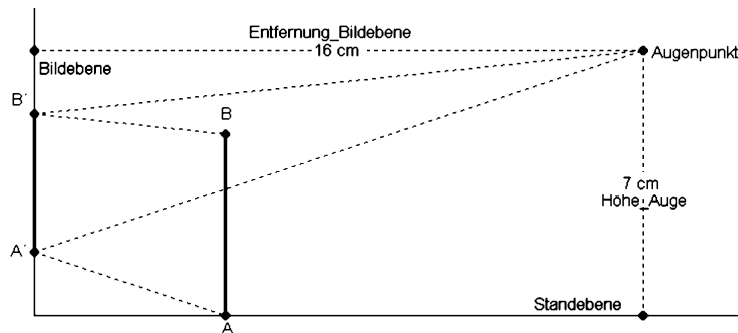


Abbildung 2: Seitenansicht der Ausgangssituation

Der Betrachter steht ebenfalls senkrecht zur Standebene und beobachtet das Spiegelbild z.B. aus einer Entfernung von 16 cm und einer Höhe von 7 cm. Diese Abstände legen den sogenannten *Augenpunkt* bzw. das *Zentrum* fest. Der *Augenpunkt* ist der grundlegende Bezugspunkt für die perspektivische Zeichnung, da das Bild der geometrischen Objekte aus der Standebene unmittelbar von der Position des Betrachters abhängt. Die Abbildung 2 veranschaulicht diese Anordnung, bei der

eine orthogonal zur Standebene stehende Strecke aus einer Höhe von 7 cm und einer Entfernung von 16 cm betrachtet wird<sup>3</sup>.

Die Abbildung 2 ist mit DGS erstellt worden. A, B und der Augenpunkt sind bewegliche Punkte. Die Strecke zwischen A und B steht orthogonal zur Standebene. Alle anderen Punkte sind abhängig konstruierte Punkte. Aus dieser Konstruktion in Abbildung 2 sind durch Bewegung des Augenpunktes bzw. des Punktes A die Abbildungen 3, 4 und 5 entstanden.

Die Schüler erhalten die DGS-Konstruktion aus Abbildung 2 und einen Stab mit Standplatte für den Spiegel (siehe Abbildung 16). Bezogen auf die Ausgangsfragestellung eines neurophysiologischen Verständnisses von Lernprozessen geht es um die Verbindung von 2D- und 3D-Repräsentationen dieser perspektivischen Phänomene.

Der Zugmodus erlaubt die Bewegung des Augenpunktes und der Strecke zwischen den Punkten A und B. Selbst mit dieser elementaren Zeichnung können grundlegende Raumerfahrungen modelliert und 2D-3D-Analogien entdeckt werden.

### 3.2 Entdecken und Überprüfen von perspektivischen Zusammenhängen

Zunächst einmal ist es nahe liegend, dass das Bild der Strecke auf dem Spiegel kleiner wird, wenn man die Strecke von dem Spiegel weiter entfernt. Hier kann ein bekanntes Phänomen der perspektivischen Verkürzung am Computermodell in Zusammenhang mit dem Spiegel entdeckt werden (Abbildung 3).

Bewegt man aber den Augenpunkt (Zentrum) von der Spiegelwand weg, dann wird das Bild der Strecke auf dem Spiegel größer und *nicht kleiner* (Abbildung 4).

Dies kann dann in Partnerarbeit mit abwaschbaren Folienstiften auch am Spiegel direkt überprüft werden. Dabei entfernt sich der Betrachter vom Spiegel und der Partner markiert nach Vorgaben des Betrachters die Bildpunkte mit dem Folienstift auf dem Spiegel. Anschließend werden die Abstände der Bildpunkte auf dem Spiegel vermessen (mathematische Bezüge zur Berechnung der Abstände zwischen A' und B' mit Strahlensätzen).

---

<sup>3</sup> Die in diesem Artikel verwendeten Abbildungen sind mit EUKLID DynaGeo 2.4b (<http://www.dynageo.de>) erstellt und eingebunden worden. Ein Download der Konstruktionen ist unter <http://visum.uni-muenster.de/niehaus/dynageo> möglich.

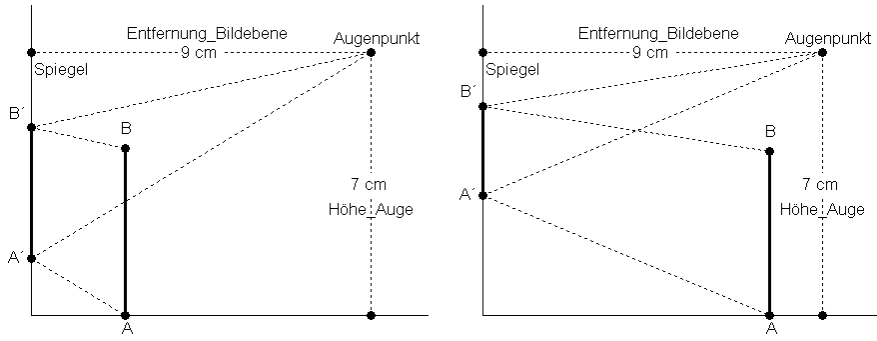


Abbildung 3: Bewegung der Strecke

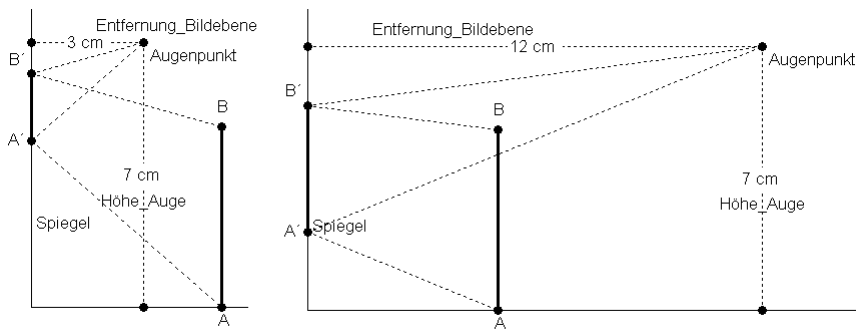


Abbildung 4: Bewegung des Augenpunktes

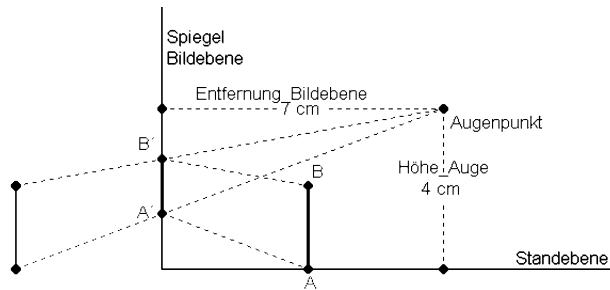


Abbildung 5: Konstruktion der Seitenansicht in DGS

### 3.3 DGS-Konstruktion der Seitenansicht

Bei der Konstruktion der Seitenansicht (Abbildung 5) werden die fächerübergreifenden Bezüge zwischen Geometrie und Physik besonders deutlich. In Ergänzung zu den Wechselwirkungen zwischen realen Objekten vor dem Spiegel und den zugehörigen 2D-Manipulationen im DGS werden nun Konstruktionsaspekte und der physikalische Kontext angesprochen.

Die geometrische Konstruktion der obigen Abbildung im DGS entspricht der Seitenansicht der eigentlichen Grundkonstruktion. Das *virtuelle Bild* auf der linken Seite der Spiegels wurde in Abbildung 2 als Hilfslinien verborgen<sup>4</sup>. Physikalische Grundannahme für die DGS-Konstruktionen ist die geradlinige Ausbreitung von Licht. Beugung von Lichtstrahlen (z.B. durch Gravitation von Sternen) wird im geometrischen Modell nicht berücksichtigt. Im Gehirn werden eintreffende Lichtstrahlen als geradlinig interpretiert. Eine Beugung oder Reflexion wird also bei der Wahrnehmung nicht berücksichtigt. Das Bild der Objekte wird geradlinig in einer Entfernung interpretiert, die der Bildunterschiede von rechtem und linkem Auge entsprechen. Diese sogenannte *Querdisparation* beim binokularen Sehen ist von dem Weg abhängig, den das Licht (inklusive Reflexion) vom Objekt bis zum Auge zurücklegt. Wenn also das virtuelle Bild ein realer Stab und der Spiegel eine Scheibe wäre, entstünde das Bild A' und B' auf der Scheibe durch direkte Verbindung des Augenpunktes mit den Enden des (virtuellen) Stabes. Aspekte der Spiegelung bieten sich bei der Behandlung der Seitenansicht an. Die in der Physik erarbeiteten Reflexionsgesetze für ebene Spiegel lauten:

- Einfallender Strahl, Einfallslot (das Lot zur Spiegelebene) und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.
- Einfallswinkel und Ausfallswinkel (Reflexionswinkel) sind gleich groß.<sup>5</sup>

Der geometrische Aspekt der Kongruenzabbildung in der Ebene bezieht sich auf die Konstruktion des virtuellen Bildes durch die Spiegelung von A und B an der Spiegelgeraden.

Der erste Schritt in Richtung der perspektivischen Darstellung aus der Seitenansicht zeigt exemplarisch, wie das Entdecken und der Transfer von Entdeckungen zwischen DGS und realen perspektivischen Erfahrungen in beide Richtungen (2D → 3D und 3D → 2D) umsetzbar sind.

---

<sup>4</sup> DGS besitzt i.d.R. die Möglichkeit, für die Konstruktion wesentliche Hilfslinie zu verbergen. Das Verbergen von Hilfslinien verbessert die Übersichtlichkeit der Konstruktionen.

<sup>5</sup> Als Einfallswinkel und Ausfallswinkel werden die Winkel zwischen den jeweiligen Strahlen und dem Einfallslot bezeichnet.

#### 4 Entwicklung der Grundkonstruktion aus der Seitenansicht

Bezogen auf die Ausgangssituation war es das Ziel, das perspektivische Bild von Objekten auf der Spiegeloberfläche zu konstruieren. Das ist mit der Seitenansicht nicht möglich, da das Bild auf dem Spiegel durch eine eindimensionale Projektionsgerade (und nicht Projektionsfläche) modelliert wird. Wie in Abbildung 1 und 2 zu sehen, ist nur die Länge der Strecke abbildbar. Im Folgenden wird aus der Seitenansicht die Grundkonstruktion entwickelt (Abbildung 9). Dabei wird ein Blatt Papier (DIN-A4) zur Veranschaulichung der Zusammenhänge verwendet.

Neurophysiologisch ist es wesentlich, einen unmittelbaren Handlungszusammenhang zwischen den beiden Darstellungsebenen DGS (2D) und Spiegel (3D) herzustellen. Das Blatt Papier dient als Mittler zwischen den Darstellungsebenen, wenn es in die Spiegelumgebung hineingelegt wird und einen unmittelbaren Bezug zu den Konstruktionselementen herstellt (Abbildung 6). Das Auge des Betrachters befindet sich an einem Punkt  $Z$  im Raum (Augenpunkt). Die beiden Faltkanten auf dem Papier sind die zentralen Konstruktionslinien, die *Horizont* und *Spurgerade* genannt werden. Der Abstand zwischen Augenpunkt und dem Bild des Horizonts auf dem Spiegel bestimmt die *Entfernung des Betrachters zur Bildebene* und der Abstand zwischen Horizont und Spurgerade definiert die *Augenhöhe* des Betrachters (siehe Abbildungen 6 und 9).



Abbildung 6: Faltposition des Papiers in Seitenansicht vor dem Spiegel



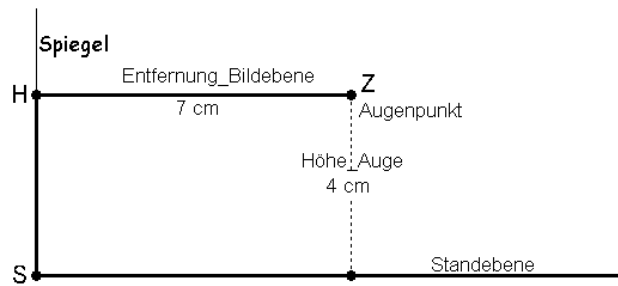


Abbildung 7: Seitenansicht auf die gefaltete Grundkonstruktion aus Papier



Abbildung 8: Grundkonstruktion durch Auffalten des Papiers

Durch zweimaliges Falten des Papiers für einen festen Augenpunkt Z entsteht die obige Faltkonstruktion. Der Augenpunkt Z wird mit einem Foliestift an Ober- und Unterseite des Papiers markiert<sup>6</sup>. Da es im Sinne des neurophysiologischen Ver-

<sup>6</sup> Beidseitige Markierung ist wichtig für die Sichtbarkeit von Z nach dem Aufklappen des Papiers (siehe Abbildung 8).

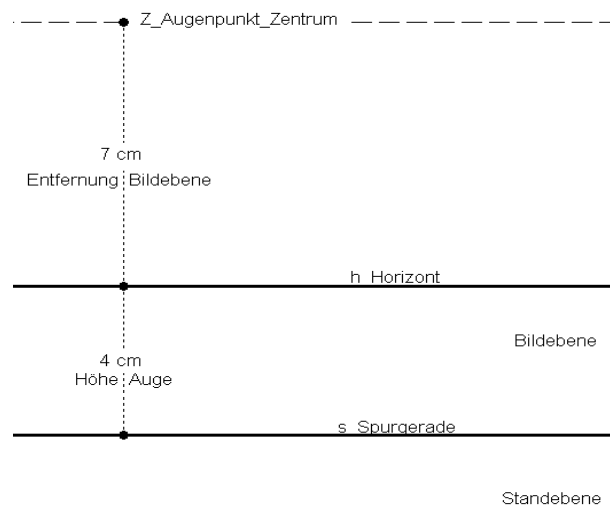


Abbildung 9: Grundkonstruktion mit Horizont  $h$  und Spurgerade  $s$

ständnisses von Lernprozessen um die Verknüpfung von realen und konstruktiven Repräsentationsebenen der Perspektive geht, wird die zweidimensionale Papierkonstruktion aus der dreidimensionalen Raumsituation vor dem Spiegel abgeleitet (Abbildungen 6, 8 und 9). In der Seitenansicht sind die Faltkanten nur als Punkte H (Horizont) und S (Spurgerade) zu sehen (Abbildung 7).

Der Horizont  $h$  befindet sich immer in Augenhöhe (Parallele zur Standebene). Hat man z.B. am Stadtrand einen freien Blick auf den Horizont und senkt die eigene Blickposition, so „senkt“ sich auch der Horizont relativ zu sichtbaren Objekten (Häuser, Bäume) aus der Umgebung. Ist der Horizont nicht sichtbar (wie fast überall in Deutschland), kann das Phänomen wie folgt beobachtet werden: Je weiter Objekte von dem Betrachter entfernt sind, desto langsamer bewegen sich die Objekte relativ zur sinkenden Blickposition des Betrachters aufwärts. Der Horizont mit einer unendlichen Entfernung zum Betrachter bewegt sich überhaupt nicht aufwärts und bleibt auf der Höhe des Betrachters. Im Horizont  $h$  befinden sich also alle unendlich fernen Punkte der Bildebene. In der Spurgerade  $s$  treffen Bildebene und Standebene zusammen.

Damit ergibt sich durch Auffalten des Papiers mit den Faltkanten  $s$  und  $h$  die Grundkonstruktion als Ausgangspunkt für das perspektivische Zeichnen (Abbildung 8). Diese gefaltete Grundkonstruktion wird nun in die DGS übertragen. Die Faltkanten (Spurgerade  $s$  und Horizont  $h$  in Abbildung 9) werden als bewegliche parallele Geraden konstruiert. Der Augenzentrumspunkt ist ebenfalls beweglich. Falls die

DGS ein Koordinatensystem besitzt, werden die Spurgerade  $s$  und der Horizont  $h$  als Parallelen zur  $x$ -Achse gezeichnet. In dieser Grundkonstruktion werden geometrische Objekte frei beweglich in der Standebene konstruiert. Das perspektivische Bild des Objektes wird dann abhängig in der Bildebene konstruiert.

In dem folgenden Abschnitt wird nun die dreidimensionale Abbildung auf der Spiegelwand schrittweise für diese Grundkonstruktion entwickelt.

## 5 Elementare geometrische 3D-Konstruktion

Die elementaren geometrischen 3D-Konstruktionen sind

- die Halbgerade ( $Z$ -Konstruktion),
- der Punkt ( $X$ -Konstruktion) und
- die orthogonal zur Standebene stehende Strecke ( $I$ -Konstruktion).

Mit diesen drei elementaren Konstruktionselementen kann für einen beliebigen Punkt im dreidimensionalen Raum über der Standebene (als Spitze der orthogonal zur Standebene stehenden Strecke) der zugehörige Bildpunkt konstruiert werden.

### 5.1 Halbgerade ( $Z$ -Konstruktion)

Abbildung 10 zeigt das Bild einer Halbgeraden in der Standebene im Spiegel. Markiert man den Stab in gleichen Abständen und die Bildpunkte auf dem Spiegel, dann kann entdeckt werden, dass diese Abbildung nicht längentreu ist (perspektivische Verkürzung).

Die Spiegelwand zerlegt die Standebene in zwei Halbebenen. Daher wird bei der Spiegelung einer Geraden nur eine Halbgerade auf der Bildebene dargestellt, wenn die Gerade nicht parallel zur Bildebene (Spiegelwand) verläuft. Es folgen die Konstruktionsschritte für eine Halbgerade  $g$ , die nicht parallel zur Bildebene (Spiegelwand) verläuft und die Spurgerade  $s$  in dem Spurpunkt  $S_1$  schneidet:

- Zunächst wird eine Parallele  $z_1$  zu  $g$  durch das Zentrum  $Z$  (Augenpunkt) gezeichnet.  $z_1$  schneidet den Horizont  $h$  in dem Fluchtpunkt  $F_1$ .
- Die Strecke zwischen den Punkten  $F_1$  und  $S_1$  entspricht dem Bild der Halbgeraden  $g$  auf der Spiegelwand.

Man erhält die Bildhalbgerade durch eine  $Z$ -förmige Konstruktion (Abbildung 11), die sich aus der Optik begründen lässt:

- das Bild einer geraden Linie (Halbgerade) ist wieder eine gerade Linie (Strecke),
- eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig definiert,

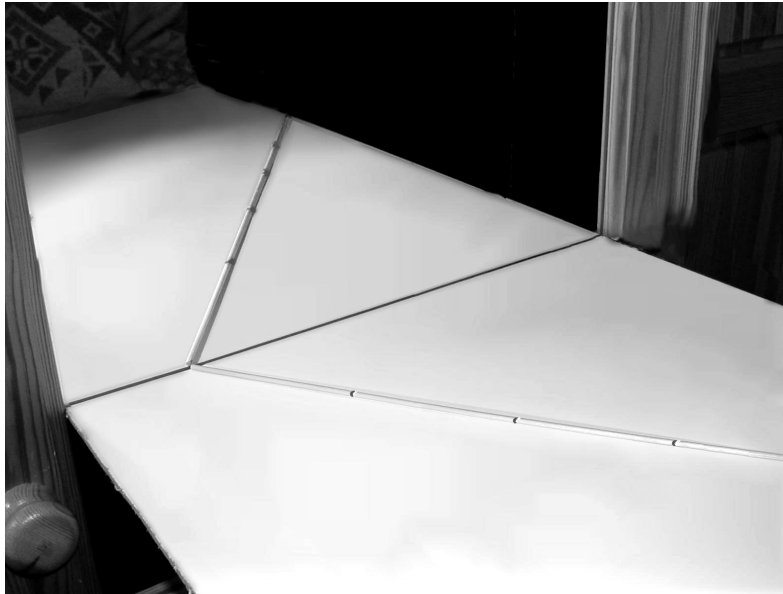


Abbildung 10: Halbgerade vor dem Spiegel

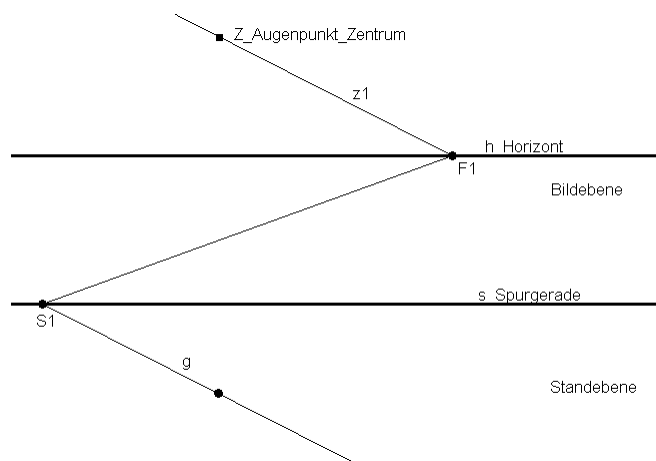


Abbildung 11: Z-Konstruktion der Halbgeraden g

- die Spurgerade besteht aus Fixpunkten der Abbildung, d.h. der Spurpunkt  $S_1$  von  $g$  ist ein Punkt der Bildes der Halbgeraden. Nun benötigt man noch einen zweiten Punkt (Fluchtpunkt) auf dem Horizont  $h$ , um das Bild zu zeichnen.
- Wenn man einen Punkt  $A$  aus dem virtuellen Bild der Halbgeraden  $g$  mit dem Augenpunkt verbindet (siehe Abbildungen 5 und 12), entsteht als Schnittpunkt mit der Bildebene der Bildpunkt  $A'$ . In Abbildung 12 wurden vier Bildpunkte exemplarisch eingezeichnet. Für einen unendlich fernen Punkt auf der virtuellen Halbgeraden müsste die Verbindungslinie zwischen Augenpunkt und dem unendlich fernen virtuellen Bildpunkt parallel zur virtuellen Halbgeraden verlaufen.

In Abbildung 12 sieht man perspektivisch das virtuelle Bild der Halbgeraden und die Bildgerade auf der Bildebene vom Augenpunkt  $Z$  betrachtet. Für den unendlich fernen Punkt ist die Verbindungslinie zwischen Augenpunkt  $Z$  und Fluchtpunkt  $F_1$  parallel zum virtuellen Bild. Durch das Aufklappen des Papiers entsteht eine Parallele zur Halbgeraden  $g$  in der Standebene. Den Fluchtpunkt  $F_1$  erhält man also in Abbildung 11 durch eine Parallele zu  $g$  durch  $Z$ . Die Position des gefalteten Papiers ist in Abbildung 12 ebenfalls eingezeichnet.

In der zugehörigen Konstruktion mit DGS wird also  $z_1$  zu  $g$  abhängig als Parallele konstruiert (Abbildung 11). Bei Bewegungen von  $g$  kann man die Veränderung des Bildes (Strecke zwischen  $F_1$  und  $S_1$ ) unmittelbar beobachten. Diese Bewegungen können in einer DGS-Konstruktion und direkt vor dem Spiegel mit einem Stab  $g$  durchgeführt werden. Auch in diesem Fall geht es neurophysiologisch um korrespondierende 3D-Erfahrungen zur Konstruktion. Wenn man zusätzlich in Augenhöhe den Horizont  $h$  auf dem Spiegel einzeichnet (wasserlöslicher Folienstift), kann man den Fluchtpunkt der unvollständigen Halbgeraden *extrapolieren*.

Wir betrachten nun parallele Halbgeraden in der DGS-Konstruktion (Abbildung 13). Parallele Halbgeraden, die *nicht* parallel zum Horizont  $h$  liegen, besitzen bei der Konstruktion in Abbildung 8 den gleichen Fluchtpunkt  $F_1$  (siehe Begründung aus der Optik). Daher ist es für Parallelen von  $g$  lediglich notwendig, die Spurpunkte  $S_2$  und  $S_3$  mit dem zugehörigen Fluchtpunkt  $F_1$  zu verbinden. Würde man die  $Z$ -Konstruktion für jede Parallele vollständig durchführen, erhält man durch die Parallelität zu  $g$  den gleichen Fluchtpunkt  $F_1$ .

Für eine Überprüfung mit dem Spiegel bietet sich z.B. ein langer Gang mit quadratischen Fliesen an. Aber auch zwei parallele Stäbe können die perspektivische Verkürzung veranschaulichen (Abbildung 14). Auch für diese Anordnung vor dem Spiegel lässt sich der Fluchtpunkt über die Augenhöhe und die unvollständigen Halbgeraden *extrapolieren*. Je weiter ein Punkt auf einer Halbgeraden von dem Spiegel entfernt ist, desto kleiner wirkt der Abstand zur anderen Bildhalbgeraden auf dem Spiegel (perspektivische Verkürzung, Optik, siehe auch Abschnitt 3.2).

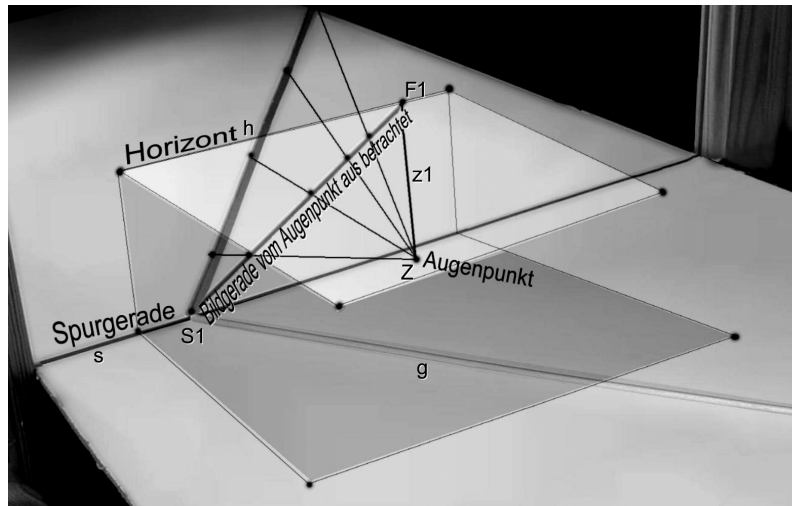


Abbildung 12: Konstruktion der Bildpunkte

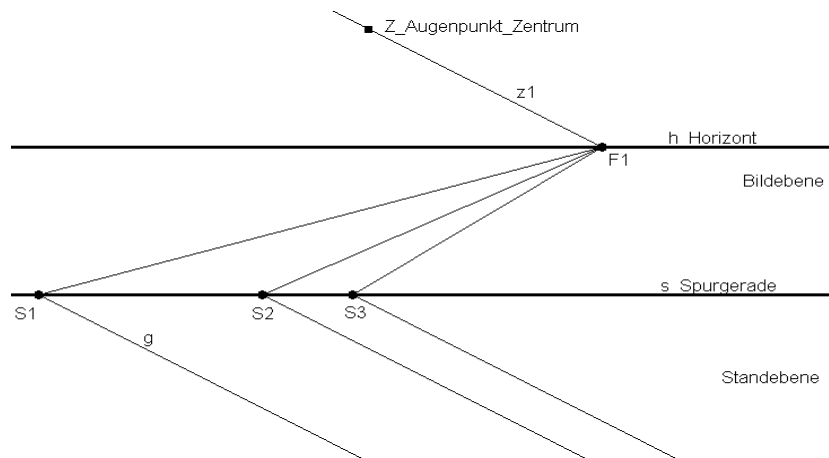


Abbildung 13: Parallele Geraden und gemeinsamer Fluchtpunkt

Halbgeraden sind im Wesentlichen Hilfslinien für komplexere Konstruktionen. Sie sind notwendig, um dynamische Abhängigkeiten zwischen den Originalobjekten in der Standebene und den Bildobjekten herzustellen. In der Regel bietet DGS die Möglichkeit, Hilfslinien zu verbergen.

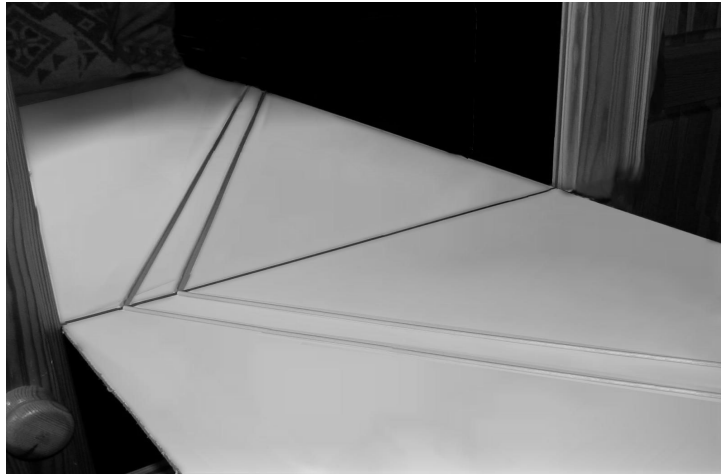


Abbildung 14: Bild paralleler (Halb-)Geraden vor dem Spiegel

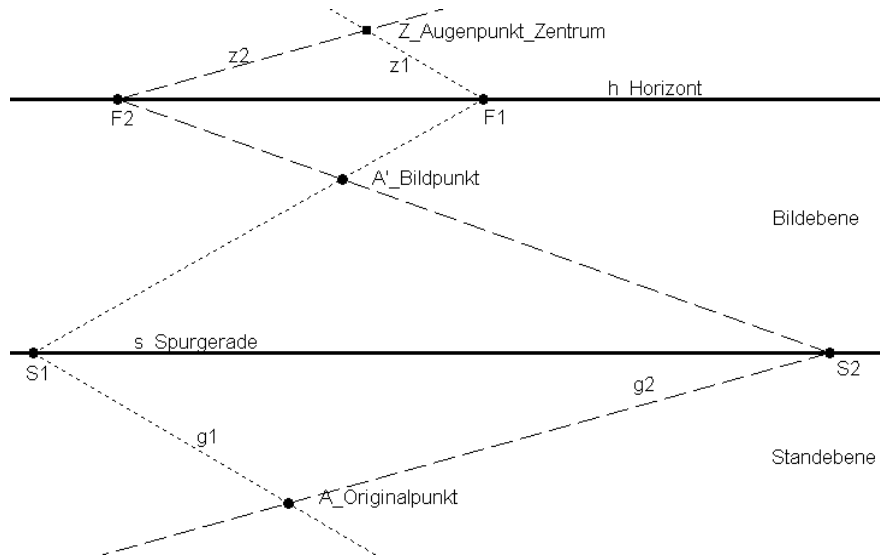
Der Aufgabenbereich umfasst die Konstruktion der Bilder von Quadraten, Rechtecken und Parallelogrammen aus der Standebene in der Bildebene. Dazu sind lediglich Parallelenkonstruktionen notwendig. Rekonstruktionsaufgaben, bei denen aus dem Bild eines Rechtecks das Originalrechteck rekonstruiert werden muss, sind in diesem Zusammenhang ebenfalls als anspruchsvollere Aufgabenstellung möglich.

## 5.2 Punkt (X-Konstruktion)

A sei ein beliebiger Punkt der Standebene. Gesucht ist der zugehörige Bildpunkt  $A'$  in der Bildebene. Ein Punkt ist eindeutig durch den Schnittpunkt von zwei Geraden (hier Halbgeraden) definiert. Es entsteht eine X-förmige Figur. Unter Verwendung von zwei Z-Konstruktionen für die jeweiligen Halbgeraden wird nun der Bildpunkt ermittelt (Abbildung 15).

Die Halbgeraden  $g_1$  und  $g_2$  erhält man durch Einzeichnen von zwei verschiedenen Spurpunkten  $S_1$  und  $S_2$  auf der Spurgeraden  $s$ .  $S_1$  und  $S_2$  werden mit  $A$  durch Halbgeraden verbunden. Für die Halbgeraden  $g_1$  und  $g_2$  wird jeweils eine Z-Konstruktion durchgeführt. Der Schnittpunkt der Bildhalbgeraden (Strecken) liefert den Bildpunkt  $A'$ .

Zum Aufgabenbereich gehört, Bilder von beliebigen Polygonen und Strecken aus der Standebene in der Bildebene zu erstellen. Die Strecken aus der Standebene können mit der X-Konstruktion nun auch parallel zum Horizont  $h$  liegen.

Abbildung 15: Bildpunkt  $A'$  durch X-Konstruktion bestimmen

Wird nun der Originalpunkt  $A$  in der Standebene bewegt, kann wieder die Veränderung des Bildpunktes  $A'$  beobachtet und mit einem Spiegel überprüft werden.

### 5.3 Orthogonal zur Standebene stehende Strecke (I-Konstruktion)

Mit der Z- bzw. X-Konstruktion ist es lediglich möglich, Bildpunkte (bzw. Bildpolygone) von beliebigen Punkten (bzw. Polygonen) aus der Standebene zu erzeugen. Die dritte Dimension der *Höhe* fehlt. Eine orthogonal zur Standebene stehende Strecke berührt die Standebene in einem Punkt  $A$ . Ziel ist es, das Bild dieser Strecke in der Bildebene (Spiegelwand) zu ermitteln (Abbildung 16).

Bezogen auf die Ausgangssituation mit dem Spiegel ergeben sich folgende Vorüberlegungen. Verschiebt man den Stab direkt bis zur Spiegelwand, so hat das Bild die gleiche Länge wie die Originalstrecke. Bewegt man die Strecke von der Spiegelfläche weg, verkürzt sich die Länge des Bildes der Strecke (*perspektivische Verkürzung*). Daraus kann man ableiten, dass man die Originallänge in der DGS-Konstruktion nur auf der Höhe der Spurgeraden (Berührgerade zwischen Standebene und Spiegelfläche) abtragen kann. Verschiebt man nun die Standebene auf die Höhe des oberen Endpunktes  $B$  der Strecke, so kann man analog auf dieser Höhe wieder eine X-Konstruktion durchführen und den Bildpunkt  $B'$  erzeugen. Dabei kann man ausnutzen, dass parallele Halbgeraden den gleichen Fluchtpunkt besitzen, wenn sie nicht parallel zum Horizont verlaufen.



Analog zur X-Konstruktion für einen Punkt, die sich aus zwei Z-Konstruktionen für Halbgeraden zusammensetzt, sind hier für eine I-Konstruktion zwei X-Konstruktionen für die Endpunkte A und B der Strecke verwendet worden (Abbildung 17). Die Konstruktion verläuft wie folgt:

- Für Punkt A wird eine X-Konstruktion durchgeführt.
- Auf den Spurpunkten  $S_1$  und  $S_2$  wird die Originallänge der Strecke durch Parallelen zu  $g_1$  und  $g_2$  abgetragen (die Parallelen zu  $g_1$  und  $g_2$  sind dargestellt, um deutlich zu machen, dass parallele Geraden einen gemeinsamen Fluchtpunkt bei der X-Konstruktion besitzen).
- Die Verbindungsstrecke der beiden Bildpunkte A' und B' ist das Bild der Strecke zwischen A und B.

Das Bild einer Strecke ist in der Regel nicht parallel zur Originalstrecke. Hält man aber eine Strecke parallel zur Spiegelebene, so erkennt man, dass das Bild der Strecke ebenfalls parallel zur Originalstrecke ist. Auch dieses Phänomen kann vergleichend mit DGS und Spiegel überprüfen oder entdeckt werden.

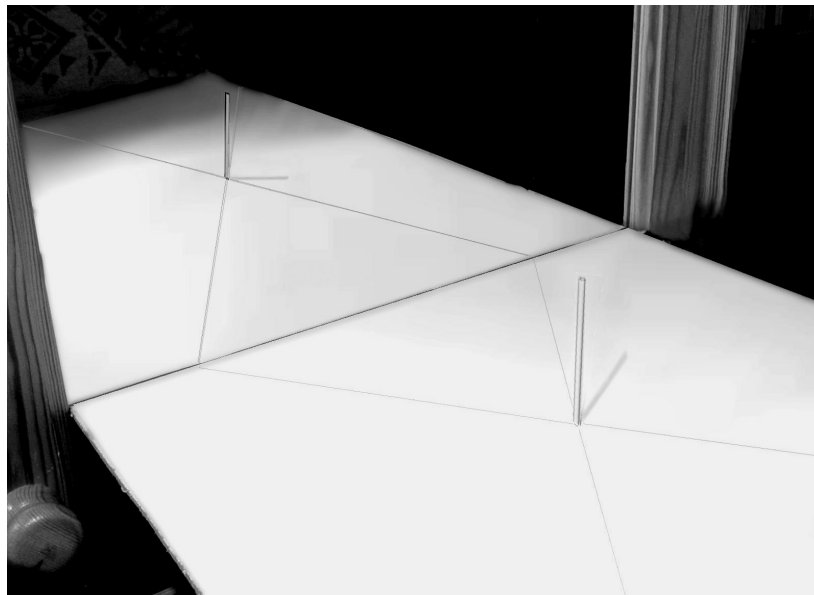


Abbildung 16: Orthogonal stehender Stab vor dem Spiegel

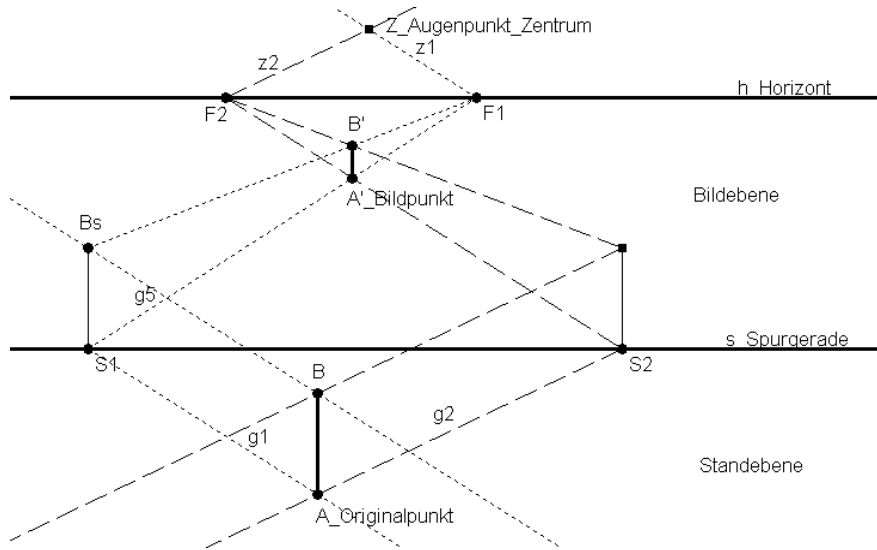


Abbildung 17: I-Konstruktion für eine Strecke zwischen A und B

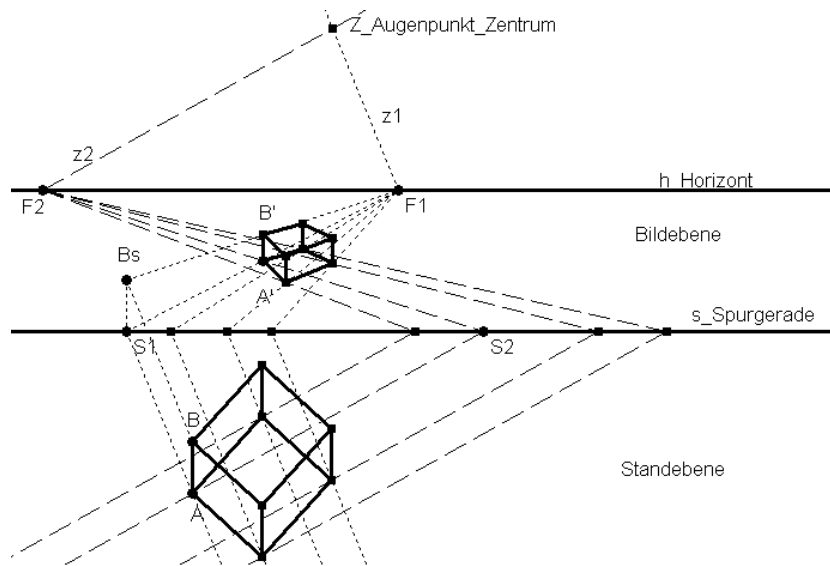


Abbildung 18: Bild eines Quaders

## 5.4 Polyeder

Mit der I-Konstruktion stehen nun alle Hilfsmittel zur Verfügung, um eine perspektivische Darstellung von Polyedern in der Bildebene zu erzeugen. Die perspektivische Darstellung eines Quaders ist in Abbildung 18 nur mit einem Teil der Hilfslinien abgebildet. Auf dem Weg zur fertigen Darstellung ist es aber für die Übersichtlichkeit wesentlich, dass Hilfslinien nach der Konstruktion des Bildpunktes verborgen werden, falls sie nicht mehr benötigt werden.

## 6 Zusammenfassung und Fazit

Die geschilderte Einführung in die perspektivische Darstellung über DGS zeigt exemplarisch, wie geometrische Erfahrungen mit einem Spiegel am Computer dynamisch modelliert und umgekehrt mit der DGS entdeckte Phänomene am Spiegel überprüfbar werden können. Die DGS dient dabei als *Brücke* zwischen *3D-Darstellungen auf Papier* und den *dreidimensionalen Objekten* vor einem Spiegel. Sie bietet also einerseits die Zweidimensionalität des Papiers und andererseits die Möglichkeit, Objekte zu bewegen (in Analogie zu den Bewegungen vor dem Spiegel) und die Konsequenzen zu beobachten (Zugmodus). Aus neurophysiologischer Sicht ist das Raumvorstellungsvermögen eng mit motorischen Operationen im dreidimensionalen Raum verbunden. Vor diesem Hintergrund ist es wesentlich, die 3D-Modellierung in DGS eng mit dem Spiegel als Überprüfungsinstrument zu verbinden und 2D-Grafik im dreidimensionalen Raum greifbar bzw. manipulierbar zu machen. Das gefaltete Papier (Abbildung 6) schafft durch die Operation des Auffaltens eine Verbindung zwischen 3D- und 2D-Repräsentation. Diese 2D-3D-Verknüpfung zielt aus neurophysiologischer Sicht darauf, wechselseitig 2D-Konstruktionen mit 3D-Kontext anzureichern und umgekehrt 3D-Erfahrungen mit 2D-Konstruktionen zu verknüpfen. Da unser Gehirn permanent Wahrnehmungsinformationen mit Kontextinformationen anreichert, ist es wesentlich, die Lernprozesse in Hinblick auf diese Anreicherung mit Kontextinformationen zu strukturieren. Aus mathematikdidaktischer Sicht kann man sich bei der Förderung des Raumvorstellungsvermögens nicht auf Konstruktionsalgorithmen mit DGS beschränken, sondern die wechselseitige Anreicherung mit 2D- bzw. 3D-Kontext sollte während des Lernprozesses durchgängig durch Handlungsbezüge ermöglicht werden.

### Literatur und Links

- Deetjen, P. und Speckmann E.-J. (1999), Physiologie, 3. Auflage, Urban und Fischer, München.
- Dorn, F. und Bader, F. (1985), Physik, Mittelstufe, Schroedel, Hannover.
- Elschenbroich, H.-J. und Meiners, J.C. (1994), Computergraphik und Darstellende Geometrie im Unterricht der Linearen Algebra, Dümmler, Bonn.

- Lowrie, T. (2003), Posing Problems in ICT-Based Contexts, MERGA 26, 2003, Conference Proceedings, Deakin, Geelong.
- Ludwig, M. (2001), Raumgeometrie mit Kopf, Herz, Hand und Maus, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, Franzbecker, Hildesheim.
- Mechling, R. (2003), Dynamische Geometriesoftware EUKLID DynaGeo, Download der Shareware unter <http://www.dynageo.de>
- Niehaus, E. (2003), Sehen geometrischer Formen und Kopfgeometrie, erscheint in: Sache – Wort – Zahl, Aulis Verlag Deubner (im Druck), Köln.
- Niehaus, E. (2003), EUKLID-DynaGeo-Konstruktionen dieses Artikels, Download unter <http://visum.uni-muenster.de/niehaus/dynageo>
- Sanders, C. (1994), Perspective Drawing using the Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, Emeryville/California.
- Schumann, H. (2001), Raumgeometrie, Unterricht mit Computerwerkzeugen, Cornelsen, Berlin.

**Anschrift des Verfassers**

Engelbert Niehaus  
Westfälische Wilhelms-Universität  
Einsteinstr. 62  
D-48149 Münster  
[niehaus@math.uni-muenster.de](mailto:niehaus@math.uni-muenster.de)